Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
XXV Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 3

Nome: ..... Data de Nascimento: .....
Endereço: .....
Cidade: ..... Telefone para contato: .....
Escola: ..... Turma: .....
Professor(a) de Matemática: .....

Caro(a) estudante,

A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG) é um projeto de extensão do Instituto de Matemática e Estatística da UFG iniciado em 1992.

Nossa olimpíada procura propor problemas intrigantes e desafiadores, tendo em conta que a habilidade para resolver desafios utilizando o raciocínio dedutivo requer treinamento e prática. Um bom treinamento matemático é um ingrediente muito valioso para o sucesso em qualquer carreira que se escolha e pode levar a contribuições significativas para a sociedade. E o objetivo da OMEG é justamente estimular esse tipo de desenvolvimento.

Por isso agradecemos sua participação e contamos com a sua ajuda em contagiar outros com o entusiasmo pela matemática.

Você poderá encontrar os problemas desta prova, além de outros também interessantes, na página da OMEG na internet (omeg.mat.ufg.br). Para obter um certificado de participação na OMEG, procure seu professor ou professora de matemática.

Esperamos que você se divirta.

A Comissão Organizadora.

29/10/2016

Instruções

i) Esta prova deve ser iniciada às 13:30h após autorização do fiscal, tendo duração de 4 horas.

ii) Só será permitida a saída da sala após as 14:30h.

iii) Se você quiser fazer comentários sobre a sua participação nesta olimpíada e apresentar sugestões para a próxima OMEG, use o verso desta folha.

iv) A prova pode ser feita a lápis e/ou caneta. Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer outro aparelho.

v) Esta prova deve conter 6 questões, uma em cada página. Por gentileza confira.

vi) Em todas as questões, as respostas precisam ser justificadas por um argumento matemático. As respostas, mesmo se estiverem certas, não terão valor se não pudermos saber como você chegou ao resultado.

Espaço reservado para a Comissão Organizadora. Não escreva no quadro abaixo e nem nos quadros em que aparece a palavra "Nota:" ao lado de cada questão.

Questão	1	2	3	4	5	6	Nota
Correção A							
Correção B							

Problema 1: No primeiro turno de uma eleição, os candidatos **A** e **B** foram o primeiro e o segundo mais votados, respectivamente. Consequentemente, apenas estes dois concorreram no segundo turno e o candidato **B** ganhou. O mais curioso é que, entre esse candidato **B** e um terceiro candidato, **C**, que perdeu para **A** e **B** no primeiro turno, a maioria dos eleitores preferia **C**. Ou seja, o resultado dessas eleições desagradou a maioria dos eleitores. Considere que as preferências dos eleitores não mudaram de um turno para o outro, que todos votaram nos dois turnos e sempre no candidato de sua preferência, dentre os disponíveis.

Para que esta situação tenha ocorrido, qual é o número mínimo de eleitores nesta eleição?

Justifique sua resposta

Nota:

Problema 2: Levando-se em conta as inclusões dos conjuntos numéricos usuais, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente), determine qual é o conjunto mais interior a que pertence o número

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$$

Nota:

Justifique sua resposta

Problema 3: O triângulo de números a seguir é formado pela sequência dos números naturais ímpares, em ordem crescente, de maneira que o primeiro, 1, fica na primeira linha, os dois seguintes, 3 e 5, na segunda linha, os três subsequentes, 7, 9 e 11, na terceira linha e assim, sucessivamente, com n números na n-ésima linha.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 3 & 5 \\
 & & & 7 & 9 & 11 \\
 & & 13 & 15 & 17 & 19 \\
 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\
31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

(a) Calcule a soma dos elementos da vigésima linha.

(b) Obtenha a soma total dos elementos das primeiras vinte linhas do triângulo.

(c) Mostre como o cubo de qualquer número natural, n^3, pode ser escrito como a diferença dos quadrados de dois números naturais.

Justifique sua resposta

(a)

(b)

(c)

Nota:

Problema 4: Um cone circular é dito equilátero se sua interseção com qualquer plano que contenha seu eixo for um triângulo equilátero. Considere, então, um cone equilátero com 3 esferas em seu interior de tal modo que cada uma delas é tangente à superfíce lateral do cone ao longo de um círculo, a maior é tangente à base do cone, e a esfera do meio tangente às outras duas. Se o raio da menor das esferas mede 1 m, qual é o volume da parte interior do cone que fica fora das esferas?

Nota:

Justifique sua resposta

Problema 5: Considere duas urnas, a primeira contendo seis bolas verdes e uma vermelha e a segunda contendo quatro bolas verdes. Cinco bolas são retiradas, ao acaso, da primeira urna, e colocadas na segunda. Depois de misturadas, duas bolas são sorteadas da segunda urna e colocadas na primeira.

Calcule a probabilidade da bola vermelha estar na primeira urna após essas operações.

Nota:

Justifique sua resposta

Problema 6:

(a) Mostre que para quaisquer números reais com módulos diferentes, x e y, o triângulo cujos lados medem

$$\frac{|x-y|}{2}, \quad \frac{|x+y|}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

é retângulo.

(b) Para três números reais positivos, a, b e c, tais que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 1008\sqrt{2}$, determine o menor valor possível de

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\,.$$

Justifique sua resposta

(a)

(b)

Nota: