UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Instituto de Matemática e Estatística - IME

Campus II (Samambaia)

SEMESTRE	CÓDIGO	DISCIPLINA	TURMA	CURSO
2013-0		Tópicos de Análise na Reta		Verão
Professor	**Lista de Exercícios**	**Sala, Local e Data**	**Período**	**Nível**
Félix Gómez	Segunda	Bl-A 204; GO, 14/01/2013		

1 Funções Contínuas

1.] Mostre: A função definida f no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é contínua em p se somente se para toda sequência $\{p_n\} \subset I$ a qual converge à p, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p).$$

2.] Utilize a caracterização de continuidade por sequências para mostrar as seguintes afirmações

(a) Seja c um número real qualquer e considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$

(c) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$

(d) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \text{ é racional} \\ -1 & \text{se} \quad x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Mostre que f é descontínua em cada ponto de $\mathbb{R}$.

(e) Seja f uma função definida em $[-1, 1]$ pela correspondência

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se} \quad x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Mostre que f é contínua unicamente em $x = 0$.

(f) Seja f uma função definida em $]0, 1[$ pela fórmula

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \text{ é irracional} \\ \dfrac{1}{q} & \text{se} \quad x = \dfrac{p}{q}; \quad p,\ q > 0, \text{ inteiros e } (p,\ q) = 1 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em cada ponto irracional e descontínua em cada ponto racional.

(g) Seja f uma função definida em $[0, \infty[$ pela fórmula

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \qquad \text{para todo } x \geq 0$$

e pode facilmente escrita na seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em todos os pontos excepto em $x = 1$.

(h) Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula, $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(i) Seja f uma função definida em $[0, \infty[$ pela fórmula

$$f(x) = [x] = \text{função maior inteiro}, \quad \text{para todo} \quad x \geq 0$$

Mostre que a função f não é contínua em $x = 1, 2, 3, \ldots$ e é contínua em qualquer outro ponto.

(j) Se f é contínua em x_o e k é uma constante qualquer, então kf é contínua em x_o. Pode considerar separadamente os casos $k = 0$ e $k \neq 0$.

(k) Se f e g são contínuas em x_o, o mesmo acontece com fg.

3.] Mostre: A função f definida em $\mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ se e somente se para cada conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}$, a imagem inversa $f^{-1}(G)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$.

4.] Mostre: A função f definida em $\mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ se e somente se para cada conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$.

5.] Demonstre as seguintes afirmações

(a) Se as funções f e g são contínuas em x_o, então $f - g$ é contínua em x_o

(b) Se a função g é contínua em x_o e $g(x_o) \neq 0$, então $\dfrac{1}{g}$ é contínua em x_o.

(c) Se as funções f e g são contínuas em x_o e $g(x_o) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em x_o.

6.] Se a função f é contínua em x_0 e $\lim_{t \to t_0} g(t) = x_0$ e t_0 é um ponto de acumulação do domínio de $f \circ g$, então, mostre que

$$\lim_{t \to t_0} (f \circ g)(t) = f(x_0).$$

7.] Se a função g é contínua em x_o e a função f é contínua em $g(x_o)$, então a função $f \circ g$ é contínua em x_o.

8.] Mostre: Se a função f é uma função contínua em x_o e com $a < f(x_o) < b$, então existe um número $\delta > 0$ tal que

$$a < f(x) < b \quad \text{para todo } x \in D(f) \quad \text{satisfazendo} \quad |x - x_o| < \delta.$$

9.] Mostre: Se f é uma função contínua em x_o e $f(x_o) > 0$ $(f(x_o) < 0)$, então existe um número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0) \text{ sempre que} \quad x \in D(f) \quad \text{satisfazendo} \quad |x - x_o| < \delta.$$

10.] Demonstre que se $f(x) = x^{1/3}$, então é contínua em zero.

11.] Demostre que se $f(x) = x$ para $x \geq 0$ e não está definida para $x < 0$, então f é contínua em zero.

12.] Suponha que se f é uma função cujo domínio consiste dos números inteiros, $\mathbb{Z}$. Demostre que f é contínua em cada ponto de seu domínio.

Sugestão: Neste caso, o que acontece na definição quando se escolhe $\delta \leq 1$?

13.] Mostre que a função cosseno é contínua no intervalo $]-\infty,\ \infty[$.

14.] Mostre que as seguintes funções são contínuas no intervalo $]-\infty,\ \infty[$

a) $f(x) = \operatorname{sen}(Ax + B)$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

15.] Mostre que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $]-\infty,\ \infty[$.

16.] É a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

contínua em $]-\pi/2,\ \pi/2[$?

17.] Encontre os pontos (se houver) onde a função f não é contínua se

a) $f(x) = \operatorname{cotg} x$

b) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 2x^2 + 4x}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x + 1}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se} \quad x \in]-\infty,\ 3[\\ 2x + 1 & \text{se} \quad x \in [3,\ \infty[\end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in]-\infty,\ 0] \\ x & \text{se} \quad x \in]0,\ 1[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [1,\ \infty[\end{cases}$

18.] Mostre que a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $]-\infty,\ \infty[$.

19.] Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} ah}{h} = a$$

Sugestão: Escreva a função, para $h \neq 0$ como $\dfrac{\operatorname{sen} ah}{h} = af(ah)$ onde f é a função definida no exercício anterior.

20.] Seja f uma função definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = [x]$ onde $[x]$ denota a função maior inteiro não excedendo x. Mostre que f é descontínua nos pontos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e é contínua nos outros pontos.

21.] Seja f função definida em $\mathbb{R}$ pela lei de correspondência $f(x) = x - [x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Estude a continuidade de f nos pontos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

22.] Estude a continuidade em $x = 0$ para a função f em cada um do seguintes casos

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

23.] Mostre que a função f definida em $\mathbb{R}$ pela correspondência

$$f(x) = \begin{cases} x\,\dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$

24.] Mostre que a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

25.] Examine a continuidade da função f no seguintes casos,

a) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

2 Tipos de Descontinuidades

1.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $x = 0$. Classifique o tipo de descontinuidade.

2.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $x = 0$. Classifique o tipo de descontinuidade.

3.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $x = 0$. Classifique o tipo de descontinuidade.

4.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $x = 0$. Classifique o tipo de descontinuidade.

5.] Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $x = 0$. Classifique o tipo de descontinuidade.

6.] Seja f uma função definida em $[0,\, 1]$ pela lei de correspondência $f(x) = [1-x^2]$ onde $[x]$ denota a função maior inteiro e pode ser escrita da forma

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que não é contínua em $x = 0$. Classifique o tipo de descontinuidade.

7.] Seja a função f definida por

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & \text{quando} \quad -1 \leq x < 1 \\ f(x+2) = f(x) & \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Mostre que os únicos pontos de descontinuidade são da forma $x = 2m+1$, onde $m \in \mathbb{Z}$.

3 Funções Contínuas em um Intervalo

1.] Mostre que toda função f definida e contínua num intervalo fechado é limitada superiormente. Isto é, se f é contínua em $I = [a,\, b]$, então existe um número real $\mathfrak{U}$ tal que

$$f(x) \leq \mathfrak{U} \quad \text{para todo} \quad x \in I$$

2.] Mostre que se f é contínua em $[a,\, b]$, então é limitada inferiormente em $[a,\, b]$.

3.] Mostre que se f é contínua em $[a,\, b]$, então é limitada em $[a,\, b]$.

4.] Seja a função f definida no intervalo $I =]0,\, 1]$ pela lei de correspondência $f(x) = 1/x$ para todo $x \in I$. Qual a razão de que não seja limitada superiormente.

5.] Mostre que toda função definida e contínua num intervalo fechado atinge seu supremo. Isto é, se f é contínua sobre un intervalo fechado $I = [a,\, b]$ e se $\mathfrak{U}$ o supremo de f em I, então existe um ponto $x_0 \in I$, tal que $f(x_0) = \mathfrak{U}$.

6.] Mostre que toda função definida e contínua num intervalo fechado atinge seu ínfimo. Isto é, se f é contínua sobre un intervalo fechado $I = [a,\, b]$ e se $\mathfrak{L}$ o ínfimo de f em I, então existe um ponto $x_0 \in I$, tal que $f(x_0) = \mathfrak{L}$.

7.] Considere as seguintes funções f e g definidas por

a) $f(x) = x, \quad \forall\, x \in [0,\, 1[$ $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Qual a razão de não existir um ponto no domínio $D(f)$ no qual f alcançe seu supremo. De maneira similar, qual razão de não existir um ponto em $D(g)$ no qual g alcançe seu ínfimo.

8.] Para cada um dos enunciados a seguir, forneça uma prova ou um contra-exemplo que justifique a sua resposta,

(a) Sejam f e g funções definidas num intervalo I. Se a soma $f+g$ é contínua em $p \in I$, então é necessário que f e g ambas sejam contínuas em p?

(b) Seja a função f definida no intervalo I, e seja $|f|$ contínua no ponto $p \in I$. Pode f falhar de ser contínua em p?

Sugestão: Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = -1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(c) Sejam f e g funções definidas num intervalo I. Se o produto fg é contínuo em $p \in I$, então devem f e g ser sempre contínuas em p?

(d) Seja f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x + 1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua excepto em $x = 0$.

(e) Mostre, considerando a função f definida em $[0,\, \infty[$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

que uma função limitada pode não alcançar seu supremo em qualquer ponto de seu domínio.

(f) Mostre que uma função contínua limitada em $\mathbb{R}$ pode alcançar seu supremo porém pode não alcançar seu ínfimo.

(g) Forneça um exemplo de uma função contínua limitada em $\mathbb{R}$ a qual atinge seu ínfimo porém não seu supremo.

(h) Forneça um exemplo de uma função contínua limitada em um intervalo a qual não atinge nem seu ínfimo e nem seu supremo.

9.] Seja f contínua em $[a,\, b]$ e seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente onde $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

4 Teorema do Valor Intermediário

1.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e seja x_0 tal que $a < x_0 < b$. Mostre que

(i) $f(a) < 0$ implica que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in [a,\; a+\delta_0[.$$

(ii) $f(x_0) < 0$ implica que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in]x_0 - \delta_0,\; x_0 + \delta_0[.$$

(iii) $f(b) < 0$ implica que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in]b - \delta_0,\; b].$$

2.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e seja x_0 tal que $a < x_0 < b$. Mostre que

(i) $f(a) > 0$ implica que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in [a,\; a+\delta_0[.$$

(ii) $f(x_0) > 0$ implica que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in]x_0 - \delta_0,\; x_0 + \delta_0[.$$

(iii) $f(b) > 0$ implica que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in]b - \delta_0,\; b].$$

3.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e $f(a) < 0 < f(b)$. Mostre que existe um ponto $x \in]a,\, b[$ tal que $f(x) = 0$.

4.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e $f(a) > 0 > f(b)$. Mostre que existe um ponto $x \in]a,\, b[$ tal que $f(x) = 0$.

5.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Mostre que existe um ponto $x \in]a,\, b[$ tal que $f(x) = 0$.

6.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e c é qualquer número real entre $f(a)$ e $f(b)$. Mostre que existe um número real $x \in]a,\, b[$ tal que $f(x) = c$. (Este resultado é conhecido como o Teorema do valor Intermediário)

7.] Se a função f é contínua em $[a,\, b]$ e c é qualquer número real entre $\sup[f]$ e $\inf[f]$. Mostre que existe um número real $x \in]a,\, b[$ tal que $f(x) = c$.

8.] Mostre que a imagem de um intervalo fechado sob uma função contínua é também um intervalo fechado.

9.] Considere a função f definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Porque razão a imagem de f não é um intervalo?

10.] A função f é contínua no intervalo $[0,\, 1]$ e suponha que assume unicamente valores racionais em todo o intervalo. Se $f(x) = 1/3$ quando $x = 1/2$, prove que $f(x) = 1/2$ em qualquer outro valor.

11.] Sejam f e g funções contínuas sobre o intervalo I, seja $f(x) \neq 0$ para qualquer $x \in I$ e seja $f^2(x) = g^2(x)$ para todo $x \in I$. Prove que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ ou $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$.

12.] Quantas funções contínuas existem em $\mathbb{R}$ as quais satisfazem $f^2(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Esboçar o gráfico de todas essas funções.

13.] Investigue e discuta a natureza da descontinuidade da função f definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \operatorname{sen} x}{1 + x^{2n}} \qquad \text{em} \qquad x = 1.$$

Mostre que $f(0)$ e $f(\pi/2)$ diferem em sinal e justifique ainda porque f não se anula no intervalo $[0,\ \pi/2]$.

14.] Demonstre que todo número real positivo v possui uma raiz cúbica.

15.] Demonstre que se v é um número real, positivo ou não, então existe um número real c, tal que $c^3 = v$.

16.] Dado um inteiro positivo v e um inteiro n, demonstre que há um número positivo c, tal que $c^n = v$.

5 Continuidade Uniforme

1.] Mostre que as seguintes funções definidas por

a) $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ b) $g(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$

não são uniformemente contínuas.

2.] É a função $f(x) = x^2$ uniformente contínua em $]0,\, 2[$?

3.] É a função f definida por $f(x) = x^3$ uniformemente contínua em $]0,\, 3[$?

4.] É a função $f(x) = 1/x$ uniformente contínua em $]0,\, 2[$?

5.] Mostre que se a função f é uniformemente contínua num intervalo I então ela é contínua em I.

6.] Mostre que se a função f é contínua no intervalo fechado e limitado $I = [a,\, b]$, então f é uniformemente contínua em I.

7.] Mostre que a função identidade $f(x) = x$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$

8.] Mostre que a função $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua em $[b,\, \infty[$ onde $b > 0$.

9.] Seja a função $f(x) = 1/x$. Em quais dos seguintes intervalos f é uniformemente contínua?

a) $]0,\, 1[$ b) $]0,\, \infty[$ c) $[1,\, 2]$ d) $[1,\, \infty[$

10.] Mostre que se existe um número positivo M tal que, para cada x e y em X,

$$|f(x) - f(y)| < M\,|x - y|$$

então f é uniformemente contínua em X.

11.] As seguinte funções f são uniformemente contínuas sobre os conjuntos X dados. Para $\varepsilon > 0$, encontre um número específico $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad y \in]x - \delta,\ x + \delta[\cap X.$$

a) $f(x) = x^3; \quad X = [0,\, 2]$ b) $f(x) = \sqrt{x}; \quad X = [2,\, 4]$

12.] Mostre que se $I \subset X$ e f é uniformemente contínua em X então f é uniformemente contínua em I.

13.] Se as funções f e g são uniformemente contínuas sobre um conjunto X mostre que $f+g$ é uniformemente contínua em X.

14.] Cada uma das seguintes funções é uniformemente contínua no intervalo dado. Em cada caso, explique que teoremas ou propriedades se utilizam. Se nenhuma delas se utiliza, demosntre a continuidade uniforme.

a) $f(x) = x^3$ em $[-1,\, 1]$ b) $f(x) = |x|$ em $[-1,\, 1]$

c) $f(x) = x$ em $]-\infty,\, \infty[$ d) $f(x) = |x|$ em $]-1,\, 1[$

e) $f(x) = x$ em $[0,\, 1[$

15.] Demostre que toda função contínua em $[a,\, b]$ é limitada em $[a,\, b]$.

16.] Mostre que toda função uniformemente contínua num domínio limitado é limitada.

17.] Seja a função definida por $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Será f uniformemente contínua em toda a reta real?

18.] Suponha que f é qualquer função cujo domínio é o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Z}$. Demostre que f é uniformemente contínua. **Sugestão:** Tentar $\delta = 1/3$.

19.] Suponha que f é uniformemente contínua em seu domínio Ω. Mostre que f é contínua em Ω.

20.] Em cada um dos seguintes exercícios, mostre que a função f é uniformemente contínua. Em cada caso encontre uma expressão para o δ dependendo do ε dado.

a) $f(x) = x^2$ em $[-1,\ 1]$ b) $f(x) = x^2$ em $[1,\ 4]$

c) $f(x) = x^3$ em $[0,\ 3]$ d) $f(x) = x^3$ em $]0,\ 1[$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ em $[0,\ 1]$ f) $f(x) = \sqrt{x}$ em $[1,\ 3]$.

21.] Mostre que a função f em cada dos seguintes exercícios é contínua, porém não é uniformemente contínua,

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $]0,\ 1[$ b) $f(x) = x^2$ em $[1,\ \infty[$

c) $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ em $]0,\ 2[$

22.] Mostre que se f é uma função contínua num semi-eixo $x \le c$, com limite L finito para $x \to +\infty$, então f é uniformemente contínua. Propriedade semelhante é válida para o caso $x \le c$ e limite M finito com $x \to -\infty$.

23.] Diz-se que uma função f satisfaz a condição de Lipschitz num intervalo I se existe uma constante η tal que

$$|f(x) - f(y)| \le \eta |x - y| \quad \text{para todo} \quad x,\ y \in I.$$

Mostre que toda função que satisfaz a condição de Lipschitz é uniformemente contínua, porém não é válida a recíproca.

24.] diz-se que uma função f é semi-contínua superiormente num ponto x_0, (de acumulação de seu domínio) se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \quad \text{e} \quad x \in]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[\quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

e é semi-contínua inferiormente num ponto x_0, (de acumulação de seu domínio se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \quad \text{e} \quad x \in]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[\quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

Mostre que uma função semi-contínua superiormente (inferiormente) num intervalo fechado I assume valor máximo (mínimo).

25.] Mostre que a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela correspondência $f(x) = x/|x|$ é contínua em seu domínio e não é uniformemente contínua nesse domínio.