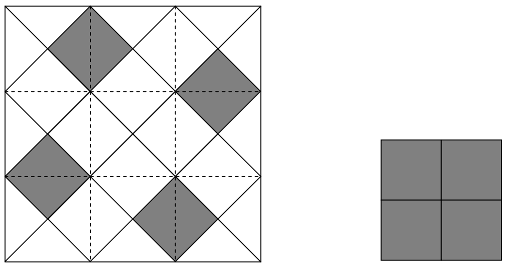
Nível 1

1. *Para construir uma estante completa...*

O marceneiro possui pranchas grandes suficientes para montar 6 estantes e pranchas pequenas suficientes para 5, os demais materiais são mais abundantes e suficientes para montar pelo menos 10 estantes. Logo, o marceneiro poderá fazer **5 estantes** com o material disponível.

2. *Uma folha quadrada de papel foi dividida por 10 linhas retas...*

Como os quadradinhos destacados são todos idênticos, as linhas retas que dividem o quadrado original tem que ser paralelas e igualmente espaçadas. Basta, então, observar que a área de cada quadradinho destacado representa metade de 1/9 do quadrado original (Veja figura). A área de cada quadradinho é $2\,\text{cm}^2$, pois 4 deles cobrem $8\,\text{cm}^2$. Então a área do quadrado original é 18 vezes esses $2\,\text{cm}^2$, ou seja $36\,\text{cm}^2$. Portanto o quadrado grande mede $6 \times 6\,\text{cm}$.



3. *Ana Júlia, tia de Alfredo, vende trufas de chocolate...*

(a) O preço unitário no pacote com 3 é $2{,}70 \div 3 = 0{,}90$. Para o pacote com 10 temos $10{,}10 \div 10 = 1{,}01$ Logo a trufa custa mais quando adquirida no pacote com 10 e é mais barata se comprada avulsa.

(b) Seja x o novo preço a ser proposto por Alfredo para a trufa avulsa. O preço unitário do pacote com 3 deve ser 10% menor, ou seja, $0{,}9\,x$. Assim o pacote com 3 deve custar $3\times 0{,}9\,x = 2{,}7\,x$. O preço unitário para trufas em pacotes com 10 deve ser 10% menor que em pacotes com 3, ou seja, $0{,}9\times 0{,}9\,x = 0{,}81\,x$ e com isso o pacote de 10 trufas passaria a custar $10\times 0{,}81\,x = 8{,}1\,x$.

Ao vender 90 trufas nas condições descritas no enunciado, Ana Júlia recebe $30 \times 0{,}80 + 30 \times 0{,}90 + 30 \times 1{,}01 = 30 \times 2{,}71$. Com os novos preços, ela passa a receber $30\,x + 30 \times 0{,}9\,x + 30\times 0{,}81\,x = 30\times 2{,}71\,x$. E para que estas duas quantidades sejam iguais, x, que é o novo preço da trufa avulsa, tem que ser igual a 1. Assim os preços propostos por Alfredo são

- 1 real cada trufa avulsa,
- R\$ 2,70 o pacote com 3 trufas e
- R\$ 8,10 o pacote com 10 trufas.

4. *A figura abaixo mostra parte de um extenso tabuleiro quadriculado ...*

Note que a cada volta da espiral preenche-se completamente um quadrado. Além disso, cada nova volta acrescenta duas novas linhas de quadradinhos uma acima e outra abaixo e duas novas colunas, uma à esquerda e outra à direita. Assim, a primeira volta forma um quadrado de 2×2

quadradinhos, numerados de 1 a 4. Acrescentando-se a segunda volta completa-se um quadrado de 4×4 quadradinhos, com a numeração indo até 16 e assim sucessivamente. Então os quadrados perfeitos pares (4, 16, 36 etc.), que são da forma $(2n)^2$, estarão sempre na diagonal do quarto quadrante e serão o canto inferior direito de um quadrado de $2n\times 2n$ quadradinhos centrado no cruzamento das linhas que dividem os quadrantes. Este é o caso das casas de número $64=8^2$ e $100=10^2$ que, portanto, moram no 4º quadrante. Para a casa de número 1000, que não é um quadrado perfeito, podemos procurar o quadrado perfeito par mais próximo. Temos $30^2=900$ e $32^2=1024$. Consideremos, assim, o quadrado de 32×32 quadradinhos, numerados de 1 a 1024. A linha mais de baixo deste quadrado, a que contém a casa 1024, tem 32 quadradinhos. Os que vão de 993 a 1008 ficam no 3º quadrante e o de número 1000 está entre eles.

	49						
		25					
		10	9	8	7		
		11	2	1	6	19	
		12	3	4	5	18	
		13	14	15	16	17	
						36	
							64

5. *Em Lisarb...*

(a) Os jogos ocorrem em anos do tipo $2008 + t$, onde t é um múltiplo de 3. Anos sabáticos são do tipo $2009 + s = 2008 + 1 + s$, onde s é um múltiplo de 7. Assim, para achar o próximo ano em que estes dois eventos coincidirão, basta procurar o menor múltiplo de sete, s, tal que $s+1 = t$ seja múltiplo de 3. É fácil encontrar $s = 14$, $t = 15$ e o ano será $2008 + 15 = 2023$. A partir daí, esses dois eventos vão coincidir a cada 21 anos, que é o menor número múltiplo de 3 e de 7. Como as eleições ocorrem em anos múltiplos de 5, o próximo ano em que elas coincidirão com os outros dois eventos será $2023+2\times 21 = 2065$.

(b) Os três eventos coincidem a cada 105 anos, que é o menor número que é múltiplo de 3, 5 e 7. Como eles coincidirão em 2065, a última vez que eles coincidiram foi em $1960 = 2065-105$.

6. *Chamemos de número escada a qualquer número que possa ser escrito como ...*

(a) Os números escada com dois degraus são da forma $m + (m + 1) = 2m + 1$, com $m \geq 1$, número natural. Logo eles são todos os números ímpares maiores ou iguais a 3.

(b) Os números escada com três degraus são da forma $m+(m+1)+(m+2) = 3m+3 = 3(m+1)$, com $m \geq 1$, número natural. Logo são todos os múltiplos de 3 maiores ou iguais a 6. No item **(a)** mostramos que os números escada com dois degraus são os ímpares maiores que 1. Portanto, os números escada que podem ser escritos tanto com dois quanto com 3 degraus são os múltiplos de 3, maiores que 6 e ímpares, como o 15, apresentado no enunciado.

Nível 2

1. *Ana Júlia, tia de Alfredo, vende trufas de chocolate...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

2. *Pedro Pedreiro todos os dias volta do trabalho no mesmo trem...*

A mulher de Pedro ganhou 20min no total. Considerando que o caminho percorrido na ida e na volta é o mesmo, e com a mesma velocidade, ela deve ter encontrado Pedro quando faltavam 10 minutos para ela chegar a estação (assim ela economiza os 10 minutos que gastaria até a estação mais outros dez minutos para voltar ao ponto onde encontrou Pedro. Mas se ela encontrou Pedro 10min antes do horário em que ambos deveriam ter chegado à estação e Pedro tinha chegado uma hora antes desse mesmo horário, então pedro estava caminhando a **50 minutos**.

3. *Em Lisarb...*

Ver resolução do **problema 5** do **nível 1**.

4. *A figura abaixo mostra parte de um extenso tabuleiro quadriculado ...*

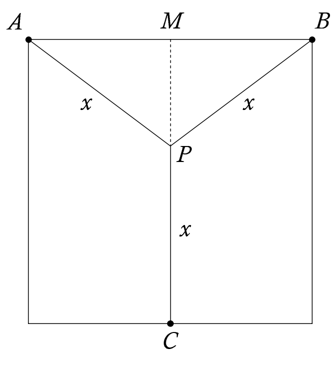
Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**. Note que $10000 = 100^2$.

5. *Chamemos de número escada a qualquer número que possa ser escrito como ...*

(a) Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

(b) Leia a resolução do item **(b)** do **problema 6** do **nível 1** e note que s números escada com 5 degraus são da forma $m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4) = 5m+10 = 5(m+2)$, com $m \geq 1$, número natural. Logo são todos os múltiplos de 5 maiores ou iguais a 15. Destes, os que podem ser escritos com 3 degraus são os múltiplos de 3 e os que **não** podem ser escritos com 2 degraus são os números pares. Portanto os números que satisfazem as condições pedidas no item **(b)** são os múltiplos de 30.

6. *Suponha que as cidades de Andaraí, Bateraí e Cataraí são situadas...*



Sejam A, B e C pontos representando as 3 cidades, respectivamente, P o local escolhido para a central elétrica e x a distância da central a cada uma das 3 cidades. Como o triângulo APC é isósceles, P é necessariamente um ponto da reta que passa por C e pelo ponto médio de AB. Esta reta, chamada de mediatriz de AB, é perpendicular a AB e, portanto, paralela a dois lados do quadrado. Se M é o ponto médio de AB, então $\overline{MC} = 20\,\text{km}$, $\overline{AM} = 10\,\text{km}$, $\overline{AP} = \overline{PC} = x$ e $\overline{MP} = 20 - x$. O triângulo AMP é retângulo em M e , pelo teorema de Pitágoras, $x^2 = 10^2 + (20-x)^2$. De onde se obtém $x = 12{,}5\,\text{km}$.

Nível 3

1. *Pedro Pedreiro todos os dias volta do trabalho no mesmo trem...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 2**.

2. *Pares de números primos separados por um único número inteiro...*

(a) A demonstração é simples se atentarmos para dois fatos:

i) números primos, exceto o 2, são todos ímpares e

ii) dados 3 números naturais consecutivos, necessariamente um deles é múltiplo de 3 (porque?).

Sendo assim, se $n-1$ e $n+1$ são números primos ímpares e diferentes de 3, então n é necessariamente par e divisível por 3, logo é múltiplo de 6.

(b) Em geral, se existir n tal que $n-1$, $n+1$ e $n+3$ são primos e diferentes de 3, então pelo demonstrado no item **(a)**, n e $n+2$ são divisíveis por 6, o que é impossível (porque?). Logo a única maneira que resta para tentar formar um trio de primos trigêmeos é que um deles seja 3. Daí é fácil verificar que o único trio desse tipo é formado por 3, 5 e 7.

3. *Em Lisarb...*

(a) Os Tridicênios são celebrados em anos do tipo $2008+t$, onde t é um múltiplo de 13. Anos sabáticos são do tipo $2009+s = 2008+1+s$, onde s é um múltiplo de 7. Assim, para achar o próximo ano em que estes dois eventos coincidirão, basta procurar o menor s, múltiplo de sete, tal que $s+1 = t$ seja múltiplo de 13. Ou, equivalentemente, o menor t, múltiplo de 13 tal que $s = t-1$ seja múltiplo de 7. Podemos facilmente listar os primeiros 6 ou 7 múltiplos de 13, e verificar um a um, mas basta observar que estamos procurando um número $s = 13\,k$, sendo k o menor número natural tal que $13\,k-1$ é múltiplo de 7. Como $14\,k$ é seguramente um múltiplo de 7, temos que $14\,k-(13\,k-1) = k+1$ tem que ser múltiplo de 7. O menor k com esta propriedade é $k=6$, com o que obtemos $s = 13\cdot 6 = 78$ e, de fato, $s-1 = 77$ é múltiplo de 7. O próximo ano sabático em que se celebrarão os tridicênios será $2008+78 = 2086$. A partir daí, esses dois eventos vão coincidir a cada $7\cdot 13 = 91$ anos, que é o menor número múltiplo de 13 e de 7. Como as eleições ocorrem em anos múltiplos de 5, o próximo ano em que elas coincidirão com os outros dois eventos será $2086 + 4\times 91 = 2450$.

(b) Os três eventos coincidem a cada 455 anos, que é o menor número que é múltiplo de 13, 5 e 7. Como eles coincidirão em 2450, eles devem ter coincidido pela última vez em $1995 = 2450-455$.

4. *A figura abaixo mostra parte de um quadriculado...*

Veja a resolução do item **(a)** do **problema 6** do **nível 1**.

Procurando o quadrado par mais próximo de 2008 (podemos tomar como ponto de partida $40^2 = 1600$ e $50^2 = 2500$), encontramos $44^2 = 1936 = 2008-72$. Assim a coluna de quadradinhos começando em 1937 sobe, verticalmente, até $1937+44 = 1981$ e então seguem mais 27 quadradinhos na horizontal, da direita para a esquerda para chegar ao 2008. Destes 27, $22 = 44/2$ ficam no 1º quadrante e os outros 5 no 2º. Portanto, a casa de número 2008 fica 22 linhas acima da de número 1 e 5 colunas à esquerda. Partindo da casa 1, é suficiente dar 5 passos na diagonal (para cima e à esquerda), seguidos de outros 17 passos na vertical para atingir a casa 2008. São necessários, portanto, **22 passos**.

5. *Chamemos de número escada a qualquer número que possa ser escrito como ...*

(a) Veja a resolução do item **(a)** do **problema 6** do **nível 1**.

(b) Seja s um número escada com primeiro degrau m e k degraus, sendo m e k inteiros positivos, $k \geq 2$. Então $s = m + (m+1) + (m+2) + ... + (m+k-1) = k\,m + (1+2+...+\,k-1) = k\,m + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}k(2m+k-1)$. Se k for par, então s pode ser fatorado como

$$s = \frac{k}{2}(2m+k-1)\,, \tag{1}$$

onde $2m+k-1$ é ímpar e maior que 1. Por outro lado, se k for ímpar, então $k-1$ é par e s fatora-se como

$$s = k\left(m + \frac{k-1}{2}\right)\,, \tag{2}$$

onde k é ímpar e maior que 1. Portanto, todo número escada possui algum fator ímpar e maior que 1 e, consequentemente, nenhuma potência de 2 pode ser escada. Resta saber se todos os números que não são escada são potências de 2.

Os números ímpares maiores que 1 são escada, como mostrado em **(a)**.

Se x é um número par que não é potência de 2, então $x = np$ com $n > 1$, ímpar, e p um número par. Procurando escrever x na forma de escada, observamos que na eq.(1) o segundo fator, que é necessariamente ímpar, é maior que o dobro do primeiro. Já na eq.(2) o primeiro fator, necessariamente ímpar, é sempre menor que dobro do segundo.

Então, se $n > 2p$ podemos escrever x na forma da eq.(1) tomando $k = 2p$ e $2m+k-1 = n \Rightarrow m = \frac{n+1}{2} - p \geq 1$ e então x é escada.

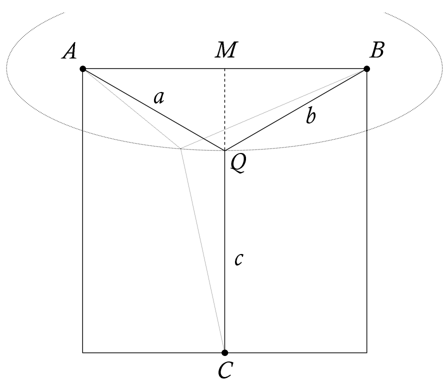
Por outro lado, se $n < 2p$ basta considerar a eq.(2) e fazer $k = n$ e $m + \frac{k-1}{2} = p \Rightarrow m = p - \frac{n-1}{2} \geq 1$, o que permite escrever x como um número escada.

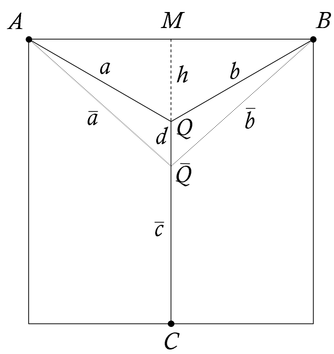
Portanto os números que não são escada são exatamente as potências de 2.

6. *Suponha que as cidades de Andaraí, Bateraí e Cataraí são situadas...*

(a) Veja a resolução do **problema 6** do **nível 2**.

(b) Seja Q o ponto tal que $\overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ}$ é o menor possível e chamemos $\overline{AQ} = a$, $\overline{BQ} = b$ e $\overline{CQ} = c$. Primeiro é fácil concluir que $b = a$. De fato, basta observar que para qualquer valor de $a+b$ fixado, Q deve estar sobre uma elipse de focos A e B. Neste caso, c vai ser o menor possível se Q estiver no ponto da elipse mais próximo de C, que é o ponto onde ela corta a mediatriz de AB.





Se o ponto Q situa-se na mediatriz de AB, basta, então determinar sua posição vertical. A soma $a+b+c$ vai ser mínima quando qualquer deslocamento do ponto Q, por menor que seja, provoque um aumento no valor da soma. Dados $a = b$ e c, vejamos o efeito sobre a soma, $2a + c$, de um pequeno deslocamento vertical do ponto Q, ou seja, suponha que desloquemos Q de uma distância d em direção ao ponto C, obtendo o ponto $\bar{Q}$, e sejam $\bar{a} = \bar{b}$ e $\bar{c}$ as novas distâncias de $\bar{Q}$ a A, B e C, respectivamente. Então, se M é o ponto médio de AB, $h = \overline{MQ} = 20 - c$ e $\bar{h} = \overline{M\bar{Q}} = 20 - \bar{c} = h + d$, temos

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 \; &= \; 10^2 + \bar{h}^2 \; = \; 10^2 + (h+d)^2 \; = \; 10^2 + h^2 + 2dh + d^2 \\ &= \; a^2 + 2dh + d^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Se Q é o ponto que minimiza a soma das distâncias, então por menor que seja $d > 0$ devemos ter $2\bar{a} + \bar{c} \geq 2a + c$. Subtraindo $\bar{c}$ de ambos os lados e dividindo por 2 temos $\bar{a} \geq a + \frac{d}{2}$, que equivale a dizer que $\bar{a}^2 \geq a^2 + ad + \frac{d^2}{4}$ e substituindo $\bar{a}^2$ da eq.(3), temos $a^2 + 2dh + d^2 \geq a^2 + ad + \frac{d^2}{4} \;\Rightarrow\; a - 2h \leq \frac{3d}{4}$. E para que isto valha para qualquer $d > 0$, por menor que seja, devemos ter $a - 2h \leq 0$. Por um argumento análogo para um deslocamento do ponto Q em direção a M (que equivale a fazer $d < 0$ nas equações acima), obtemos $a - 2h \geq 0$. Portanto o ponto que minimiza a soma das distâncias é tal que $a = 2h$, o que implica que $\operatorname{sen} M\widehat{A}Q = \frac{h}{a} = \frac{1}{2}$ e, como $M\widehat{A}Q < 90°$, temos $M\widehat{A}Q = 30°$. Sendo assim, $a = \frac{\overline{AM}}{\cos 30°} = \frac{20}{\sqrt{3}}$ e $c = 20 - h = 20 - \frac{10}{\sqrt{3}}$. Logo $a + b + c = 10(2 + \sqrt{3}) \approx$ 37,3 km, permitindo uma redução de aproximadamente 200 m em relação aos $3 \times 12{,}5 =$ 37,5 km do item **(a)**.