Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística

XXVI Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 3

Problema 1: Três amigos, André, Bruno e Carlos jogam futebol com os alunos do curso de Matemática nas tardes de domingo. Sempre que André e Carlos vão jogar, Bruno também vai. Quando André não vai, os amigos Bruno e Carlos também não vão. Até hoje, os alunos do curso de Matemática já se reuniram 40 vezes para jogar. Desse total, André foi jogar 30 vezes, algumas vezes Bruno não foi e exatamente 19 vezes Carlos não foi jogar. Com base nessas informações, determine os valores máximo e mínimo possíveis para a quantidade de vezes em que Bruno não foi jogar.

Problema 2: Potências perfeitas são números da forma a^b, com a e b inteiros e $b > 1$. Seja $f(n)$ a maior potência perfeita que não excede n. Por exemplo, $f(4) = 4$, $f(28) = 27$ etc.

(a) Obtenha $f(2017)$.

(b) Denote-se por $f^k(n)$ a composição da função f consigo mesma k vezes, calculada em n. Por exemplo, $f^3(n) = f(f(f(n)))$. Calcule $\dfrac{f^{2017}(2017!)}{f(2017!)}$ *(Obs.: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ denota o fatorial de n).*

Problema 3: Considere um retângulo $ABCD$ em que $\overline{AB} = 3$ e $\overline{BC} = 1$. Se P é um ponto qualquer do segmento CD, determine os valores máximo e mínimo possíveis para o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Problema 4: Mostre que, em qualquer conjunto de 7 números inteiros, positivos, distintos e menores que 127, é possível escolher dois deles, digamos a e b, tais que $a < b \leq 2a$.

Problema 5: Uma urna possui inicialmente 40 bolas verdes e 10 bolas vermelhas. Dez bolas são retiradas da urna, uma de cada vez, ao acaso e sem reposição.

(a) Calcule a probabilidade de que a segunda bola retirada seja verde.

(b) Calcule a probabilidade de que a décima bola retirada seja verde.

(c) Sabendo-se que a terceira bola retirada foi verde, qual é a probabilidade de que a quarta retirada também seja verde?

Problema 6: Entre os habitantes de Saiog, quaisquer duas pessoas que não se conhecem têm exatamente dois conhecidos em comum e duas pessoas que se conhecem não têm outros conhecidos em comum. Mostre que, em consequência disso, todos os habitantes têm, necessariamente, o mesmo número de conhecidos.