Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
XXV Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 1

Nome: ..... Data de Nascimento: .....
Endereço: ....
Cidade: ..... Telefone para contato: .....
Escola: ..... Turma: .....
Professor(a) de Matemática: ....

Caro(a) estudante,

A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG) é um projeto de extensão do Instituto de Matemática e Estatística da UFG iniciado em 1992.

Nossa olimpíada procura propor problemas intrigantes e desafiadores, tendo em conta que a habilidade para resolver desafios utilizando o raciocínio dedutivo requer treinamento e prática. Um bom treinamento matemático é um ingrediente muito valioso para o sucesso em qualquer carreira que se escolha e pode levar a contribuições significativas para a sociedade. E o objetivo da OMEG é justamente estimular esse tipo de desenvolvimento.

Por isso agradecemos sua participação e contamos com a sua ajuda em contagiar outros com o entusiasmo pela matemática.

Você poderá encontrar os problemas desta prova, além de outros também interessantes, na página da OMEG na internet (omeg.mat.ufg.br). Para obter um certificado de participação na OMEG, procure seu professor ou professora de matemática.

Esperamos que você se divirta.

A Comissão Organizadora.

29/10/2016

Instruções

i) Esta prova deve ser iniciada às 13:30h após autorização do fiscal, tendo duração de 4 horas.

ii) Só será permitida a saída da sala após as 14:30h.

iii) Se você quiser fazer comentários sobre a sua participação nesta olimpíada e apresentar sugestões para a próxima OMEG, use o verso desta folha.

iv) A prova pode ser feita a lápis e/ou caneta. Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer outro aparelho.

v) Esta prova deve conter 6 questões, uma em cada página. Por gentileza confira.

vi) Em todas as questões, as respostas precisam ser justificadas por um argumento matemático. As respostas, mesmo se estiverem certas, não terão valor se não pudermos saber como você chegou ao resultado.

Espaço reservado para a Comissão Organizadora. Não escreva no quadro abaixo e nem nos quadros em que aparece a palavra "Nota:" ao lado de cada questão.

Questão	1	2	3	4	5	6	Nota
Correção A							
Correção B							

Problema 1:

No primeiro turno de uma eleição, os candidatos **A** e **B** foram o primeiro e o segundo mais votados, respectivamente. Consequentemente, apenas estes dois concorreram no segundo turno e o candidato **B** ganhou. O mais curioso é que, entre esse candidato **B** e um terceiro candidato, **C**, que perdeu para **A** e **B** no primeiro turno, a maioria dos eleitores preferia **C**. Ou seja, o resultado dessas eleições desagradou a maioria dos eleitores. Considere que as preferências dos eleitores não mudaram de um turno para o outro, que todos votaram nos dois turnos e sempre no candidato de sua preferência, dentre os disponíveis.

Para que esta situação tenha ocorrido, qual é o número mínimo de eleitores nesta eleição?

Justifique sua resposta

Nota:

Problema 2: No calendário Gregoriano, utilizado oficialmente no Brasil, os anos que não são múltiplos de 4 possuem 365 dias cada. Para os anos múltiplos de 4 é acrescentado um dia, 29 de fevereiro, exceto nos anos múltiplos de 100 que não sejam múltiplos de 400.

Este ano o Sr. Domingos completou 56 anos de idade e seu aniversário foi justamente em um domingo.

(a) Em qual dia da semana nasceu o Sr. Domingos?

(b) Quantos dos aniversários dele, até agora, ocorreram em dia de domingo?

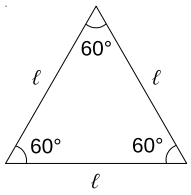
Justifique sua resposta

(a)

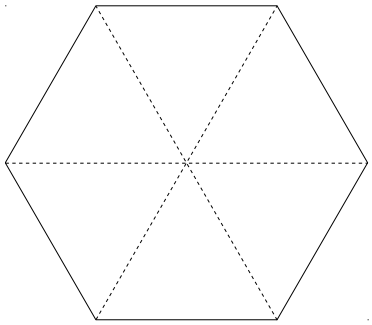
(b)

Nota:

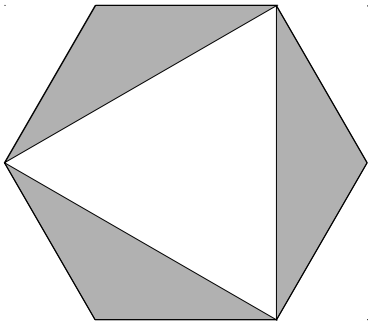
Problema 3: Um triângulo é dito equilátero quando tem os três lados com a mesma medida, como na figura **(I)**. Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° e, unindo 6 desses triângulos, é possível formar um hexágono regular, como na figura **(II)**. Um hexágono regular com 24 cm^2 de área foi dividido em quatro triângulos como indicado na figura **(III)**.



(I)



(II)



(III)

(a) Qual é a área de cada um dos triângulos menores sombreados?

(b) Qual é a área do triângulo maior?

Justifique sua resposta

(a)

(b)

Nota:

Problema 4:

(a) Quantos são os números naturais de três algarismos cuja soma dos algarismos é 9?

(b) Quantos são os números naturais de três algarismos cuja soma dos algarismos é 18?

Justifique sua resposta

(a)

(b)

Nota:

Problema 5: Em uma certa ilha só há três tipos de pessoas: os **verdadeiros**, que sempre falam a verdade, os **falsos**, que sempre mentem e as **pessoas comuns**, que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Um viajante chega à ilha e encontra-se com três moradores, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo, que dizem as frases a seguir.

Arnaldo: "Eu sou uma pessoa comum."

Bernaldo: "Arnaldo está dizendo a verdade."

Cernaldo: "Eu não sou uma pessoa comum."

Se cada um desses três é de um tipo diferente, quem é o verdadeiro e quem é o falso?

Justifique sua resposta

Nota:

Problema 6: Suponha que dispomos de uma caixa bem grande em que é realizado o experimento descrito a seguir. No primeiro minuto uma bola é colocada na caixa, no segundo minuto três bolas são acrescentadas, no terceiro minuto outras cinco bolas e assim, sucessivamente, a cada minuto acrescenta-se à caixa a próxima quantidade ímpar de bolas subsequente à quantidade acrescentada no minuto anterior. Em outras palavras, no minuto n são acrescentadas $2n - 1$ bolas.

(a) Quantas bolas haverá na caixa ao final de uma hora do início do experimento?

(b) Quantas bolas são acrescentadas durante a segunda hora?

(c) Se as bolas adicionadas nos minutos ímpares forem vermelhas e as dos minutos pares forem verdes, quantas de cada cor haverá na caixa ao final da primeira hora?

Nota:

Justifique sua resposta