Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística

XXIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 1

1. *Se um número termina com zeros, estes zeros são chamados zeros terminais...*

(a) Cada zero terminal de P corresponde a um fator de $10 = 2 \cdot 5$ e, consequentemente, um fator de 5. No caso de $P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 10$, os únicos fatores 5 vêm do 5 e do 10, logo esse número P possui dois zeros terminais.

(b) Em um produto desse tipo, cada fator par fornece ao menos um fator 2 ao produto final. Então, para se obter o número de zeros terminais, basta contar os fatores 5, que são em menor número. No caso do produto de todos os números naturais de 1 a 2014 o número de fatores múltiplos de 5 pode ser obtido da divisão inteira $2014 \div 5 = 402$ (com resto 4). Além disso, cada fator múltiplo de $25 = 5^2$ contribui com mais um fator de 5 não contado anteriormente, ou seja, $2014 \div 25 = 402 \div 5 = 80$ e sobram 14. De maneira análoga, cada múltiplo de $125 = 5^3$ menor que 2014 contribui com mais um fator de 5 ainda não contabilizado, com $2014 \div 125 = 80 \div 5 = 16$ e sobram 14. Por fim, cada múltiplo de $625 = 5^4$ contribui com mais um fator de 5 não contabilizado anteriormente e $2014 \div 625 = 16 \div 5 = 3$ e sobram 139. Portanto, o número de zeros terminais é $402 + 80 + 16 + 3 = 501$.

2. *Considerando o algoritmo da divisão no conjunto dos números inteiros positivos, ...*

(a) O maior resto possível na divisão por d é $d - 1$. Assim, $2014 = 12d + (d-1) = 13d - 1 \quad \Rightarrow \quad d = 2015/13 = 155$.

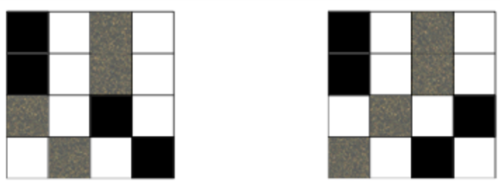
(b) Devemos determinar os números n, inteiros positivos, tais que $n = 17q + q^2$, onde $q^2 < 17$, por ser o resto da divisão. Assim só há quatro possibilidades, $q = 1, 2, 3$ ou 4. Portanto, n pode ser 18, 38, 60 ou 84.

3. *Dividindo-se um quadrado maior em vários quadradinhos menores, considere a tarefa de pintar de preto alguns dos quadradinhos...*

(a) Para facilitar a referência aos diferentes quadrados, podemos nos referir ao quadrado maior como tabuleiro e enumerar suas linhas e colunas com letras e números como indica a figura a seguir. Diante disto, não é possível colorir o tabuleiro **(I)**. Note que, como as casas A1 e B1 já estão pintadas de preto, as casas A2 e B2 devem estar pintadas de branco, para termos exatamente 2 casas de cada cor neste quadrado 2×2, o que implica também que as casas A3 e B3 devem ser pintadas de preto . Analogamente, como D3 e D4 já estão pintadas de preto, automaticamente devemos ter C3 e C4 brancas, donde B3 e B4 devem ser pretas. Concluímos que o quadrado 2×2 localizado no canto superior direito terá 3 quadrados pretos, o que não é permitido.

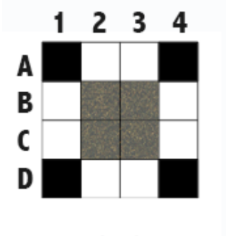
(I)

Os tabuleiros **(II)** e **(III)** podem ser pintados como na figura a seguir.



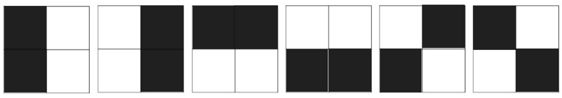
(II) **(III)**

Para o tabuleiro **(IV)** também não é possível preencher os quadrados segundo a regra. Se B1 for pintado de preto, pelo mesmo argumento usado para o tabuleiro **(I)**, A2 e B2 devem ser brancos e A3 e B3 teriam que ser pretos, o que conflita com A4 já estar pintado de preto. O mesmo argumento vale para C1, e também A2 e A3, que não podem ser pintados de preto. Mantendo todos estes em branco, B2, B3 e C2 deveriam ser todos pretos, o que viola a regra.



(IV)

(b) O tabuleiro **(I)** pode ser pintado exatamente de 6 maneiras:



Para o tabuleiro 3×3, vamos dividir a contagem em dois casos:

1. Se tivermos pelo menos duas casas adjacentes na 1ª coluna pintadas da mesma cor, ou seja em $2^3 - 2$ casos, então devemos pintar a 2ª coluna com as cores opostas à da 1ª, senão iríamos produzir quadrados 2×2 com mais que duas casas da mesma cor. Desta forma, o mesmo procedimento deve ser feito para pintar a 3ª coluna. Logo, quando pintamos a 1ª coluna, neste caso, estamos determinando todas as outras colunas, donde temos $2^3 - 2 = 6$ maneiras possíveis.

2. Caso a 1ª coluna seja pintada com cores alternadas, onde temos 2 possibilidades, a 2ª coluna também deve ser pintada com cores alternadas, não necessariamente opostas à da 1ª coluna. O mesmo também vale para a 3ª coluna. Assim, para cada coluna temos 2 possibilidades, o que nos dá $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ configurações possíveis.

Portanto, no total, temos $6 + 8 = 14$ maneiras distintas de pintar o tabuleiro 3×3 de modo que quaisquer quadrados 2×2 tenha exatamente duas casas brancas e duas casas pretas.

4. *Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda...*

Cada mulher à mesa tem à sua direita um homem ou uma mulher. Como 7 das mulheres têm uma mulher à sua direita, e 12 mulheres têm um homem à sua direita, são 19 mulheres ao todo. Por outro lado, decorre destas condições que exatamente 7 das mulheres estão à direita de mulheres e as outras 12 tem que estar à direita de homens. Como esta quantidade de 12 homens (que tem mulheres à direita) é 3/4 do total, a quantidade de homens é 16. Portanto, estão sentados à mesa $19 + 16 = 35$ pessoas.

5. *No conjunto dos números naturais, determine...*

(a) $x + (x + 1) + (x + 2) = 24 \Rightarrow 3x + 3 = 24 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$, logo os três números só podem ser 7, 8 e 9.

(b) Se a soma é 23, os três números não podem ser todos maiores que 7. Portanto o menor deles é, necessariamente menor que 8. Além disso, como o produto é 360, cada um dos três números é um divisor de $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5$ e o menor dos números não pode ser 7.

Se o menor for 6, os outros dois devem somar 17 e seu produto deve ser $360/6 = 60 = 4 \cdot 3 \cdot 5$, o que não é satisfeito por nenhum dos possíveis pares de números maiores ou iguais a 6 e que somam 17 (6 e 11; 7 e 10 ou 8 e 9).

Se o menor for 5, os outros dois devem somar 18 e seu produto deve ser $360/5 = 72 = 8 \cdot 9$. Examinando os possíveis pares, já descartando os que não dividem 72, encontra-se apenas o 6 e 12, que fornece o trio 5, 6 e 12.

Se o menor for 4, os outros dois devem somar 19 e seu produto deve ser $360/4 = 90 = 2 \cdot 9 \cdot 5$. Examinando os possíveis pares, já descartando os que não dividem 90, encontra-se apenas o 9 e 10, que fornece o trio 4, 9 e 10.

Se o menor for 3, os outros dois devem somar 20 e seu produto deve ser $360/3 = 120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Examinando os possíveis pares, já descartando os que não dividem 120, observa-se que mesmo para o 10 e 10, que tem o maior produto, esse produto não chega a 120.

Para as outras duas possibilidades, ou seja, o menor dos três números ser 2 ou 1, a situação fica ainda menos favorável, pois o produto dos outros dois teria que ser 180 ou 360 enquanto sua soma teria que ser 21 ou 22, respectivamente.

Portanto, os únicos trios cuja soma é 23 e o produto 360 são $\{4, 9, 10\}$ e $\{5, 6, 12\}$.

6. *Em qualquer quadrado, o maior círculo que se pode desenhar em seu interior ocupa, aproximadamente, 11/14 da área do quadrado...*

A área de **A** pode ser vista como 1/4 da área que resta de um quadrado de lado 28 quando deste se retira um círculo inscrito (o maior círculo possível, como descrito no enunciado da questão), ou seja,

$$\text{Área}(\mathbf{A}) \approx \frac{1}{4}\left(28^2 - \frac{11}{14} \cdot 28^2\right) = 42\,\text{cm}^2.$$

Para a região **B**, é conveniente dividir o quadrado da figura em quatro quadrados menores, por uma linha vertical e outra horizontal ambas passando pelo centro do quadrado original. Assim, a área da região **B** pode ser obtida subtraindo-se da área do quarto de círculo maior na figura (que é 11/14 de 14^2, como observado no cálculo de **A**) a área de um quadrado de lado 7 e as de dois quartos de círculo de raio 7, que podem ser obtidas como no cálculo da área **A**. Assim,

$$\text{Área}(\mathbf{B}) \approx \frac{11}{14} \cdot 14^2 - 7^2 - 2\frac{11}{14} \cdot 7^2 = 28\,\text{cm}^2.$$