Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
XXIV Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 3

Nome: .... Data de Nascimento: ....
Endereço: ....
Cidade: .... Telefone para contato: ....
Escola: .... Turma: ....
Professor(a) de Matemática: ....

Caro(a) estudante,

A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG) é um projeto de extensão do Instituto de Matemática e Estatística da UFG iniciado em 1992.

Nossa olimpíada procura propor problemas intrigantes e desafiadores, tendo em conta que a habilidade para resolver desafios utilizando o raciocínio dedutivo requer treinamento e prática. Um bom treinamento matemático é um ingrediente muito valioso para se ter sucesso em qualquer carreira que se escolha e pode levar a contribuições significativas para a sociedade. E o objetivo da OMEG é justamente estimular esse tipo de desenvolvimento.

Por isso agradecemos sua participação e contamos com a sua ajuda em contagiar outros com o entusiasmo pela matemática.

Você poderá encontrar os problemas desta prova, além de outros também interessantes, na página da OMEG na internet (omeg.mat.ufg.br). Para obter um certificado de participação na OMEG, procure seu professor ou professora de matemática.

Esperamos que você se divirta.

A Comissão Organizadora.

31/10/2015

Instruções

i) Esta prova deve ser iniciada às 13:30h após autorização do fiscal, tendo duração de 4 horas.

ii) Só será permitida a saída da sala após as 14:30h.

iii) Se você quiser fazer comentários sobre a sua participação nesta olimpíada e apresentar sugestões para a próxima OMEG, use o verso desta folha.

iv) A prova pode ser feita a lápis e/ou caneta. Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer outro aparelho.

v) Esta prova deve conter 6 questões, uma em cada página. Por gentileza confira.

vi) Em todas as questões, as respostas precisam ser justificadas por um argumento matemático. As respostas, mesmo se estiverem certas, não terão valor se não pudermos saber como você chegou ao resultado.

Espaço reservado para a Comissão Organizadora. Não escreva no quadro abaixo e nem nos quadros em que aparece a palavra "Nota:" ao lado de cada questão.

Questão	1	2	3	4	5	6	Nota
Correção A							
Correção B							

Problema 1: Digamos que um número natural n é *joia* se puder ser escrito como uma soma de outros números naturais, de modo que a soma dos inversos dessas parcelas é igual a 1. Por exemplo, 4 é um número *joia*, pois

$$4 = 2 + 2 \text{ e } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

E 10 também é *joia*, pois

$$10 = 4 + 4 + 2 \text{ e } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

(a) Determine todos os números *joias* entre 1 e 10.

(b) Mostre que, se um número natural, n, é *joia*, então $4n + 6$ e $6n + 5$ também são *joias*.

(c) Existe algum número primo *joia*?

Justifique sua resposta

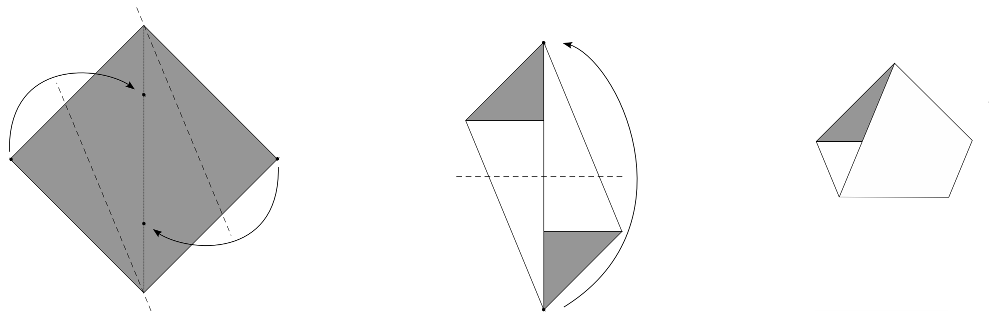
(a)

(b)

(c)

Nota:

Problema 2: As figuras a seguir representam a sequência de passos de uma dobradura de papel, iniciando-se com um quadrado com área de $100\,\text{cm}^2$. No primeiro par de dobras, dois lados opostos foram levados sobre uma diagonal do quadrado. Em seguida, uma outra dobra foi feita de maneira a unir os outros dois vértices. Determine a área do pentágono que se formou.



(I) **(II)** **(III)**

Nota:

Justifique sua resposta

Problema 3: Considere todos os números naturais de quatro algarismos $a_1a_2a_3a_4$, cujo quadrado tenha sete algarismos $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$ tais que $b_1 = a_1^2$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 2a_3$, $b_4 = 2a_4$ e $b_5b_6b_7 = (a_2a_3a_4)^2$. Por exemplo, 1024 tem esse formato, uma vez que $1024^2 = 1048576$, ou seja, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$ e $b_1 = a_1^2 = 1$, $b_2 = 2a_2 = 0$, $b_3 = 2a_3 = 4$, $b_4 = 2a_4 = 8$ e $b_5b_6b_7 = (a_2a_3a_4)^2 = (024)^2 = 576$.

(a) Quantos números possuem esta propriedade?

(b) Calcule a média aritmética desses números.

Justifique sua resposta

(a)
(b)
Nota:

Problema 4: Uma certa função, f, definida sobre o conjunto dos números naturais é tal que $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ e $f(2n+1) = f(2n) + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calcule $f(6)$, $f(7)$ e $f(8)$.

(b) Quantos são os números naturais, menores que 2015, para os quais $f(n) = 1$?

(c) Para $1 \leq n \leq 2015$, qual é o valor máximo de $f(n)$?

Justifique sua resposta

(a)
(b)
(c)
Nota:

Problema 5: Uma urna contém 10 bolas que podem ser todas verdes, todas vermelhas ou uma mistura das duas cores. Considere o experimento de sortear duas bolas da urna simultaneamente.

(a) Se o número de bolas verdes for n, calcule, em função de n, a probabilidade de se retirar duas bolas de mesma cor?

(b) Suponha que esse experimento tenha sido repetido, nas mesmas condições, por 9000 vezes com os resultados contabilizados na tabela a seguir.

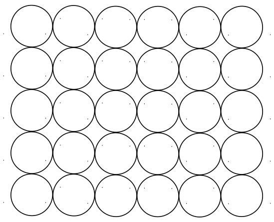
	Duas bolas verdes	Duas bolas vermelhas	Uma bola de cada cor
Número de ocorrências	3009	1196	4795

Com base nesses dados, qual é a composição mais provável da urna?

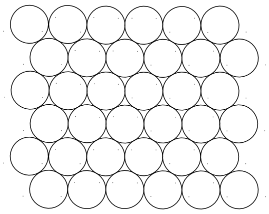
Justifique sua resposta

(a)
(b)
Nota:

Problema 6: Duas formas de se empacotar latas cilíndricas idênticas em uma caixa retangular são o empacotamento quadrado e o hexagonal, cujos padrões são representados nas figuras a seguir.



Empacotamento quadrado



Empacotamento hexagonal

Considerando-se apenas as bases das latas e da caixa, a situação se reduz ao empacotamento de círculos em um retângulo. No empacotamento hexagonal os espaços entre os círculos são menores, permitindo empacotar mais círculos por unidade de área. Para pequenos empacotamentos, entretanto, nem sempre uma caixa feita sob medida para empacotamento quadrado permite acomodar mais latas quando se muda para o hexagonal.

Utilizando o diâmetro dos círculos como unidade de medida, se uma caixa é feita sob medida para um empacotamento quadrado, determine as dimensões mínimas da base da caixa para que a quantidade de latas que cabem na caixa aumente ao se usar o empacotamento hexagonal.

Nota:

Justifique sua resposta