UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
XXIV OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

Nível 2

Nome: .... Data de Nascimento: ....
Endereço: ....
Cidade: .... Telefone para contato: ....
Escola: .... Turma: ....
Professor(a) de Matemática: ....

Caro(a) estudante,

A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG) é um projeto de extensão do Instituto de Matemática e Estatística da UFG iniciado em 1992.

Nossa olimpíada procura propor problemas intrigantes e desafiadores, tendo em conta que a habilidade para resolver desafios utilizando o raciocínio dedutivo requer treinamento e prática. Um bom treinamento matemático é um ingrediente muito valioso para se ter sucesso em qualquer carreira que se escolha e pode levar a contribuições significativas para a sociedade. E o objetivo da OMEG é justamente estimular esse tipo de desenvolvimento.

Por isso agradecemos sua participação e contamos com a sua ajuda em contagiar outros com o entusiasmo pela matemática.

Você poderá encontrar os problemas desta prova, além de outros também interessantes, na página da OMEG na internet (omeg.mat.ufg.br). Para obter um certificado de participação na OMEG, procure seu professor ou professora de matemática.

Esperamos que você se divirta.

A Comissão Organizadora.

31/10/2015

Instruções

i) Esta prova deve ser iniciada às 13:30h após autorização do fiscal, tendo duração de 4 horas.

ii) Só será permitida a saída da sala após as 14:30h.

iii) Se você quiser fazer comentários sobre a sua participação nesta olimpíada e apresentar sugestões para a próxima OMEG, use o verso desta folha.

iv) A prova pode ser feita a lápis e/ou caneta. Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer outro aparelho.

v) Esta prova deve conter 6 questões, uma em cada página. Por gentileza confira.

vi) Em todas as questões, as respostas precisam ser justificadas por um argumento matemático. As respostas, mesmo se estiverem certas, não terão valor se não pudermos saber como você chegou ao resultado.

ESPAÇO RESERVADO PARA A COMISSÃO ORGANIZADORA. NÃO ESCREVA NO QUADRO ABAIXO E NEM NOS QUADROS EM QUE APARECE A PALAVRA "NOTA:" AO LADO DE CADA QUESTÃO.

Questão	1	2	3	4	5	6	Nota
Correção A							
Correção B							

Problema 1: Um certo jogo utiliza um tabuleiro 4×4 com as "casas" numeradas de 1 a 16, como representado na figura a seguir. Uma peça do jogo pode ser movida, uma casa de cada vez, obedecendo a duas regras:

(i) Se a peça estiver em uma casa cujo número é primo, então só é permitido movê-la para baixo.

(ii) Se a peça estiver em uma casa cujo número não é primo, então seu próximo movimento pode ser de uma casa para baixo ou para a direita.

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Considere que a peça, inicialmente, está na casa 1.

(a) Quais casas nunca podem ser visitadas pela peça?

(b) Quantos caminhos diferentes a peça pode percorrer para chegar à casa 16?

Justifique sua resposta

(a)
(b)
Nota:

Problema 2: Em um lugar chamado Saiog, sempre que as pessoas saem para comer pizza, cada homem come exatamente uma pizza, cada mulher come meia pizza e cada criança come $1/4$ de pizza.

(a) Um grupo de 7 pessoas foi a uma pizzaria e comeu exatamente 5 pizzas. Quantos homens, mulheres e crianças estavam no grupo?

(b) Em outra pizzaria 2015 pessoas comeram exatamente 1000 pizzas. Dentre essas pessoas, qual é o número mínimo e o número máximo possível de crianças?

Justifique sua resposta

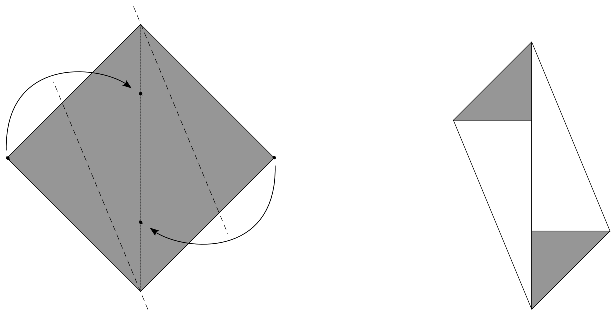
(a)
(b)
Nota:

Problema 3: Quando um objeto percorre uma certa distância d em um intervalo de tempo t, dizemos que sua velocidade média, v, é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto, ou seja, $v = d/t$. Por exemplo, um automóvel que gasta duas horas para percorrer 100 km tem uma velocidade média, nesse percurso, de $100/2 = 50$ km/h (quilômetros por hora). Um certo ciclista percorreu 18 km em exatamente uma hora. Se nos últimos 3 km, do percurso ele teve uma velocidade média de 12 km/h. Qual foi a velocidade média nos primeiros 15 km?

Nota:

Justifique sua resposta

Problema 4: Um quadrado de papel, com área de $100\,\text{cm}^2$ foi dobrado como indica a figura a seguir, de modo que dois lados opostos foram levados sobre uma diagonal do quadrado. Determine a área do paralelogramo resultante.



(I) **(II)**

Justifique sua resposta

Nota:

Problema 5: Digamos que um número natural n é *joia* se puder ser escrito como uma soma de outros números naturais, de modo que a soma dos inversos dessas parcelas é igual a 1. Por exemplo, 4 é um número *joia*, pois

$$4 = 2 + 2 \text{ e } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

E 10 também é *joia*, pois

$$10 = 4 + 4 + 2 \text{ e } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

(a) Determine todos os números *joias* entre 1 e 10.

(b) Mostre que, se um número natural, n, é *joia*, então $4n + 6$ e $6n + 5$ também são *joias*.

(c) Existe algum número primo *joia*?

Justifique sua resposta

(a)
(b)
(c)
Nota:

Problema 6: Considere todos os números naturais de quatro algarismos $a_1a_2a_3a_4$, cujo quadrado tenha sete algarismos $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$ tais que $b_1 = a_1^2$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 2a_3$, $b_4 = 2a_4$ e $b_5b_6b_7 = (a_2a_3a_4)^2$. Por exemplo, 1024 tem esse formato, uma vez que $1024^2 = 1048576$, ou seja, $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 4$ e $b_1 = a_1^2 = 1$, $b_2 = 2a_2 = 0$, $b_3 = 2a_3 = 4$, $b_4 = 2a_4 = 8$ e $b_5b_6b_7 = (a_2a_3a_4)^2 = (024)^2 = 576$.

Quantos números possuem esta propriedade?

Nota:

Justifique sua resposta