Nível 3

1. *Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

2. *A figura a seguir representa um quadrado que foi dividido em várias regiões por arcos que são todos de metade ou um quarto de círculo...*

Sendo ℓ a medida do lado do quadrado, a área de **A** é

$$\text{Área}(\mathbf{A}) \approx \ell^2 - \frac{\pi\ell^2}{4}$$

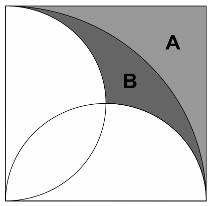
Para a região **B**, é conveniente dividir o quadrado da figura em quatro quadrados menores, por uma linha vertical e outra horizontal ambas passando pelo centro do quadrado original. Assim, a área da região **B** pode ser obtida subtraindo-se da área do quarto de círculo de raio ℓ a área de um quadrado de lado $\ell/2$ e as de dois quartos de círculo de raio $\ell/2$, ou seja,

$$\text{Área}(\mathbf{B}) \approx \frac{\pi\ell^2}{4} - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\ell^2.$$

Para que se obtenha o mesmo valor para as duas áreas, é necessário que

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{8} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{10}{3}.$$

Logo, o número racional utilizado no lugar de π é 10/3.



3. *Os números 1, 3, 6, 10, 15, ..., chamam-se números triangulares...*

(a) Da definição, deduz-se que o n-ésimo número triangular é $T_n = 1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$ e, observando que $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$, pode se estimar o valor de n que produz um número triangular próximo de 2014 procurando situar o dobro deste número entre os quadrados de dois números consecutivos. Uma rápida inspeção, notando que $2 \cdot 2014 = 4028 = 4 \cdot 1007$, $30^2 = 900$ e $32^2 = (2^5)^2 = 1024$, leva a $63^2 = 3969$ e $64^2 = 4096$, de forma que $T_{63} = 2016$ é o número triangular mais próximo de 2014.

(b) Fatorando $T_n^2 - T_{n-1}^2 = (T_n - T_{n-1})(T_n + T_{n-1})$ e observando que $T_n - T_{n-1} = n$ e $T_n + T_{n-1} = [n(n+1) + (n-1)n]/2 = n^2$, obtem-se $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$, para $n \geq 2$. Então, basta substituir cada cubo na soma dos cubos pela diferença dos quadrados dos números triangulares correspondentes, com o que se obtém

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 1+T_2^2-T_1^2+T_3^2-T_2^2+T_4^2-T_3^2+\cdots+T_{n-1}^2-T_{n-2}^2+T_n^2-T_{n-1}^2 = T_n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

uma vez que cada termo negativo se cancela com o seu oposto (que fica duas posições à esquerda) e o único termo que resta na soma é T_n^2.

4. *O retângulo maior da figura a seguir é composto por doze quadrados menores...*

(a) Qualquer escolha de três pontos forma um triângulo quando esses pontos não estiverem alinhados. O total de combinações de três pontos que pode ser obtido é $C_{20,3} = 1.140$. Basta, então excluir da contagem os casos em que os três pontos são colineares. São quatro casos disjuntos:

Primeiro Caso: Os três pontos estão em uma mesma linha. São $4 \times C_{5,3} = 4 \times 10 = 40$ combinações.

Segundo Caso: Os três pontos estão em uma mesma coluna. São $5 \times C_{4,3} = 5 \times 4 = 20$ combinações.

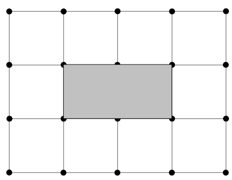
Terceiro Caso: Os três pontos estão em uma diagonal que tem exatamente três pontos. Aqui é preciso contar também os pontos que ficam nas diagonais de cada retângulo 2×4, além das 4 diagonais de quadrados 2×2 são $8 \times C_{3,3} = 8 \times 1 = 8$ combinações.

Quarto Caso: Os três pontos estão em uma diagonal que contem quatro pontos. São $4 \times C_{4,3} = 4 \times 4 = 16$ combinações.

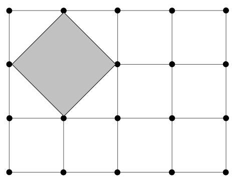
Portanto, o total de triângulos é $1140 - 40 - 20 - 8 - 16 = 1056$.

(b) Seja A o conjunto dos retângulos que podem ser formados. Temos 4 casos disjuntos:

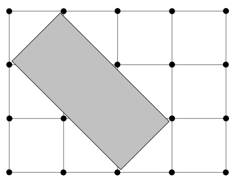
A_1: Retângulos em A que possuem lados paralelos aos eixos (vértices em duas linhas e duas colunas),



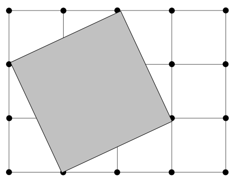
A_2: Quadrados em A que possuem vértices em três das linhas e em três das colunas,



A_3: Retângulos em A que não são quadrados e que possuem um vértice em cada linha e um vértice em cada uma de quatro das cinco colunas.



A_4: Quadrados em A que possuem um vértice em cada linha e um vértice em cada uma de quatro das cinco colunas.



Para ver quantos retângulos estão em A_1 usamos o princípio multiplicativo. De fato, existem $C_{4,2} = 6$ modos de escolhermos duas das quatro linhas. Feita a escolha do par de linhas existem $C_{5,2} = 10$ modos de escolhermos duas das cinco colunas. E assim, $\mid A_1 \mid = 6 \times 10 = 60$. As outras contagens podem ser feitas diretamente da figura.

Pelo princípio aditivo das partes disjuntas: $\mid A \mid = \mid A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \mid = \mid A_1 \mid + \mid A_2 \mid + \mid A_3 \mid + \mid A_4 \mid = 60 + 6 + 4 + 4 = 74$.

5. *Ana, Beatriz e Célia, compartilham um carro e, para decidirem quem vai usá-lo no próximo final de semana...*

Denotando por a, b e c as quantidades de dedos apresentados por Ana, Beatriz e Célia, respectivamente, como cada um pode ser um número de 1 a 5, com iguais probabilidades, qualquer trio (a, b, c), com a, b e c em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tem a probabilidade que os demais. Pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade desses trios é $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ e, como a contagem é feita até a soma $a + b + c$ que pode ir de 3 a 15, Ana será a escolhida nos casos em que esta soma resulte em algum número do conjunto $A = \{4, 7, 10, 13\}$. Para Beatriz ser a escolhida, a soma deve estar em $B = \{5, 8, 11, 14\}$ e para Célia a soma deve estar em $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Resta contar quantos dos trios equiprováveis (a, b, c); $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, têm sua soma em cada um desses três conjuntos.

Para facilitar a contagem, separando os números naturais de 1 a 5 em três conjuntos de acordo com o resto de sua divisão por 3, tem-se $X_1 = \{1, 4\}$, $X_2 = \{2, 5\}$ e $X_3 = \{3\}$. Para que a soma $a+b+c$ esteja em C, por exemplo, que é um conjunto de múltiplos de 3, não é difícil verificar que a, b e c têm que estar todos em um mesmo X_i, ou cada um em um X_i diferente. Todos em X_1, pode ocorrer de $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ maneiras diferentes e, da mesma forma, para todos em X_2, enquanto que só há uma maneira de estarem todos em X_3. Para ficarem em X_i diferentes, tem-se $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3! = 24$ maneiras. Somando todas essas possibilidades, tem-se $8 + 8 + 1 + 24 = 41$. Portanto Célia tem uma probabilidade de $41/125$ de ser a escolhida.

Por um argumento análogo, para que $a + b + c$ esteja em A, que é um conjunto de números da forma $3k + 1$, pode se ter um dos 3 números em X_1 (2 possibilidades) e os demais iguais a $3 \in X_3$, ou seja, $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades. Também pode-se ter dois dos números em X_2 (4 possibilidades) e o outro em X_3 (pode ser a, b ou c), o que dá outras $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Por fim, pode-se ter dois dos números em X_1 (4 possibilidades) e o outro, que pode ser a, b ou c, em X_2, resultando em mais $4 \cdot 6 = 24$. Assim, para Ana ser escolhida há $6 + 12 + 24 = 42$ das 125 possibilidades, o que dá uma probabilidade de $42/125$.

As demais 42 possibilidades resultam em uma soma da forma $3k + 2$, que favorece Beatriz. Portanto, Ana e Beatriz têm probabilidade de $42/125$, cada uma, de ser a escolhida, enquanto que Célia tem uma chance um pouco menor, com probabilidade de $41/125$.

6. *No conjunto dos números inteiros positivos, determine...*

(a) Ver resolução do **problema 5** do **nível 1**, observando que uma maneira alternativa de realizar as análises ali envolvidas é, uma vez fixado um dos números, n, do trio, se existirem os outros dois, tendo soma $S = 23 - n$ e produto $P = 360/n$, serão as raízes da equação quadrática $x^2 - Sx + P = 0$. E, para que estas sejam inteiras, $\Delta = S^2 - 4P$ deve ser um quadrado perfeito.

(b) Para que todos os trios tenham o mesmo produto p, seus elementos devem conter diferentes distribuições dos mesmos fatores de p. Assim, se x, y e z for um dos trios, pode se procurar outros trios que tenham a mesma soma e que troquem entre si alguns fatores, mantendo o produto como, por exemplo,

$$x + y + z \;=\; 2x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{3}z \;=\; 3x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z$$

Da primeira e da última igualdades obtém-se

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se $4y/3 = 5z/6 \;\Rightarrow\; 5z = 8y$, o que substituído na primeira equação do sistema acima resulta em $30x = 17y$. No conjunto dos inteiros positivos, a solução mais simples é simplesmente fazer, nesta última igualdade, $x = 17$, $y = 30$ e então, da igualdade anterior, $z = 8y/5 = 48$. Assim, a soma é 95, o produto é 24480 e os três trios, obtidos das duas igualdades iniciais e na ordem em que aparecem ali, são $\{17, 30, 48\}$, $\{34, 45, 16\}$ e $\{51, 20, 24\}$.

Obviamente outras escolhas são possíveis para os fatores que serão intercambiados nas duas desigualdades iniciais e resultarão em respostas diferentes. Mas é preciso tomar alguns cuidados na escolha desses fatores para se evitar obter trios que são apenas permutações uns dos outros. Além disso, o que garantiu que y e z tenham o mesmo sinal na solução do sistema linear foi que, nas duas igualdades iniciais, os fatores intercambiados entre as parcelas foram escolhidos de maneira que em uma das somas y e z (ou o segundo e o terceiro números) movimentam-se na mesma direção (ambos diminuem) e na outra um aumenta e o outro diminui. Isto garante os sinais opostos para os coeficientes de y e z no sistema linear e permite soluções nos inteiros positivos.