UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Campus II (Samambaia)

SEMESTRE	CÓDIGO	DISCIPLINA	TURMA	CURSO
2013-0		Tópicos de Análise na Reta		Verão
Professor	**Lista de Exercícios**	**Sala, Local e Data**	**Período**	**Nível**
Félix Gómez	Terceira	B1-A 204; GO, 21/01/2013		

1 Derivabilidade num Intervalo Aberto

1.] Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$ e que f' é uma função definida em $\mathbb{R}$ plea correspondência $f'(x) = 1$ para todo $\mathbb{R}$.

2.] Seja C qualquer número fixado e f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = C$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e f' é uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.] Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado e seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f' existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $Rf'(0) \neq Lf'(0)$.

5.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ pela correpondência

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Mostre que $Rf'(0) \neq Lf'(0)$ e f é derivável em qualquer outro ponto.

6.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(0)$ existe e seu valor é zero. Que acontece com $f'(x)$ quando $x \neq 0$?

7.] Seja f definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é derivável em todos os pontos excepto em $x = 0$. Também, mostre que $Rf'(0) = 1$ e $Lf'(0) = -1$.

8.] Seja f definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Mostre que f não é derivável nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ e é derivável nos outros pontos.

9.] Seja f definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = |x-2| + |x| + |x+2| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Mostre que f não é derivável nos pontos $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$ e é derivável nos outros pontos.

10.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ pela correpondência

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Mostre que f não é derivável em $x = 0$ e é derivável em qualquer outro ponto.

11.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = \begin{cases} x\,\dfrac{e^{-1/x} - e^{1/x}}{e^{-1/x} + e^{1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que f não é derivável em $x = 0$ e que $Rf'(0) = 1$ e $Lf'(0) = -1$.

12.] Seja f uma função com domínio D e seja g uma função definida em D por $g(x) = xf(x)$ para todo $x \in D$. Mostre que se f é contínua em $x = 0$ então g é derivável em $x = 0$.

2 Derivabilidade e Continuidade

1.] Seja f definida em um intervalo I. Se f é derivável num ponto $x_0 \in I$. Mostre que f contínua em x_0.

2.] Forneça um exemplo de forma que a recíproca do exercício anterior não é válida.

3.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que f' é contínua em $\mathbb{R}$ porém não é derivável em $x = 0$.

4.] Mostre que a função f definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é derivável em $\mathbb{R}$ porém não é contínua em $x = 0$.

3 Álgebra de Derivadas

1.] Se a função f é derivável num ponto x_0. Mostre que para cada número real k, a função kf também é derivável em x_0 e

$$(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$$

2.] Sejam f e g duas funções definidas sobre um intervalo I. Se f e g são deriváveis em $x_0 \in I$. Mostre que $f + g$ é derivável em x_0 e

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3.] Sejam f e g duas funções definidas sobre um intervalo I. Se f e g são deriváveis em $x_0 \in I$. Mostre que fg é derivável em x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4.] Seja f uma função derivável num ponto x_0 e considere $f(x_0) \neq 0$. Mostre que a função $1/f$ também é derivável em x_0 e

$$(1/f)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

5.] Sejam f e g funções definidas sobre um intervalo I. Se f e g são deriváveis em $x_0 \in I$ e se $g(x_0) \neq 0$. Mostre que f/g é derivável em x_0 e

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

6.] Sejam f e g funções tal que a imagem de f esta contida no domínio de g. Se f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$. Mostre que $g \circ f$ é derivável em x_0, e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

7.] Se f e g são duas funções tendo o mesmo domínio D e se $f + g$ é derivável em $x_0 \in D$, é necessário que f e g sejam ambas deriváveis em x_0?

8.] Se f e g são duas funções tendo o mesmo domínio D e se fg é derivável em $x_0 \in D$, é necessário que f e g sejam ambas deriváveis em x_0?

9.] Se a função f é derivável em x_0, então mostre que $|f|$ é derivável em x_0, sempre que $f(x_0) \neq 0$.

10.] Mostre com um exemplo que se $f(x_0) = 0$, então f pode ser derivável em x_0 e $|f|$ pode não ser derivável em x_0.

4 Derivadas da Função Inversa e Resultado de Darboux

1.] Seja f uma função contínua e bijetora definida num intervalo I e seja f derivável em x_0 com $f(x_0) \neq 0$. Então, mostre que a inversa da função f é derivável em $f(x_0)$ e sua derivada em $f(x_0)$ é dada por $1/f'(x_0)$.

2.] Seja f definida e derivável em $[a, b]$. Se $f'(a)f'(b) < 0$, então mostre que existe um número real C entre a e b tal que $f'(C) = 0$. (Este resultado é conhecido como o Teorema de Darboux)

3.] Seja f definida e derivável em $[a, b]$, e se K é qualquer número real entre $f'(a)$ e $f'(b)$, então mostre que existe um número real C entre a e b tal que $f'(C) = K$.

4.] Se f é definida e derivável num intervalo, mostre que a imagem de f' é um intervalo.

5.] Seja f definida e derivável em $[a,\, b]$, $f(a) = f(b) = 0$ e $f'(a)$ e $f'(b)$ do mesmo sinal, então mostre que f deve-se anular ao menos uma vez em $]a,\, b[$.

Sugestão. Como se faz na prova do Torema de Darboux, primeiro mostre que para alguns h_1 e $h_2 > 0$ os valores $f(a + h_1)$ e $f(b - h_2)$ tem sinais opostos.

6.] Se f é derivável em $[a,\, b]$, $f(a) = f(b) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para qualquer $x \in]a,\, b[$, então mostre que $f'(a)$ e $f'(b)$ devem ser de sinais opostos.

7.] Se f e g são duas funções tendo o mesmo domínio D, se f e g são deriváveis em $x_0 \in D$ e se $f(x_0) \neq g(x_0)$, então prove que cada uma das funções $\max\{f,\ g\}$ e $\min\{f,\ g\}$ é derivável em x_0. O que acontece se $f(x_0) = g(x_0)$?