

ISSN 2317-5591

Anais
Semana do IME/UFG

12 a 16 de Setembro de 2011

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás

Proceedings da XXV Semana do IME/UFG

Goiânia/GO, 12 a 16 de Setembro de 2011

O Instituto de Matemática e Física (IMF) da UFG realizou anualmente, no período 1986 a 1996, o evento científico denominado Semana do IMF. A partir de 1997, com a criação do Instituto de Matemática e Estatística (IME), o IME passou a realizar anualmente o evento denominado Semana do IME/UFG. Este evento, a partir do ano de 2009, passou a ser bienal.

A Semana do IME/UFG sempre conta com a presença de professores/pesquisadores e alunos de outras instituições de Goiás e do Brasil, promovendo, desta forma, um intercâmbio científico.

Ações como esta são de fundamental importância para o aprimoramento e formação de profissionais que atuam nas áreas de Matemática e Estatística. Este evento visa acelerar o desenvolvimento da Matemática e Estatística na região Centro-Oeste, estimulando a formação de novos profissionais da educação/pesquisa em Matemática e Estatística.

Proceedings da XXV Semana do IME/UFG

Goiânia/GO, 12 a 16 de Setembro de 2011

Comitê Científico

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva

Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva

Editores

Prof. Dr. Jhone Caldeira Silva

Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva

Arte

Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva

Prof. Dr. Rogerio de Queiroz Chaves

Os artigos assinados são da responsabilidade dos autores.

É permitida a reprodução, desde que seja citada a fonte.

SUMÁRIO

1	Textos Completos	1
1.1	Minicursos	1
2	Resumos Expandidos	128
2.1	Minicursos	128
2.2	Sessões Técnicas	171
2.3	Pôsteres	215
3	Resumos Simples	307
3.1	Conferências	307
3.2	Minicursos	321
3.3	Sessões Técnicas	323

CAPÍTULO 1

TEXTOS COMPLETOS

1.1 Minicursos

MC2 - Um Estudo Introdutório sobre Automorfismos Coprimos em Grupos Finitos

Jhone Caldeira, Fernando Soares Coutinho & Aline de Souza Lima (UFG)

MC5 - Brincando com Gráficos de Funções usando o GeoGebra

Tânia Carvalho (FACIP-UFU), Rosângela Maria da Silva (UFG) &

Flávio Raimundo de Souza (IFG)

MC7 - Cadeias de Markov e Aplicações

Valdivino Vargas Júnior (UFG)

MC10 - Sistemas Dinâmicos Suaves X Sistemas Dinâmicos Descontínuos: uma Introdução

Bruno Freitas & Durval Tonon (UFG)

MC11 - Uso do Maxima como Ferramenta no Ciclo Básico

Reginaldo de Jesus Santos (UFMG)

MC16 - Introdução à Análise Bayesiana

Marta Cristina Bianchi & David Henriques (UFG)

MC2 - Um Estudo Introdutório sobre Automorfismos Coprimos em Grupos Finitos

Jhone Caldeira, Fernando Soares Coutinho & Aline de Souza Lima (UFG)

Resumo

Sejam G um grupo finito e φ um automorfismo de G . Denotamos o *centralizador* de φ em G , ou subgrupo de pontos fixos de φ em G , por $C_G(\varphi) = \{x \in G : x^\varphi = x\}$. Se $C_G(\varphi) = 1$, dizemos que φ é *livre de pontos fixos*. O automorfismo φ é dito *coprimo* quando sua ordem é coprima com a ordem do grupo, isto é $(|G|, |\varphi|) = 1$. É bem conhecido que a estrutura de um grupo finito está intimamente relacionada com propriedades dos subgrupos de pontos fixos de automorfismos do grupo. Autores reconhecidos obtiveram resultados interessantes a partir desta relação. Um importante resultado neste sentido afirma que se G admite um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima p , então G é nilpotente (Thompson) e, além disso, a classe de nilpotência de G é limitada por uma função que depende apenas de p (Higman). Muitos estudos vem sendo realizados a fim de obter novos resultados, principalmente via abordagens de centralizadores e automorfismos coprimos. Neste mini curso, desejamos apresentar de forma introdutória problemas correlatos e discutir particularmente a ação de p' -automorfismos em p -grupos finitos.

Conceitos Fundamentais

O Conceito de Grupo

Definição 1.1.

1. Um conjunto G com uma operação binária \cdot é dito um grupo se:

(i) a operação é associativa, isto é: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para todos $x, y, z \in G$;

(ii) em G existe um elemento 1 , chamado identidade, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, para todo $x \in G$;

(iii) para cada $x \in G$, existe um elemento $y \in G$, chamado inverso de x , tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

Subgrupos

Definição 1.2. Um subconjunto $H \neq \emptyset$ de um grupo G é dito um subgrupo de G se $x \in H$ implica $x^{-1} \in H$ e $x, y \in H$ implica $xy \in H$.

Notação: $H \leq G$.

Proposição 1.3. Se X é um subconjunto de um grupo G , então existe um menor subgrupo H de G contendo X , isto é, se $X \subset S$ e $S \leq G$ então $H \leq S$.

Demonstração.

· Há subgrupos de G contendo X .

De fato, $G \leq G$ e $G \supset X$. Definamos H como a interseção de todos os subgrupos de G que contêm X . Assim, H é subgrupo de G e $X \subset H$.

· Agora, se $S \leq G$ e $X \subset S$, então S é um dos subgrupos de G que se intersectam para formar H . Portanto, $H \leq S$ e, assim, H é o menor subgrupo de G contendo X . ■

Definição 1.4. Se X é um subconjunto de um grupo G , então o menor subgrupo de G contendo X é chamado subgrupo gerado por X .

Notação: $\langle X \rangle$.

Note que:

$$(i) \langle X \rangle = \bigcap_{S \leq G, X \subset S} S.$$

(ii) Se $x = \{a\}$, então $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ é o subgrupo cíclico gerado por a .

(iii) Em geral, $\langle X \rangle$ é o conjunto de todos os elementos da forma

$$x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k}, \quad x_i \in X, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad k \geq 0. \quad (1.1)$$

Seja S o conjunto de todos os elementos desta forma. Claramente S é subgrupo de G e $X \subseteq S$. Portanto, $\langle X \rangle \subseteq S$. Mas é óbvio que $S \subseteq \langle X \rangle$.

Proposição 1.5. *Se H e K são subgrupos de um grupo G , então HK é um subgrupo de G se, e somente se, H e K permutam. Neste caso, $HK = \langle H, K \rangle = KH$.*

Demonstração. É um bom exercício mostrar que $HK \leq G$ se, e somente se, $HK = KH$. Agora, supondo HK subgrupo, temos que $\langle H, K \rangle \leq HK$. Já a inclusão $HK \subseteq \langle H, K \rangle$ segue de (1.1). Assim, $HK = \langle H, K \rangle$. Veja:

· Seja $x \in \langle H, K \rangle$. Então x é da forma $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_j^{\varepsilon_j}$, onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $x_i \in H \cup K$.

Um elemento de HK é da forma $y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_r^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_j = \pm 1$ e y_i é produto de elementos de H ou de K ou da forma hk .

$\therefore \langle H, K \rangle \leq HK$.

· Seja $x \in HK$. Logo x é da forma $(h_1k_1)^{\varepsilon_1} \cdots (h_s k_s)^{\varepsilon_s}$, onde $\varepsilon_j = \pm 1$. Claramente, $HK \leq \langle H, K \rangle$.

■

Subgrupos Normais

Definição 1.6. *Um subconjunto $H \leq G$ é dito normal se $gHg^{-1} = H$, para todo $g \in G$.*

Notação: $H \trianglelefteq G$ e $H^g = g^{-1}Hg$.

Proposição 1.7. *Se H é um subgrupo de G , então são equivalentes:*

(i) $gH = Hg$, para todo $g \in G$.

- (ii) $g^{-1}Hg = H$, para todo $g \in G$.
- (iii) $g^{-1}hg \in H$, para todos $g \in G$ e $h \in H$.

Subgrupos Totalmente Invariantes e Subgrupos Característicos

Definição 1.8.

- (i) Um subgrupo H de um grupo G é dito totalmente invariante em G se $H^\alpha \leq H$, para todo $\alpha \in \text{End}G$.
- (ii) H é dito característico em G se $H^\alpha \leq H$, para todo $\alpha \in \text{Aut}G$.

Notação: $H \text{ char } G$.

Observações.

- (i) Como a conjugação por um elemento fixado $a \in G$, $g \mapsto g^a = a^{-1}ga$, é um automorfismo de G , segue que todo subgrupo característico de G é em particular normal em G .
- (ii) $Z(G) \text{ char } G$.

De fato, se $\alpha \in \text{Aut}G$ e se $x \in Z(G)$ temos que:

$$xg = gx, \forall g \in G \Rightarrow x^\alpha g^\alpha = g^\alpha x^\alpha, \forall g \in G \Rightarrow x^\alpha \in Z(G),$$

pois $G^\alpha = G$ (g^α percorre todo o grupo G).

- (iii) Em geral, $Z(G)$ não é totalmente invariante.

(Por exemplo, o centro de $A_4 \times \mathbb{Z}_2$ não é totalmente invariante.)

- (iv) Um subgrupo normal H de G não é necessariamente característico.

Proposição 1.9. *Seja $A \leq \text{Aut}G$ e seja H um subgrupo A -invariante de G . Então:*

(i) Para cada $\alpha \in A$, a restrição $\alpha|_H$ é um automorfismo de H e a aplicação $\alpha \mapsto \alpha|_H$ é um homomorfismo de A em $\text{Aut}H$.

(ii) Se $H \trianglelefteq G$, então a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : G/H &\longrightarrow G/H \\ Hx &\longmapsto (Hx)^{\bar{\alpha}} = H(x^\alpha), \end{aligned}$$

para $x \in G$, é um automorfismo e a aplicação $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ é um homomorfismo de A em $\text{Aut} G/H$.

(iii) $N_G(H)$ e $C_G(H)$ são A -invariantes.

Observações.

- $\bar{\alpha}$ é chamado automorfismo de G/H induzido por α .
- Se K é o núcleo do homomorfismo de A em $\text{Aut}H$, então A/K é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}H$.
- Se $H \trianglelefteq G$, então podemos tratar A como um grupo de automorfismos de G/H .

Ideia da Demonstração:

H A -invariante: $H^\alpha \leq H$, para todo $\alpha \in A$

- (i)
- $\alpha : G \rightarrow G$ homomorfismo bijetor
 - $\bar{\alpha} = \alpha|_H, \bar{\alpha} : H \rightarrow H$ homomorfismo bijetor
 - $\varphi : A \rightarrow \text{Aut}H$ é homomorfismo

$$\alpha \mapsto \bar{\alpha} = \alpha|_H$$

$$- (\alpha_1\alpha_2)^\varphi = \alpha_1^\varphi\alpha_2^\varphi$$

De fato,

$$- (\alpha_1\alpha_2)^\varphi = \overline{\alpha_1\alpha_2}, \text{ onde } \overline{\alpha_1\alpha_2} : H \rightarrow H$$

$$h \mapsto h^{\alpha_1\alpha_2}$$

$$- \alpha_1^\varphi \alpha_2^\varphi = \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2}, \text{ onde } \overline{\alpha_1} : H \longrightarrow H \text{ e } \overline{\alpha_2} : H \longrightarrow H$$

$$h \longmapsto h^{\alpha_1} \qquad h \longmapsto h^{\alpha_2}$$

$$\text{Assim, } h^{\overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2}} = (h^{\overline{\alpha_1}})^{\overline{\alpha_2}} = (h^{\alpha_1})^{\overline{\alpha_2}} = (h^{\alpha_1})^{\alpha_2} = h^{\alpha_1 \alpha_2}.$$

(ii) · $H \trianglelefteq G$

$$\cdot \overline{\alpha} : G/H \longrightarrow G/H$$

$$Hx \longmapsto (Hx)^{\overline{\alpha}} = H(x^\alpha)$$

$$\cdot \overline{\alpha} \in \text{Aut } G/H$$

· $\overline{\alpha}$ é homomorfismo;

$$[(Hx)(Hy)]^{\overline{\alpha}} = [H(xy)]^{\overline{\alpha}} = H(xy)^\alpha = H(x^\alpha y^\alpha) = H(x^\alpha)H(y^\alpha) = (Hx)^{\overline{\alpha}}(Hy)^{\overline{\alpha}}$$

· $\overline{\alpha}$ é injetiva;

$$H(x^\alpha) = H(y^\alpha) \Rightarrow (x^\alpha)^{-1}y^\alpha \in H \Rightarrow (x^{-1}y)^\alpha \in H = H^\alpha \text{ (}\alpha|_H \text{ é automorfismo de } H) \Rightarrow (x^{-1}y)^\alpha = h^\alpha, h \in H \Rightarrow x^{-1}y = h \text{ (}\alpha \text{ injetiva)} \Rightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow Hx = Hy.$$

· $\overline{\alpha}$ é sobrejetiva;

$$\text{Dado } Hy \in G/H, \text{ como } \alpha \in \text{Aut } G, \text{ existe } x \in G \text{ tal que } x^\alpha = y. \text{ Assim, } (Hx)^{\overline{\alpha}} = H(x^\alpha) = Hy.$$

· $\varphi : A \longrightarrow \text{Aut } G/H$ é homomorfismo

$$\alpha \longmapsto \overline{\alpha}$$

$$- (\alpha_1 \alpha_2)^\varphi = \alpha_1^\varphi \alpha_2^\varphi$$

De fato,

$$- (\alpha_1 \alpha_2)^\varphi = \overline{\alpha_1 \alpha_2}, \text{ onde } \overline{\alpha_1 \alpha_2} : G/H \longrightarrow G/H$$

$$(Hx)^{\overline{\alpha_1 \alpha_2}} \longmapsto Hx^{\alpha_1 \alpha_2} = H(x^{\alpha_1})^{\alpha_2}$$

$$- \alpha_1^\varphi \alpha_2^\varphi = \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2}, \text{ onde } \overline{\alpha_1} : G/H \longrightarrow G/H \text{ e } \overline{\alpha_2} : G/H \longrightarrow G/H$$

$$(Hx)^{\overline{\alpha_1}} \longmapsto Hx^{\alpha_1} \qquad (Hx)^{\overline{\alpha_2}} \longmapsto Hx^{\alpha_2}$$

$$\text{Assim, } (Hx)^{\overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2}} = (Hx^{\alpha_1})^{\overline{\alpha_2}} = H(x^{\alpha_1})^{\alpha_2} = (Hx)^{\overline{\alpha_1 \alpha_2}}.$$

(iii) Parte 1 – Denotemos $N_G(H) = \{g \in G : H^g \leq H\}$ por N .

$$\cdot (H^g)^\alpha = H^{g^\alpha}, \text{ pois } (H^g)^\alpha = (g^{-1}Hg)^\alpha = (g^{-1})^\alpha H^\alpha g^\alpha = (g^\alpha)^{-1} H^\alpha g^\alpha = H^{g^\alpha}.$$

· Sejam $\alpha \in A$ e $g \in N$. Temos: $H^{g^\alpha} = (H^g)^\alpha \leq H^\alpha \leq H \Rightarrow g^\alpha \in N$.

Parte 2 – Denotemos $C_G(H) = \{g \in G : h^g = h, \forall h \in H\}$ por C .

Seja $g \in C$. Assim, $gh = hg$, para todo $h \in H$. Se $\alpha \in A$, então $(gh)^\alpha = (hg)^\alpha$, donde, $g^\alpha h^\alpha = h^\alpha g^\alpha$. Por ser H A -invariante, a restrição $\alpha|_H \in \text{Aut}H$ e, assim, $H = H^\alpha$. Logo, $g^\alpha h' = h' g^\alpha$, para todo $h' \in H$. Portanto, $g^\alpha \in C$.

Proposição 1.10.

(i) “Totalmente invariante” e “característico” são relações transitivas (isto não vale para “normal”).

(ii) Se $H \text{ char } K$ e $K \trianglelefteq G$, então $H \trianglelefteq G$.

Demonstração.

(i) · Sejam $H, K \leq G$ e suponha que H é totalmente invariante em K e K é totalmente invariante em G . Assim,

$$H \text{ tot. inv. } K \Rightarrow H^\alpha \leq H, \forall \alpha \in \text{End}K,$$

$$K \text{ tot. inv. } G \Rightarrow K^\beta \leq K, \forall \beta \in \text{End}G.$$

Mas $\beta \in \text{End}G$ e K totalmente invariante em G implica que $\beta|_K \in \text{End}K$. Assim, $H^\beta = H^{\beta|_K} \leq H$. Daí, H é totalmente invariante em G .

· Sejam $H, K \leq G$ e suponha que $H \text{ char } K$ e $K \text{ char } G$. Temos:

$$H \text{ char } K \Rightarrow H^\alpha \leq H, \forall \alpha \in \text{Aut}K,$$

$$K \text{ char } G \Rightarrow K^\beta \leq K, \forall \beta \in \text{Aut}G.$$

Mas $\beta \in \text{Aut}G$ e $K \text{ char } G$ implica que $\beta|_K \in \text{Aut}K$. Assim, $H^\beta = H^{\beta|_K} \leq H$. Daí, $H \text{ char } G$.

(ii) Temos:

$$H \text{ char } K \Rightarrow H^\alpha \leq H, \forall \alpha \in \text{Aut}K,$$

$$K \trianglelefteq G \Rightarrow K^g \leq K, \forall g \in G.$$

Sabemos que a conjugação por um elemento fixado de G deixa K invariante e é um automorfismo de K . Definamos

$$\begin{aligned} \psi: G &\longrightarrow \text{Aut}K \\ g &\longmapsto \tau_g: K \longrightarrow K \\ & \quad x \longmapsto x^g. \end{aligned}$$

Assim, $H^g = H^{\tau_g} \leq H$. Portanto, $H \trianglelefteq G$.

■

Comutadores

Sejam G um grupo e $x_1, x_2, \dots, x_n, y \in G$.

Definição 1.11.

(i) O comutador de x_1 e x_2 é dado por $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 = x_1^{-1}x_1^{x_2}$.

(ii) Definimos um comutador simples de peso $n \geq 1$ recursivamente da seguinte forma:

$$[x_1] = x_1$$

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

Notação: $[x, {}_n y] = [x, y, \dots, y]$ (n cópias de y).

Proposição 1.12. Se G é um grupo e $x, y, z, t \in G$, então:

(i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;

(ii) $[x, y] = 1$ se, e somente se, $xy = yx$;

- (iii) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$;
- (iv) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][[x, z], y][y, z]$;
- (v) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][[x, y], z]$;
- (vi) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$;
- (vii) $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;
- (viii) $[x, y]z = z[x^z, y^z]$;
- (ix) $[x^y, z] = [x, z]^{[x, y]} [x, y, z]$;
- (x) $[x^{yz}, t] = [x^y, t]^{[x^y, z]} [x^y, z, t]$;
- (xi) $[x, y, z] = [x, y]^{-1} [x, y]^z$;
- (xii) Identidade de Hall-Witt: $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$.

Subgrupos Comutadores

· Dados dois subconjuntos H e K de um grupo G , denotamos por $[H, K]$ o subgrupo de G gerado pelo conjunto

$$\{[h, k] : h \in H, k \in K\},$$

ou seja,

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle.$$

· Também definimos

$$H^K = \langle h^k = k^{-1}hk : h \in H, k \in K \rangle.$$

· *Propriedade:* $[H, K] = [K, H]$.

Proposição 1.13. *Sejam X, Y subconjuntos e H um subgrupo de um grupo G . Então:*

- (a) $X^H = \langle X, [X, H] \rangle$;

(b) $[X, H]^H = [X, H]$;

(c) Se $H = \langle Y \rangle$, então $[X, H] = [X, Y]^H$.

Demonstração.

(a) Segue de $x^h = x[x, h]$.

(b) O subgrupo $[X, H]^H$ é gerado por todos $[x, h_1]^{h_2}$, onde $x \in X, h_1, h_2 \in H$. Como $[x, h_1]^{h_2} \stackrel{(v)}{=} [x, h_2]^{-1}[x, h_1 h_2]$, temos que $[x, h_1]^{h_2} \in [X, H]$. Assim, $[X, H]^H \leq [X, H]$.

O fato $[X, H] \leq [X, H]^H$ é óbvio.

(c) Por (b), $[X, H]^H = [X, H]$. Logo, basta mostrar que $[x, h] \in [X, Y]^H$, para todos $x \in X, h \in H$ (pois $[X, Y]^H \leq [X, H]^H = [X, H]$).

Podemos escrever $h = y_1^{\epsilon_1} \dots y_k^{\epsilon_k}$, onde $y_i \in Y$ e $\epsilon_i = \pm 1$. Temos:

· $[x, y_1^{-1}] \stackrel{(v_i)}{=} ([x, y_1]^{y_1^{-1}})^{-1} \in [X, Y]^H$, donde $[x, h] \in [X, Y]^H$ se $k = 1$.

· Seja $k > 1$ e tome $h' = y_1^{\epsilon_1} \dots y_{k-1}^{\epsilon_{k-1}}$. Então:

$$[x, h] = [x, h' y_k^{\epsilon_k}] \stackrel{(v)}{=} [x, y_k^{\epsilon_k}] [x, h']^{y_k^{\epsilon_k}},$$

um produto que pertence a $[X, Y]^H$ por indução sobre k .



Corolário 1.14. *Sejam X, Y subconjuntos, H e K subgrupos de um grupo. Se $H = \langle X \rangle$ e $K = \langle Y \rangle$, então $[H, K] = [X, Y]^{HK}$.*

Demonstração. Da proposição anterior, segue que $[X, Y]^{HK} = [Y, X]^{HK} = [Y, H]^K = [H, Y]^K = [H, K]$. ■

Lema 1.15 (Lema dos Três Subgrupos). *Sejam X, Y, Z subgrupos de um grupo G tais que $[X, Y, Z] = [Y, Z, X] = 1$. Então $[Z, X, Y] = 1$.*

Demonstração. Suponha $[X, Y, Z] = [Y, Z, X] = 1$. Para todos $x \in X, y \in Y, z \in Z$, temos que $[x, y^{-1}, z] = [y, z^{-1}, x] = 1$. Pela Identidade de Witt, segue que $[z, x^{-1}, y] = 1$. Mas $[Z, X, Y]$ é gerado pelo conjunto de todos os comutadores da forma $[z, x, y]$, com $x \in X, y \in Y$ e $z \in Z$. Também é gerado por todos $[z, x^{-1}, y]$ e, portanto, $[Z, X, Y] = 1$. ■

Ações

Sabemos, pelo Teorema de Cayley, que todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações. Para isto, se associa a cada elemento g de um grupo G a permutação $f_g \in S_G$ definida por $f_g(x) = gx$, para todo $x \in G$.

$$\begin{aligned} G &\rightarrow S_G \\ g &\mapsto f_g : G \rightarrow G, \end{aligned}$$

onde S_G é o conjunto das bijeções de G em G .

Ação de um Grupo Sobre um Conjunto

Definição 1.16. *Sejam G um grupo e M um conjunto. Dizemos que G age em M via α se existe um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow S_M$.*

Exemplo 1.17. Na demonstração do Teorema de Cayley, G age em si mesmo.

Exemplo 1.18. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K e seja $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V . Como todo elemento $v \in V$ pode ser escrito de modo único como combinação linear

$$v = \sum_{i=1}^n k_i v_i,$$

$k_i \in K, 1 \leq i \leq n$, podemos definir uma ação do grupo S_n em V da seguinte forma: dado $\alpha \in S_n$, definimos $f_\alpha : V \rightarrow V$ por

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i \right)^{f_\alpha} = \sum_{i=1}^n k_i v_{i\alpha}.$$

Como f_α aplica a base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sobre a base $\{v_{1\alpha}, v_{2\alpha}, \dots, v_{n\alpha}\}$, segue que f_α é bijetora, donde $f_\alpha \in S_V$ e, ainda,

$$\begin{aligned} \phi : S_n &\rightarrow S_V \\ \alpha &\mapsto f_\alpha \end{aligned}$$

é homomorfismo. De fato, sejam $\alpha, \beta \in S_n$. Temos:

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i \right)^{f_\alpha f_\beta} = \left(\sum_{i=1}^n k_i v_{i\alpha} \right)^{f_\beta} = \left(\sum_{i=1}^n k_i v_{(i\alpha)\beta} \right)$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i v_i \right)^{f_{\alpha\beta}} = \left(\sum_{i=1}^n k_i v_{i\alpha\beta} \right) = \left(\sum_{i=1}^n k_i v_{(i\alpha)\beta} \right).$$

Ação entre Grupos

Definição 1.19.

(i) Sejam G e L grupos. Uma ação de G em L é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}L$.

(ii) Uma ação é dita fiel se o seu núcleo é trivial.

Exemplo 1.20. A ação dada no Teorema de Cayley é fiel.

Exemplo 1.21 (Um grupo G agindo sobre si mesmo).

Sejam G um grupo e $x \in G$. Denote $\tau_x : G \rightarrow G$ a aplicação que leva g em $g^x = x^{-1}gx$. Sabemos que τ_x é um automorfismo interno de G . A coleção de todos estes automorfismos internos de G formam um subgrupo, denotado $\text{Inn}G$. Temos:

- a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Aut}G \\ x &\mapsto \tau_x \end{aligned}$$

é uma ação de G em G , pois $\tau_{xy} = \tau_x \tau_y$.

- se considerarmos

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : G &\rightarrow \text{Inn}G \\ x &\mapsto \tau_x \end{aligned},$$

temos um epimorfismo.

- $\ker\varphi = \{x \in G : \tau_x = id\} = Z(G)$. Assim, $\frac{G}{Z(G)} \simeq InnG$.

Exemplo 1.22 (Um grupo G agindo sobre seus subgrupos normais).

Sejam G um grupo, $x \in G$, $N \triangleleft G$. Denote $\sigma_x : N \rightarrow N$ a aplicação que leva $n \in N$ em $n^x = x^{-1}nx \in N$. É fácil ver que σ_x é um automorfismo de N ($\sigma_x \in AutN$).

Temos:

- a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow AutN \\ x &\mapsto \sigma_x \end{aligned}$$

é uma ação de G em N .

- $\ker\varphi = \{x \in G : \sigma_x = id\} = C_G(N)$. Assim, $\frac{G}{C_G(N)}$ é isomorfo a um subgrupo de $AutN$.

Exemplo 1.23 (Produto Semidireto de Grupos).

Consideremos dois grupos G e L e seja $\varphi : G \rightarrow AutL$ uma ação de G em L .

Se considerarmos o conjunto dos pares ordenados

$$G \times L = \{(g, l) : g \in G, l \in L\},$$

poderemos definir um produto em $G \times L$ que depende da ação φ :

$$(g_1, l_1)(g_2, l_2) = (g_1g_2, l_1l_2^{\varphi_{g_1}}), g_1, g_2 \in G, l_1, l_2 \in L.$$

Com isso, $G \times L$ é um grupo, onde o elemento identidade é $(1, 1)$ e o inverso do elemento (g, l) é $(g^{-1}, l^{-1\varphi_{g^{-1}}})$, pois:

$$\begin{aligned} (g, l)(1, 1) &= (g \cdot 1, l \cdot 1^{\varphi_g}) = (g, l \cdot 1) = (g, l) \\ (1, 1)(g, l) &= (1 \cdot g, 1 \cdot l^{\varphi_1}) = (g, l) \\ (g, l)(g^{-1}, l^{-1\varphi_{g^{-1}}}) &= (gg^{-1}, l(l^{-1\varphi_{g^{-1}}})^{\varphi_g}) = (gg^{-1}, ll^{-1}) = (1, 1) \\ (g^{-1}, l^{-1\varphi_{g^{-1}}})(g, l) &= (g^{-1}g, l^{-1\varphi_{g^{-1}}}l^{\varphi_{g^{-1}}}) = (g^{-1}g, (l^{\varphi_{g^{-1}}})^{-1}l^{\varphi_{g^{-1}}}) = (1, 1). \end{aligned}$$

Este é o *produto semidireto* de G e L , denotado por $G \times L$.

Exemplo 1.24 (Produto Direto de Grupos).

No caso em que a ação φ é trivial, o produto semidireto é, na verdade, o produto direto $G \times L$, pois temos que $l^{\varphi g} = l$, para todos $g \in G, l \in L$ e, assim, $(g_1, l_1)(g_2, l_2) = (g_1g_2, l_1l_2)$.

Exemplo 1.25 ($\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3$).

Consideremos $G = \langle g \rangle$ e $L = \langle l \rangle$ dois grupos cíclicos de ordem 2 e 3, respectivamente. Logo, $G \simeq \mathbb{Z}_2$ e $L \simeq \mathbb{Z}_3$. Sabendo que $x \mapsto x^{-1}$ define um automorfismo de L , consideremos a ação induzida

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Aut}L \\ g &\mapsto \varphi_g : L \rightarrow L \\ &x \mapsto x^{\varphi_g} = x^{-1}. \end{aligned}$$

Temos definido um produto semidireto $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3 = \{(1, 1), (1, l), (1, l^{-1}), (g, 1), (g, l), (g, l^{-1})\}$.

- $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3$ não é isomorfo a \mathbb{Z}_6 , pois não é abeliano:

$$(g, 1)(g, l^{-1}) = (gg, 1l^{-1\varphi_g}) = (1, l)$$

$$(g, l^{-1})(g, 1) = (gg, l^{-1}1^{\varphi_g}) = (1, l^{-1}).$$

- Resta que $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3 \simeq S_3$.

Exemplo 1.26 (Produtos Semidiretos Externos e Internos).

(i) No caso em que consideramos G e L dois grupos e uma ação $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}L$, ao definirmos em $G \times L$ o produto $(g_1, l_1)(g_2, l_2) = (g_1g_2, l_1l_2^{\varphi_{g_1}})$, diremos que $G \times L$ é o *produto semidireto externo* entre G e L associado a φ .

(ii) Agora consideremos G grupo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$, tais que $G = HN$ e $H \cap N = 1$. Neste caso, G é dito *produto semidireto interno* de N e H , $G = N \rtimes H$ ou $G = H \rtimes N$.

- Definindo um produto em $G = HN$:

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = h_1h_2n_1n_2^{h_1} \in HN \text{ (} H \text{ age sobre } N\text{)}.$$

(iii) Podemos fazer o mesmo considerando G grupo, $H, N \leq G$ tais que H age sobre N via φ .

Usando n^h para denotar n^{φ^h} , temos que:

- é possível identificar H com $\{h \cdot 1 : h \in H\}$ e N com $\{1 \cdot n : n \in N\}$;
- ambos são subgrupos de G e o segundo é normal em G , sendo que o primeiro não necessariamente é normal em G .

Extensões de Grupos

Definição 1.27. *Sejam G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Suponha que $N \simeq B$ e $G/N \simeq A$. Então dizemos que G é uma extensão de B por A .*

Observamos que A não necessariamente é subgrupo de G .

Exemplo 1.28. Sejam A e B grupos cíclicos de ordem 2. Vamos obter duas extensões distintas de B por A .

(i) Consideremos $K = \{1, a, b, ab\}$ o grupo de Klein. Temos:

$|K| = 4$ e K não é cíclico.

$N = \langle a \rangle = \{1, a\}$ é tal que $|N| = 2$, donde $N \simeq B, N \trianglelefteq K, |K/N| = 2, K/N$ é cíclico e $K/N \simeq A$. Logo K é extensão de B por A .

Observe que em K existe $H = \langle b \rangle = \{1, b\}$ tal que $|H| = 2$ e assim $H \simeq K/N \simeq A, H \cap N = 1$. Portanto, $K = \langle a \rangle \langle b \rangle$.

(ii) Consideremos C_4 o grupo cíclico de ordem 4: $C_4 = \{1, c, c^2, c^3\}$.

Temos: $N = \{1, c^2\}$ o subgrupo de C_4 cuja ordem é 2. N é cíclico, logo $N \simeq B$. Ainda, $N \trianglelefteq C_4, |C_4/N| = 2$, donde $C_4/N \simeq A$. Logo C_4 é uma extensão de B por A .

Observe que em C_4 não existe outro subgrupo de ordem 2 além de N . Assim, não há um subgrupo $H \neq N$ tal que H seja isomorfo a A .

Definição 1.29. *Um extensão G de B por A é dita split se G contém um subgrupo A_0 isomorfo a A tal que $G = BA_0$ e $B \cap A_0 = 1$.*

Exemplo 1.30.

1. K é uma extensão split de C_2 por C_2 e C_4 não é extensão split de C_2 por C_2 .
2. Se G é o produto semidireto interno $G = N \rtimes H$, então G é extensão split de N por H .

p -grupos

Seja p um primo.

Definição 1.31. *Um p -grupo é um grupo cuja ordem é uma potência de p .*

Relembremos algumas propriedades especiais de p -grupos finitos.

Teorema 1.32. *Sejam G um p -grupo finito e N um subgrupo normal não trivial de G . Então $N \cap Z(G) \neq 1$. Em particular, o centro de um p -grupo finito é não trivial.*

Demonstração. Como N é normal em G , G age sobre N por conjugação. Temos que $|orb_G(n)| = |G : C_G(n)|$, para todo $n \in N$. Sendo G um p -grupo, o comprimento de cada órbita é uma potência de p . Ainda, as órbitas de comprimento 1 correspondem aos elementos de N que comutam com todos os elementos de G , isto é, $N \cap Z(G)$. Como N é a união disjunta de suas órbitas, segue que

$$|N| = |N \cap Z(G)| + \sum |orb_G(n_i)|,$$

onde os n_i são os representantes das órbitas de comprimento maior que 1.

Portanto, módulo p , temos:

$$|N \cap Z(G)| \equiv 0 \pmod{p},$$

e assim, $N \cap Z(G) \neq 1$. ■

Corolário 1.33. *Seja G um p -grupo finito. Então todo subgrupo normal de G de ordem p é central em G .*

Teorema 1.34 (A Condição do Normalizador). *Seja G um p -grupo finito. Se $H < G$, então $H < N_G(H)$.*

Demonstração. Usaremos indução sobre $|G|$.

Se $|G| = p$, então o resultado é óbvio. Suponhamos $|G| > p$. Se $Z(G)$ não está contido em H , então $H < HZ(G) \leq N_G(H)$ e o resultado segue.

Agora assumamos que $Z(G) \leq H$. Como $Z(G) \neq 1$, pela hipótese de indução, $H/Z(G) < N_{G/Z(G)}(H/Z(G)) = N_G(H)/Z(G)$ e, conseqüentemente, $H < N_G(H)$. ■

Corolário 1.35. *Seja G um p -grupo finito. Se M é um subgrupo maximal de G , então M é normal em G e $|G : M| = p$.*

Definição 1.36 (Subgrupo de Frattini). *Para um grupo G , a interseção de todos os seus subgrupos maximais é chamada subgrupo de Frattini de G e é denotada por $\Phi(G)$.*

No caso em que G não possui subgrupo maximal, definimos $\Phi(G) = G$.

Observação.

Como a imagem de um subgrupo maximal sob um automorfismo de G é também um subgrupo maximal, $\Phi(G)$ é um subgrupo característico de G .

Definição 1.37. *Um elemento $g \in G$ é um não-gerador de G se sempre que $G = \langle X, g \rangle$, onde X é um subconjunto de G , tivermos $G = \langle X \rangle$.*

Teorema 1.38 (Frattini). *Em qualquer grupo G , o subgrupo de Frattini é igual ao conjunto de não-geradores de G .*

Demonstração.

(i) $\Phi(G) \subseteq \{\text{Não-Geradores de } G\}$

Caso 1: G não possui subgrupos maximais e, assim, $\Phi(G) = G$.

Sejam $g \in G$ e X um subconjunto de G tais que podemos supor que $\langle X, g \rangle = G$, mas $\langle X \rangle \neq G$.

Consideremos todos os subgrupos de G contendo X e não contendo g . A união destes não contém g . Pelo Lema de Zorn, há um subgrupo maximal M nesse sentido.

Agora, se $M < H \leq G$, então $g \in H$ e $H = G$, donde M é maximal em G , o que é uma contradição.

Caso 2: G admite subgrupos maximais.

Sejam $g \in \Phi(G)$ e seja $X \subseteq G$ tal que $G = \langle X, g \rangle$. Suponhamos que $\langle X \rangle \subsetneq G$. Então $g \notin \langle X \rangle$ e, pelo Lema de Zorn, existe um subgrupo maximal M em G no sentido de conter $\langle X \rangle$ e não conter g .

Agora, se $M < H \leq G$, então $g \in H$ e $H = G$. Consequentemente, M é maximal em G , donde $g \in M$. Isto é uma contradição. Logo $\langle X \rangle = G$ e g é não-gerador.

(ii) $\{\text{N\~{a}o-Geradores de } G\} \subseteq \Phi(G)$

Caso 1. $\Phi(G) = G$ e a inclus\~{a}o \u00e9 \u00f3bvvia.

Caso 2. Seja $g \in G$ tal que qualquer $X \subseteq G$ com $\langle X, g \rangle = G \Rightarrow \langle X \rangle = G$. Suponhamos que $g \notin \Phi(G)$. Ent\~{a}o existe M subgrupo maximal de G tal que $g \notin M$. Assim $M \neq \langle M, g \rangle$.

Agora, $M < G \Rightarrow \langle M, g \rangle = G$ e, por hip\u00f3tese, segue que $\langle M \rangle = G$. Logo $g \in M$, o que \u00e9 uma contradi\u00e7\~{a}o. Portanto, $g \in \Phi(G)$.

■

Veremos que para um p -grupo finito de G , o subgrupo de Frattini determina o n\u00famero minimal de geradores de G .

Defini\u00e7\~{a}o 1.39. Um grupo abeliano G \u00e9 dito abeliano elementar se existe um primo p tal que todo elemento de G n\~{a}o trivial tem ordem p .

Teorema 1.40 (Teorema da Base de Burnside). *Seja G um p -grupo finito.*

- (i) $G/\Phi(G)$ é um p -grupo abeliano elementar e, conseqüentemente, pode ser visto como um espaço vetorial sobre \mathbb{F}_p .
- (ii) O conjunto $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ é um conjunto minimal de geradores de G se, e somente se, $\{g_1\Phi(G), g_2\Phi(G), \dots, g_r\Phi(G)\}$ é uma base de $G/\Phi(G)$.
- (iii) O número minimal r de geradores do grupo G coincide com a dimensão de $G/\Phi(G)$ como um \mathbb{F}_p -espaço vetorial. Em outras palavras, $|G : \Phi(G)| = p^r$.

O Argumento de Frattini

Teorema 1.41. *Se H é um subgrupo normal finito de um grupo G e P é um p -subgrupo de Sylow de H , então $G = N_G(P)H$.*

Demonstração. Seja $g \in G$. Então $P^g \leq H$ e P^g é um p -subgrupo de Sylow de H . Assim, $P^g = P^h$, para algum $h \in H$, pelos Teoremas de Sylow.

Conseqüentemente,

$$g^{-1}Pg = h^{-1}Ph \Leftrightarrow Pgh^{-1} = gh^{-1}P \Leftrightarrow gh^{-1} \in N_G(P) \Leftrightarrow g \in N_G(P)H.$$

■

Observação.

A demonstração deste resultado é uma argumentação muito utilizada e é conhecida como *Argumento de Frattini*. Uma aplicação é mostrar que $\Phi(G)$ é nilpotente quando G é finito.

Proposição 1.42. *Sejam G um grupo finito e P um p -subgrupo de Sylow de G . Seja H subgrupo de G contendo $N_G(P)$. Então $H = N_G(H)$.*

Demonstração. Como H contém $N_G(P)$, temos que $P \leq H$. Seja $x \in N_G(H)$. Então $P^x \leq H$. Logo, existe $h \in H$ tal que $P^h = P^x$. Assim, $xh^{-1} \in N_G(P) \subseteq H$. Daí, $xh^{-1} \in H \Rightarrow x \in H$. Portanto, $N_G(H) \subseteq H$.

A inclusão $H \subseteq N_G(H)$ é óbvia. ■

Aplicação.

Seja G um grupo finito. Se P é um p -subgrupo de Sylow de G e $H = N_G(P)$, então $H = N_G(H)$.

Séries Normais, Subnormais, Abelianas, Centrais e Subgrupos

Subnormais

Seja G um grupo.

Definição 1.43. *Uma cadeia de subgrupos $1 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_n = G$ é chamada série de comprimento n .*

Uma série é dita subnormal se $H_i \triangleleft H_{i+1}$, para todo i .

Uma série é dita normal se $H_i \triangleleft G$, para todo i .

Os grupos quocientes H_{i+1}/H_i são chamados fatores.

Definição 1.44. *Um subgrupo H é dito subnormal em G , denotado $H \triangleleft \triangleleft G$, se H ocorre em alguma série subnormal de G .*

No caso em que todos os fatores da série subnormal são simples, ela é chamada série de composição.

O conhecido Teorema de Jordan-Hölder afirma que em um grupo finito qualquer duas séries de composição têm o mesmo comprimento e há uma bijeção entre os dois conjuntos de fatores em pares isomorfos.

Definição 1.45. *Uma série $1 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_n = G$ é dita abeliana se seus fatores são abelianos, isto é, se H_{i+1}/H_i é abeliano, para todo i .*

Uma série é dita central se $H_i \triangleleft G$ e $H_{i+1}/H_i \leq Z(G/H_i)$, para todo i .

(Ou equivalentemente, $[H_{i+1}, G] \leq H_i$, para todo i .)

p' -Automorfismos de p -Grupos

Preliminares

Sejam P um grupo e A um subgrupo de $\text{Aut}(P)$.

- $G = \{(\phi, x) \in A \times P\}$ com a operação

$$(\phi, x)(\psi, y) = (\phi^\psi, x^\psi y)$$

é um grupo cuja identidade é $(1_A, 1_P)$ e o inverso de (ϕ, x) é $(\phi^{-1}, (x^{-1})^{\phi^{-1}})$.

- G pode ser visto como o produto semidireto de P por A .
- Definindo o homomorfismo injetor $i : A \longrightarrow G$ por $\phi^i = (\phi, 1_P)$, para todo $\phi \in A$, podemos considerar A como um subgrupo de G , identificando cada $\phi \in A$ com o elemento $(\phi, 1_P) \in G$.
- Da mesma forma, definindo o homomorfismo injetor $j : P \longrightarrow G$ por $x^j = (1_A, x)$, para todo $x \in P$, podemos considerar P como um subgrupo de G , identificando cada $x \in P$ com o elemento $(1_A, x) \in G$.
- Com esta identificação, P é um subgrupo normal de G , $G = PA$ e $P \cap A = 1$. A normalidade de P em G segue de:

$$\begin{aligned} (\psi, y)^{-1}(1_A, x)(\psi, y) &= (\psi^{-1}, (y^{-1})^{\psi^{-1}})(1_A, x)(\psi, y) = (\psi^{-1}, (y^{-1})^{\psi^{-1}}x)(\psi, y) \\ &= (1_A, y^{-1}xy) \end{aligned}$$

e

$y^{-1}xy \in P$, para quaisquer $x, y \in P$.

- Como o comutador $[x, \phi] = [(x^{-1})\phi^{-1}x]\phi = x^{-1}x^\phi$, com $x \in P, \phi \in A$, definimos o subgrupo $[P, A] = \langle [x, \phi] : x \in P, \phi \in A \rangle = \langle x^{-1}x^\phi : x \in P, \phi \in A \rangle$.
- $[P, A]$ é um subgrupo normal A -invariante de P .

Definição 1.46. *Seja π um conjunto de números primos. Dizemos que G é π -grupo se a ordem de G é divisível somente por primos em π . O conjunto de primos complementar a π é denotado por π' .*

Seja A um p' -grupo de automorfismos de um p -grupo abeliano P . Consideremos $|A| = n$. Tomemos P com a operação adição.

- Se $x \in P$, existe $k \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $(kp)x = 0$. Como $(n, p) = 1$, temos que $(n, kp) = 1$. Logo, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $an + bkp = 1$. Então $x = (an + bkp)x = anx$. Assim, para cada $x \in P$ existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $anx = x$. Desta forma, definimos

$$\frac{1}{n}x = ax \in P.$$

- Com isso, a função $\theta : P \rightarrow P$ dada por

$$x^\theta = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x^\phi$$

é um endomorfismo de P . De fato, para quaisquer $x, y \in P$, temos

$$(x + y)^\theta = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} (x + y)^\phi = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x^\phi + \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} y^\phi = x^\theta + y^\theta.$$

p' -Automorfismos de p -Grupos Abelianos

Teorema 1.47. *Seja A um p' -grupo de automorfismos de um grupo abeliano P . Então, temos*

$$P = C_P(A) \times [P, A].$$

Demonstração. Se $|A| = n$, consideremos o endomorfismo de P , $\theta : P \rightarrow P$, dado por

$$x^\theta = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x^\phi.$$

Por simplicidade, escreveremos P com a operação aditiva. Como ϕ^ψ e ψ^ϕ percorrem todo A , assim como ϕ faz em A , segue-se

$$\theta^\psi = \psi^\theta = \theta, \tag{1.2}$$

para todo ψ em A . Além disso,

$$x^{\theta^2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x^\phi\right)^\theta = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x^{\theta\phi} = \frac{1}{n} (nx^\theta) = x^\theta;$$

então θ é idempotente. Agora sejam $C = C_p(A)$ e $C_1 = (P)^\theta$. Se $x \in P$, temos $(x^\theta)^\phi = x^\theta$ para todo ϕ em A , por (1.2). Assim, $C_1 \subseteq C$.

Reciprocamente, se $x \in C$, então

$$x^\theta = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x^\phi = \frac{1}{n} \sum_{\phi \in A} x = \frac{1}{n} (nx) = x,$$

donde $x = x^\theta \in C_1$.

Agora seja $H = [P, A]$ e $H_1 = \{x - x^\theta : x \in P\}$. Como θ é um endomorfismo e P é abeliano, H_1 é um subgrupo de P . Além disso, $x = x^\theta + (x - x^\theta)$ para $x \in P$, assim $P = C + H_1$. Por outro lado, se $x \in C \cap H_1$, temos $x = z^\theta$ e $x = y - y^\theta$ para algum $y \in P$, portanto, $z^\theta = (y - y^\theta) \iff (z^\theta)^\theta = y^\theta - y^\theta \iff z^\theta = 0$, pois θ é idempotente. Segue que $x = 0$ e $P = C \oplus H_1$. Além disso, H_1 é o núcleo de θ . De fato, para $x - x^\theta \in H_1$ temos que $(x - x^\theta)^\theta = x^\theta x^\theta = 0$ e, assim, $H_1 \subseteq \ker\{\theta\}$. Por outro lado, se $x \in \ker\{\theta\}$, então $x^\theta = 0$ e, portanto, $x = x - x^\theta \in H_1$.

Finalmente, por definição, H é gerado pelos elementos $-x + x^\phi$, $x \in P$, $\phi \in A$. Mas $(-x + x^\phi)^\theta = -x^\theta + (x^\phi)^\theta = -x^\theta + x^\theta = 0$, o que implica $H \subseteq H_1$. Reciprocamente, para $x \in P$, temos $x - x^\theta = \frac{1}{n} \left[\sum_{\phi \in A} (x - x^\phi) \right] \in H$ pois cada $x - x^\phi \in H$. Assim $H_1 \subseteq H$, portanto $H_1 = H$. Então $P = C \oplus H$. ■

Definição 1.48. Se G é um p -grupo, denotaremos por $\Omega_i(G)$ o subgrupo de G gerado por todos os seus elementos de ordem dividindo p^i . Isto é,

$$\Omega_i(G) = \langle x \in G : |x| \text{ divide } p^i \rangle.$$

Teorema 1.49. Se A é um p' -grupo de automorfismos de um p -grupo abeliano P que age trivialmente em $\Omega_1(P)$, então $A = 1$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, $P = C \times H$, onde $C = C_p(A)$ e $H = [P, A]$. Por hipótese, $\Omega_1(P) \subseteq C_p(A) = C$, então $\Omega_1(P) \subseteq \Omega_1(C)$. De fato, basta observar que

$$\Omega_1(P) = \langle x \in P : |x| = p \rangle, \quad C = \{x \in P : x^\phi = x, \phi \in A\}$$

e

$$\Omega_1(C) = \langle x \in P : x^\phi = x, |x| = p, \phi \in A \rangle.$$

Por outro lado, $\Omega_1(P) = \Omega_1(C) \times \Omega_1(H)$, portanto $\Omega_1(H) = 1$ e, consequentemente $H = 1$. Assim, $P = C$ e A age trivialmente em P , isto é, para todos x em P e ϕ em A , temos $x^\phi = x$. E, como A é um grupo de automorfismos de P , temos $A = 1$, como queríamos. ■

p' - Automorfismos de p -Grupos

Estamos interessados em relacionar as ações de p' -automorfismos de um p -grupo P com sua ação induzida em certos subgrupos e fatores de P .

Definição 1.50. *Seja A um subgrupo de $\text{Aut}(G)$ e seja*

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = 1$$

uma série normal de G . Dizemos que A estabiliza a série dada se cada G_i é A -invariante e A age trivialmente em cada fator $G_{i-1}/G_i, 1 \leq i \leq n$.

Como consequência imediata da definição acima, temos:

Lema 1.51. *Um subgrupo A de $\text{Aut}(G)$ estabiliza a série normal*

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = 1$$

de G se, e somente se, A normaliza cada G_i e $[G_i, A] \subseteq G_{i+1}, 0 \leq i \leq n - 1$.

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponhamos que A estabiliza a série dada. Então cada G_i é A -invariante e A estabiliza cada fator $G_i/G_{i+1}, 0 \leq i \leq n - 1$.

- Seja $[x, \phi] \subseteq [G_i, A]$. Temos que $[x, \phi] = x^{-1}x^\phi \subseteq G_i$, pois G_i é A -invariante. Assim, A normaliza cada G_i .

- Como A age trivialmente em cada fator G_i/G_{i+1} , $0 \leq i \leq n-1$,

$$(xG_{i+1})^\phi = xG_{i+1} \Leftrightarrow x^\phi G_{i+1} = xG_{i+1} \Leftrightarrow x^{-1}x^\phi \in G_{i+1}, \forall x \in G_i, \phi \in A.$$

Por outro lado, tomemos $[x, \phi] \subseteq [G_i, A]$. Temos que $[x, \phi] = x^{-1}x^\phi$. Logo, $[G_i, A] \subseteq G_{i+1}$.

(\Leftarrow) Suponhamos que A normaliza cada G_i e $[G_i, A] \subseteq G_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$.

- Como A normaliza G_i , $[G_i, A] \subseteq G_i$, isto é, $\langle x^{-1}x^\phi : x \in G_i, \phi \in A \rangle \subseteq G_i$. Assim, G_i é A -invariante.
- Tomemos $[x, \phi] \subseteq [G_i, A]$. Como $[G_i, A] \subseteq G_{i+1}$, temos

$$x^{-1}x^\phi \in G_{i+1} \Leftrightarrow x^\phi G_{i+1} = xG_{i+1} \Leftrightarrow (xG_{i+1})^\phi = xG_{i+1}.$$

Assim, A age trivialmente em cada fator G_i/G_{i+1} .

Portanto, A estabiliza a série normal G .

■

Teorema 1.52. *Seja A um p' -grupo de automorfismos do p -grupo P que estabiliza alguma série normal de P . Então $A = 1$.*

Demonstração. Seja $P = P_0 \supseteq P_1 \supseteq \dots \supseteq P_n = 1$ uma série normal de P estabilizada por A .

Usaremos indução sobre n para mostrar que $A = 1$.

Se $n = 0$, então $P = 1$ e sendo A um subgrupo de $Aut(P)$, segue que $A = 1$. Vamos assumir que $n \geq 1$ e que o resultado é válido para $n-1$. A induz um grupo de automorfismos de P_1 e estabiliza a série normal P_i , $1 \leq i \leq n$ de P_1 , e assim A age trivialmente em P_1 por indução. Além disso, como A estabiliza a série normal de P , A age trivialmente em P/P_1 , isto é, $[P, A] \subseteq P_1$. Portanto, $[x, \phi] \in P_1$ para $x \in P$, $\phi \in A$. Assim, $x^{-1}x^\phi = z$, $z \in P_1$ implica $x^\phi = xz$, $z \in P_1$. Como ϕ age trivialmente em P_1 , segue que

$$x^{\phi^2} = (x^\phi)^\phi = (xz)^\phi = (x^\phi)(z^\phi) = (x^\phi)z = (xz)z = xz^2$$

e concluímos indutivamente que $x^{\phi^i} = xz^i$ para todo i . Em particular, vale para $i = m$, onde $m = |\phi|$, e segue que $x = x^{\phi^m} = xz^m$. Portanto $z^m = 1$. Mas $(m, p) = 1$, pois A é um p' -grupo. Como z é um p -elemento, segue que $z = 1$. Assim, $x^\phi = x$ para todo $x \in P$ e $\phi \in A$ e então podemos concluir que $A = 1$. ■

Corolário 1.53. *Se um subgrupo de A de $\text{Aut}(P)$, P um p -grupo, estabiliza a série normal de P , então A é um p -subgrupo.*

Demonstração. Pelo teorema, A não possui p' -automorfismos não-triviais e então é um p -grupo. ■

Exemplo 1.54. *Seja $K = \{1, a, b, ab : a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\}$ o 2-grupo Grupo de Klein, que tem ordem 4.*

Os automorfismos de K são:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 : & a \mapsto a & \alpha_2 : a \mapsto a & \alpha_3 : a \mapsto b \\
 & b \mapsto b & b \mapsto ab & b \mapsto a \\
 & ab \mapsto ab & ab \mapsto b & ab \mapsto ab \\
 \\
 \alpha_4 : & a \mapsto b & \alpha_5 : a \mapsto ab & \alpha_6 : a \mapsto ab \\
 & b \mapsto ab & b \mapsto a & b \mapsto b \\
 & ab \mapsto a & ab \mapsto b & ab \mapsto a .
 \end{array}$$

Além disso, $H_1 = \{1\}$, $H_2 = \{1, a\}$, $H_3 = \{1, b\}$, $H_4 = \{1, ab\}$, $H_5 = \{K\}$ são os subgrupos de K .

Se tomarmos, por exemplo, a série normal de K : $K \triangleright H_3 \triangleright H_1$. Temos que $A = \{\alpha_1, \alpha_6\}$ é o 2-subgrupo dos $\text{Aut}(K)$ que estabiliza esta série.

De fato, K, H_3 e H_1 são claramente A -invariantes. Além disso, A age trivialmente em H_3 (pois α_6 leva b em b) e em $K/H_3 = \{H_3, aH_3, bH_3, abH_3\}$ pois $[K, H_3] \subseteq H_3$. Isto é, $x^{-1}x^{\alpha_6} \in H_3$, para qualquer $x \in K$.

Teorema 1.55. *Se A é um p' -grupo de automorfismos de um p -grupo P , então $P = CH$, onde $C = C_P(A)$ e $H = [P, A]$. Em particular, se $H \subseteq \Phi(P)$ então $A = 1$.*

Demonstração. \diamond Consideremos primeiro o caso em que $H \subseteq Z(P)$.

Para $\phi \in A$, definamos a aplicação $\alpha_\phi : P \rightarrow P$ por $x^{\alpha_\phi} = x^{-1}x^\phi$, $x \in P$. Para $x, y \in P$, temos que $(xy)^{\alpha_\phi} = (xy)^{-1}(xy)^\phi = y^{-1}(x^{-1}x^\phi)y^\phi = (x^{-1}x^\phi)y^{-1}y^\phi$, pois $x^{-1}x^\phi \in H \subseteq Z(P)$. Assim $(xy)^{\alpha_\phi} = x^{\alpha_\phi}y^{\alpha_\phi}$ e, desta forma, α_ϕ é um endomorfismo de P , para cada $\phi \in A$. O núcleo de α_ϕ é precisamente $C_P(\phi)$. De fato, $\ker\{\alpha_\phi\} = \{x \in P : x^{\alpha_\phi} = 1\} = \{x \in P : x^{-1}x^\phi = 1\} = \{x \in P : x^\phi = x\} = C_P(\phi)$. Como $H \subseteq Z(P)$, α_ϕ leva P em um grupo abeliano, então $P' = [P, P]$ está contido no núcleo de α_ϕ . Portanto, $P' \subseteq C_P(\phi)$ para todo $\phi \in A$, isto é, $P' \subseteq C = C_P(A)$.

Sejam $\bar{P} = P/P'$, $\bar{C} = C_{\bar{P}}(A)$, e $\bar{H} = [\bar{P}, A]$. Como \bar{P} é abeliano, $\bar{P} = \bar{C} \times \bar{H}$, pelo teorema (1.1.7). É claro que \bar{H} é a imagem de H em \bar{P} . Portanto $P = C_1H$, onde C_1 denota a imagem inversa de \bar{C} em P . Mas A age trivialmente em P' (pois $P' \subseteq C_P(A)$) e \bar{C} , logo A estabiliza a série normal $C_1 \supseteq P' \supseteq 1$ e pelo teorema (1.1.8) segue que A age trivialmente em C_1 . Assim, $C_1 \subseteq C$ e $P = CH$.

\diamond Assuma agora que H não esteja contido em $Z(P)$, com $H \neq 1$.

Sabemos que $H \triangleleft P$ e, assim, $K = H \cap Z(P) \neq 1$, pois P é um p -grupo. Além disso, K é A -invariante pois H é A -invariante. Definamos $D = \langle x \in P : [x, A] \subseteq K \rangle$. Claramente $C \subseteq D$, pois $C = C_P(A) = \{x \in P : x^\phi = x\} = \{x \in P : x^{-1}x^\phi = 1 \subseteq K\} \subseteq D$.

Tomemos $\bar{P} = P/K$ e coloquemos novamente $\bar{C} = C_{\bar{P}}(A)$, $\bar{H} = [\bar{P}, A]$. Se $x \in D$, por definição $x^{-1}x^\phi \in K$, para todo $\phi \in A$ e, então, $xK = xK^\phi = (xK)^\phi$ de modo que $xK \in \bar{C}$ para todo $x \in D$. Reciprocamente, se $xK \in \bar{C}$, por definição, $(xK)^\phi = xK \iff x^\phi K = xK \iff x^{-1}x^\phi \in K$, para todo $\phi \in A$, isto implica que $[x, A] \subseteq K$. Portanto \bar{C} é a imagem de D em \bar{P} . Além disso, \bar{H} é a imagem de H em \bar{P} .

Sendo $K \neq 1$, $|\bar{P}| < |P|$ e, assim, usando indução sobre a $|P|$, obtemos $\bar{P} = \bar{C}\bar{H}$. Logo $P = DH$. Se $[x, A] \subseteq K$ para todo $x \in P$, então $H \subseteq K \subseteq Z(P)$, o que contradiz a hipótese de H não estar contido no $Z(P)$. Então $D \subset P$. Além disso, D é A -invariante, pois K e \bar{C} são A -invariantes. Portanto, por indução, e do fato que $C \subseteq D$,

obtemos $D = C[D, A]$. Como $[D, A] \subseteq H$, temos que $P = DH = C[D, A]H = CH$. Portanto, $P = CH$.

Finalmente, se $H \subseteq \Phi(P)$ temos $P = C\Phi(P)$, portanto $P = C$ que implica que $A = 1$. ■

Teorema 1.56. *Se A é um p' -grupo de automorfismos do p -grupo P , então*

$$[P, A, A] = [P, A].$$

Em particular, se $[P, A, A] = 1$, então $A = 1$.

Demonstração. Sejam $H = [P, A]$, $H_1 = [H, A] = [P, A, A]$ e $C = C_P(A)$. Então H, H_1 e C são A -invariantes.

Aplicando o teorema anterior (1.55) a P e a H , temos $P = CH$ e $H = (H \cap C)H_1$. Logo $P = CH_1$. Portanto, para $x \in P$, podemos escrever $x = yz$, com $y \in C$ e $z \in H_1$, então $x^{-1}(x^\phi) = z^{-1}y^{-1}y^\phi z^\phi = z^{-1}y^{-1}yz^\phi = z^{-1}z^\phi$ para todo $\phi \in A$. Mas $z^{-1}z^\phi \in H_1$, pois $z \in H_1$ e H_1 é A -invariante. Logo $H_1 \supseteq H$. Por outro lado, $H_1 = [H, A] \subseteq [P, A] = H$, portanto $H_1 = H$.

Finalmente, se $H_1 = 1$, então $H = 1$ e A age trivialmente em P . Logo, $A = 1$. ■

Teorema 1.57. *Seja P um p -grupo e A um p' -subgrupo de $\text{Aut}(P)$. Se H é um subgrupo normal e A -invariante de P , então $C_{\frac{P}{H}}(A)$ é a imagem de $C_P(A)$ em $\frac{P}{H}$.*

Demonstração. Seja $\bar{P} = P/H$ e $\bar{K} = C_{\bar{P}}(A)$ e seja K a imagem inversa de \bar{K} em P . Claramente, $C_P(A) \subseteq K$. Portanto, é suficiente mostrar que $K = HC_K(A)$. Mas como A centraliza \bar{K} , segue que K é A -invariante e $[K, A] \subseteq H$. Contudo $K = [K, A]C_K(A)$ pelo Teorema 1.55, e $K = HC_K(A)$, como queríamos. ■

A Influência dos Automorfismos Coprimos em Grupos

Finitos

Como citado na introdução e averiguado no segundo capítulo deste texto, automorfismos coprimos exercem grande influência na estrutura de grupos finitos. Para exemplificar tal influência abrimos mão de um pequeno apanhado histórico de resultados de vários matemáticos importantes envolvendo centralizadores de automorfismos coprimos em grupos finitos.

Em 1902 Burnside provou em seu livro [1] que um grupo G admitindo um automorfismo de ordem 2 livre de pontos fixos é abeliano. Este foi o primeiro resultado significativo, de que temos registro, sobre o fato da existência de automorfismos livres de pontos fixos implicar em conclusões substanciais em relação ao grupo. Burnside também analisou o caso em que o automorfismo é de ordem 3 e provou que tal grupo é necessariamente nilpotente de classe no máximo 2.

Passados mais de cinquenta anos das descobertas de Burnside, em 1957 e 1959, dois resultados se destacam, relativos a grupos admitindo automorfismos de ordem prima arbitrária livre de pontos fixos, devidos à Higman [4] e Thompson [14].

Higman mostrou que existe uma função $h(p)$ dependendo somente de p tal que todo grupo nilpotente admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima p é nilpotente de classe no máximo $h(p)$. E Thompson por sua vez mostrou que todo grupo admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima é nilpotente. Esses dois resultados juntos formam o Teorema de Higman-Thompson, que diz que todo grupo finito admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima p é nilpotente de classe no máximo $h(p)$, onde $h(p)$ é uma função apenas de p .

A partir da década de 60 houve o interesse de se buscar resultados semelhantes para o caso em que a ordem do automorfismo não fosse um número primo. Como exemplo, em 1971 Ward [17] provou em que se A é um grupo abeliano elementar de ordem p^3 agindo sobre um p' -grupo G finito tal que $C_G(a)$ é nilpotente para cada a em $A^\#$, então G é nilpotente. No mesmo ano, temos outro resultado de Ward [18], onde é mostrado que se A é

um grupo abeliano elementar de ordem p^4 agindo sobre um p' -grupo solúvel finito e tal que o grupo derivado de $C_G(a)$ é nilpotente para cada a em $A^\#$, então o grupo derivado de G é nilpotente. Já em 1992, Shumyatsky [7], generaliza os resultados de Ward, mostrando que os mesmos são válidos na classe dos grupos solúveis periódicos.

Observamos que se um grupo G possui automorfismos coprimos é natural estudar as propriedades satisfeitas pelos centralizadores desses automorfismos e averiguar se as mesmas são satisfeitas pelo grupo G , pois em algumas situações o grupo é gerado por esses centralizadores: seja G um grupo admitindo uma ação de um grupo A . Se A é abeliano não cíclico e a ordem de A é coprima com a ordem de G , então

$$G = \langle C_G(a) : a \in A^\# \rangle.$$

A demonstração desse fato pode ser encontrado em [3, 6.2.1].

Mais um exemplo da influência dos centralizadores de automorfismos de ordem coprima de um grupo G na estrutura de G é dado por Khukhro e Shumyatsky [9]: se p é um primo, e um inteiro positivo e A um p -grupo abeliano elementar de ordem p^2 agindo sobre um p' -grupo finito G , assumamos que o expoente de $C_G(a)$ divide e para todo $a \in A^\#$. Então, o expoente de G é limitado por uma função dependendo somente de e e p . Lembramos que um grupo G tem expoente n , se $x^n = 1$ para todo $x \in G$. Denotamos o expoente de um grupo G por $\exp(G)$. Mais tarde, Guralnick e Shumyatsky [19] mostraram que se A tem ordem p^3 e o expoente do subgrupo derivado $C_G(a)'$ divide e para todo $a \in A^\#$, então o expoente de G' é limitado por uma função que depende de e e p somente.

Outra situação é quando os subgrupos de pontos fixos satisfazem uma lei positiva. Seja F o grupo livre sobre $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Uma palavra positiva em X é qualquer elemento não trivial de F não envolvendo os inversos dos x_i . Uma lei positiva de um grupo G é uma identidade não trivial da forma $u \equiv v$, onde u, v são palavras positivas em F , válida para toda substituição $X \rightarrow G$. O máximo dos comprimentos de u e v é chamado de grau da lei $u \equiv v$. Um exemplo fácil de lei positiva é $x^e \equiv 1$, onde $e \leq 1$ é um inteiro positivo. Assim, grupos de expoente finito, e em particular grupos finitos, satisfazem uma lei positiva. Outro exemplo é dado por grupos abelianos que satisfazem a lei positiva $xy \equiv yx$.

Neste contexto, de grupos satisfazendo uma lei positiva, apresentamos mais um exemplo da influência dos subgrupos de pontos fixos na estrutura do grupo G . Seja A um

p -grupo abeliano elementar agindo sobre um p' -grupo finito G . Shumyatsky [11] mostrou que se a ordem de A é p^3 e supondo que $C_G(a)$ satisfaz uma lei positiva de grau n , para todo $a \in A^\#$, então G satisfaz uma lei positiva de grau limitado por uma função dependendo somente de p e n . Sob as mesmas hipóteses, Shumyatsky [12] mostrou que esta propriedade vale para o subgrupo derivado G' de G , isto é, se A tem ordem p^4 e $C_G(a)'$ satisfaz uma lei positiva de grau n para todo $a \in A^\#$, então G' satisfaz uma lei positiva de grau limitado por uma função dependendo somente de n e p .

Uma pequena melhora desses dois últimos resultados, devido a Lima e Shumyatsky [13], considera p um primo e A um p -grupo abeliano elementar de ordem p^2 agindo sobre um p' -grupo finito G . Assuma que $\langle C_G(a), C_G(b) \rangle$ satisfaz uma lei positiva de grau n para todos $a, b \in A^\#$. Então, G satisfaz uma lei positiva de grau limitado por uma função dependendo somente de n e p .

Uma ferramenta efetiva que se apresenta de grande ajuda no estudo dos problemas propostos neste trabalho é a teoria de álgebras de Lie. As construções associando a um grupo um anel de Lie foram introduzidas nos anos 30 no contexto do Problema Restrito de Burnside. Não é nosso objetivo aqui apresentar tais técnicas, caberia outro minicurso. Em caso de interesse em estudar o assunto, além das bibliografias citados aqui, podemos oferecer mais textos e livros sobre as técnicas de Lie e a influência de automorfismos coprimos em grupos e álgebras de Lie.

Referências

- [1] BURNSIDE, W. *Theory of Groups*, 2nd edition, Dover, New York, 1955.
- [2] CALDEIRA, J., et al., *Tópicos em Teoria dos Grupos Finitos*, Texto Didático para Uso Local, Universidade Federal de Goiás, Mestrado em Matemática, 2011.
- [3] GORENSTEIN, D., *Finite Groups*, Harper & Row, New York, 1968.
- [4] HIGMAN, G., *Groups and Lie Rings Having Automorphisms Without Non-Trivial Fixed Points*, J. London Math. Soc., 32, 321-334, 1957.

- [5] ROBINSON, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, 2.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [6] ROTMAN, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups*, 4.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [7] SHUMYATSKY, P., *On Periodic Soluble Groups and Fixed Point Group of Operators*, Comm. Algebra 20 (10), 1992.
- [8] SHUMYATSKY, P., *On Finite Nilpotent Groups Having Fixed Point Free Automorphisms*, Department of Mathematics, University of Brasília, Brasília-DF, 1996.
- [9] KHUKHURO, E. I., SHUMYATSKY, P., *Fixed Points of Automorphisms of Lie Rings and Locally Finite Groups*, Algebra and Logic, Vol., 1995.
- [10] SHUMYATSKY, P., *On locally finite groups and the centralizers of automorphisms*, Bollettino U. M. I. (8), 2001.
- [11] SHUMYATSKY, P., *Positive Laws in Fixed Points*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (5) 2081-2091, 2004.
- [12] SHUMYATSKY, P., *Positive Laws in Derived Subgroups of Fixed Points*, Q. J. Math., 2008.
- [13] LIMA, A. S., SHUMYATSKY, P., *On groups satisfying a positive law in fixed points*, J. Algebra 322, pp. 245-253, 2009.
- [14] THOMPSON, J. G., *Finite Groups With Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 578-581, 1959.
- [15] ZELMANOV, E., *The solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent*, Math. USSR Izvestija 36, 41-60, 1991.
- [16] ZELMANOV, E., *The solution of the Restricted Burnside Problem for 2-groups*, Math. Sb. 182, 568-592, 1991.
- [17] WARD, J. N., *On finite groups admitting automorphisms with nilpotent fixed-point groups*, Bull. Austral. Math. Soc. 5, 281-282, 1971.
- [18] WARD, J. N., *On finite soluble groups and the fixed-point groups of automorphisms*,

Bull. Austral. Math. Soc. 5, 275-378, 1971.

[19] GURALNICK, R., SHUMYATSKY P., *Derived Subgroups of Fixed Points*. Israel J. Math. 126, 345-362, 2001.

MC5 - Brincando com Gráficos de Funções Usando o GeoGebra

Tânia Carvalho (FACIP-UFU), Rosângela Maria da Silva (UFG) &

Flávio Raimundo de Souza (IFG-GO)

1 - Introdução

O primeiro matemático a usar o termo “função” praticamente no sentido em que é usado hoje foi Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz(1646 - 1716)). Mas, a notação moderna para função que usamos até hoje se deve a Leonard Euler(1707 - 1783). Assim, pode-se dizer com justiça que Euler fez pela análise de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela Geometria de Eudoxo e Teetetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarzmi e Cardano.

No Ensino Médio já vimos vários esboços de gráficos de funções, em particular, os gráficos de funções tais como: Funções Polinomiais; Funções Racionais; Funções Exponenciais e Logarítmicas e Funções Trigonométricas. E, são com estas que trabalhamos neste minicurso.

Estamos interessados em, a partir destes conhecimentos já adquiridos, conduzir o aluno a entender o comportamento dos diversos tipos de funções quando introduzidas modificações em sua equação, que não alterem a sua classificação (afim, quadrática, racional, etc.). Assim, para cada classe de função será definida uma “função inicial” e a partir desta, com o auxílio do software GeoGebra, serão realizados estudos sobre as variações desta função. O GeoGebra é um software de Geometria Dinâmica que vem sendo amplamente difundido em estudos de Geometria, Álgebra e Cálculo; e por meio de construções interativas de figuras e objetos, que podem ser modificados em tempo real, auxilia na compreensão dos conceitos pela visualização e percepção dinâmica das propriedades algébricas inerentes às construções geométricas. Pretendemos utilizar o software como uma ferramenta para despertar no aluno o interesse pela busca do conhecimento matemático por meio da experimentação e da investigação.

Para cada classe de funções citadas acima, iniciaremos os estudos com o gráfico

de uma função $y = f(x)$ (“função inicial”) e, a partir desta, obteremos novos gráficos das seguintes funções:

$$g(x) = kf(x), \quad h(x) = f(x) + k \quad \text{e} \quad q(x) = f(x + k),$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

As funções g , h e q obtidas acima são vistas (dependendo da função f), como sendo a rotação e/ou translação da função $y = f(x)$. Desejamos apresentar ao leitor, de forma prazerosa e divertida, alguns aspectos geométricos ligados ao conceito de função; despertando seu interesse e criando condições para que ele possa se aprofundar nesse belo tema.

2 - Objetivos

O principal objetivo desse minicurso é apresentar um estudo de funções sem o formalismo dos cursos de graduação, transformando esse estudo num assunto divertido. Utilizamos o GeoGebra como ferramenta auxiliar, no intuito de levar o aluno a conhecer as potencialidades deste software para atividades que envolvam aspectos geométricos e como estímulo à busca de estudos mais aprofundados e formais do conceito de função.

3 - Resultados

Iniciamos formalizando a definição do tema principal deste trabalho: Funções.

Definição 1: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de números reais. Definimos *função* com *domínio* X , como sendo a correspondência f que atribui a cada valor $x \in X$ um e um só valor de uma variável y em \mathbb{R} , indicada por

$$\begin{array}{ccc} f : & X \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & y = f(x). \end{array}$$

O conjunto \mathbb{R} da definição acima é dito *contradomínio* da função f e a *imagem* da função é o subconjunto de \mathbb{R} dada por

$$Im(f) = \{f(x); x \in X\}.$$

Já o gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ expresso por

$$Gr(f) = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Como já mencionado anteriormente, tratamos neste minicurso de algumas funções polinomiais, funções racionais, funções exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas. A função inicial $f(x)$ será representada sempre na cor azul e as demais funções em vermelho.

1 - Função Afim

Chama-se *função afim* a toda função dada pela equação

$$f(x) = mx + n,$$

onde m e n são valores reais e $m \neq 0$. Quando $n = 0$, a função recebe o nome de *função linear*.

Considere o caso particular da função afim onde $m = 2$ e $n = 0$, ou seja, $f(x) = x$. Assim, O que sucederá caso façamos $g(x) = kf(x)$ e $h(x) = f(x) + k$, onde $k \in \mathbb{R}$?

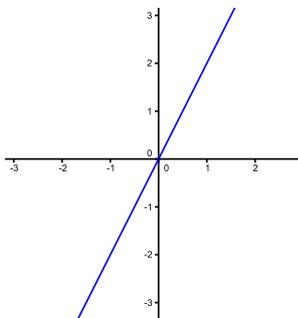


Figura 1.1.1:

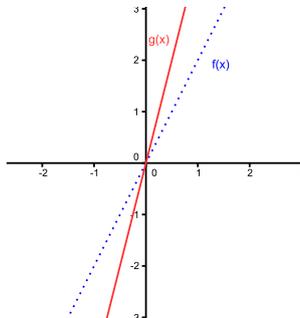


Figura 1.1.2:

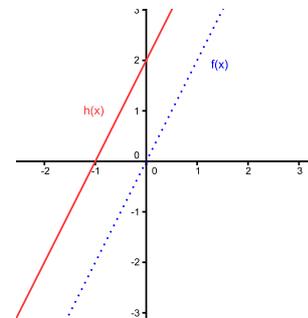


Figura 1.1.3:

Observe nas Figuras (1.1.1), (1.1.2) e (1.1.3), respectivamente, os gráficos de f , g e h obtidos com o auxílio do software GeoGebra considerando $k = 2$.

Note que a função g é uma rotação no sentido anti-horário da “função inicial” f (Figura (1.1.2)) e a função h é uma translação vertical de duas unidades para cima de cada um dos pontos da função f (Figura (1.1.3)).

Observe que função $q(x) = f(x + k) = f(x) + mk$. De fato,

$$f(x + k) = m(x + k) + n = mx + mk + n = (mx + n) + mk.$$

para $k = 2$ temos o gráfico da Figura (1.1.4).

Por outro lado, tomando $p(x) = g(x) + k$, obtemos uma rotação no sentido anti-horário da função inicial $f(x)$ e uma translação horizontal da função $g(x)$, para a esquerda, conforme podemos observar na Figura (1.1.5), onde usamos $k=2$.

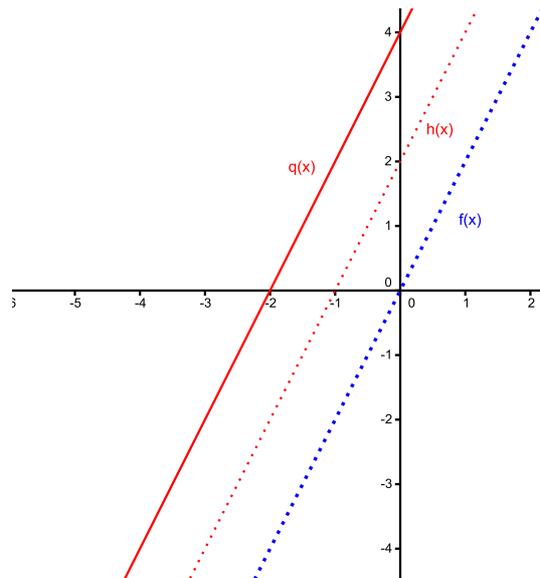


Figura 1.1.4:

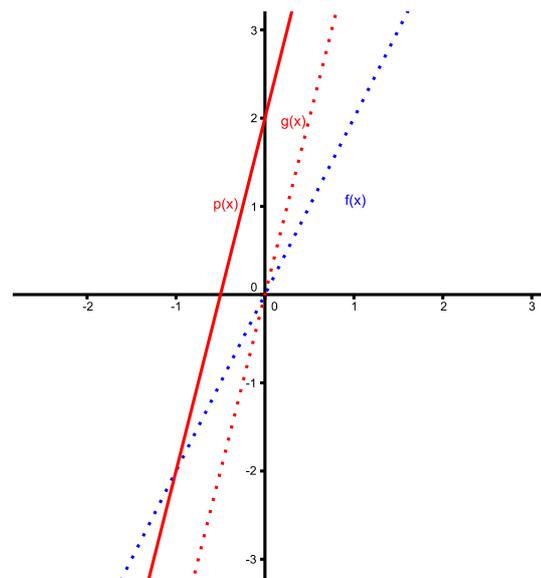


Figura 1.1.5:

2 - Função Quadrática

Chamamos *função quadrática* a toda função dada pelo trinômio do 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde a , b e c são valores reais e $a \neq 0$.

Iniciamos com o caso particular de uma função quadrática onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$, ou seja, $f(x) = x^2$. Façamos o mesmo questionamento feito para função afim: O que sucederá caso façamos $g(x) = kf(x)$, $h(x) = f(x) + k$ e $q(x) = f(x + k)$, onde $k \in \mathbb{R}$?

Nas Figuras (1.1.6),(1.1.7),(1.1.8) e (1.1.9) podemos visualizar os gráficos das

funções f , g , h e q respectivamente. Os gráficos foram obtidos com o auxílio do software GeoGebra, onde consideramos $k = 2$.

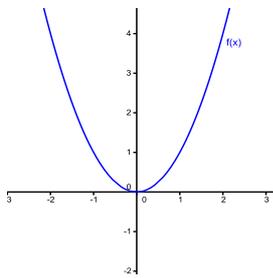


Figura 1.1.6:

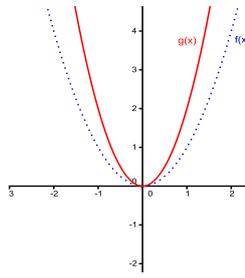


Figura 1.1.7:

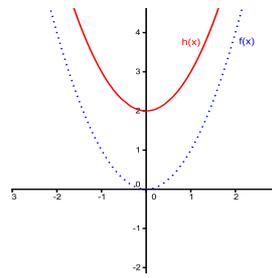


Figura 1.1.8:

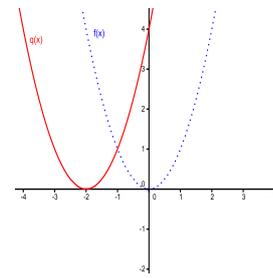


Figura 1.1.9:

Note que a função g não é uma rotação, como no caso da função afim! O que sucedeu foi que a “abertura” da parábola diminuiu, isto devido $k > 1$. Ou seja, o que matematicamente chamamos de *concavidade* da parábola, diminuiu (Figura (1.1.7)). Agora, caso $0 < k < 1$, a concavidade aumentará. Já o gráfico de h é obtido da “função inicial” f por meio de uma translação vertical para cima, de duas unidades (Figura (1.1.8)). E, por fim, o gráfico de q é obtido de f transladando horizontalmente o mesmo, duas unidades para esquerda (Figura (1.1.9)). Mas, o que acontecerá se tomarmos um valor negativo para a constante k da função $g(x) = kf(x)$? Observe a Figura (1.1.10), onde usamos $k = -1$. Vemos que a “função inicial” f foi refletida com relação ao eixo Ox , isto é, inverteu-se a concavidade da função f .

A pergunta que fica é: “Como fica o caso geral da função quadrática?” Ou seja, caso tenhamos $p(x) = ax^2 + bx + c$, onde todos os coeficientes a , b e c são não-nulos, o que acontece?

A resposta é simples!!

Com auxílio de conhecimentos algébricos (completamento de quadrado perfeito), podemos reescrever m como sendo uma combinação das funções g , h e r , da seguinte forma:

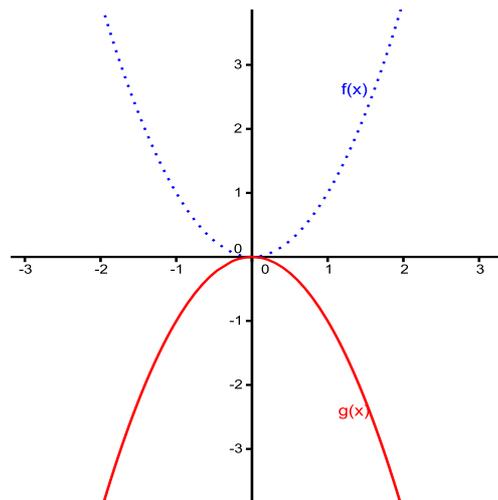


Figura 1.1.10:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
 \Rightarrow p(x) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
 \Rightarrow p(x) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\
 \Rightarrow p(x) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{4ac - b^2}{4a} \\
 \Rightarrow p(x) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

De onde vemos que p é uma combinação das funções g , h e r , dada pela expressão:

$$m(x) = k_1(x + k_2)^2 + k_3, \text{ onde } k_1 = a, k_2 = \frac{b}{2a} \text{ e } k_3 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Como exemplo, tome $p(x) = 3x^2 + 12x + 14$. Esta função pode ser escrita da seguinte forma:

$$p(x) = 3(x + 2)^2 + 2.$$

O gráfico desta função é dado na Figura (1.1.11).

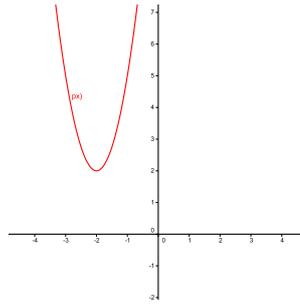


Figura 1.1.11:

Estamos agora interessados em obter a inversa da função $f(x) = x^2$. Sabemos do Ensino Médio que uma função possui inversa, apenas nos subintervalos onde a mesma é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Assim, observando o gráfico de f , vemos que esta não possui inversa em todo seu domínio, apenas nos intervalos $(-\infty, 0]$ ou $[0, +\infty)$.

Aqui, trabalharemos apenas com o caso onde $x \in [0, +\infty)$. Neste caso, a inversa de $f(x) = x^2$ é dada por $r(x) = \sqrt{x}$.

Desejamos fazer as mesmas considerações feitas para as funções afim e quadrática, para a função $r(x) = \sqrt{x}$. Para continuar com as mesmas notações, façamos $r(x) = f(x) = \sqrt{x}$. Pergunta-se: O que sucederá com o gráfico de f , caso $g(x) = kf(x)$, $h(x) = f(x) + k$ e $q(x) = f(x + k)$?

A resposta para esta questão pode ser facilmente respondida observando os gráficos de f , g , h e q respectivamente, para o caso $k = 2$.

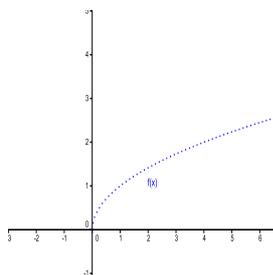


Figura 1.1.12:

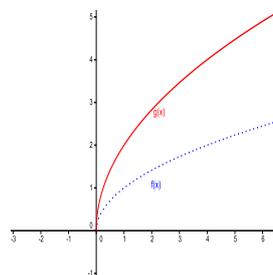


Figura 1.1.13:

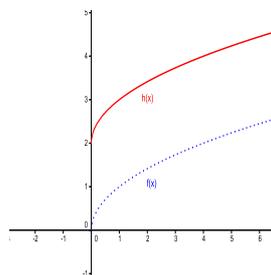


Figura 1.1.14:

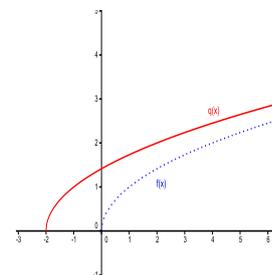


Figura 1.1.15:

Conclui-se, observando os gráficos, que: a função g em relação à função f , afastou-se mais do eixo Ox (Figura (1.1.13)), a função h foi transladada horizontalmente para cima duas unidades (Figura (1.1.14)) e o gráfico de q foi transladado duas unidades para a esquerda (Figura (1.1.15)).

3 - Função Racional

Chama-se *função racional* a toda função dada por $f(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$, onde p e r são polinômios.

Convém observar que o domínio de uma função racional é o subconjunto dos números reais onde $q(x) \neq 0$.

Neste minicurso vamos particularizar nossos estudos apenas às funções racionais onde $p(x)$ é constante e $r(x)$ é um polinômio de primeiro grau. Mais particularmente, trabalharemos com a função $f(x) = \frac{1}{x}$, cujo domínio é o subconjunto de \mathbb{R} dado por $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$.

Questionamos o que acontece com o gráfico de f , caso seja considerado as variações

$$g(x) = kf(x), h(x) = f(x) + k \text{ e } q(x) = f(x + k)?$$

Novamente, com auxílio do GeoGebra, esboçamos os gráficos de f , g , h e r respectivamente, para o caso $k = 2$.

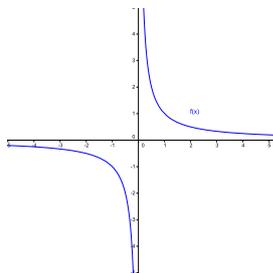


Figura 1.1.16:

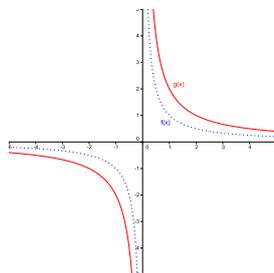


Figura 1.1.17:

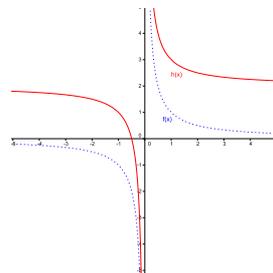


Figura 1.1.18:

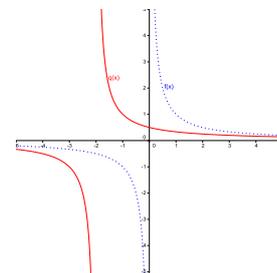


Figura 1.1.19:

Observa-se que os pontos de g correspondentes a f são transladados verticalmente para cima quando $x > 0$ e verticalmente para baixo quando $x < 0$, com valor de deslocamento igual a imagem de f do referido ponto (Figura (1.1.17)). O gráfico de h foi transladado verticalmente para cima duas unidades com relação à função f (Figura (1.1.18)). Já o gráfico de q fica transladado duas unidades para esquerda com relação ao gráfico de f (Figura (1.1.19)).

Observação: Caso $k < 0$, o gráfico da função g será refletido com relação ao eixo Ox . Veja a Figura (1.1.20), onde usamos $k = -2$.

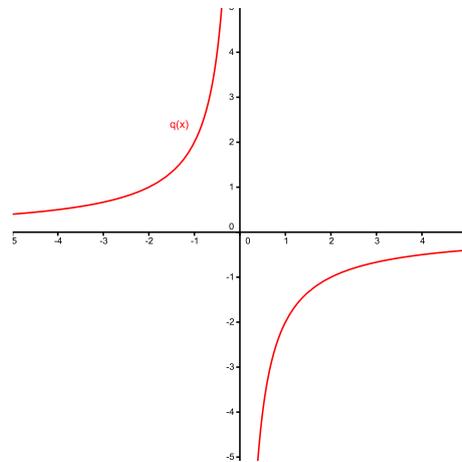


Figura 1.1.20:

4 - Função Exponencial

Denominamos *função exponencial* a toda função dada por $f(x) = a^x$, onde o valor real a satisfaz as seguintes condições: $a > 0$ e $a \neq 1$.

Observação: A função exponencial é crescente quando $a > 1$ e é decrescente caso $0 < a < 1$.

Particularizamos esta função ao caso em que $a = e$, onde e é a *Constante de Euler*, ou seja, $e = 2,72\dots$. Assim sendo, a função a considerar a partir deste momento é $f(x) = e^x$.

Pergunta: O acontecerá com o gráfico de f , caso seja considerado suas variações $g(x) = kf(x)$, $h(x) = f(x) + k$ e $q(x) = f(x + k)$?

A resposta vem por meio do GeoGebra, que nos auxilia a esboçar os gráficos de f , g , h e q respectivamente, para o caso $k = 2$. abaixo.

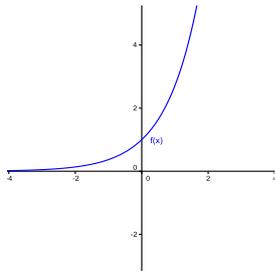


Figura 1.1.21:

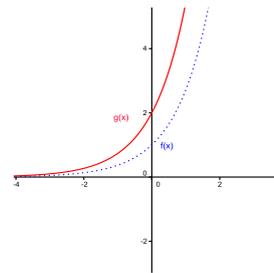


Figura 1.1.22:

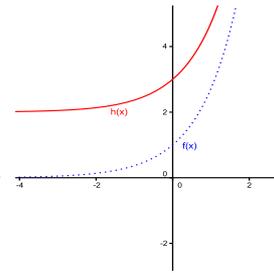


Figura 1.1.23:

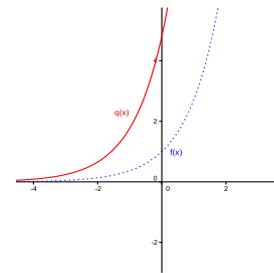


Figura 1.1.24:

Vemos que as imagens dos pontos correspondentes do gráfico de g com relação aos pontos de f são o dobro das imagens de f (Figura (1.1.22)). As imagens dos pontos correspondentes do gráfico de h com relação aos pontos de f são translados verticalmente para cima duas unidades (Figura (1.1.23)). Já o gráfico de q tem o mesmo comportamento da função g , basta verificar que $q(x) = e^{x+2}$ pode ser escrita da seguinte forma $q(x) = e^2 \cdot e^x$, donde vemos que $k = e^2$ (Figura (1.1.24)).

Observação: Caso $k < 0$, o gráfico da função g será refletido com relação ao eixo Oy . Veja a Figura (1.1.25), onde usamos $k = -2$.

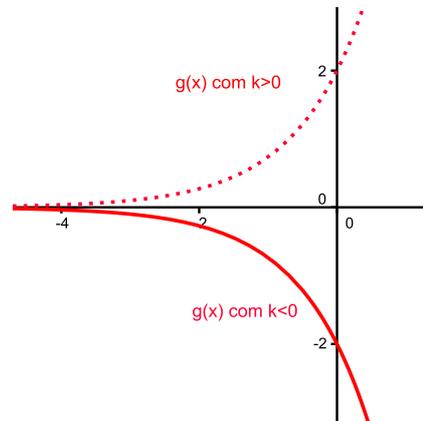


Figura 1.1.25:

5 - Função Logarítmica

Chama-se *função logarítmica* a toda função dada por $f(x) = \log_a x$, onde a constante real a satisfaz as seguintes condições : $a > 0$ e $a \neq 1$.

Observação: A função logarítmica é crescente quando $a > 1$ e é decrescente quando $0 < a < 1$.

Trabalhamos a partir de agora as variações da função $f(x) = \log_{10} x$, a qual denotamos simplesmente por $\log(x)$. Mais uma vez avaliaremos os seguintes casos: $g(x) = kf(x)$, $h(x) = f(x) + k$ e $q(x) = f(x + k)$. Novamente aqui plotamos os gráficos de f , g , h e q respectivamente, para o caso $k = 2$.

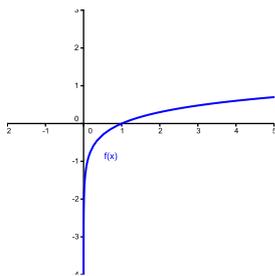


Figura 1.1.26:

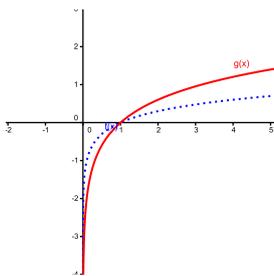


Figura 1.1.27:

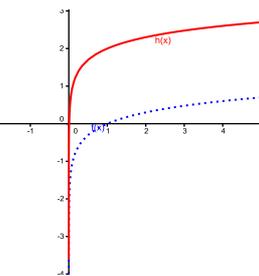


Figura 1.1.28:

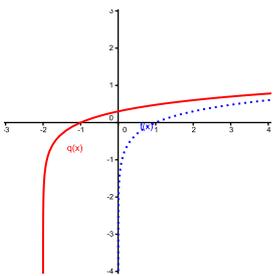


Figura 1.1.29:

Observa-se que as imagens dos pontos correspondentes do gráfico de g com relação aos pontos de f são o dobro das imagens de f (Figura (1.1.27)). As imagens dos pontos correspondentes do gráfico de h com relação aos pontos de f são translados (verticalmente) duas unidades para cima (Figura (1.1.28)). E por fim, o gráfico de q foi translado duas unidades horizontalmente para a esquerda com relação ao gráfico de f (Figura (1.1.29)).

Observação: Caso $k < 0$, o gráfico da função g será refletido com relação ao eixo Ox . Veja a Figura (1.1.30), onde usamos $k = -2$.

6 - Funções Trigonômicas

Nesta seção trabalhamos apenas duas funções trigonométricas, as funções seno e cosseno. Mas, convém observar que o tratamento para as outras funções trigonométricas é o mesmo. Assim sendo, incentivamos o leitor a fazê-lo como exercício.

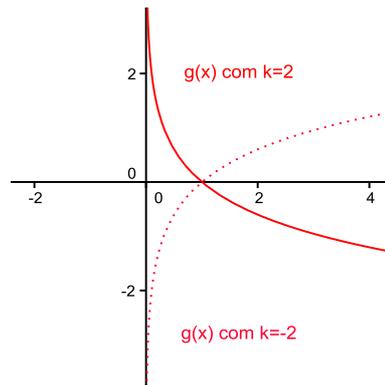


Figura 1.1.30:

6.1 - Função Seno

Já sabemos que o domínio da função seno são todos valores reais, ou seja, considerando $f(x) = \sin x$ tem-se que $D(f) = \mathbb{R}$ e que a imagem é $Im(f) = [-1, 1]$.

Estamos interessados em verificar o comportamento das funções $g(x) = kf(x)$, $h(x) = f(x) + k$ e $q(x) = f(x + s)$. A seguir plotamos os gráficos de f , g , h e q para $k = 2$ e $s = \pi/2$, representados pelas Figuras (1.1.31), (1.1.32), (1.1.33), (1.1.34) e respectivamente.

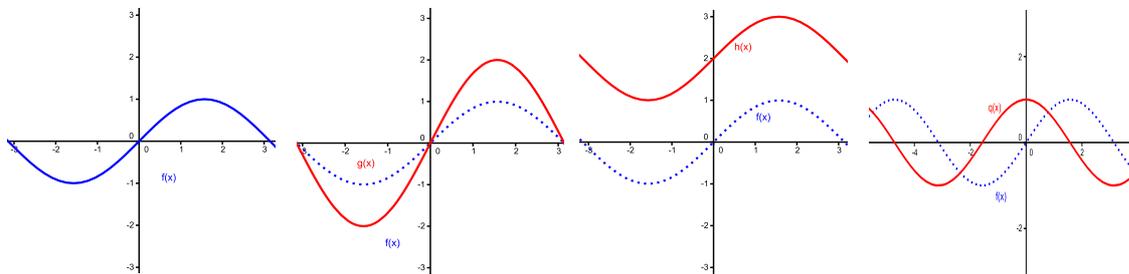


Figura 1.1.31:

Figura 1.1.32:

Figura 1.1.33:

Figura 1.1.34:

Observando os gráficos verificamos que o intervalo da imagem da função g variou de $[-1, 1]$ para $[-2, 2]$, ou seja, a função g sofreu uma dilatação em sua imagem (Figura (1.1.32)). O gráfico de h é o mesmo gráfico de f só que transladado duas unidades verticalmente para cima (Figura (1.1.33)). Já o gráfico de q também é o mesmo que f , só que transladado $\frac{\pi}{2}$ radianos para a esquerda (Figura (1.1.34)).

Observação: Convém aqui observar que para o caso $k = \frac{\pi}{2}$ a função $q(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ se torna $q(x) = \cos x$. Basta lembrarmos do seno de arco duplo, isto é,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

pondo $a = x$ e $b = \frac{\pi}{2}$.

6.2 - Função Cosseno

Para a função cosseno, tem-se $f(x) = \cos x$. Sabemos que $D(f) = \mathbb{R}$ e que a imagem é $Im(f) = [-1, 1]$.

De maneira análoga à função seno, estamos interessados em verificar o comportamento das funções $g(x) = kf(x)$, $h(x) = f(x) + k$ e $q(x) = f(x + k)$. A seguir plotamos os gráficos de f , g , h e q para o caso $k = 2$ e $s = \frac{\pi}{2}$. Os gráficos estão representados nas Figuras (1.1.35), (1.1.36), (1.1.37), (1.1.38) e respectivamente.

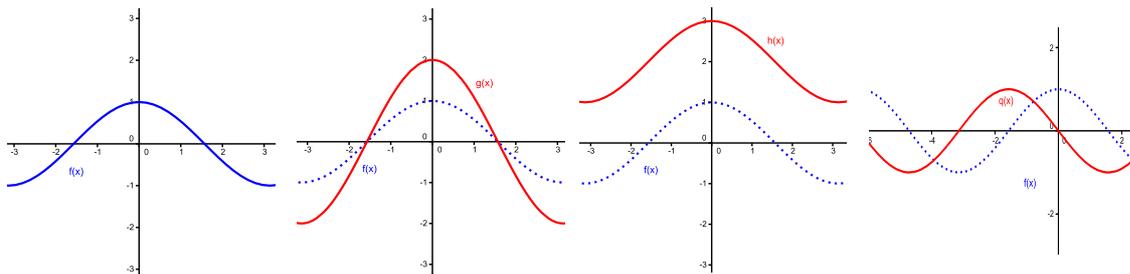


Figura 1.1.35:

Figura 1.1.36:

Figura 1.1.37:

Figura 1.1.38:

Vemos que o intervalo da imagem da função g variou de $[-1, 1]$ para $[-2, 2]$, ou seja, a função g sofreu uma dilatação em sua imagem (Figura (1.1.36)). O gráfico de h é o mesmo gráfico de f só que transladado duas unidades para cima, verticalmente (Figura (1.1.37)). Já o gráfico de q também é o mesmo que f , só que transladado $\frac{\pi}{2}$ radianos para a esquerda (Figura (1.1.38)).

Observação: Caso tenhamos em mente o cosseno do arco duplo, ou seja,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

colocando $a = x$ e $b = \frac{\pi}{2}$, a função q toma a seguinte forma $q(x) = -\text{sen } x$.

Referências

- [1] Ávila, G. S. S., *Análise Matemática para Licenciatura*, 2ª Edição, Edgar Blücher, São Paulo (2005).
- [2] Ávila, G. S. S., *Introdução ao Cálculo*, LTC Editora, Rio de Janeiro (1998).
- [3] Boyer, C. B., *História da Matemática*, 2ª Edição, Edgar Blücher, São Paulo (1996).
- [4] Flemming, D.M.; Gonçalves, M.B., *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração*, 6ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo (2006).
- [5] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Projeto Euclides, 8ª Edição, Rio de Janeiro (1976).

MC7 - Cadeias de Markov e Aplicações

Valdivino Vargas Júnior (UFG)

Resumo

Uma Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que possui a chamada propriedade markoviana. Um processo estocástico tem a propriedade markoviana se os estados anteriores do processo são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Os primeiros resultados para estes processos foram obtidos por Andrey Markov em 1906. Nos últimos anos, Cadeias de Markov tem sido amplamente estudadas e utilizadas nas mais variadas áreas do conhecimento. As aplicações mais básicas encontradas em livros introdutórios incluem probabilidades associadas jogos, evolução de populações e resultados sobre teoria de filas. Em geral, encontra-se aplicações de Cadeias de Markov em modelos epidêmicos, processos de migração, estudos sobre o DNA, modelos de gerenciamento de recursos, modelos para processos de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros.

Neste trabalho apresentamos conceitos elementares de Cadeias de Markov e diversas aplicações do uso de seus conceitos. Consideramos problemas envolvendo passeios aleatórios, processos de ramificação, teoria de filas etc.

Introdução

Um processo estocástico representa um sistema na qual o estado muda ao longo do tempo de forma aleatória. Podemos pensar um processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias indexadas por elementos t que pertencem a um determinado conjunto T , muitas vezes interpretados como o tempo. Se T é discreto temos um processo estocástico a tempo discreto. Se T é contínuo temos um processo estocástico a tempo contínuo. Representamos um processo estocástico por $\{X_t\}_{t \in T}$. As variáveis X_t possuem possíveis valores num conjunto E chamado conjunto de estados ou espaço de estados. Este pode ser contínuo ou discreto. Quando $X_t = i$ diz-se que o processo está no estado i no instante de tempo t . Quando

temos um processo a tempo discreto, é comum utilizar a notação $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ para processo estocástico. Nesse caso, usamos a notação X_n no lugar de X_t .

Exemplo 1.58. (*Jogo de Azar*) Considere a seguinte situação hipotética. Um jogador entra em um cassino com k reais em dinheiro para “tentar a sorte”. Admita que ele participa de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta um dado honesto é lançado, se sai a face ímpar i ele recebe i reais. Caso saia a face par j ele perde j reais. Defina como X_i a variável aleatória que representa o ganho do jogador na i -ésima jogada. Neste caso, o capital acumulado pelo jogador, digamos S_n , é dado por

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

onde $S_0 = k$. Nesse caso, o processo $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é um processo estocástico a tempo discreto com espaço de estados discreto.

Exemplo 1.59. (*Fila M/M/1*)

Suponha que clientes chegam a uma estação de serviço com um único servidor (único atendente) de acordo com um processo de Poisson de taxa λ . Ou seja, o tempo entre sucessivas chegadas são variáveis aleatórias exponenciais independentes com média $\frac{1}{\lambda}$. Na chegada, cada cliente será atendido imediatamente se o servidor estiver livre. Caso contrário, ele vai para uma fila de espera. Quando o servidor termina de servir a um cliente, o cliente deixa o sistema e o próximo cliente na fila, se existe algum, entra para o ser atendido. Os tempos sucessivos de serviço são considerados variáveis aleatórias exponencialmente distribuídas e independentes com média $\frac{1}{\mu}$. Tal sistema é conhecido como sistema de fila M/M/1. Se chamarmos de $X(t)$ o número de clientes no sistema no instante t temos um processo estocástico a tempo contínuo com espaço de estados discreto.

Exemplo 1.60. (*Atividade seguradora*)

O modelo clássico do risco na atividade seguradora é um processo

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

onde $U(t)$ é o capital da seguradora no instante t (reserva de risco) e c é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo, de forma que ct será o prêmio que recebeu a

seguradora até o instante t . u é a reserva inicial da seguradora e $S(t)$ representa o valor total das indenizações até o instante t ,

$$S(t) = \sum_{n=1}^{X_t} Y_n$$

onde $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não negativas que representam os valores das indenizações individuais que deve pagar a seguradora ante a ocorrência de sinistros e $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson homogêneo das ocorrências das indenizações até o instante t . O processo $\{U_t\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico a tempo contínuo com espaço de estados contínuo.

Uma Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que possui a chamada propriedade markoviana. Um processo estocástico tem a propriedade markoviana se os estados anteriores do processo são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Os primeiros resultados para estes processos foram obtidos por Andrey Markov em 1906.

Nos últimos anos, Cadeias de Markov tem sido amplamente estudadas e utilizadas nas mais variadas áreas do conhecimento. As aplicações mais básicas encontradas em livros introdutórios incluem probabilidades associadas jogos, evolução de populações e resultados sobre teoria de filas. Em geral, encontra-se aplicações de Cadeias de Markov em modelos epidêmicos, processos de migração, estudos sobre o DNA, modelos de gerenciamento de recursos, modelos para processos de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros.

No exemplo da fila M/M/1 temos um processo markoviano a tempo contínuo. O primeiro M significa que o processo de chegada é markoviano (Poisson) e o segundo é devido ao serviço de distribuição ser exponencial (markoviano). O número 1 se refere ao fato de haver um único servidor. Neste texto, consideraremos apenas Cadeias de Markov a tempo discreto, isto é, cadeias com conjunto $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definição

Seja o processo estocástico $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ em tempo discreto. Supomos que as variáveis X_n assumem valores num conjunto E finito ou infinito enumerável.

Definição 1.61. X_n é cadeia de Markov a tempo discreto se

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{i,j}$$

para qualquer escolha dos estados $j, i, i_{n-1}, \dots, i_1, i_0$ e todo instante n .

Em uma Cadeia de Markov, o símbolo $P_{i,j}$ (probabilidade de passar de i para j em um passo) é usado para representar a probabilidade (condicional) de que, dado que o sistema esteja no estado i em certo momento, venha a estar no estado j no instante de tempo seguinte. Em geral, as $P_{i,j}$ são chamadas probabilidades de transição da Cadeia de Markov. De fato, podemos pensar $P_{i,j}$ como a probabilidade de ocorrer uma transição do estado i para o estado j .

A definição dada diz que numa Cadeia de Markov a chance do processo estar no instante $n + 1$ no estado j depende somente do estado do processo no instante n , isto é, independe de toda a história passada do processo (estados X_0, X_1, \dots, X_{n-1}). Esta propriedade chama-se propriedade markoviana.

Exemplo 1.62. (Jogo de Azar) Suponha um jogo no qual em cada aposta você perde um real com probabilidade $1 - p$ ou ganha um real com probabilidade p . Suponha ainda que você decide parar de jogar se a sua fortuna atingir N reais e se ela atingir 0 reais o cassino não deixa você jogar mais. Seja X_n o capital que você tem depois de n apostas. Claramente é o capital corrente e o resultado do próximo sorteio que irão determinar a sua fortuna depois da aposta seguinte. Qualquer que tenha sido a evolução da sua fortuna no passado (ou seja, os valores de $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$), para prever o próximo estado X_{n+1} , é suficiente conhecer a sua fortuna no presente (X_n). De fato, se $X_n = i$, com $0 < i < N$, então independentemente dos valores i_0, \dots, i_{n-1} , temos

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p$$

pois isso significa que se se você ganhar a aposta $n + 1$, a sua fortuna vai ser acrescentada em um real e portanto é suficiente conhecer o valor da sua fortuna no presente. Em cada aposta a sua fortuna somente poderá aumentar ou diminuir em um real com uma chance que não depende do número de apostas que você fez. Em outras palavras, a probabilidade condicional deste exemplo não depende de n .

Teoria Elementar

Matriz de Transição

Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{i_0, i_1, \dots\}$. As probabilidades de transição podem ser representadas através de uma matriz chamada matriz de transição:

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{i_0, i_0} & P_{i_0, i_1} & P_{i_0, i_2} & \cdots \\ P_{i_1, i_0} & P_{i_1, i_1} & P_{i_1, i_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{i_n, i_0} & P_{i_n, i_1} & P_{i_n, i_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Claramente, uma matriz de transição satisfaz:

1. $P_{i,j} \geq 0$
2. $\sum_{j \in E} P_{i,j} = 1$

Exemplo 1.63. No exemplo do jogo de azar se $N = 4$ e $p = 0,4$ temos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposição 1.64. Suponha uma Cadeia de Markov com distribuição inicial π_0 e matriz de transição $P = (P_{i,j})_{i,j \in E}$. Sejam $i_0, \dots, i_n \in E$. Temos:

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0) = P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

As equações de Chapman-Kolmogorov possibilitam o cálculo de probabilidades de transição em n passos. Estas equações dizem que as probabilidades de transição de n passos podem ser obtidas, recursivamente, a partir das probabilidades de transição de uma etapa. Temos:

$$P_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(m)} \text{ para todos } n, m \geq 0, \text{ e todos } i, j \in E$$

Assim, se a matriz de ordem n é $P^{(n)} = (P_{i,j}^{(n)})$ então $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$. Por indução, podemos escrever $P^{(n)} = P^n$.

Portanto, para uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{i_0, i_1, \dots\}$ as probabilidades de transição em n passos podem ser representadas através da matriz

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{i_0, i_0}^n & P_{i_0, i_1}^n & P_{i_0, i_2}^n & \dots \\ P_{i_1, i_0}^n & P_{i_1, i_1}^n & P_{i_1, i_2}^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{i_n, i_0}^n & P_{i_n, i_1}^n & P_{i_n, i_2}^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

onde $P_{i_j, i_k}^n = P(X_{m+n} = i_k | X_m = i_j)$.

Exemplo 1.65. (*Mobilidade Social*) Considere a história de várias gerações de uma família que ao longo do tempo tem somente um filho. Neste modelo simples, a observação da classe social (alta, média ou baixa) da família para cada geração permitiria descrever sua evolução social ao longo do tempo. Se tivermos uma sociedade composta por famílias deste tipo, podemos escolher ao acaso uma família e para cada geração n chamar de X_n a uma quantidade que valerá 3 se a família for de classe alta, 2 se ela for de classe média e 1 se for de classe baixa. Desta forma, cada X_n será uma variável aleatória e a sua evolução ao longo do tempo, permitirá tirar conclusões sobre as mudanças na estrutura da sociedade. Suponha que o processo X_n é uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ cujas mudanças de classe social estão dadas pela seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,20 & 0,10 \\ 0,30 & 0,50 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,40 \end{pmatrix}$$

a) Suponha que a família começa na classe média (estado 2) na geração 0. Qual a probabilidade que a geração 1 ascenda à classe alta (estado 3) e a geração 2 desça para a baixa (estado 1)?

Solução:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 1 \mid X_0 = 2) &= P(X_2 = 1 \mid X_1 = 3)P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = P_{2,3} \cdot P_{3,1} \\ &= 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \end{aligned}$$

b) Suponha de novo que a família começa na classe média (estado 2) na geração 0. Qual a probabilidade que a geração 2 desça para a classe baixa (estado 1)?

Solução:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) &= \sum_{k=1}^3 P(X_1 = k, X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = \sum_{k=1}^3 P_{2,k} P_{k,2} \\ &= 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,4 \end{aligned}$$

Distribuição Inicial

Definição 1.66. Seja π_0 uma distribuição de probabilidades no conjunto E satisfazendo:

1. $\pi_0(i) \geq 0$ para todo $i \in E$,
2. $\sum_{j \in E} \pi_0(j) = 1$

Dizemos que π_0 é a distribuição inicial da cadeia se para todo $i \in E$ temos $P(X_0 = i) = \pi_0(i)$. Em outras palavras, a distribuição inicial de uma cadeia é a função de probabilidade do seu estado inicial X_0 .

Note que

$$P(X_n = k) = \sum_{i \in E} \pi_0(i) P_{i,k}^{(n)}$$

Proposição 1.67. Suponha uma Cadeia de Markov com distribuição inicial π_0 e matriz de transição $P = (P_{i,j})_{i,j \in E}$. Sejam $i_0, \dots, i_n \in E$. Temos:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) = \pi_0(i_0) P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n}$$

Exemplo 1.68. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Suponha que a distribuição inicial da cadeia é dada por $\pi_0 = (0, 3, 0, 3, 0, 4)$.

a) Calcule $P(X_2 = 2, X_1 = 3, X_0 = 1)$.

b) Calcule $P(X_2 = 2)$.

Solução:

a) $P(X_2 = 2, X_1 = 3, X_0 = 1) = \pi_0(1)P_{1,3} \cdot P_{3,2} = 0,3 \cdot 0,25 \cdot 0,4 = 0,03$

b) $P(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^3 \pi_0(i)P_{i,2}^{(2)} = \pi_0(1)P_{1,2}^{(2)} + \pi_0(2)P_{2,2}^{(2)} + \pi_0(3)P_{3,2}^{(2)}$

Mas

$$P_{1,2}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P_{1,i}P_{i,2} = P_{1,1}P_{1,2} + P_{1,2}P_{2,2} + P_{1,3}P_{3,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{40}$$

$$P_{2,2}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P_{2,i}P_{i,2} = P_{2,1}P_{1,2} + P_{2,2}P_{2,2} + P_{2,3}P_{3,2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{30}$$

$$P_{3,2}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P_{3,i}P_{i,2} = P_{3,1}P_{1,2} + P_{3,2}P_{2,2} + P_{3,3}P_{3,2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$$

Logo

$$P(X_2 = 2) = 0,3 \cdot \frac{9}{40} + 0,3 \cdot \frac{9}{30} + 0,4 \cdot \frac{3}{20} = \frac{87}{400} = 0,2175.$$

Em geral, para uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

se

$$P(n) = [P(X_n = i_1) \ P(X_n = i_2) \ \dots \ P(X_n = i_k)]$$

é um vetor contendo as marginais de X_n então

$$P(n) = P(0) \cdot P^n$$

onde

$$P(0) = [P(X_0 = i_1) \ P(X_0 = i_2) \ \dots \ P(X_0 = i_k)] = [\pi_0(i_1) \ \pi_0(i_2) \ \dots \ \pi_0(i_k)].$$

Distribuição Assintótica

Definição 1.69. A distribuição π_∞ será a distribuição assintótica da cadeia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ se satisfazer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^n = \pi_\infty(j) \text{ para todo } j \in E.$$

Exemplo 1.70. Telefone sem fio

(Problema extraído da prova da VI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA, realizada em 8 DE NOVEMBRO DE 2003). Várias crianças estão brincando de telefone sem fio. A criança C_0 sussurra três palavras para a criança C_1 , que sussurra o que ouviu para a criança C_2 e assim por diante até uma mensagem chegar à criança C_n . Cada uma das três palavras tem exatamente uma "gêmea" errada (por exemplo, as palavras razão e razão são "gêmeas" pois é muito fácil confundir-las). Cada criança $(i+1)$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ouvir corretamente o que a criança i falou, tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a primeira palavra dita pela criança i pela sua "gêmea", $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a segunda palavra e $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a terceira palavra (e portanto nunca troca mais de uma palavra). Note que numa troca a mensagem pode ser acidentalmente corrigida. Calcule a probabilidade de que a criança C_n ouça exatamente a mensagem original. Qual é o valor dessa probabilidade quando $n \rightarrow \infty$?

Solução:

Sejam a, b, c as três palavras e $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ suas gêmeas. Construimos uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{a_i, i = 1, 2, 3 \dots 8\}$, onde $a_1 = (a, b, c)$, $a_2 = (\bar{a}, b, c)$, $a_3 = (\bar{a}, \bar{b}, c)$, $a_4 = (a, \bar{b}, c)$, $a_5 = (a, b, \bar{c})$, $a_6 = (\bar{a}, b, \bar{c})$, $a_7 = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ e $a_8 = (a, \bar{b}, \bar{c})$. Daí temos a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para obtermos a resposta do problema em questão calculamos a matriz P^n . Nesta $P^{(n)}(1, 1) = P(X_n = a_1 | X_0 = a_1)$ representa a probabilidade pedida. Realizando o cálculo, temos:

$$P(X_n = a_1 | X_0 = a_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Observe que no limite,

$$\pi_\infty(a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = a_1 | X_0 = a_1) = \frac{1}{8}.$$

Distribuição Invariante

Definição 1.71. Toda distribuição π será chamada de distribuição invariante da cadeia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ se satisfizer

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j} = \pi(j), \text{ para todo } j \in E.$$

Observe que, se E é finito podemos obter a distribuição invariante resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \pi P = \pi & ; \\ \sum_{i \in E} \pi(i) = 1 & . \end{cases}$$

Proposição 1.72. Para um distribuição invariante são válidas as afirmações:

i) Para todo $j \in E$ e $n \geq 1$ temos que

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j}^{(n)} = \pi(j).$$

ii) Se π é a distribuição inicial da Cadeia então para todo $n \geq 1$, temos que

$$P(X_n = i) = \pi(i).$$

Intuitivamente falando, se a cadeia começa com a distribuição invariante então a distribuição em todos os instantes será a mesma (daí o nome de distribuição invariante).

Proposição 1.73. Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov com matriz de transição P e com distribuição assintótica π_∞ . Então π_∞ é a única distribuição invariante da cadeia.

Exemplo 1.74. Considere uma Cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a distribuição invariante existe e corresponde a

$$\pi = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$$

O limite de P^n quando $n \rightarrow \infty$ não existe pois $P^{2n+1} = P$ e $P^{2n} = P^2$, dessa maneira não existe distribuição assintótica.

Exemplo 1.75. (Cadeia de Ehrenfest)

Suponha que o total de bolas contidas em duas urnas é 3. A cada instante de tempo n , pegamos uma bola da primeira urna e a colocamos na segunda ou vice-versa. Seja X_n a quantidade de bolas na primeira urna. Claramente, X_n é uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a distribuição invariante existe e corresponde a

$$\pi = \left(\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8} \right)$$

Note que $\pi \sim \text{Binomial} \left(3, \frac{1}{2} \right)$.

Classificação dos estados de uma Cadeia de Markov

Definição 1.76. (Estado acessível)

Um estado j é acessível a partir do estado i , se existe $n \geq 0$ tal que $P_{i,j}^n > 0$. Em outras palavras, se for possível atingir o estado j partindo do estado i , então j é dito acessível a partir de i . Admitimos que, qualquer estado i é acessível a partir dele próprio.

Definição 1.77. (Estados comunicáveis)

Dizemos que dois estados se comunicam caso cada um for acessível a partir do outro. A relação de comunicação no espaço de estados é uma relação de equivalência. De fato, ela satisfaz as seguintes condições:

- i) (Reflexiva) Qualquer estado i se comunica com ele mesmo: $(i \leftrightarrow i)$, pois $P_{i,i}^0 = 1$.
- ii) (Simétrica) Se o estado i se comunica com o estado j , o estado j se comunica com o estado i : $(i \leftrightarrow j) \Rightarrow (j \leftrightarrow i)$.
- iii) (Transitiva) Se o estado i se comunica com o estado j , e o estado j comunica com o estado k , então o estado i comunica com o estado k : $(i \leftrightarrow j) \text{ e } (j \leftrightarrow k) \Rightarrow (i \leftrightarrow k)$.

Definição 1.78. (Estado não essencial)

Um estado $i \in E$ é não essencial se existe um instante n e $j \in E$ tais que $P_{i,j}^n > 0$ e $P_{j,i}^m = 0$ para todo m natural. Caso contrário, temos um estado essencial.

Definição 1.79. (Estado recorrente e transiente)

Seja f_i a probabilidade de que iniciando no estado i a cadeia de Markov X_n volte a este estado. Então $f_i = P(\text{existe } n > 0 \text{ tal que } X_n = i \mid X_0 = i)$.

Se $f_i = 1$ o estado é chamado recorrente, já se $f_i < 1$ o estado é chamado transiente.

Proposição 1.80. O estado i é

recorrente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} = \infty$ e

transiente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} < \infty$.

Definição 1.81. (Estado absorvente)

Um estado i é absorvente se uma vez adentrado nele, a cadeia jamais o deixa, isto é,

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em particular, todo estado absorvente é recorrente.

Definição 1.82. Um conjunto de estados de uma Cadeia de Markov formam uma classe C , se quaisquer dois estados desse conjunto se comuniquem, e quaisquer dois estados comunicáveis de cadeia pertencem a mesma classe. Desse modo, se existe duas classes para uma Cadeia de Markov, então elas são disjuntas ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) ou idênticas ($C_1 \equiv C_2$).

Exemplo 1.83. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

O estado 1 é absorvente, 2 é transiente, 1, 3, 4 e 5 são recorrentes. Temos três classes: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$ e $C_3 = \{3, 4, 5\}$.

Definição 1.84. Cadeia Irredutível

Uma Cadeia de Markov X_n é irredutível se todos os estados formam apenas uma classe.

Definição 1.85. Período de um estado

Um estado i tem período d se $P_{ii}^{(n)} = 0$ se e somente se n não se divide d . Um estado é chamado aperiódico se $d = 1$.

Exemplo 1.86. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ e a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, os estados 1, 2 e 3 tem período 2.

Definição 1.87. Seja T_i o tempo de retorno do estado i . Se o estado i é recorrente, então ele é chamado recorrente positivo, se $E(T_i) < \infty$. Um estado é ergódico se for aperiódico e recorrente positivo.

Teorema 1.88. Teorema básico de convergência

Se uma Cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ com distribuição invariante π for irredutível e aperiódica então π será a sua distribuição assintótica.

Exemplo 1.89. No exemplo do Telefone sem fio poderíamos ter obtido a distribuição assintótica simplesmente calculando a distribuição invariante. A marginal $\pi(i), i \in E$ da distribuição invariante para uma Cadeia de Markov a tempo discreto pode ser interpretada

ainda como a proporção do tempo que o processo permanece no estado i . Assim, no problema do Telefone sem fio pode-se dizer que para uma quantidade grande de crianças (n grande) a proporção de crianças que ouvem exatamente a mensagem original é $\frac{1}{8}$.

Passeios Aleatórios

Apresentamos agora um dos processos markovianos mais famosos, o chamado passeio aleatório. Estes são a formalização matemática de uma trajetória (de uma partícula, digamos) a partir de uma sequência de passos dados de forma aleatória. Diversas áreas do conhecimento como estatística, economia, computação, eletricidade, ecologia, química, dentre outras fazem uso de resultados oriundos desse majestoso modelo.

Definição 1.90. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $E | X_i | < \infty$. Seja $S_0 = C$ e*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado *Passeio Aleatório*.

Observe que nesse caso,

$$P_{i,j} = P(S_{n+1} = j | S_n = i) = P(X_{n+1} = j - i).$$

Exemplo 1.91. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Temos um passeio aleatório simples. Se além disso, $p = q$ temos um passeio aleatório simples simétrico.

Para um passeio aleatório simples:

$$P(S_{n+1} = i + 1 | S_n = i) = P(X_{n+1} = 1) = p = 1 - P(S_{n+1} = i - 1 | S_n = i).$$

O problema da ruína do jogador

Considere a seguinte situação hipotética. Um jogador entra em um cassino com k reais em dinheiro para “tentar a sorte”. Admita que ele participa de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta ele recebe um real em caso de vitória e caso contrário perde um real. A chance de vitória em cada aposta é p e consequentemente de derrota $1 - p = q$. Admita que os recursos do cassino são ilimitados, isto é, por mais sorte que o jogador tenha, não consegue “quebrar a banca”. Suponha que ele jogue indefinidamente, apenas parando em caso de ficar sem dinheiro. Uma questão interessante é saber qual é a probabilidade do jogador em algum momento ficar sem dinheiro. Nesta dinâmica, o capital acumulado pelo jogador ao longo das apostas pode ser visto como um passeio aleatório. Nesse caso, a variável aleatória X_i representa o ganho do jogador na i -ésima jogada. Vamos mostrar que mesmo estando em um “cassino justo” (isto é, $p = 0.5$), com probabilidade 1, o jogador fica sem dinheiro em algum momento. Este problema é conhecido como ruína do jogador.

Demonstração. Seja $h_i = P_i(\text{acertar } 0)$. Então h é a solução minimal não negativa de

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_i &= \frac{1}{2}h_{i+1} + \frac{1}{2}h_{i-1} \text{ para } i=1,2,\dots \end{aligned}$$

Essa relação de recorrência tem solução geral

$$h_i = A + Bi$$

Mas a restrição $0 \leq h_i \leq 1$ força $B = 0$. Assim, $h_i = 0$ para todo i e temos então o resultado desejado. \square

Processos de Ramificação

Outro grupo de processos markovianos importantes é o dos processos de ramificação. Estes foram inicialmente estudados por Galton e Watson. O objetivo era investigar o problema da extinção de sobrenomes, ou seja, analisar a ocorrência da extinção do nome da família.

Atualmente, podemos encontrar aplicações de processos de ramificação em diversas áreas do conhecimento incluindo Física, Biologia, Medicina, Economia e Computação.

Definição 1.92. Considere uma Cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ com $X_0 = k$ e

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$$

onde as Z_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é chamado processo de ramificação.

Podemos pensar X_0 como o número de indivíduos iniciais na população. Todos os descendentes destes indivíduos formam a primeira geração e seu número é denotado por X_1 . Em geral, X_n é o tamanho da n -ésima geração. Na definição acima, Z_i representa o número de descendentes do i -ésimo indivíduo da geração $n - 1$.

$$P_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P\left(\sum_{r=1}^i Z_r = j\right)$$

Proposição 1.93. Suponha que $X_0 = 1$. Então $E[X_n] = \mu^n$, onde μ é o número médio de descendentes por indivíduo.

Demonstração.

$$E[X_n] = E[E[X_n | X_{n-1}]] = \mu E[X_{n-1}] = \mu E[E[X_{n-1} | X_{n-2}]] = \mu E[X_{n-2}] = \dots = \mu^n.$$

□

Note que:

Se $\mu < 1$: $E[X_n]$ converge para zero.

Se $\mu = 1$: $E[X_n]$ é constante e igual a 1.

Se $\mu > 1$: $E[X_n]$ diverge para infinito.

Seja π a probabilidade de extinção de um processo de ramificação, isto é, $\pi = P(X_n = 0 \text{ para algum } n)$.

Teorema 1.94. Suponha que $P(X_1 = 0) > 0$ e $P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) < 1$. Então

i) π é o menor número positivo satisfazendo

$$x = \sum_j x^j P(X_1 = j)$$

ou seja, o menor número inteiro positivo satisfazendo $x = G_{X_1}(x)$, onde G_{X_1} é a função geradora de probabilidade de X_1 .

ii) $\pi = 1$ se e somente se $\mu \leq 1$.

Conclusão

Pesquisas Recentes

Como já foi mencionado, processos markovianos estão envolvidos em estudos nas mais variadas áreas do conhecimento. A título de exemplo apresentaremos dois problemas que tem sido amplamente estudados recentemente e que fazem uso de processos markovianos.

Problema 1

Suponha que inicialmente um único elemento de uma população possui uma informação. Este repassa a informação para uma quantidade aleatória de vizinhos e depois deixa de fazer isso. Cada indivíduo ao receber a informação repete este mesmo processo. Aqui algumas perguntas surgem: Que proporção da população toma conhecimento da informação? Qual é a velocidade com que a informação se espalha? Se a população é infinita existe probabilidade deste processo ocorrer indefinidamente sempre existindo algum indivíduo transmitindo a informação?

Problema 2

Considere um modelo para estudo da disseminação de vírus em redes de computadores. Imagine uma sequência de computadores ligados em rede. No instante inicial um único computador é infectado por um vírus o qual se movimenta aleatoriamente na rede infectando computadores pelo caminho. Quando um ou mais vírus chegam a um computador, este é infectado por um novo vírus que inicia a mesma dinâmica de movimentos. Ao ser infectado cada computador ativa um antivírus que irá matar qualquer vírus que ali saltar futuramente. Neste modelo algumas perguntas surgem: Numa população com infinitos computadores, existe probabilidade de infinitos computadores serem infectados? O que ocorre se criarmos um vírus forte capaz de sobreviver a um grande número de computadores com antivírus? Numa população finita, qual proporção de computadores é infectada pelo vírus?

Referências

- [Dur] R. Durrett, Probability: theory and examples, (2nd edn.), Duxbury, Belmont. Calif.
- [Fel] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, New York, 1966.
- [HIN] Hinojosa, A., Milanés, A., Uma introdução aos processos estocásticos com aplicações, Departamento de Estatística. UFMG.
- [Nor] J. Norris, Markov Chains, Cambridge University Press, 1996.
- [Ros] S.H. Ross, Stochastic Processes, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1996.
- [Sti] D. Stirzaker, Elementary Probability, Cambridge University Press, 2003.

MC10 - Sistemas Dinâmicos Suaves X Sistemas Dinâmicos Descontínuos: uma Introdução*Bruno Freitas & Durval Tonon (UFG)*

Resumo

O objetivo desse minicurso é apresentar, de maneira sucinta e intuitiva, a alunos de graduação com o conhecimento mínimo em E.D.O. um paralelo entre a teoria clássica de sistemas dinâmicos suave e a recente, e ainda em construção, teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Tentaremos fazer com que os espectadores sintam as principais diferenças entre essas duas teorias e principalmente, tentar responder a pergunta: “Por que estudar sistemas dinâmicos descontínuos?”

Na primeira parte do minicurso trataremos de alguns resultados clássicos sobre sistemas de equações diferenciais suaves. Começaremos estudando sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1.3}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^T$.

Mostraremos que a solução do sistema linear (1.1.3) com condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por $x(t) = e^{At}x_0$, onde $e^{At} \in M_n(\mathbb{R})$ que pode ser calculada em termos dos autovalores e autovetores da matriz A . Daremos o comportamento das soluções de (1.1.3) em função dos autovalores e autovetores da matriz A . Faremos algumas ilustrações em \mathbb{R}^2 .

Consideremos o sistema de E.D.O.'s:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1.4}$$

onde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função não-linear e E é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Mostraremos que considerando algumas condições sobre a função f , o sistema não-linear (1.1.4) tem uma única solução passando por cada ponto $x_0 \in E$. Em geral, não é possível resolver o sistema (1.1.4), porém, realizamos o estudo qualitativo da solução do mesmo. Para este estudo, apresentaremos o teorema de Hartman-Grobman, que mostra que na vizinhança de um ponto

de equilíbrio hiperbólico x_0 , o sistema não-linear (1.1.4) tem a mesma estrutura qualitativa do sistema linear $\dot{x} = Ax$, onde $A = Df(x_0)$. Ainda com o objetivo de fazer o estudo qualitativo da solução e obtermos o máximo possível de informações acerca da dinâmica do sistema (1.1.4), apresentaremos o teorema da Variedade Estável. Para maiores referências para a primeira parte do curso veja [L] e [S].

Na segunda metade do curso apresentaremos alguns aspectos da recente teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Teoria essa que tem tido um crescente desenvolvimento devido em grande parte à sua aplicabilidade em outros ramos da ciência, como engenharia, biologia, física, entre outros, para maiores referências veja [T2]. Apresentaremos a definição de sistemas descontínuos seguindo a convenção estabelecida por Filippov em [F].

Afim de ilustrarmos a riqueza da dinâmica nesse contexto, consideremos especificamente uma família de campos descontínuos em \mathbb{R}^3 e faremos um estudo detalhado descrevendo alguns aspectos patológicos de sua dinâmica.

Por fim, abordaremos alguns pontos-chaves da teoria como estabilidade estrutural e estabilidade assintótica e de Lyapunov em sistemas descontínuos.

Introdução

Neste minicurso abordamos alguns aspectos qualitativos e geométricos da teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Esta teoria tem tido nos últimos anos um grande avanço devido a diversos fatores: a estreita relação com outros ramos da ciência como a estabelecer de forma consistente definições e convenções.

Nos últimos anos, muitos autores contribuíram para o desenvolvimento e amadurecimento do estudo de sistemas Filippov, veja por exemplo, [F,K] e para mais referências [T2].

O ponto base para o estudo de sistemas descontínuos em dimensão três foi o trabalho [S-T1] de J. Sotomayor e M. A. Teixeira que considera campos de vetores definidos em variedades com bordo, denotado por χ . Neste trabalho, seguindo o programa de Thom-Sma-

le, estão caracterizados os conjuntos de campos estruturalmente estáveis, Σ_0, Σ_1 , relativos a χ, χ_1 , respectivamente, onde $\chi_1 = \chi - \Sigma_0$. Contudo o estudo da estabilidade para sistemas descontínuos exige que consideremos além dos ingredientes encontrados em variedades com bordo outros provenientes da dinâmica dos campos X e Y , como por exemplo aplicação de primeiro retorno associada, campo deslizando, entre outros, tornando esse estudo uma fonte profícua de fenômenos interessantes. Veja [J,Ku-R-G], por exemplo.

Consideraremos a dinâmica de cada um dos ingredientes envolvidos no campo descontínuo: aplicação de primeiro retorno, campo deslizando, dinâmica dos campos suave X e Y e o tipo de contato entre X, Y e a variedade de descontinuidade.

Introduziremos também os conceitos de estabilidade estrutural para sistemas descontínuos. Assim como no caso suave, esse é um dos temas mais relevantes na teoria qualitativa, visto que nos fornece não só informações sobre a dinâmica de um sistema concreto como também a dinâmica de todos os sistemas próximos a ele.

Estudaremos também os conceitos de estabilidade assintótica e estabilidade de Lyapunov, respectivamente, para sistemas descontínuos, chamados de A-estabilidade e L-estabilidade, respectivamente. Os conceitos de A e L-estabilidade dizem que pequenas mudanças na condição inicial não alteram a dinâmica do sistema.

Sistemas Dinâmicos Suave

Exponencial de Operadores

Começaremos estudando sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1.5}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^T$. Para estudar soluções de (1.1.5) devemos antes definir a exponencial de um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e é necessário definir o conceito de convergência no espaço $L(\mathbb{R}^n)$ dos operadores lineares

de \mathbb{R}^n . Utilizaremos a norma de um operador T por

$$\|T\| = \max_{|x| < 1} |T(x)|$$

onde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Sendo $T, S \in L(\mathbb{R}^n)$, temos:

a) $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

b) $\|kT\| = |k|\|T\|$ para $k \in \mathbb{R}$.

c) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Definição 1.95. Uma seqüência de operadores lineares $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ converge para um operador linear $T \in L(\mathbb{R}^n)$ com $k \rightarrow \infty$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um N tal que para $k \geq N$, $\|T - T_k\| < \epsilon$.

Lema 1.96. Para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

a) $|T(x)| \leq \|T\||x|$

b) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$

c) $\|T^k\| \leq \|T\|^k$.

Teorema 1.97. Dado $T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $t_0 > 0$, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

é absolutamente e uniformemente convergente para todo $|t| \leq t_0$.

Demonstração. Seja $\|T\| = a$. Segue do lema acima que para $|t| \leq t_0$,

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}$$

Mas $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}$. Segue assim pelo teste de Weierstrass que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

é absolutamente e uniformemente convergente para $|t| \leq t_0$. □

Deste modo, a exponencial do operador linear T é definido por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}.$$

Como estamos interessados nas soluções do problema

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, assumimos que a transformação linear T é representada pela matriz A com respeito a base canônica do \mathbb{R}^n e definimos a exponencial e^{At} .

Definição 1.98. *Seja A uma matriz $n \times n$. Então para $t \in \mathbb{R}$, definimos*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Para qualquer matriz $n \times n$ A , e^{At} é uma matriz $n \times n$ que pode ser calculada em termos dos autovalores e autovetores de A .

Proposição 1.99. *Se P e T são transformações lineares sobre \mathbb{R}^n e $S = PTP^{-1}$, então $e^S = Pe^T P^{-1}$.*

Demonstração. Da definição de e^S temos que:

$$e^S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(T)^k}{k!} P^{-1} = Pe^T P^{-1}$$

□

Na seguinte proposição tratamos de matrizes 2×2 .

Proposição 1.100. *Consideremos as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Então:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}, \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad e^{Ct} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt) \\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

O fato especial de se saber determinar a exponencial das matrizes da proposição anterior é o teorema seguinte:

Teorema 1.101. (*Forma canônica de Jordan 2×2*) Dependendo dos autovalores λ_1 e λ_2 de A , ocorre exatamente um dos seguintes casos de classes de equivalência de semelhança de matrizes:

1) Se λ_1, λ_2 são reais e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por quaisquer autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 ;

2) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ é real e

a) $\dim \text{Nuc}(\lambda I - A) = 2$, então $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$;

b) $\dim \text{Nuc}(\lambda I - A) = 1$, então $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por qualquer vetor u fora do autoespaço $\text{Nuc}(\lambda I - A)$ e o autovetor $v = Au - \lambda u$ de A associado ao autovetor λ .

3) Se $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $A \sim \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas pelas partes real e imaginária de qualquer autovetor complexo de A associado ao autovalor λ_1 .

Por simplicidade enunciamos a versão da forma canônica de Jordan para matrizes 2×2 . Observamos que temos a versão para matrizes $n \times n$.

Teoria de Sistemas Lineares

Seja A uma matriz $n \times n$. Consideremos novamente o problema de valor inicial

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0. \quad (1.1.6)$$

Lema 1.102. *Seja A uma matriz $n \times n$, então $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$*

Teorema 1.103. (*Teorema Fundamental para Sistemas Lineares*) Seja A uma matriz $n \times n$. Então para um dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o problema de valor inicial

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0$$

tem uma única solução dada por $x(t) = e^{At}x_0$.

Demonstração. Pelo lema, se $x(t) = e^{At}x_0$, então

$$x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t).$$

Temos também que $x(0) = Ix_0 = x_0$. Portanto $x(t) = e^{At}x_0$ é uma solução. Para observar que esta é a única solução, seja $x(t)$ uma solução qualquer do problema de valor inicial acima e seja

$$y(t) = e^{-At}x(t).$$

Logo, pelo lema acima e pelo fato de que $x(t)$ seja solução do problema, temos:

$$y'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $y(t)$ é constante. Em $t = 0$ temos que $y(t) = x_0$, e assim só podemos ter $x(t) = e^{At}x_0$. \square

Sistemas lineares em \mathbb{R}^2

Consideremos o problema $\dot{x} = Ax$ onde $x \in \mathbb{R}^2$, e A é uma matriz 2×2 . Pela forma canônica de Jordan, basta estudar o problema

$$\dot{x} = Bx$$

onde $B = P^{-1}AP$, é da forma

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \text{ ou } B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \text{ ou } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

De fato, $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$. Para sistemas em \mathbb{R}^2 temos a seguinte classificação:

Teorema 1.104. *Seja $d = \det(A)$ e $T = \text{tr}(A)$ e consideremos o sistema linear*

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.1.7)$$

a) *Se $d < 0$ então (1.1.7) tem uma sela na origem.*

b) *Se $d > 0$ e $T^2 - 4d \geq 0$ então (1.1.7) tem um nó na origem; é estável se $T < 0$ e instável se $T > 0$.*

c) *Se $d > 0$, $T^2 - 4d < 0$ e $T \neq 0$, então (1.1.7) tem um foco na origem; ele é estável se $T < 0$ e instável se $T > 0$.*

d) *Se $d > 0$ e $T = 0$ então (1.1.7) tem um centro na origem.*

Notemos que o polinômio característico de A é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ onde $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ e

$$\lambda_i = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Sistemas não Lineares

Consideremos o sistema de equações lineares do tipo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1.8)$$

onde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde E é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n .

Definição 1.105. *Suponha que $f \in C(E)$. Então $x(t)$ é uma solução da equação (1.1.8) sobre um intervalo I se $x(t)$ é diferenciável sobre I e para todo $t \in I$, $x(t) \in E$ e $x'(t) = f(x(t))$. Dado $x_0 \in E$, $x(t)$ é solução do problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x) \quad x(t_0) = x_0$$

sobre um intervalo I se $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ e $x(t)$ é uma solução da equação diferencial (1.1.8) sobre o intervalo I .

Teorema 1.106. *(Teorema Fundamental de Existência e Unicidade) Seja E um aberto de \mathbb{R}^n contendo x_0 e assumamos que $f \in C^1(E)$. Então existe um $a > 0$ tal que o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x) \quad x(t_0) = x_0$$

possui uma única solução $x(t)$ sobre o intervalo $[-a, a]$.

Linearização

Estudaremos o comportamento das soluções do problema $\dot{x} = f(x)$. Vamos mostrar que em certas condições o comportamento do sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ em um ponto de equilíbrio x_0 é qualitativamente determinado pelo sistema $\dot{x} = Ax$, onde $A = Df(x_0)$.

Definição 1.107. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado um ponto de equilíbrio, ou ponto crítico de $\dot{x} = f(x)$ se $f(x_0) = 0$. Um ponto de equilíbrio x_0 é chamado um ponto de equilíbrio hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz $Df(x_0)$ tem parte real zero. O sistema $\dot{x} = Ax$ onde $A = Df(x_0)$ é chamado linearização de $\dot{x} = f(x)$ em x_0 .

Definição 1.108. Um ponto de equilíbrio x_0 de $\dot{x} = f(x)$ é chamado de atrator se todos autovalores da matriz $Df(x_0)$ tem parte real negativa; ele é chamado de repulsor se todos autovalores de $Df(x_0)$ tem parte real positiva; ele é chamado de sela se $Df(x_0)$ tem pelo menos um autovalor com parte real positiva e pelo menos um com parte real negativa.

Aqui temos um importante teorema devido a Hartman-Grobman que mostra que na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , o sistema não linear

$$\dot{x} = f(x)$$

tem a mesma estrutura qualitativa que o sistema linear $\dot{x} = Ax$, onde $A = Df(x_0)$.

Ainda com o objetivo de estudar qualitativamente o problema $\dot{x} = f(x)$, temos o teorema da variedade estável, que mostra que na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0 , o sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ tem variedades estável e instável S e U tangentes em x_0 nos subespaços estável e instável E^S e E^U do sistema linearizado $\dot{x} = Ax$, onde $A = Df(x_0)$.

Sistemas Dinâmicos Descontínuos

Campos Definidos em Variedades com Bordo

Consideremos N uma variedade compacta C^∞ orientável de dimensão três com fronteira ∂N . Denotemos por χ o espaço de todos os germes de campos de vetores de classe C^r em

$(\mathbb{R}^3, 0)$ com a topologia C^r , onde r é grande o suficiente para nossos propósitos. Por simplicidade vamos considerar N mergulhada em uma variedade tridimensional \tilde{N} sem fronteira.

Definição 1.109. *Dois campos de vetores Z e \tilde{Z} são ditos **germe equivalentes** se eles coincidem em uma vizinhança não vazia de N .*

As classes de equivalência para esta relação de equivalência são chamados de **germes de campos de vetores**. Podemos definir analogamente germes de funções. Um campo de vetores X em N é por definição um representante da classe de campos de vetores tangentes a N , definidos em \tilde{N} . Seja ϕ_X o fluxo do representante X dos campos de vetores definidos em um conjunto $D(X) = \{(x, t) \in \tilde{N} \times \mathbb{R} : t \in I_X\}$, onde I_X é o intervalo maximal aberto com extremos $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ contendo 0 ($\phi_X(0, x) = x$) para o qual $\phi_X(t, x) \in N$, para todo $t \in I_X$. Podemos ter $\alpha(x), \beta(x)$ infinito e o fluxo ϕ_X não depende da particular escolha do representante da classe de campos.

A órbita $\gamma(x)$ de X passando por $x \in N$ é por definição a imagem de I_X pela curva integral $\phi_X(\cdot, x) : t \mapsto \phi_X(t, x)$. Órbitas são orientadas pela orientação induzida por essa aplicação via orientação positiva de I_X .

O estudo qualitativo de uma equação diferencial consiste na descrição geométrica de seu espaço de órbitas. É então natural perguntar-se quando é que dois espaços de órbitas têm a mesma descrição, ou seja, corresponde a estabelecermos uma relação de equivalência entre equações diferenciais. Uma relação de equivalência que exprime a estrutura geométrica das órbitas é a equivalência topológica.

Definição 1.110. *Dois campos de vetores X, Y em N são ditos **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : N \rightarrow N$ levando órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação, isto é, dados $p \in N$ e $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < t < \delta$ então $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t', h(p))$ para algum $0 < t' < \varepsilon$.*

Dizemos que h é uma equivalência topológica entre X e Y . Desta forma, definimos uma relação de equivalência em \mathcal{X}^r .

Um relação mais forte é a conjugação entre os fluxos dos campos de vetores. Dois campos X e Y são **topologicamente conjugados** se existir uma equivalência topológica que preserva o parâmetro t , isto é, $h(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t, h(p))$ para todo $p \in N$ e $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.111. Dizemos que $X \in \chi^r$ é estruturalmente estável em χ^r se existe uma vizinhança $B \subset \chi^r$ de X tal que para todo $Y \in B$ é conjugado a X .

Notação: Vamos denotar a fronteira da variedade compacta N por M , a qual será uma subvariedade compacta de N .

Observação 1.112. Suponhamos que M contém a origem e é dada implicitamente pela imagem inversa $f^{-1}(0)$, onde $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é o germe de uma aplicação C^∞ que possui 0 como valor regular.

Denotemos por $\Sigma_0(3)$ o conjunto dos elementos em $\chi(3)$ satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $(X.f)(0) \neq 0$ (0 é ponto regular de X). Neste caso X é transversal a M em 0;
- (2) $(X.f)(0) = 0$ e $(X^2.f)(0) = X.(\nabla X.f) \neq 0$ (0 é um ponto de dobra de X);
- (3) $(X.f)(0) = 0$, $(X^2.f)(0) = 0$ e $(X^3.f)(0) \neq 0$ e o conjunto $\{df(0), d(X.f)(0), d(X^2.f)(0)\}$ é linearmente independente (0 é um ponto de cúspide de X);

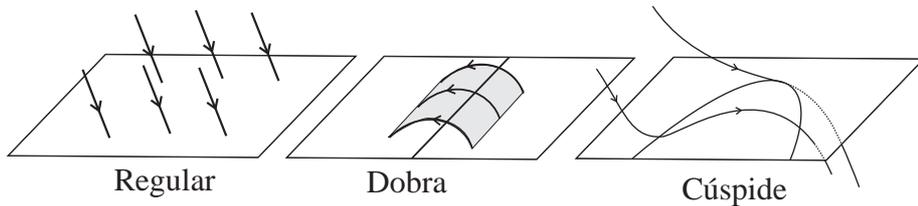


Figura 1.1.39: A classe $\Sigma_0(3)$ de campos em variedades com bordo.

Seja $S_X = \{x \in N; f(x) = (X.f)(x) = 0\}$ o conjunto das M -singularidades de $X \in \chi(n+1)$. Genericamente temos que todas as dobras constituem um conjunto aberto e denso de S_X .

Teorema 1.113. Um campo $X \in \chi(3)$ é estruturalmente estável se e somente se

- (1) $X(p) \neq 0$, para todo $p \in S$;
- (2) Para toda definição local f de S em p , uma das seguintes condições é satisfeita:

(b.1) *Caso regular:* $(X.f)(p) \neq 0$;

(b.2) *Caso dobra:* $(X.f)(p) = 0$ e $(X^2.f)(p) \neq 0$;

(b.3) *Caso cúspide:* $(X.f)(p) = 0 = (X^2.f)(p)$, $(X^3.f)(p) \neq 0$ e o conjunto de vetores $\{df(p), d(X.f)(p), d(X^2.f)(p)\}$ é linearmente independente;

Além disso, fixando $f(u, v, w) = w$, as formas normais dos campos de vetores em $\Sigma_0(3)$ são dadas por:

(1) *Caso regular:* $X(u, v, w) = (0, 0, 1)$;

(2) *Caso dobra:* $X(u, v, w) = (1, 0, u)$;

(3) *Caso cúspide:* $X(u, v, w) = (1, 0, u^2 + v)$

e $\Sigma_0(3)$ é denso em $\chi(3)$.

Observe que 0 é uma M -singularidade de codimensão zero se $X \in \Sigma_0(3)$.

Campos Descontínuos

Nesta seção introduziremos algumas definições e resultados preliminares acerca de sistemas descontínuos, que nos serão úteis. Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^r , $r \geq 1$ que possui a origem como valor regular. Consideremos $\Omega(3)$ o espaço de todos os germes de campos de vetores Z em $(\mathbb{R}^3, 0)$ tais que

$$Z(q) = \begin{cases} X(q), f(q) > 0 \\ Y(q), f(q) < 0, \end{cases}$$

onde $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é a representação implícita de M , $M^+ = f^{-1}(0, \infty)$ e $M^- = f^{-1}(-\infty, 0)$. Quando escrevemos $Z = (X, Y)$ estamos assumindo que o campo X está definido e é suave em M^+ e Y está definido e é suave em M^- . Denotamos por $Z(X, Y)$ ou simplesmente Z quando não tivermos problema de ambiguidade. Consideremos $\Omega(3) = \chi(3) \times \chi(3)$, com a topologia produto. Órbitas soluções de Z sobre os pontos de M serão consideradas através da convenção de Filippov estabelecidas em [F], as quais serão discutidas a seguir. A unicidade das soluções não é requerida.

Definição 1.114. *Dois campos de vetores Z e \tilde{Z} são C^0 M -equivalentes se existe um homeomorfismo M -invariante $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} , preservando a orientação.*

Definição 1.115. *Dizemos que $Z \in \Omega(3)$ é M -estruturalmente estável, ou simplesmente estruturalmente estável, se existe uma vizinhança U de Z em $\Omega(3)$ tal que todo $\tilde{Z} \in U$ é C^0 equivalente a Z .*

Observação 1.116. *Sobre a variedade de descontinuidade podemos definir as soluções de $\dot{Z} = Z(q)$ segundo algumas convenções, visto que as soluções sobre M podem ser multivaluadas. Adotaremos aqui a convenção estabelecida por Gantmaher e Filippov.*

Definição 1.117. *Distinguiremos as seguintes regiões abertas em M :*

Região de Costura (SwR)- *Caracterizada por $(X.f)(Y.f) > 0$, onde $(X.f)(p) = X(p) \cdot \nabla f(p)$. Quando conveniente, denotamos $SwR \uparrow = \{p \in M; (X.f)(p) > 0, (Y.f)(p) > 0\}$ e $SwR \downarrow = \{p \in M; (X.f)(p) < 0, (Y.f)(p) < 0\}$.*

Região de Escape ($EscR$)- *Caracterizada por $(X.f) > 0$ e $(Y.f) < 0$.*

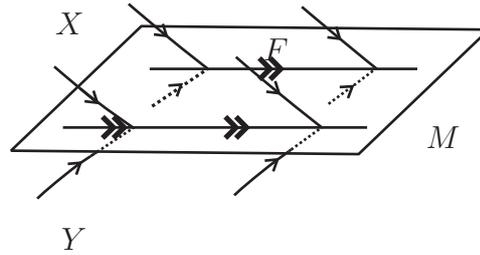
Região de Deslize (SlR)- *Caracterizada por $(X.f) < 0$ e $(Y.f) > 0$.*

Consideremos $\mathcal{O} = SlR \cup EscR \cup SwR$, temos que genericamente \mathcal{O} é aberto e denso em M . Observemos que dado $p \in \mathcal{O}$ temos que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$.

Definição 1.118. *Na região de deslize definiremos o **campo deslizante** $F(X, Y)$ associado a $Z = (X, Y)$ da seguinte maneira: se $p \in SlR$ então $F(X, Y)$ denota o cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a M , isto é, $F(X, Y) = m - p$, onde m é o ponto onde o segmento ligando $p + X(p)$ e $p + Y(p)$ é tangente a M .*

Observação 1.119. *Se $p \in EscR$ então $p \in SlR$ para $-Z$ e assim definimos um campo de vetores na $EscR$ por $F_E(X, Y) = -F(-Z)$. Para ambos os casos, denotemos apenas por $F(X, Y) = F(Z)$.*

O campo deslizante F_Z é definido como o campo obtido da combinação linear entre X e Y , tangente a variedade de descontinuidade M , a qual é dada implicitamente pela aplicação f . Escreveremos $F_Z = (1 - \lambda)X + \lambda Y$ juntamente com a condição

Figura 1.1.40: O campo deslizante F_Z .

$F_Z \cdot \nabla f = 0$, obtemos $\lambda = \frac{X \cdot \nabla f}{(X - Y) \cdot \nabla f}$. Note que na região de deslize é definida como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in M$ tais que $X \cdot \nabla f(x, y, z) < 0$ e $Y \cdot \nabla f(x, y, z) > 0$. Assim, $\frac{1}{(Y - X) \cdot \nabla f} > 0$. Podemos escrever o campo deslizante da seguinte forma

$$F_Z = \frac{1}{(Y - X) \cdot \nabla f} (Y \cdot \nabla f \cdot X - X \cdot \nabla f \cdot Y).$$

Desta forma, o campo deslizante tem a expressão $F_Z(x, y) = \frac{1}{g(x, y)} G(x, y)$, assim a órbita futura de $p_0 \in SlR$ pelo campo descontínuo $Z = (X, Y)$ coincide com a órbita futura do campo $G = (Y \cdot \nabla f \cdot X - X \cdot \nabla f \cdot Y)$.

Observação 1.120. Se fixarmos um sistema de coordenadas local (x, y, z) em \mathbb{R}^3 em uma vizinhança de $p \in SlR$ tal que a aplicação $f : (\mathbb{R}^3, p) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é dada por $f(x, y, z) = z$. Obtemos a expressão mais simplificada para o campo deslizante:

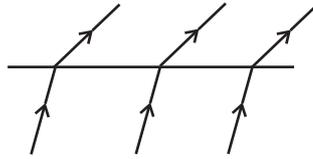
$$F_Z = F(X, Y) = (X^1 Y^3 - Y^1 X^3, X^2 Y^3 - Y^2 X^3), \quad (1.1.9)$$

que pode ser C^r estendida a uma vizinhança da origem em M .

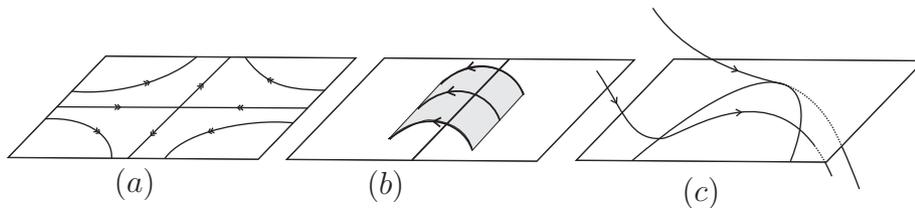
Definição 1.121. 1- Um ponto p é **M -regular** de Z se pelo umas das condições se verifica:

- (a) $(X \cdot f)(p)(Y \cdot f)(p) > 0 (p \in RC)$;
- (b) $(X \cdot f)(p)(Y \cdot f)(p) < 0$ mas $\det[X, Y](p) \neq 0$. Neste caso $p \in RD$ ou $p \in RE$ mas não é ponto crítico para $F(Z)$.

2- Dizemos que $p \in M$ é um ponto **M -singular elementar** de $Z = (X, Y)$ se uma das condições é satisfeita:

Figura 1.1.41: Exemplo de ponto M -regular

- (a) p é ponto de dobra de Z . Isto significa que p é ponto de dobra de $X((X.f)(p) = 0$ e $(X^2.f)(p) \neq 0$) e regular de Y ou vice-versa, veja figura 1.1.42;
- (b) p é ponto de cúspide de Z . Isto significa que p é ponto de cúspide de $X((X.f)(p) = 0 = (X^2.f)(p), (X^3.f)(p) \neq 0$ e $\{df(p), d(X.f)(p), d(X^2.f)(p)\}$ é linearmente independente) e regular de Y ou vice-versa;
- (c) $(X.f)(p) \cdot (Y.f)(p) < 0, \det[X, Y](p) = 0$ mas $\frac{d}{dt}(\det[X, Y](p)) \neq 0$. Esta condição é equivalente a p ser um ponto crítico hiperbólico de F_Z .

Figura 1.1.42: Alguns exemplos de campos descontínuos que são M -singulares elementares em uma singularidade típica.

Na figura 1.1.42 temos: em (a) representa a dinâmica de um campo descontínuo onde a origem é ponto crítico hiperbólico para o campo deslizando F_Z , em (b) temos um campo descontínuo do tipo dobra e em (c) representa um campo descontínuo do tipo cúspide.

Se $p \in SlR \cup EscR$ e $X(p), Y(p)$ são linearmente dependentes então p é ponto crítico de F_Z . Neste caso p é chamada de **pseudo singularidade** de Z .

Convencionamos que a **órbita futura** de Z por um ponto $p \in SlR$ é dada pela órbita do campo deslizando F_Z por p . Seguiremos essa convenção afim de evitarmos fenômenos patológicos desinteressantes para nosso contexto.

Consideremos o conjunto $\Omega(3)$ de campos de Filippov definidos em uma variedade de dimensão três, o qual denotemos somente por Ω . Na definição seguinte, para

simplificarmos a notação, falamos que os campos X, Y são regulares, dobras ou cúspides em $0 \in M$. Definimos os seguintes conjuntos:

Definição 1.122. *Consideremos os conjuntos*

$$\Omega_0(a) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são regulares}\} \text{ (caso regular-regular);}$$

$$\Omega_0(b) = \{Z = (X, Y); X \text{ é dobra e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)}\} \text{ (caso dobra-regular);}$$

$$\Omega_0(c) = \{Z = (X, Y); X \text{ é cúspide e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)}\} \text{ (caso cúspide-regular);}$$

$$\Omega_0(d) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são dobras, } S_X \text{ é transversal a } S_Y, \text{ os autovetores de } DF_Z(0) \text{ são transversais a } S_X, S_Y \text{ e } 0 \text{ é ponto crítico hiperbólico para } F_Z\} \text{ (caso dobra-dobra). Nesse caso distinguimos os subconjuntos:}$$

- **Caso elíptico:** $\Omega_0(d.1) = \{Z \in \Omega_0(d); X^2 \cdot f(p) < 0 \text{ e } Y^2 \cdot f(p) > 0\}$. Temos duas tangencias invisíveis (dobra-dobra invisível);
- **Caso parabólico:** $\Omega_0(d.2) = \{Z \in \Omega_0(d); X^2 \cdot f(p) > 0, Y^2 \cdot f(p) > 0 \text{ ou } X^2 \cdot f(p) < 0, Y^2 \cdot f(p) < 0\}$ (dobra visível-dobra invisível);
- **Caso hiperbólico:** $\Omega_0(d.3) = \{Z \in \Omega_0(d); X^2 \cdot f(p) > 0, Y^2 \cdot f(p) < 0\}$ (dobra-dobra visível).

Seja $\Omega_0 = \Omega_0(a) \cup \Omega_0(b) \cup \Omega_0(c) \cup \Omega_0(d)$. Segue do teorema 1.113 e das condições de transversalidade que $\Omega_0 \subset \Omega$ é subconjunto aberto e denso de Ω , relativo a topologia de Ω .

Definição 1.123. *Seja $Z \in \Omega_0(d.1)$, dizemos neste caso que p é **T-singularidade** de Z .**

Recentemente muitos trabalhos visam um entendimento total da dinâmica desta singularidade [J-C, J, C, C-B-F-J]. Futuramente dedicaremos um capítulo ao estudo da T-singularidade. A estabilidade estrutural para a T-singularidade ainda não é conhecida completamente. No capítulo estabilidade estrutural para sistemas descontínuos provaremos que

*Esta nomenclatura é em homenagem a M.A. Teixeira que no trabalho [T1] de 1990 estudou pela primeira vez, pelo que sabemos, esta singularidade exibindo algumas propriedades como a L-estabilidade (veja definição ??) e um subconjunto de $\Omega_0(d.1)$ que não é estruturalmente estável.

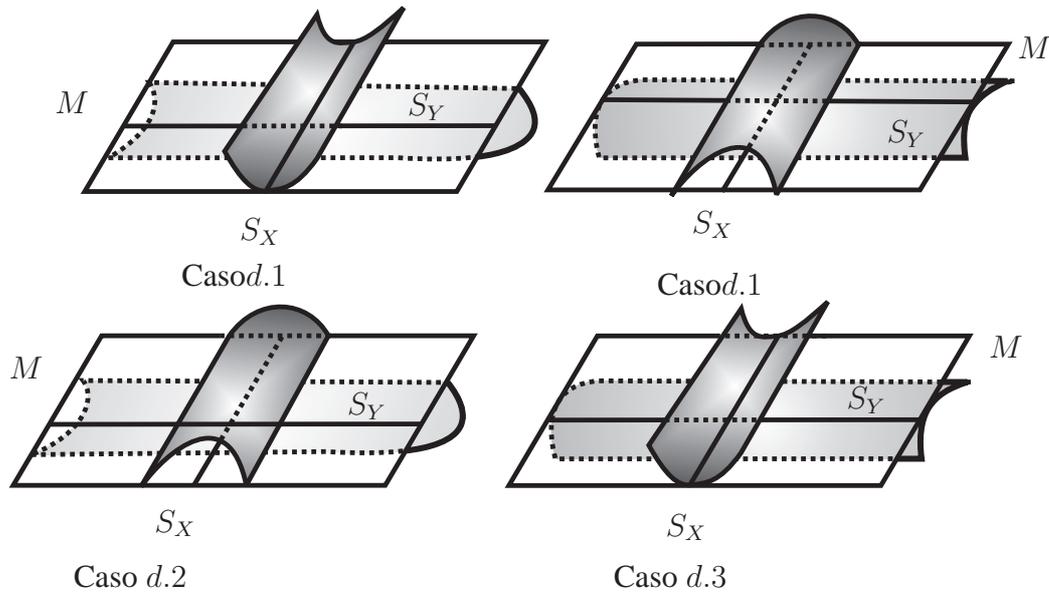


Figura 1.1.43: Tipos de Dobra

$\Omega_0(i)$ para $i = a, b, c$ é estruturalmente estável e exibiremos um subconjunto de $\Omega_0(d)$ que também goza desta propriedade. Apresentemos agora alguns exemplos de sistemas descontínuos.

Exemplo 1.124. Apresentemos um modelo que pode ser encontrado na teoria clássica do eletromagnetismo, veja por exemplo [A-V-K]:

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \alpha \text{sign}(x) = 0,$$

com $\alpha > 0$. Associado a esta equação temos os campos: $X(x, y, z) = (y, z, z + \alpha)$ se $x > 0$ e $Y(x, y, z) = (y, z, z - \alpha)$ se $x < 0$.

Tomemos $f(x, y, z) = x$. As regiões na variedade de descontinuidade são dadas por: $SwR \uparrow = \{(0, y, z); y > 0\}$, $SwR \downarrow = \{(0, y, z); y < 0\}$, $SlR = \emptyset = EscR$.

Exemplo 1.125. Outro exemplo de sistemas descontínuo são **Sistemas com Relê**, os quais são da seguinte forma: $X(x) = A.x + \text{sgn}(x)k$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $A \in M_n$ e $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Exemplo 1.126. Consideremos o campo $Z_{\lambda, \mu} = (X_{\lambda, \mu}, Y_{\lambda, \mu})$ onde $X_{\lambda, \mu}$ fornece uma bifurcação de Hopf em \mathbb{R}^3 e $Y_{\lambda, \mu}$ é regular, sendo o parâmetro λ responsável pelo desdobramento da bifurcação de Hopf e μ fornece o deslocamento da singularidade: $X_{\lambda, \mu}(x + \mu, y, z) =$

$$(-y + (x + \mu)(\lambda - ((x + \mu)^2 + y^2)), x + \mu + y(\lambda - ((x + \mu)^2 + y^2)), x + y + z + \mu) \text{ e}$$

$$Y_{\lambda, \mu}(x, y, z) = (1, 0, 0).$$

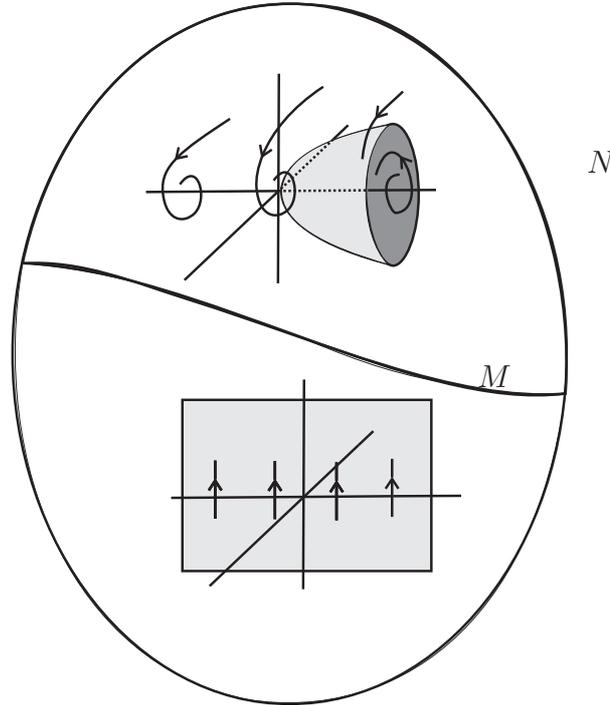


Figura 1.1.44: Campo descontínuo Hopf-regular.

Analisando o campo descontínuo, obtemos a curva de dobras $c = \{(\lambda, \mu); \mu y^2 + y + \mu^3 - \mu\lambda = 0\}$ do campo $X_{\lambda, \mu}$. Na figura 1.1.45 apresentamos o espaço de parâmetros (λ, μ) onde damos uma idéia qualitativa de como a dinâmica de $Z_{\lambda, \mu}$ varia.

Exemplo 1.127. Consideremos as auto-oscilações de um gerador elétrico valvulado com rede ressonante no circuito em grade ou no circuito ânodo, dado na figura 1.1.46. Modelando o problema matematicamente, obtemos $X(x, y) = (y, -x - 2h_1y)$ se $x < -1$ e $Y(x, y) = (y, -x + 2h_2y)$ se $x > -1$. Obtemos o retrato de fase explicitado na figura 1.1.47.

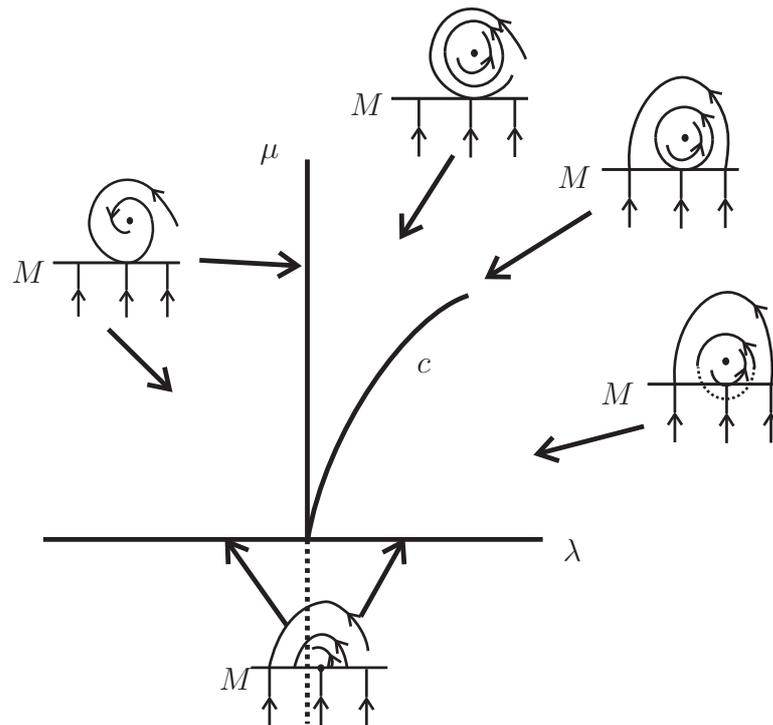


Figura 1.1.45: Espaço de parâmetro para Hopf-regular.

Estabilidade Estrutural para Sistemas Descontínuos

Da definição 1.122, do teorema 1.113 e das condições de transversalidade obtemos a lista dos campos de codimensão zero:

$$\Omega_0(a) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são regulares}\} \text{ (caso regular-regular);}$$

$$\Omega_0(b) = \{Z = (X, Y); X \text{ é dobra e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)}\} \text{ (caso dobra-regular);}$$

$$\Omega_0(c) = \{Z = (X, Y); X \text{ é cúspide e } Y \text{ é regular (ou vice-versa)}\} \text{ (caso cúspide-regular);}$$

$$\Omega_0(d) = \{Z = (X, Y); X, Y \text{ são dobras, } S_X \text{ é transversal a } S_Y, \text{ os autovalores de } DF_Z(0) \text{ são transversais a } S_X, S_Y \text{ e } 0 \text{ é ponto crítico hiperbólico para } F_Z\} \text{ (caso dobra-dobra).}$$

Nosso objetivo nessa seção é estudar o comportamento local de sistemas de Filippov, classificando os conjuntos de campos que são estruturalmente estáveis. Em cada

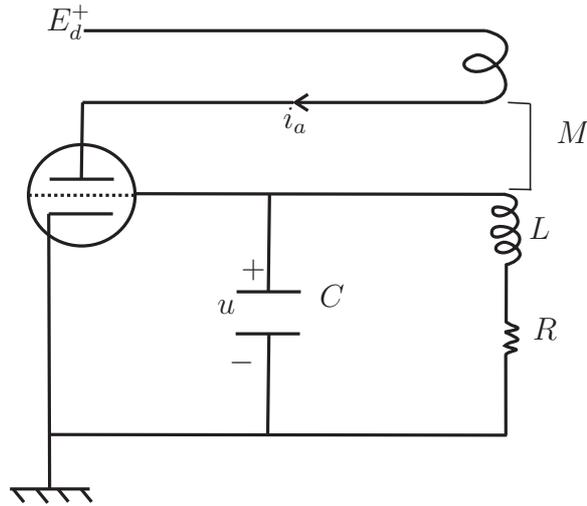


Figura 1.1.46: Gerador elétrico valvulado.

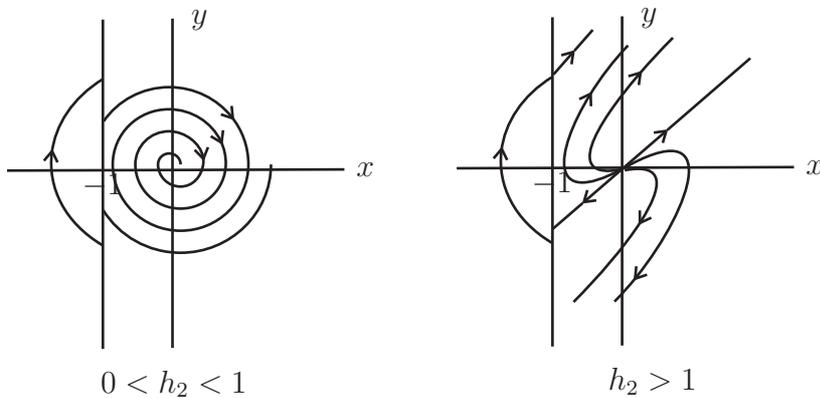


Figura 1.1.47: Retrato de fase.

caso vamos exibir as C^0 -formas normais e construiremos o homeomorfismo que fornece a equivalência topológica. Essa equivalência topológica divide o conjunto dos campos de Filippov $\Omega(3)$ em classes de equivalência e quando consideramos a formas normais tomamos o representante mais simples possível dessas classes de equivalência.

Consideremos inicialmente o caso $Z \in \Omega_0(a)$ regular-regular. Em uma vizinhança de pontos regulares que não pertencem a variedade de descontinuidade M podemos aplicar diretamente o Teorema do Fluxo Tubular. Salvo menção ao contrário, assumimos que $M = f^{-1}(0)$ com $f(x, y, z) = z$.

Proposição 1.128. *O sistema de Filippov $Z \in \Omega_0(b)$ definido em uma vizinhança U da*

origem é topologicamente equivalente em uma vizinhança V da origem a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, onde $\tilde{X}(x, y, z) = (k_1, 0, x)$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (1, 0, \gamma)$, onde $k_1 = \text{sgn}(X^2 \cdot f(0))$ e $\gamma = \text{sgn}(Y \cdot f(0))$.

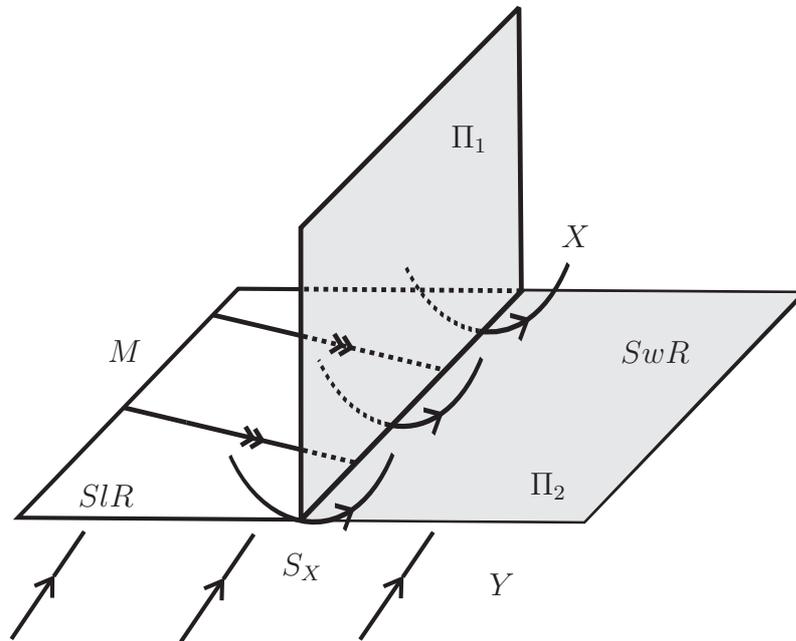


Figura 1.1.48: Retrato de fase em uma vizinhança de uma dobra visível.

Passemos agora ao caso cúspide-regular. Na proposição seguinte caracterizamos a estabilidade estrutural para esse caso.

Proposição 1.129. *O campo de Filippov do tipo cúspide-regular $Z \in \Omega_0(c)$ definido em uma vizinhança U da origem é topologicamente equivalente em uma vizinhança V da origem a $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$, com $\tilde{X}(x, y, z) = (\varepsilon_1, 0, \varepsilon_2(y + x^2))$ e $\tilde{Y}(x, y, z) = (1, 0, \gamma)$, onde $\varepsilon_1 = \text{sgn}(X^1(0))$, $\varepsilon_2 = \text{sgn}(X^3 \cdot f(0))$ e $\gamma = \text{sgn}(Y \cdot f(0))$.*

Consideremos agora o caso onde o campo descontínuo $Z = (X, Y)$ apresenta uma singularidade do tipo dobra na origem para ambos os campos X e Y . A estabilidade estrutural desse caso tem sido objeto de grande interesse na pesquisa atual (veja os trabalhos [J,C,J-C]), bem como tema de congressos e seminários (veja <http://www.enm.bris.ac.uk/anm/meetings/nonsmooth08/>). Teixeira provou em 1990 no trabalho [T1] que uma subfamília de

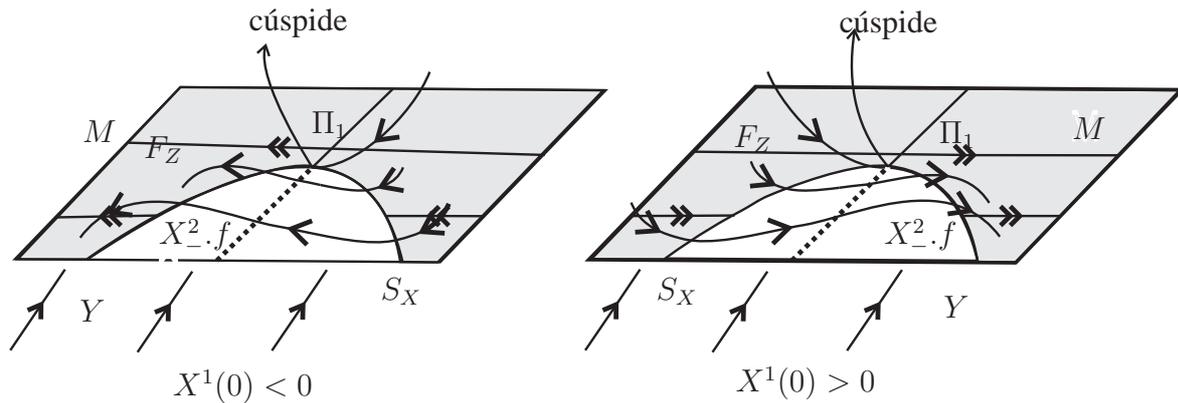


Figura 1.1.49: Retrato de fase em uma vizinhança de uma singularidade genérica do tipo cúspide-regular.

campos descontínuos do tipo dobra-dobra não é estruturalmente estável. * Contudo nosso objetivo aqui é explicitar alguma subfamília de $\Omega_0(d)$ que seja estruturalmente estável e nos casos onde não podemos decidir a respeito, discutir alguns exemplos de dinâmicas de campos dobra-dobra que poderiam deixar de ser estruturalmente estáveis.

Como a origem é singularidade do tipo dobra para os campos X e Y , consideraremos as condições: $X.f(0) = Y.f(0) = 0$, $X^2.f(0) \neq 0$, $Y^2.f(0) \neq 0$, autovalores de $DF(0)$ são transversais a S_X, S_Y , 0 é ponto crítico hiperbólico para F_Z e $S_X \pitchfork_0 S_Y$. Desta forma, dividiremos nosso estudo nos casos abaixo de acordo com as possibilidades de sinal de $X^2.f(0)$ e $Y^2.f(0)$:

- (i) Caso parabólico: $X^2.f(0) > 0$ e $Y^2.f(0) > 0$ (positivo) ou $X^2.f(0) < 0$ e $Y^2.f(0) < 0$ (negativo);
- (ii) Caso hiperbólico: $X^2.f(0) > 0$ e $Y^2.f(0) < 0$;
- (iii) Caso elíptico: $X^2.f(0) < 0$ e $Y^2.f(0) > 0$.

No caso parabólico uma das dificuldades em caracterizar a estabilidade estrutural acontece quando pontos da $EscR$ iterados pelo fluxo do campo X ou Y interceptam a SlR .

*Nesse trabalho estuda-se campos descontínuos do tipo dobra-dobra elíptico onde a origem é ponto crítico do tipo elíptico para a aplicação de primeiro retorno φ_Z associada a Z .

Em outras palavras, dado $p \in EscR$ se existir $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que o fluxo $\phi_X(t(p), p) \in SlR$ (ou $\phi_Y(t(p), p) \in SlR$) teremos dificuldades em decidir sobre a estabilidade estrutural. Pois se tal fato ocorrer poderá dar origem a fenômenos patológicos que não sejam robustos por pequenas perturbações. Por exemplo, dada parte de uma trajetória do campo deslizante na $EscR$: $\gamma(t) \subset EscR, t \in [t_1, t_2]$, quando iteramos $\gamma(t)$ pelo fluxo do campo X obtemos o segmento de trajetória $\tilde{\gamma}(t) = \phi_X(t(\gamma(t)), \gamma(t)) \subset SlR$ o qual poderia ter uma intersecção não genérica na SlR , por exemplo, tangencias não genéricas com as órbitas de F_Z , ou com os conjuntos de tangência S_X, S_Y que são as fronteiras da SlR . A seguir apresentamos um modelo onde a origem é uma singularidade dobra-dobra parabólica negativa. Neste modelo temos uma região $R \subset EscR$ que quando iterada pelo fluxo do campo X intercepta a SlR .

Exemplo 1.130. *Considere o sistema de Filippov*

$$Z(x, y, z) = \begin{cases} X_{k_1, a}(x, y, z) = (k_1, a, x), & \text{se } z > 0 \\ Y_{k_2}(x, y, z) = (0, k_2, y), & \text{se } z < 0, \end{cases} \quad (1.1.10)$$

onde $k_1 = X^2.f(0) < 0, k_2 = Y^2.f(0) < 0$ e $a = X.Y.f(0) > 0$.

De fato, dado $p = (x_0, y_0, 0) \in EscR$ tomamos $t(p) = -\frac{2x_0}{k_1}$ e obtemos $\phi_X(t(p), p) = (-x_0, y_0 - \frac{2a}{k_1}x_0, 0)$. Definimos a região $R = \{(x, y, 0) \in EscR; y > \frac{2a}{k_1}x\}$ onde $\phi_X(t(p), p) \in SlR$ para $p \in R$.

Desta forma a resposta sobre a estabilidade estrutural nesse caso ainda permanece em aberto devido a dificuldades como esta.

A singularidade genérica para o caso dobra-dobra elíptico, também conhecida como T-singularidade pois foi no trabalho de Teixeira [T1], como comentamos anteriormente, que foi apresentado pela primeira vez um estudo sobre esse tipo de singularidade para campos de Filippov exibindo um subconjunto aberto de campos que não é estruturalmente estável. Este subconjunto trata-se do conjunto de campos descontínuos Z tais que os autovalores da aplicação de primeiro retorno associada $\varphi_Z = \phi_X \circ \phi_X$ a Z são do tipo elíptico. No caso onde esses autovalores são do tipo sela ainda permanece em aberto a estabilidade estrutural devido a dificuldades semelhantes as comentadas no caso parabólico.

Observe que para o caso dobra-dobra hiperbólico não temos retorno, isto é, se $p \in M$ deixa a variedade de descontinuidade não retorna mais. Assim, os fenômenos co-

mentados anteriormente que tornam a análise da estabilidade estrutural árdua, não acontece para o caso hiperbólico possibilitando o seu estudo.

Como nos casos dobra-regular e cúspide-regular, definiremos o homeomorfismo para M e o estendemos via fluxo do campo para toda a vizinhança U da singularidade. Para que possamos estender o fluxo para toda U precisamos definir seções em cada região que são topologicamente transversais aos correspondentes fluxos em cada região. Consideremos as seções: $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ onde Π_1, Π_2 são seções transversais a dobra de X, Y respectivamente e Π_3, Π_4 são seções transversais aos fluxos na região onde estão definidas (veja figura 1.1.50).

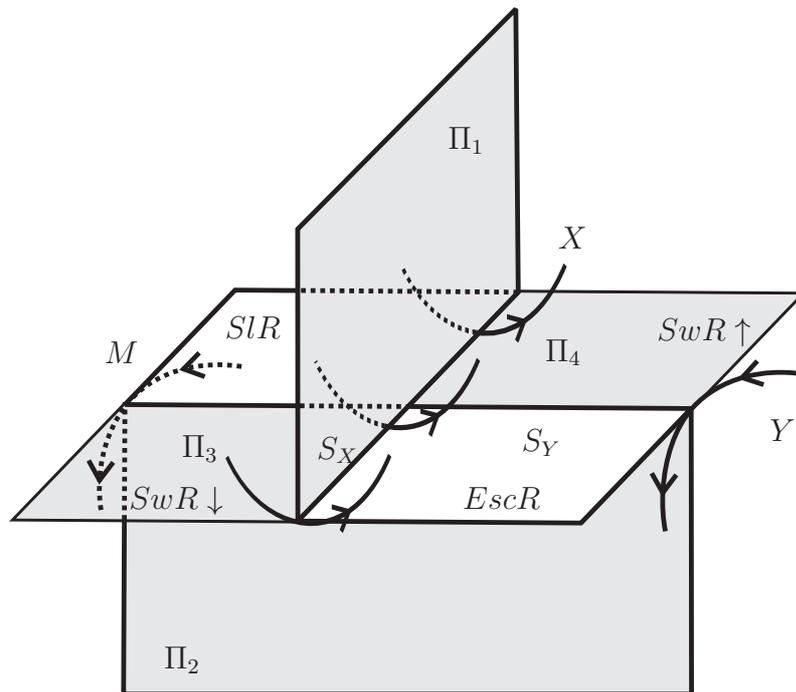


Figura 1.1.50: Retrato de fase em uma vizinhança de uma dobra-dobra hiperbólica.

Observe que as seções Π_i, SLR e $EscR$ interceptam-se somente na dobra-dobra $(0, 0, 0)$, para $i = 1, \dots, 4$. Considerando o campo de Filippov $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$ suficientemente próximo de $Z = (X, Y)$ podemos definir seções $\tilde{\Pi}_i$ analogamente a forma como o fizemos anteriormente, para $i = 1, \dots, 4$. Assim, obtemos o homeomorfismo que leva dobra-dobra hiperbólica em dobra-dobra hiperbólica. Posteriormente estendemos o homeomorfismo para toda U via fluxos do campo Z . Podemos verificar que o homeomorfismo definido desta forma é de fato contínuo pois coincide nas fronteiras.

Assim, obtemos a proposição ?? que caracteriza a subfamília de $\Omega_0(d)$ que é estruturalmente estável.

Proposição 1.131. *O campo de Filippov $Z \in \Omega_0(d)$ do tipo dobra-dobra hiperbólica (isto é, com $X^2.f(0) > 0, Y^2.f(0) < 0$) definido em*

Referências

- [A-V-K] Andronov A.A., Vitt A.A. e Khaikin S.E., *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, U.K., 1966.
- [C] Chillingworth, *The Teixeira singularity or: Stability and Bifurcation for a discontinuous vector field in R^3 at a double-fold point: DRAFT*, To appear.
- [C-B-F-J] Colombo A., Bernardo M. di, Fossas E. e Jeffrey M. R., *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*, Systems and Control Letters, submitted, Junho de 2009.
- [J] Jeffrey M.R., *Two-folds in nonsmooth dynamical systems*, I.F.A.C., Chaos09 proceedings, Queen Mary, Junho de 2009.
- [J-C] Jeffrey M.R. and Colombo A., *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. Volume 8, Issue 2, pp. 624-640,(2009).
- [K] Koslova V.S., *Roughness of a discontinuous system*, Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 1 Matematika Mekhanika, vol.5, 1984, 16-20.
- [Ku-R-G] Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S. e Gragnani A., *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Int. Journal Bif. and Chaos, vol. 13, número 8, 2003.
- [L] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1991.
- [S] Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [F] Filippov A. F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. 18 of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.

[S-T1] Sotomayor J. and Teixeira M. A., *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, Lect. Notes in Math., **331**, Springer Verlag, (1988),169-195.

[T1] Teixeira M. A., *Stability conditions for discontinuous vector fields*, J. Diff. Eq., **V 88**,(1990),15-29.

[T2] Teixeira M. A., *Perturbation theory for non-smooth systems*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, 2009.

[T4] Teixeira M. A., *Generic bifurcations in manifolds with boundary*, J. Diff. Eq., **Vol. 25**,(1977),65-89.

[T7] Teixeira M. A., *Generic bifurcations of certain singularities*, Bollettino U.M.I., **Vol. 16-B**,(1979),238-254.

[V] Vishik S. M., *Vector Fields near the boundary of a manifold*, Vestnik, Moskov, Univ. Serv. I, Mat. Meh., **27**,1(1972),21-28.

MC11 - Uso do Maxima como Ferramenta no Ciclo Básico

Reginaldo de Jesus Santos (UFMG)

Departamento de Matemática-ICEx - Universidade Federal de Minas Gerais

<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Resumo

Mostramos como podemos usar o programa de computação algébrica Maxima e o pacote GAAL, escrito pelo autor, no ensino de disciplinas de Matemática do ciclo básico de cursos da área de Ciências Exatas, como Geometria Analítica, Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

Maxima é um programa para fazer cálculos matemáticos, manipulações simbólicas, cálculos numéricos e gráficos. Podem ser escritas funções para executar tarefas mais complexas. Existem algumas interfaces para o uso do Maxima. Aqui estamos usando a interface chamada wxMaxima.

Introdução

Cada arquivo do wxMaxima é formado de células onde podem ser escritos blocos de comandos. Cada célula tem um colchete à esquerda indicando onde começa e termina o bloco. Para executar uma célula você deve clicar nele e digitar SHIFT-ENTER.

```
(%i1) /*Por exemplo para calcular a derivada da função cos(x) */  
      /* Clique nesta célula e digite SHIFT-ENTER. */  
      diff(cos(x),x);
```

```
(%o1)  - sin(x)
```

Maxima pode calcular integrais indefinidas

```
(%i3) integrate( x/(1+x^2),x );
```

$$(\%o3) \quad \frac{\log(x^2 + 1)}{2}$$

e integrais definidas.

```
(%i4) integrate( 1/(1+x^2), x, 0, 1 );
```

$$(\%o4) \quad \frac{\pi}{4}$$

Podem ser calculados limites:

```
(%i5) limit( (2*x+1)/(3*x+2), x, inf );
```

```
limit( sin(3*x)/x, x, 0);
```

$$(\%o5) \quad \frac{2}{3}$$

$$(\%o6) \quad 3$$

Maxima pode resolver equações e sistemas de equações:

```
(%i7) solve(x^2-5*x+6 =0, x);
```

```
solve([x+y+z=5, 3*x-5*y=10, y+2*z=3], [x, y, z]);
```

$$(\%o7) \quad [x = 3, x = 2]$$

$$(\%o8) \quad \left[\left[x = \frac{45}{13}, y = \frac{1}{13}, z = \frac{19}{13} \right] \right]$$

Álgebra Linear

Matrizes podem ser criadas e manipuladas.

```
(%i9) A:matrix([1,2],[3,4]);
```

```
B:matrix([1,1],[1,1]);
```

$$(\%o9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\%o10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes podem ser somadas:

`(%i13) A + B ;`

$$(%o13) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

multiplicadas:

`(%i14) A . B ;`

$$(%o14) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

podemos elevar ao quadrado:

`(%i15) A^^2;`

$$(%o15) \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

A inversa pode ser obtida:

`(%i16) A^^-1;`

$$(%o16) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Podemos calcular o determinante:

`(%i17) determinant(matrix([a,b],[c,d]));`

`(%o17) a d - b c`

Matrizes podem ser concatenadas lado a lado:

`(%i18) C:addcol(A,B);`

$$(%o18) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos eliminar colunas:

Por exemplo, o comando abaixo elimina as colunas 3 e 4 da matriz C

```
(%i19) submatrix(C,3,4);
```

```
(%o19) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

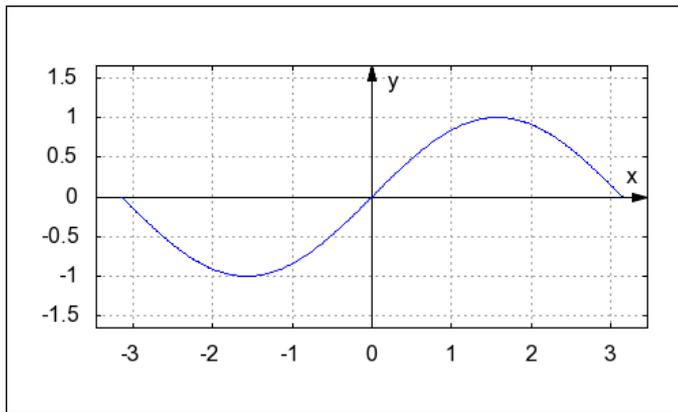
```

Gráficos

Desenha o gráfico da função $\sin(x)$ para x no intervalo $[-\pi, \pi]$ e y em $[-1.5, 1.5]$.

```
(%i20) f:sin(x)$ a:-%pi$ b:%pi$ c:-1.5$ d:1.5$
```

```
(%i25) wxdraw2d(grid          = true,
                user_preamble = "set size ratio -1",
                xrange = 1.1*[a,b],yrange = 1.1*[c,d],
                line_type = solid,
                head_length = 0.2,
                head_angle = 15,
                color          = black,
                label(["x",1.05*b,0.08*(d-c)]),
                label(["y",0.05*(b-a),d-0.02*(d-c)]),
                vector(1.1*[a,0],1.1*[b-a,0]),
                vector(1.1*[0,c],1.1*[0,d-c]),
                color = blue,
                explicit(f, x, a,b)
                )$
```

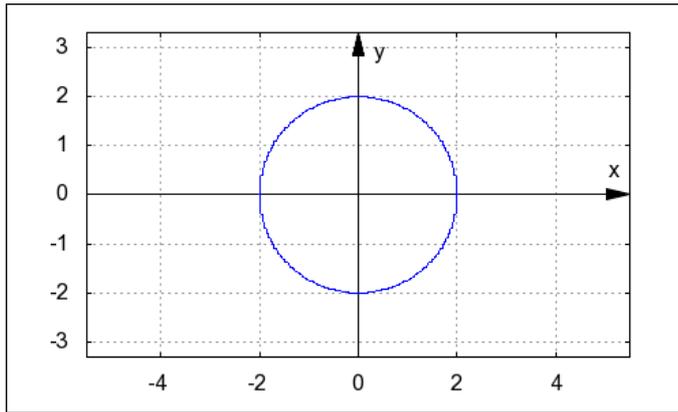


(%t25)

Desenha o círculo $x^2 + y^2 = 4$ para x no intervalo $[-5, 5]$ e y em $[-3, 3]$.

(%i26) `f:x^2+y^2$ a:-5$ b:5$ c:-3$ d:3$`

```
(%i31) wxdraw2d(grid      = true,
               user_preamble = "set size ratio -1",
               xrange = 1.1*[a,b],yrange = 1.1*[c,d],
               line_type = solid,
               head_length = 0.5,
               head_angle = 15,
               color      = black,
               label(["x",1.05*b,0.08*(d-c)]),
               label(["y",0.05*(b-a),d-0.02*(d-c)]),
               vector(1.1*[a,0],1.1*[b-a,0]),
               vector(1.1*[0,c],1.1*[0,d-c]),
               color = blue,
               /*ip_grid=[200,200],*/
               implicit(f=4, x, a,b,y,c,d)
               )$
```



(%t31)

O Pacote GAAL

Escrevemos um pacote com várias funções para facilitar o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear. O comando abaixo carrega o pacote GAAL:

```
(%i32) load("C:/maxima/gaal.mac");
```

```
(%o32) C:/maxima/gaal.mac
```

Matrizes

```
(%i33) D:randi(1,3);
```

```
(%o33) (-3 -3 -1)
```

cria uma matriz 1x3 aleatória com entradas entre -5 e 5.

```
(%i34) D:diag(D);
```

```
(%o34) (-3  0  0)
        ( 0 -3  0)
        ( 0  0 -1)
```

cria uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal estavam na matriz D.

Vamos descobrir de 1000 pares de matrizes aleatórias 2×2 quantos comutam.

```
(%i35) c:0$
      for n:1 thru 1000 do
      (A:randi(2), B:randi(2), if (A.B=B.A) then c:c+1)$
      c;
(%o37) 2
```

Troque `A:randi(2)` por `A:diag(randi(1,2))` editando a célula anterior e assim a matriz A será diagonal. Repita o comando com SHIFT-ENTER.

Sistemas Lineares

Vamos resolver um sistema linear que depende de um parâmetro:

```
(%i42) kill(a)$
      A:matrix([1,2,1,3],[1,1,-1,2],[1,1,a^2-5,a]);
```

$$(\%o43) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{pmatrix}$$

faz o escalonamento da matriz A passo a passo. Responda digitando 1 para continuar e 2 para parar e SHIFT-ENTER. Pare o escalonamento ao final da 2a. eliminação respondendo com 2 e SHIFT-ENTER.

```
(%i44) B:escalona(A);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{pmatrix}$$

1a. eliminação:

linha 2 --> linha 2 + (-1)*linha 1

linha 3 --> linha 3 + (-1)*linha 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a^2 - 6 & a - 3 \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)1;

2a. eliminação:

linha 2 --> -1*linha 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a^2 - 6 & a - 3 \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)1;

linha 1 --> linha 1 + (-2)*linha 2

linha 3 --> linha 3 + (1)*linha 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)2;

$$(\%o44) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$$

(%i45) /*substitui a por 2. */

C:subst(a=2,B);

$$(\%o45) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz C já está na forma escalonada reduzida.

(%i46) /*substitui a por -2. */

C:subst(a=-2,B);

$$(\%o46) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A matriz C já está na forma escalonada reduzida.

Para $a \neq \pm 2$ pode-se continuar a escalonar a matriz B

```
(%i47) C:escalonar(B);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$$

3a. eliminação:

```
linha 3 --> 1/(a^2-4)*linha 3
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a^2-4} \end{pmatrix}$$

```
Continua? (sim=1;/não=2;)1;
```

```
linha 1 --> linha 1 + (3)*linha 3
```

```
linha 2 --> linha 2 + (-2)*linha 3
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3(a-2)}{a^2-4} + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \frac{2(a-2)}{a^2-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a^2-4} \end{pmatrix}$$

```
Continua? (sim=1;/não=2;)1;
```

$$(\%o47) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3(a-2)}{a^2-4} + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \frac{2(a-2)}{a^2-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a^2-4} \end{pmatrix}$$

Simplificando o resultado

```
(%i48) C:ratsimp(C);
```

```
(%o48) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a+5}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

```

Cônica que Passa por 5 Pontos

Vamos encontrar a curva dada implicitamente pela equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

que passa por 5 pontos.

```
(%i1) load("C:/maxima/gaal");
```

```
(%o1) C:/maxima/gaal.mac
```

cria uma matriz com entradas inteiras e aleatórias em que cada linha tem as coordenadas de um ponto.

```
(%i2) P:randi(5,2);
```

```
(%o2) 
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```

gera uma matriz de Vandermond usando as colunas de P .

```
(%i3) A:matvand(P,2);
```

```
(%o3) 
$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & -1 & -4 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 9 & -6 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```

escalona a matriz do sistema $AX = 0$.

```
(%i4) S:escalona(A);
```

$$(\%o4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{48} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{71}{48} \end{pmatrix}$$

obtem $f(x, y)$ tal que a cônica de equação $f(x, y) = 0$ interpola os pontos.

```
(%i5) kill(x,y)$
```

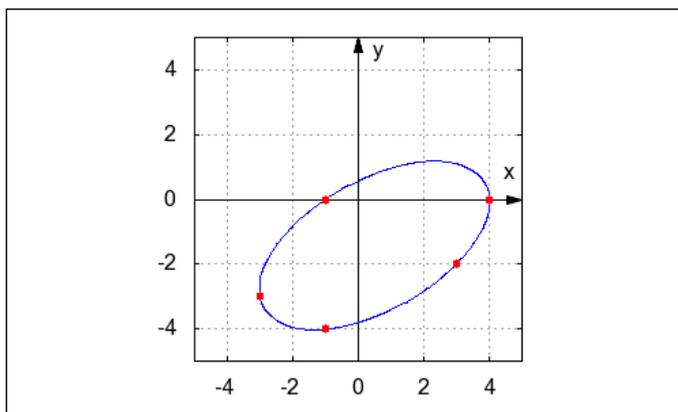
```
f:poly2sym2(addrow(-col(S,6),[1]));
```

$$(\%o6) -\frac{11y^2}{24} + \frac{17xy}{48} - \frac{71y}{48} - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + 1$$

desenha o gráfico da cônica $f(x, y) = 0$ que interpola os pontos que estão em P .

```
(%i7) a:-5$ b:5$ c:-5$ d:5$
      wxdraw2d(grid      = true,
               user_preamble = "set size ratio -1",
               xrange = [a,b],yrange = [c,d],
               line_type = solid,
               head_length = 0.5,
               head_angle = 15,
               color      = black,
               label(["x",b-0.03*(b-a),0.08*(d-c)]),
               label(["y",0.07*(b-a),d-0.04*(d-c)]),
               vector([a,0],[b-a,0]),
               vector([0,c],[0,d-c]),
               color = blue,
               implicit(f, x, -5,5, y, -5,5),
               point_type = filled_circle,
               point_size = 1,
               color      = red,
               points(P)
      )$
```

(%t11)



Identificação de Cônicas

Exemplo

Vamos identificar a cônica de equação $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$.

```
(%i1) kill(all)$
      load("C:/maxima/gaal");
      X:transpose([x,y])$ X1:transpose([x1,y1])$
```

```
(%o1) C:/maxima/gaal.mac
```

```
(%i4) A:matrix([9,-2],[-2,6]);
      f:expand(transpose(X) . A . X -30);
```

```
(%o4) 
$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

```

```
(%o5)  $6y^2 - 4xy + 9x^2 - 30$ 
```

diagonaliza a matriz A , ou seja, encontra matrizes P (invertível) e D (diagonal) tais que $A = PDP^t$.

```
(%i6) l:diagonal(A); P:l[1]$ D:l[2]$
```

```
(%o6) 
$$\left[ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

```

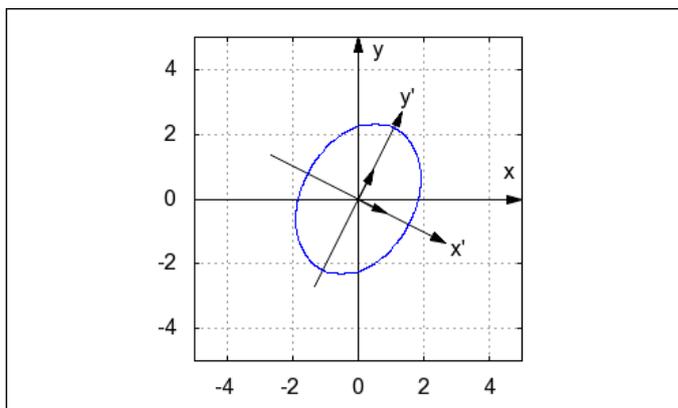
substitui X por PX_1 .

```
(%i9) f1:substi(f,X,P . X1);
```

```
(%o9)  $5y1^2 + 10x1^2 - 30$ 
```

desenha o gráfico da cônica $f(x, y) = 0$.

```
(%i10) a:-5$ b:5$ c:-5$ d:5$
wxdraw2d(grid      = true,
user_preamble  = "set size ratio -1",
xrange = [a,b],yrange = [c,d],
line_type = solid,
head_length = 0.5,
head_angle = 15,
color        = black,
vector([a,0],[b-a,0]),
vector([0,c],[0,d-c]),
label(["x",b-0.03*(b-a),0.08*(d-c)]),
label(["y",0.07*(b-a),d-0.04*(d-c)]),
vector([0,0],[P[1,2],P[2,2]]),
vector([0,0],[P[1,1],P[2,1]]),
vector(-3*[P[1,2],P[2,2]],6*[P[1,2],P[2,2]]),
vector(-3*[P[1,1],P[2,1]],6*[P[1,1],P[2,1]]),
label(["x'",3.5*P[1,1],3.5*P[2,1]]),
label(["y'",3.5*P[1,2],3.5*P[2,2]]),
color = blue,
implicit(f, x, -5,5, y, -5,5)
)$
```



(%t14)

Exemplo

Vamos identificar a cônica de equação $9x^2 + 6xy + y^2 - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$.

```
(%i15) A:matrix([9,3],[3,1]);
      K:matrix([-10*10^(1/2),10*10^(1/2)]);
      f:expand(transpose(X) . A . X + K . X + 90);
```

$$(\%o15) \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\%o16) \begin{pmatrix} -10\sqrt{10} & 10\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$(\%o17) y^2 + 6xy + 10\sqrt{10}y + 9x^2 - 10\sqrt{10}x + 90$$

```
(%i18) l:diagonal(A); P:l[1]$ D:l[2]$
```

$$(\%o18) \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \right]$$

substitui X por PX_1 .

```
(%i21) f1:substi(f,X,P . X1);
```

$$(\%o21) 10y_1^2 - 20y_1 - 40x_1 + 90$$

substitui x_1 por $x_2 + 2$.

```
(%i22) f2:substi(f1,x1,x2+2);
```

$$(\%o22) 10y_1^2 - 20y_1 - 40x_2 + 10$$

substitui y_1 por $y_2 + 1$.

```
(%i23) f2:substi(f2,y1,y2+1);
```

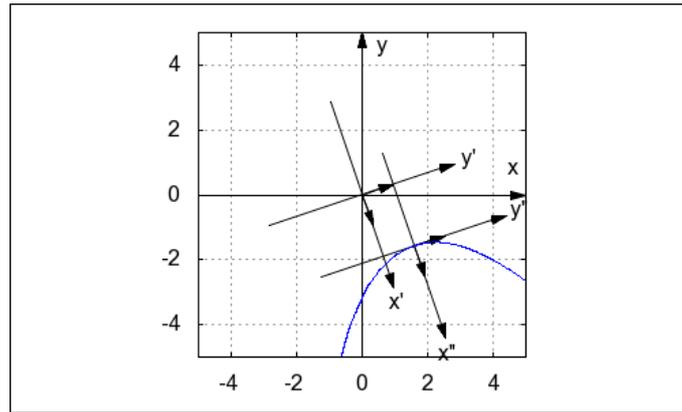
$$(\%o23) 10y_2^2 - 40x_2$$

```
(%i24) X0:P. matrix([2],[1]);
```

$$(\%o24) \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{10}} \\ -\frac{5}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

```
(%i25) a:-5$ b:5$ c:-5$ d:5$
wxdraw2d(grid      = true,
user_preamble  = "set size ratio -1",
  xrange = [a,b],yrange = [c,d],
  line_type = solid,
  head_length = 0.5,
  head_angle = 15,
  color      = black,
  vector([a,0],[b-a,0]),
  vector([0,c],[0,d-c]),
  label(["x",b-0.03*(b-a),0.08*(d-c)]),
  label(["y",0.07*(b-a),d-0.04*(d-c)]),
  vector([0,0],[P[1,2],P[2,2]]),
  vector([0,0],[P[1,1],P[2,1]]),
  vector(-3*[P[1,2],P[2,2]],6*[P[1,2],P[2,2]]),
  vector(-3*[P[1,1],P[2,1]],6*[P[1,1],P[2,1]]),
  label(["x'",3.5*P[1,1],3.5*P[2,1]]),
  label(["y'",3.5*P[1,2],3.5*P[2,2]]),
  vector([X0[1,1],X0[2,1]],[P[1,2],P[2,2]]),
  vector([X0[1,1],X0[2,1]],[P[1,1],P[2,1]]),
  vector(-3*[P[1,2],P[2,2]]+[X0[1,1],X0[2,1]],
    6*[P[1,2],P[2,2]]),
  vector(-3*[P[1,1],P[2,1]]+[X0[1,1],X0[2,1]],
    6*[P[1,1],P[2,1]]),
  label(["x''",3.5*P[1,1]+X0[1,1],3.5*P[2,1]+X0[2,1]]),
  label(["y''",3.5*P[1,2]+X0[1,1],3.5*P[2,2]+X0[2,1]]),
  color = blue,
  implicit(f, x, -5,5, y, -5,5)
  )$
```

(%t29)



Sistemas de Equações Diferenciais não Homogêneas

Vamos encontrar a solução geral do sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2 \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2t \end{cases}$$

```
(%i65) kill(all)$
```

```
load("C:/Maxima/gaal.mac");
```

```
(%o1) C:/Maxima/gaal.mac
```

```
(%i2) A:matrix([1,1],[1,1]); F:matrix([2],[2*t]);
```

```
(%o2) (1 1)
      (1 1)
```

```
(%o3) (2)
      (2t)
```

Decompõe a matriz A na forma $A = PDP^{-1}$

```
(%i4) l:jordand(A); P:l[1]$ D:l[2]$
```

```
(%o4) [(1 1)
      (-1 1), (0 0)
          (0 2)]
```

```
(%i7) G:(P^-1).F;
```

```
(%o7) (1-t)
      (t+1)
```

Encontra uma solução particular da equação diferencial $y_1' = d_{11}y_1 + g_{11}$

```
(%i8) kill(y1)$
```

```
y1:rhs(ratsimp(ode2('diff(y1,t)=D[1,1]*y1+G[1,1],y1,t)));
```

```
y1:subst(%c=0,y1);
```

```
(%o9) - (t^2 - 2t - 2%c)
        2
```

$$(\%o10) \quad -\frac{t^2 - 2t}{2}$$

Encontra uma solução particular da equação diferencial $y_2' = d_{22}y_2 + g_{21}$

```
(%i11) kill(y2)$
```

```
      y2:rhs(ratsimp(ode2('diff(y2,t)=D[2,2]*y2+G[2,1],y2,t)));
      y2:subst(%c=0,y2);
```

$$(\%o12) \quad \frac{4\%c e^{2t} - 2t - 3}{4}$$

$$(\%o13) \quad \frac{-2t - 3}{4}$$

Uma solução particular do sistema é dada por

```
(%i14) Xp:ratsimp(P.matrix([y1],[y2]));
```

$$(\%o14) \quad \begin{pmatrix} -\frac{2t^2-2t+3}{4} \\ \frac{2t^2-6t-3}{4} \end{pmatrix}$$

A solução geral é então a soma da solução geral do sistema homogêneo com uma solução particular do sistema não homogêneo

```
(%i15) doallmxops:false$
```

```
      X:c[1]*%e^(D[1,1]*t)*col(P,1) +
          c[2]*%e^(D[2,2]*t)*col(P,2)+Xp;
```

```
      doallmxops:true$
```

$$(\%o16) \quad \begin{pmatrix} -\frac{2t^2-2t+3}{4} \\ \frac{2t^2-6t-3}{4} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MC16 - Introdução à Análise Bayesiana

Marta Cristina Bianchi & David Henriques (UFG)

Resumo

A informação sobre um parâmetro de interesse θ , em um modelo probabilístico, é crucial no estudo da Estatística. O objetivo em uma análise inferencial é tentar reduzir o desconhecimento sobre o verdadeiro valor de θ . Com o intuito de propor uma solução para esta questão, a Inferência Bayesiana traz uma metodologia que trata a incerteza sobre o verdadeiro valor de θ através de um *modelo probabilístico* para esse parâmetro.

Neste mini-curso será apresentada uma introdução a Inferência Bayesiana confrontando-a à Inferência Clássica. Serão apresentados os fundamentos da teoria Bayesiana, bem como alguns métodos inferenciais e computacionais inerentes a esta teoria.

Fundamentos da Teoria Bayesiana

Em inferência clássica, as inferências sobre o parâmetro de interesse θ , quantidade fixa e desconhecida, provém exclusivamente de informação amostral, por meio da realização de experimentos e respectivo modelo de verossimilhança. Por outro lado, a Inferência Bayesiana une a informação amostral ao conhecimento do pesquisador para realizar inferências sobre o parâmetro de interesse.

A filosofia bayesiana incorpora a informação *a priori* sobre o parâmetro θ , formada por juízos ou experiências individuais do pesquisador anteriores à realização do experimento, à informação amostral advinda dos dados e função verossimilhança. A informação *a priori*, anterior à informação amostral, é modelada por uma distribuição denominada *a priori*. Esta informação, quando atualizada pela informação amostral, é modelada por uma distribuição denominada *a posteriori*.

O principal fundamento da Inferência Bayesiana provém do Teorema de Bayes, resultado da Teoria de Probabilidade que atualiza probabilidades após o acontecimento de

um dado fenômeno.

Teorema 1: Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos que formam uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer de Ω . Então, temos

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Uma interpretação para este teorema consiste em considerar os $A_i, i = 1, \dots, n$ como "causas", "hipóteses" ou "estados" a que o pesquisador atribui graus de credibilidade ou probabilidades *a priori* $P(A_i)$ de natureza subjetiva. Após a informação adicional - realização do acontecimento B - o investigador revê suas probabilidades a priori por meio do Teorema de Bayes e passa a atribuir aos A_i probabilidades *a posteriori* $P(A_i|B)$.

Considere $h(\theta)$ a distribuição *a priori* de θ dada pelo pesquisador, e $f(\cdot|\theta)$ a verossimilhança do modelo amostral indexado por θ , o Teorema de Bayes para densidades conduz à relação,

$$h(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)h(\theta)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{x}|\theta)h(\theta)d\theta}, \quad \theta \in \Theta, \quad (1.1.11)$$

sendo $h(\theta|\mathbf{x})$ a distribuição *a posteriori* de θ , após realizado o experimento e observada a amostra $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Caso o espaço paramétrico seja discreto, temos:

$$h(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\theta)h(\theta)}{\sum_{\theta} f(\mathbf{x}|\theta)h(\theta)}, \quad \theta \in \Theta. \quad (1.1.12)$$

Como os denominadores nas equações (2.3.9) e (1.1.12) não dependem de θ , pode-se reescrever a distribuição a posteriori da maneira a seguir

$$h(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\theta)h(\theta) \propto f(\mathbf{x}|\theta)h(\theta), \quad \theta \in \Theta.$$

Verifica-se então que a informação *a posteriori* provém de uma combinação entre a informação amostral, representada pela verossimilhança, e a informação inicial do pesquisador, representada pela distribuição *a priori*.

Assim como na inferência clássica, em inferência bayesiana o modelo normal também possui importantes resultados. A seguir, dois desses resultados serão apresentados.

Teorema 2: Suponha $\theta \sim N(a, b^2)$ e $X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido, então a distribuição a posteriori de θ é $(\theta|X = x) \sim N(A, B^2)$ onde,

$$A = \frac{\frac{1}{b^2}a + \frac{1}{\sigma^2}x}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \quad e \quad B^2 = \frac{1}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\sigma^2}}.$$

Corolário 1: Considere uma amostra aleatória (X_1, X_2, \dots, X_n) da distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido, e como priori $\theta \sim N(a, b^2)$, então como posteriori temos $\theta|\mathbf{x} \sim N(C, D^2)$ onde

$$C = \frac{b^{-2}a + n\sigma^{-2}\bar{x}}{b^{-2} + n\sigma^{-2}} \quad e \quad D^{-2} = b^{-2} + n\sigma^{-2}.$$

Os exemplos 1 e 2 ilustram casos em que a informação amostral é mais significativa que a informação *a priori*. O terceiro exemplo ilustra o contrário, a significância da priori frente os dados.

Exemplo 1:

Situação A: Um pesquisador deseja estudar proporção de fumantes θ . Suponha que ele não disponha de qualquer informação inicial que lhe permita fazer distinção entre os valores do intervalo $[0, 1]$ para θ . Neste caso, poderia-se tomar uma distribuição *a priori* uniforme,

$$h(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \in [0, 1] \\ 0, & \text{se } \theta \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Considerando o número de fumantes, entre um grupo de n indivíduos, como a variável aleatória X a ser observada, temos então para os dados o modelo binomial dado por:

$$f(x|\theta) = C_x^n \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Observado o valor $X = x$, atualiza-se a informação *a priori* por meio da distribuição *a posteriori*,

$$h(\theta|x) \propto f(x|\theta)h(\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

sendo então, a menos de uma constante, a distribuição $Beta(x+1, n-x+1)$.

Situação B: Considere agora que o pesquisador possui algumas informações sobre a verdadeira proporção de fumantes θ . Suponha que esta informação possa ser traduzida através de uma distribuição *a priori* assumindo o formato de uma *Beta*, com valor médio da ordem de 0.4 e variância da ordem de 0.04. Desta forma temos $\theta \sim Beta(2, 3)$. Logo, a respectiva distribuição a posteriori, após observado $X = x$, é calculada por,

$$h(\theta|x) \propto f(x|\theta)h(\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\theta(1-\theta)^2 = \theta^{x+1}(1-\theta)^{n-x+2},$$

sendo então, a menos de uma constante, a distribuição $Beta(x+2, n-x+3)$.

As Figuras 1(a) e 1(b) apresentam respectivamente os gráficos das densidades *a priori* e *a posteriori* de θ nas situações A e B, quando observado 20% de fumantes em um grupo de 10 pessoas. Observa-se que neste caso as diferentes informações *a priori* sobre θ , após atualização pelos dados, conduzem à mesma informação *a posteriori*, indicando que a informação amostral é mais significativa que a informação *a priori*.

Exemplo 2:

Situação A: Dois físicos, F_1 e F_2 , desejam estudar uma constante física θ através de um método experimental que consiste em observar uma variável aleatória $X \sim N(\theta, 40^2)$.

O físico F_1 domina melhor a área em estudo e determina a priori $\theta \sim N(900, 20^2)$. O físico F_2 menos experiente indica a priori $\theta \sim N(800, 80^2)$.

Realizado o experimento obtém-se $X = 850$. De acordo como Teorema 2, as distribuições a posteriori são:

$$\text{físico } F_1 : \theta|X = 850 \sim N(890, 17.9^2);$$

$$\text{físico } F_2 : \theta|X = 850 \sim N(840, 35.7^2).$$

Note que neste caso a diferença entre os conhecimentos a priori, apresentados pelos físicos, implicou em uma diferença a posteriori quando observado apenas um valor

amostral. Veja Figura 2(a).

Situação B: Suponha que do método experimental obtém-se uma amostra aleatória de tamanho $n = 50$ sendo observado $\bar{x} = 870$. De acordo com o Corolário 1 as distribuições *a posteriori* passam a ser:

$$\text{físico } F_1 : \theta | \bar{x} = 870 \sim N(872.2, 5.44^2);$$

$$\text{físico } F_2 : \theta | \bar{x} = 870 \sim N(869.7, 5.64^2).$$

Nesta situação, observando a Figura 2 (b), nota-se que a informação dos dois físicos após o experimento pouco diferem, mesmo sendo suas posições iniciais muito diferentes. Este fato reflete a força dos dados frente *a priori*.

F_2 com respectivas distribuições a posteriori; (b) Posteriores dos físicos F_1 e F_2 ao observar a mesma amostra, tamanho $n = 50$.

Exemplo 3: Sejam duas amostras aleatórias de tamanho $n = 5$ da distribuição normal $N(\theta, 6^2)$, observados $\bar{x} = 30$ e $\bar{x} = 70$ na primeira e segunda amostra respectivamente. Admitindo como *priori* $\theta \sim N(20, 5^2)$, conforme Corolário 1 temos como respectivas posteriores:

$$\theta | \bar{x} = 30 \sim N(27.8, 2.4^2);$$

$$\theta | \bar{x} = 70 \sim N(58.8, 2.4^2).$$

Para este caso, observando a Figura 3(a) nota-se uma certa conformidade entre distribuição a posteriori e verossimilhança, fato este que implica em inferências "similares" tanto do ponto de vista clássico quanto bayesiano. No entanto, a distância entre informação amostral ($\bar{x} = 70$) e informação a priori ($E(\theta) = 20$) destaca a possibilidade de um conflito entre a distribuição a posteriori e verossimilhança, ou seja, um conflito entre filosofias bayesiana e clássica (Figura 3(b)).

A distribuição a posteriori é o elemento fundamental que serve de base ao desenvolvimento de toda a inferência bayesiana: é a descrição do conhecimento corrente sobre θ obtido da quantificação da informação *a priori* e informação amostral. A partir desta distribuição definem-se as inferências sobre o parâmetro. Como introdução, a próxima seção apresenta como serão definidos estimação e teste de hipótese do ponto de vista bayesiano.

Estimação e Testes de Hipótese Bayesianos

No cenário bayesiano a idéia de estimação pontual é tomar como estimativas pontos típicos da distribuição *a posteriori*. As estimativas mais usadas são a moda *a posteriori*, a média *a posteriori* e a mediana *a posteriori* definidas a seguir. Considere $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$:

- Moda *a posteriori*: $\hat{\theta}$ tal que

$$h(\hat{\theta}|x) = \max_{\theta \in \Theta} h(\theta|x) = \max_{\theta \in \Theta} \{h(\theta)L(\theta|x)\};$$

- Média *a posteriori*: $\hat{\theta} = E[\theta|x]$ sendo,

$$E[\theta_i|x] = \int_{\Theta} \theta_i h(\theta|x) d\theta, \quad i = 1, \dots, p;$$

- Mediana *a posteriori*: $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ tal que

$$P(\theta_i \geq \hat{\theta}_i|x) \geq 0.5 \quad e \quad P(\theta_i \leq \hat{\theta}_i|x) \geq 0.5, \quad i = 1, \dots, p$$

A escolha de uma destas estimativas pode basear-se na relevância de cada uma dessas quantidades para o problema ou na facilidade de seu cálculo. A relevância de cada uma destas estimativas pode ser traduzida pela escolha de uma função perda adequada ao problema. No contexto da teoria da decisão, analogamente à inferência clássica, um estimador bayesiano também é uma regra de decisão que minimiza o valor esperado de uma determinada função perda, porém, em relação à distribuição *a posteriori*.

Definição 1: Uma regra de decisão δ é uma função definida no espaço amostral Ω que assume valores em um espaço de ações A , $\delta : \Omega \rightarrow A$. A cada decisão δ e possível valor de θ associa-se uma perda $L(\delta, \theta)$, desta forma definindo uma *função perda* L .

Definição 2: O risco, associado a uma função perda L , de uma regra de decisão, denotado por $R(\delta)$ é a perda esperada *a posteriori* dada por $R(\delta) = E[L(\theta, \delta)|x]$.

Definição 3: O estimador de bayes é a regra de decisão δ^* que minimiza o risco, ou seja, $R(\delta^*) < R(\delta), \forall \delta$. O risco de δ^* é denominado *risco de bayes*.

Exemplo 4: Seja $\delta_1 = E[\theta|x]$ e δ estimadores de θ . Calculemos o risco de δ associado à função perda quadrática $L(\delta, \theta) = (\delta - \theta)^2$

$$\begin{aligned} R(\delta) &= E[(\delta - \theta)^2|x] = E\{[(\delta - \delta_1) + (\delta_1 - \theta)]^2|x\} \\ &= E[(\delta - \delta_1)^2|x] + E[(\delta_1 - \theta)^2|x] + 2E[(\delta - \delta_1)(\delta_1 - \theta)|x] \\ &= (\delta - \delta_1)^2 + E[(\delta_1 - \theta)^2|x] + 2(\delta - \delta_1)E[(\delta_1 - \theta)|x] \\ &= (\delta - \delta_1)^2 + E[(\delta_1 - \theta)^2|x] = (\delta - \delta_1)^2 + VAR[\theta|x] \end{aligned}$$

Desta forma o risco é mínimo quando $\delta = \delta_1$, sendo o risco de bayes $R(\delta_1) = VAR[\theta|x]$. Logo a média a posteriori minimiza o risco associado à função perda quadrática.

Também pode-se mostrar que a mediana *a posteriori* e moda *a posteriori* minimizam, respectivamente, o risco associado às funções perda modular, $L(\theta, \delta) = |\theta - \delta|$, e perda "zero-um", $L(\theta, \delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{I}_{|\theta - \delta|}([\epsilon, \infty))$ para θ contínuo, e

$$L(\theta, \delta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \neq \delta \\ 0, & \text{se } \theta = \delta \end{cases}$$

para θ discreto.

A principal restrição na estimação pontual bayesiana é o resumo de toda informação presente na distribuição *a posteriori* em um único valor numérico. Embora também se possa especificar a precisão, incerteza de um estimador bayesiano pontual. Por exemplo, pode-se quantificar a precisão da média a posteriori por sua variância ou coeficiente de variação, da mediana *a posteriori* pela distância entre quartis e da moda *a posteriori* pela informação de Fisher observada. Um resumo de $h(\theta|x)$ mais informativo do que qualquer estimativa pontual pode ser obtido ao extrair uma região $C \subset \Omega$ com grande probabilidade *a posteriori*, o paralelo bayesiano da região de confiança.

Definição 4: C é uma região de $(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ de credibilidade para θ se

$$P(\theta \in C|x) \geq 1 - \alpha$$

sendo $1 - \alpha$ chamado de nível de credibilidade ou confiança. No caso em que θ é escalar, C é dado por um intervalo $(c_1(x), c_2(x))$.

Qualquer região de credibilidade é definida numericamente (não é aleatória) e admite interpretação probabilística direta em contraste com a interpretação da região de confiança clássica.

Exemplo 5: Considere amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n da distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido. Assumindo como priori $\theta \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, então, pelo Teorema 2, $\theta|\mathbf{x} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Usando o fato que

$$\frac{\theta - \mu_1}{\sigma_1} | \mathbf{x} \sim N(0, 1)$$

Pode-se obter um intervalo de credibilidade para θ por

$$P(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1 \leq \theta \leq \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1 | \mathbf{x}) = 1 - \alpha$$

Logo $(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1, \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1)$ é um intervalo de credibilidade $1 - \alpha$ para θ .

Fazer a variância da priori tender a infinito é uma forma de tornar a distribuição a priori não informativa, ou seja reduzir ao máximo a informação inicial sobre θ , valorizando somente a informação amostral na distribuição a posteriori. Desta forma, note que ao fazer $\sigma_0^2 \rightarrow \infty$, pelo Corolário 1, temos $\sigma_1^{-2} \rightarrow n\sigma^{-2}$ e $\mu_1 \rightarrow \bar{x}$, ou seja, a distribuição *a posteriori* coincide com a distribuição amostral, implicando que as inferências sobre θ clássicas e bayesianas coincidem, inclusive o intervalo de confiança

$$(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$$

porém, do ponto de vista bayesiano a interpretação do intervalo é uma afirmação probabilística sobre θ .

Dada a infinidade de regiões de credibilidade com o mesmo grau de credibilidade $1 - \alpha$ há o interesse em selecionar aquela que englobe todos os valores de θ mais credíveis *a posteriori*, de modo que

$$h(\theta_1|x) \geq h(\theta_2|x), \forall \theta_1 \in C, \theta_2 \notin C$$

Deste interesse, pretende-se então obter a região HPD (*highest probability density*).

Definição 5: Um intervalo de credibilidade C de $(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ para θ é de máxima densidade a posteriori, ou HPD, se $C = \{\theta \in \Theta : h(\theta|x) \geq k(\alpha)\}$ onde $k(\alpha)$ é a maior constante tal que $P(\theta \in C|x) \geq 1 - \alpha$.

Note que pela definição, no caso de distribuições a posteriori com duas caudas, por exemplo a distribuição normal, o intervalo HPD é idêntico ao intervalo de credibilidade central.

O problema de testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$ no contexto bayesiano é também conceitualmente mais simples que no contexto clássico: consiste em calcular probabilidades a posteriori $P(H_0|x)$ e $P(H_1|x)$ e optar por uma das hipóteses segundo algum critério que traduza uma grandeza relativa entre elas.

Com o objetivo de medir a influência da amostra x na alteração da credibilidade relativa de H_0 e H_1 contrapõe-se a razão *a posteriori* à respectiva razão de probabilidades *a priori* das hipóteses. A razão destas razões dada por

$$B(x) = \frac{\frac{P(H_0|x)}{P(H_1|x)}}{\frac{P(H_0)}{P(H_1)}}$$

é denominada *fator de Bayes*. Em geral, um valor de fator de Bayes entre um e dez, $1 \leq B(x) \leq 10$, fornece evidência a favor de H_0 ; entre dez e cem, $10 \leq B(x) \leq 100$, fornece forte evidência a favor de H_0 ; e fator de bayes com valor maior que cem, $B(x) > 100$, fornece evidência decisiva a favor de H_0 . A utilização do fator de Bayes torna-se problemática e inviável quando trabalha-se com prioris impróprias ou desconhe-se, sendo de difícil obtenção, a constante de normalização da posteriori.

Em um teste de hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$, no caso em que θ é contínuo o procedimento de teste de hipótese utilizando o fator de Bayes torna-se inadequado uma vez que $P(\theta = \theta_0) = P(\theta = \theta_0|x) = 0$. Mas ainda pode-se calcular o fator de Bayes, representando o valor θ_0 como uma bola centrada em θ_0 , $V_\epsilon(\theta_0)$, com raio ϵ escolhido de modo que os pontos interiores a bola sejam praticamente indistinguíveis de θ_0 a posteriori. Transformando então o teste para $H_0 : \theta \in V_\epsilon(\theta_0)$ contra $H_1 : \theta \notin V_\epsilon(\theta_0)$.

Existe outro método menos complexo para lidar com teste de hipótese simples que é análogo a construção de teste de hipótese em inferência clássica a partir da inversão de intervalos de confiança. Este método consiste em construir uma região de credibilidade $(1 - \alpha)$ para θ , de preferência HPD, e tomar a decisão de rejeitar H_0 ao nível α se ela não incluir θ_0 .

Continuação Exemplo 5: A hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ não é rejeitada se θ_0 pertence ao intervalo, $(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1, \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1)$. No caso de não informação na priori, temos $\sigma_1 \rightarrow \sigma/\sqrt{n}$ e $\mu_1 \rightarrow \bar{x}$, e a hipótese H_0 não é rejeitada se θ_0 pertence ao intervalo $(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ coincidindo com o teste clássico.

Computação Bayesiana

Como visto nas seções anteriores, as inferências sobre θ são todas baseadas em sua distribuição a posteriori, porém, encontrar a forma analítica da distribuição a posteriori torna-se tarefa difícil ou impossível em alguns casos. Há então a necessidade de simular a distribuição a posteriori para se obter aproximações para as inferências sobre θ , por exemplo, baseadas em cálculo de esperanças e probabilidades a posteriori:

- Média a posteriori: $\mu = E[\theta|x] = \int \theta h(\theta|x) d\theta$;
- Variância a posteriori: $\sigma^2 = VAR(\theta|x) = E[(\theta - E(\theta))^2|x]$;
- Probabilidades a posteriori: $P(\theta \in A|x) = \int_A h(\theta|x) d\theta$.

Costuma-se utilizar métodos baseados em simulação da posteriori, como Monte Carlo, para aproximação destas integrais.

Às vezes, na prática, é muito difícil ou mesmo impossível simular valores da distribuição a posteriori, tornando-se necessário usar *métodos de reamostragem*, como por exemplo o *método de rejeição*, gerando valores em duas etapas. Na primeira etapa gera-se valores de uma distribuição auxiliar conhecida, em geral da distribuição *a priori*. Na segunda etapa utiliza-se um mecanismo de correção para que os valores gerados da distribuição auxiliar sejam representativos da distribuição a posteriori.

Nos métodos de monte carlo e reamostragem não há uma preocupação com a convergência do algoritmo, bastando que o tamanho da amostra seja suficientemente grande. E ainda, uma limitação dos métodos de reamostragem em muitos casos, é a difícil tarefa de utilizar uma densidade auxiliar que seja simultaneamente uma boa aproximação da posteriori e fácil de ser simulada. Uma alternativa ao uso destes métodos é a utilização dos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). O objetivo ainda é obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas amostrais de características desta distribuição (esperanças, probabilidades a posteriori), mas por base em uma simulação de um passeio aleatório no espaço de θ que converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição a posteriori de interesse. Os métodos MCMC mais utilizados são amostrador de Gibbs e Metropolis-Hasting.

Referências

- [1] Gelman, A.; Carlin, J. B. ; Stern, H. S.; Rubin, D. B. *Bayesian Data Analysis* , 2a ed., Chapman & Hall, 2004.
- [2] Migon, H.; Gamerman, D. *Statistical Inference: An Integrated Approach*. Arnold, 1999.
- [3] Paulino, C.D.; Turkman, M.A.A.; Murteiro, B. *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2003.
- [4] Robert, C.P. *The Bayesian Choice*. Springer, New York, 1994.

CAPÍTULO 2

RESUMOS EXPANDIDOS

2.1 Minicursos

MC1 - Aulas de Matemática para Além do Livro Didático: Aventure-se Você Também

Anne Michelle Dysman Gomes (UFF)

MC4 - Desvendando o Cubo Mágico

Éder Silva, Juliana Oliveira, Eduardo Divino Pereira & Yu Chi Chen (UFG)

MC6 - Representações Lineares para Grupos Finitos

Ivonildes Martins (UFG) & Eunice Cândida Rodrigues (UFMT)

MC8 - Maxima: Um Completo Programa de Computação Algébrica

Lenimar Nunes de Andrade (UFPB)

MC13 - Distribuições de Probabilidade e Aplicações

Fabiano Fortunato & Simone Vasconcelos (UFG)

MC14 - Teorema da Base de Hilbert e Ideais Simétricos

Eudes Antônio da Costa (UFT)

MCI - Aulas de matemática para além do livro didático: Aventure-se você também!

Anne Michelle Dysman - Universidade Federal Fluminense

Enquanto as deficiências no processo de ensino e aprendizagem em matemática nas escolas da rede pública de educação básica são notórias em nosso país, observamos nas universidades públicas a existência de um ambiente de alta qualidade em ensino e pesquisa nas mais diversas áreas, dentre elas o campo da Educação Matemática. Contudo, não raro os frutos da pesquisa nesta área acabam por permanecerem dentro dos muros das universidades, ou, mais precisamente, dos muros virtuais que delimitam o espaço da comunidade científica dedicada à Educação Matemática. Mesmo quando chegam aos alunos das Licenciaturas em Matemática, muitos deles futuros professores da rede pública de educação básica, frequentemente isto se dá através da transmissão em disciplinas de graduação sem garantias de que esta aprendizagem teórica, muitas vezes realizada de forma apartada da realidade escolar, se traduzirá em ações práticas no futuro em benefício da melhoria da qualidade do ensino básico de Matemática. De fato, vários pesquisadores já identificaram a primariedade da experiência na construção da identidade profissional do professor, dentre eles Tardif e Raymond:

Em resumo, como vemos, os saberes que servem de base para o ensino [...] não correspondem, ou pelo menos muito pouco, aos conhecimentos teóricos obtidos na universidade e produzidos pela pesquisa na área da Educação: para os professores de profissão, a experiência de trabalho parece ser a fonte privilegiada de seu saber-ensinar. [7]

Através do Projeto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF) para o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da CAPES, desenvolvemos Módulos Instrucionais com objetivo de colaborar para a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem em Matemática. O trabalho se realiza através de ações cujos efeitos e benefícios devem atingir sujeitos envolvidos de diferentes formas no processo educativo, fornecendo a estes condições para que exerçam seus papéis (como docentes, discentes, licenciandos ou pesquisadores) de forma mais consciente e criativa.

A equipe da área de Matemática/Niterói do PIBID/UFF é composta por vinte alunos do curso de Licenciatura em Matemática, três professoras supervisoras nas escolas

parceiras e uma coordenadora (professora pesquisadora na universidade). Além disso, participam do projeto diversos outros pesquisadores através de colaborações ou parcerias com outros projetos como a estabelecida com o LEG (Laboratório de Ensino de Geometria) da UFF.

Os módulos instrucionais desenvolvidos no projeto seguem os princípios educacionais dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da geometria para as séries do Ensino Fundamental e do Médio ([1], [2] e [3]). Consistem de planos de aulas, listas de exercícios e materiais didáticos alternativos. As atividades propostas buscam explorar recursos como materiais concretos, conteúdos digitais para ensino de matemática, problemas do cotidiano e jogos. A seguir descrevemos um pouco a forma como cada um destes recursos é geralmente explorada em nosso trabalho.

- **Materiais Concretos:** Em nossos módulos instrucionais os materiais concretos são explorados seguindo o referencial construtivista ([6]) e os preceitos da teoria de registros de representação semiótica ([5] e [4]). Desta forma, privilegiamos o uso de materiais cuja manipulação permite ao aluno experimentar e observar propriedades e conceitos matemáticos de forma concreta e adotamos como diretriz metodológica a articulação das representações fornecidas pelos materiais concretos com aquelas que se constituem através dos registros matemáticos usuais. Nesta articulação enfocamos os algoritmos matemáticos que devem ser ensinados e os desenvolvemos simultaneamente utilizando os dois registros de representação (concreto e matemático abstrato), buscando fazer com que o aluno vincule a observação concreta ao algoritmo matemático e, desta forma, atribua significado a este último. Alguns exemplos de módulos desenvolvidos com estes recursos são: Adição e subtração com ábacos; Multiplicação e Divisão com Material Dourado; Exponenciais e Logaritmos com Dobraduras, Árvores e Fractais; Trigonometria com Rampas e Teodolitos; Frações com Régua etc.
- **Conteúdos Digitais:** Ao explorar conteúdos digitais desenvolvidos para ensino de matemática também seguimos o referencial construtivista privilegiando recursos que permitam ao aluno observar propriedades e conceitos matemáticos. Aqui temos como diferencial a possibilidade de explorar a dualidade estático-dinâmico que, entre outras vantagens, nos fornecem representações que articulam de forma peculiar a bidimensionalidade com a tridimensionalidade. Dentre as ferramentas digitais que mais utiliza-

mos estão os aplicativos desenvolvidos no projeto Conteúdos Digitais para Ensino de Matemática e Estatística (CDME) da UFF (coordenado por Humberto Bortolossi).

- **Problemas do Cotidiano:** Quando utilizamos problemas do cotidiano em nossos módulos instrucionais objetivamos relacionar o conteúdo ensinado com os problemas reais que o aluno encontra em seu meio. Esta ferramenta reforça para o aluno a utilidade dos conteúdos ensinados. Um dos temas que mais exploramos com este recurso são questões que envolvem decisões financeiras.
- **Jogos:** Em nossos módulos os jogos são utilizados majoritariamente para fixação de conteúdos. É de conhecimento comum o fato de que a aprendizagem matemática não se encerra com a compreensão de conteúdos. Especialmente em temas mais básicos, como operações aritméticas, é necessário que o aluno exercite os conhecimentos adquiridos para obter agilidade no uso dos mesmos. Contudo, sabemos também que esta parte é geralmente considerada como enfadonha pelos alunos. Através de jogos introduzimos componentes lúdicos nesta prática, o que faz com que o aluno exercite seus conhecimentos com mais motivação e interesse.

Referências

- [1] Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática (5^ª a 8^ª séries). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental., Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [2] Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais-Ensino Médio. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnologia., Brasília, 1998.
- [3] Brasil. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. v. 02. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica., Brasília, 2006.
- [4] Damm, R. F. Registros de representação. In: Educação matemática: uma introdução, pp. 135-154. São Paulo: Educ, 1999.

[5] Duval, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). pp. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

[6] Piaget, J. *Abstração Reflexionante: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais.* Trad. Fernando Becker e Petronilha G. da Silva, Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

[7] Tardif, M. e Raymond, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. Educação & Sociedade, ano XXI, vol. 73, 209-244.

Abstração Reflexionante: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Trad. Fernando Becker e Petronilha G. da Silva, Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

Materiais concretos, jogos e novas tecnologias. Se você acha tudo isso muito legal, mas não sabe como usar na aula de matemática ou se sente inseguro para fazê-lo, podemos ajudá-lo! O projeto PIBID/UFG Matemática tem desenvolvido e testado planos de aulas com uso de recursos pedagógicos tais como materiais concretos, jogos e novas tecnologias para ensino de matemática e tem obtido como resultados aulas mais dinâmicas, alunos mais interessados e um processo de ensino e aprendizagem mais eficiente. Nesta oficina apresentaremos alguns planos de aulas desenvolvidos no projeto, mostraremos como utilizá-los e comentaremos sobre suas aplicações e seus resultados. Abarcaremos diversos temas de ensino fundamental e médio, sempre buscando uma abordagem mais prazerosa e eficiente dos conteúdos. Tanto os planos de aulas apresentados quanto as fichas de acompanhamento (exercícios) a para as atividades propostas serão disponibilizadas aos participantes por meio eletrônico.

MC4 - Desvendando o Cubo Mágico

Éder Silva, Juliana Oliveira, Eduardo Divino Pereira & Yu Chi Chen (UFG)

Resumo

Trata-se de um mini-curso que explora as possibilidades de um quebra-cabeça na matemática, geometria e evolução do raciocínio lógico. Consiste no ensino dos algoritmos básicos de resolução do cubo mágico dando a possibilidade dos participantes de desvendarem o cubo e usufruírem de seus benefícios. Inserindo assim o uso de quebra-cabeças tridimensionais mais elaborados no ensino superior e na docência.

Desvendando o cubo mágico

História

Cubo Mágico e Cubo-Velocidade

O cubo mágico foi inventado pelo húngaro Erno Rubik na década de 70 para fins didáticos. Seu criador queria provar a possibilidade de se fazer um cubo apoiado em 3 eixos que permitisse a rotação de todas as 6 faces. Anos mais tarde tornou-se o brinquedo mais vendido de todos os tempos e passou a ser comercializado não mais como cubo mágico e sim com Cubo de Rubik. Houve uma verdadeira febre nos anos oitenta incluindo a realização de um campeonato mundial em Budapeste no ano de 82. Passou por um período de esquecimento e ressurgiu nos anos 2000 como mais que um passatempo e quase um esporte. Surgiram campeonatos em todo o mundo incluindo o Brasil. Foi fundada a WCA (World Cube Association - <http://www.worldcubeassociation.org/>) que regulamenta e oficializa os campeonatos em todo o globo. Goiânia terá o seu primeiro campeonato oficial em outubro deste ano e passará a existir na “rota do cubo” brasileira entrando no seleto hall de cidades com campeonatos oficiais (www.cubomagicogoiias.com.br/goianiaopen2011/index.go11).

Cubo-velocidade: denominação dada a prática de resoluções do cubo mágico e outros quebra-cabeças tridimensionais em que se objetiva o menor tempo de resolução. Os campeonatos de cubo mágico são na verdade torneios de cubo-velocidade. O nome mais popular utilizado é o termo inglês speedcubing.

Motivação

Com o tempo de prática começamos a perceber os ganhos de se aprender a manusear o cubo e também da prática do cubo-velocidade. Percebemos um enorme ganho no poder de concentração, trata-se de uma atividade em que o indivíduo coloca toda sua atenção nos passos da resolução. Percebemos que por mais agitadas que sejam, os praticantes acabam desenvolvendo essa capacidade de se manterem focados em uma atividade. Percebemos também a agilidade que os praticantes desenvolvem na interpretação espacial dos objetos. Ao serem apresentados a novos quebra-cabeças existe uma imensa facilidade em vencer esses novos desafios tridimensionais. Outra motivação é o fato de se tratar de um hobby barato e extremamente democrático. Os interessados necessitam de um bom cubo e disposição, nada mais. Não é necessário pagar uma mensalidade ou encontrar um enorme espaço, como um campo de futebol, para brincar. Não se limita por idade, sexo ou formação escolar/acadêmica, mais uma vez é necessário somente um cubo e disposição.

Justificativa

O cubo possui um incalculável potencial pedagógico em torno de sua estrutura. Pouco explorado em técnicas de aprendizado, observamos as melhorias que acontecem na percepção daqueles que passam a praticar a modalidade, que passam a brincar com o quebra-cabeça.

Existe um grande desenvolvimento da acuidade visual levando em consideração as novas noções de geometria espacial que se adquire com a prática.

Lembramos também do poder de concentração que aumenta significativamente.

Observa-se a mudança de postura e um novo interesse pelo aprendizado.

O mini-curso é uma forma de levar o conhecimento de mais uma ferramenta aos participantes da XXV Semana do IME sabendo que nesse público estarão docentes e discentes que poderão futuramente explorar essas técnicas no ensino.

O evento é uma forma de proliferar mais uma ferramenta de desenvolvimento intelectual e das habilidades. Sendo esta ferramenta isenta de discriminação, por ser amplamente acessível. Democrático, o cubo pode encurtar algumas diferenças encontradas nas oportunidades de formação escolar de crianças, jovens e adultos.

Público-Alvo

Público acadêmico em geral com foco nas ciências exatas e licenciaturas. Pessoas de todas as idades, que se interessem por formas lúdicas de aprendizado e que valorizem a utilização da lógica, seja por diversão, seja pelo desafio ou mesmo pelo desenvolvimento e preservação da saúde mental.

Estrutura para o minicurso

2.5.1 Existe uma teoria que deve ser ensinada e assim como qualquer tipo de conhecimento deve existir uma sequência lógica no aprendizado. Por isso necessita-se do controle de participantes e de um local fechado. Se possível que sejam feitas inscrições para a participação. A inscrição filtra os que estão realmente dispostos para o curso e isso tem sido bastante benéfico para esse tipo de evento.

2.5.2 Sala de aula com carteiras para os alunos possam apoiar tanto o cubo quanto a folha com os algoritmos de resolução.

2.5.3 O curso é ministrado com o auxílio de projeção e de demonstrações ao vivo. Por se tratar de uma habilidade bastante específica tem um limite de 40 participantes para assegurar o bom andamento e resultados satisfatórios.

2.5.4 Cada participante porta seu próprio cubo. O ensino é prático sendo imprescindível o uso do cubo mágico por cada um dos inscritos.

2.5.5 O curso é ministrado por um palestrante e acompanhado por mais 5 monitores que ajudam em dúvidas específicas e revisam as técnicas com os participantes sempre que necessário.

Método utilizado

Existem várias formas e técnicas utilizadas para se resolver um cubo mágico. O curso utilizará o Método das Camadas com adaptações próprias feitas com base na experiência e no aproveitamento das pessoas que já passaram pelo mesmo.

O Método das Camadas consiste na separação do cubo em 3 camadas e a resolução de cada uma em momentos distintos. Essa é a forma mais didática encontrada, ao contrário do que o público leigo acredita, não se resolve um cubo por faces e sim por camadas.

Existirá uma introdução sobre os fundamentos do cubo e as nomenclaturas envolvidas, posteriormente entra-se efetivamente nos métodos.

Etapas do Método das Camadas

1. Primeira Camada

(a) Realização intuitiva da cruz da primeira face. Algoritmo I para casos específicos.

- (b) Encaixe dos cantos e finalização da primeira camada. Algoritmo II e as repetições necessárias.

2. Segunda Camada

- (a) Uso do algoritmo III (A e B) para finalização da segunda camada.

3. Terceira Camada

- (a) Realização da cruz da face oposta com uso do algoritmo IV e suas repetições.
- (b) Orientação de toda a última face com o algoritmo V e suas repetições.
- (c) Permutação dos cantos da última camada com o algoritmo VI e suas repetições.
- (d) Permutação das peças da cruz com o algoritmo VII (A ou B) e as repetições necessárias.

MC6 - Representações Lineares para Grupos Finitos

Ivonildes Martins (UFG) & Eunice Cândida Rodrigues (UFMT)

Resumo

As representações de grupos descrevem grupos abstratos em termos de transformações lineares de espaços vetoriais. Em particular, uma representação de um grupo G nos dá um modo de visualizarmos o grupo G como um grupo de matrizes.

A teoria das representações nada mais é do que o estudo e a descrição das possibilidades para concretizar grupos abstratos através de grupos matriciais. Assim, é importante porque ela permite que muitos problemas teóricos de grupos sejam reduzidos a problemas em álgebra linear, a qual é bem compreendida.

Representações Lineares para Grupos Finitos

A teoria das representações é o estudo e a descrição das possibilidades para concretizar grupos abstratos através de grupos matriciais sobre corpos.

Uma representação do grupo G sobre um corpo F é um homomorfismo ρ de G para $GL(n, F)$, para algum inteiro n . Dizemos que ρ é fiel se $\text{Ker} \rho = \{1\}$.

Grupos finitos possuem representações fiéis.

O estudo de um espaço vetorial V como FG -módulo nos permite compreender o processo de se obter as citadas representações, bem como na obtenção de outras representações.

A conexão entre FG -módulos e representações de G sobre F é revelada por meio do seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Se $\rho : G \rightarrow GL(n, F)$ é uma representação de G sobre F e $V = F^n$, então V torna-se um FG -módulo se definirmos a multiplicação vg por*

$$g\rho = v(g\rho), \text{ para todo } v \in V \text{ e } g \in G.$$

Além disso, existe uma base β de V tal que

$$g\rho = [g]_{\beta}, \text{ para todo } g \in G.$$

Assuma que V é um FG -módulo e seja β uma base de V . Então a função

$$g \mapsto [g]_{\beta}, g \in G;$$

é uma representação de G sobre F .

A matriz $[g]_{\beta}$ é invertível com inversa $[g^{-1}]_{\beta}$.

Mostraremos algumas maneiras de construir FG -módulos diretamente sem usar representação. Para isto, transformamos um espaço vetorial V sobre um corpo F em um FG -módulo especificando a ação dos elementos do grupo G sobre uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e estendemos a ação por linearidade sobre todo V , isto é, primeiro definimos $v_i g$, para todo $1 \leq i \leq n$, e todo $g \in G$ e então definimos

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g, \lambda_i \in F;$$

como sendo $\lambda_1(v_1 g) + \dots + \lambda_n(v_n g)$.

Proposição 2.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F com base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e G um grupo. Suponha que esteja definida uma multiplicação vg , para todo $v \in V$, $g, h \in G$, e $\lambda_i \in F$, com $1 \leq i \leq n$, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $v_i g \in V$,
2. $v_i(gh) = (v_i g)h$,
3. $v_i 1 = v_i$,
4. $(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + \dots + \lambda_n(v_n g)$.

Então V é um FG -módulo.

Definição 2.3. 1. O FG -módulo trivial é o espaço vetorial V 1-dimensional sobre F com $vg = v$, para todo $v \in V$ e $g \in G$.

2. Um FG -módulo V é dito fiel se a identidade de G é o único elemento g para o qual $vg = v$, para todo $v \in V$.

Um exemplo de FG -módulos são os FG -módulos permutacionais.

Considere G um grupo de permutação de $\{1, \dots, n\}$. Seja V um espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo F , com base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para cada $1 \leq i \leq n$ e cada permutação $g \in G$ defina

$$v_i g = v_{ig}.$$

Então $v_i g \in V$ e $v_i 1 = v_i$. Também, para $g, h \in G$, $v_i(gh) = (v_i g)h$.

Estendemos a ação de cada g linearmente para todo V .

Então V é um FG -módulo, denominado FG -módulo permutacional para G sobre F .

Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é a base do módulo permutacional, então para todo $g \in G$, a matriz $[g]_\beta$ possui precisamente uma entrada não nula em cada linha e cada coluna e esta entrada é 1. Uma tal matriz é chamada *matriz permutacional*.

Desde que o único elemento de G que fixa todo elemento v_i é a identidade, temos que o módulo permutacional é um FG -módulo fiel.

O Teorema de Maschke é um resultado importante na teoria das representações. Uma consequência deste teorema é que todo FG -módulo é uma soma direta de FG -submódulos irredutíveis.

Teorema 2.4. *Seja G um grupo finito, seja $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$ e seja V um FG -módulo. Se U é um FG -submódulo, então existe W um FG -submódulo de V tal que*

$$V = U \oplus W.$$

Referências

- [1] Bueno H. P., *Álgebra Linear -Um segundo Curso*, 2006, Rio de Janeiro, ISBN.
- [2] Milies C. P. and Shegal S. K., *An Introduction to Group Rings*, 2002, Kluwer Academic Publishers, Volume I, Boston and London.
- [3] Rotman J. J., *An Introduction to the theory of Groups*, fourth edition Springer, USA, 1994.

MC8 - Maxima: Um Completo Programa de Computação Algébrica

Lenimar Nunes de Andrade (UFPB)

Introdução

Maxima é um programa que executa cálculos numéricos e simbólicos, em desenvolvimento desde 1969. Seu nome original era Macsyma e foi elaborado nos laboratórios do MIT, nos Estados Unidos, com financiamento de várias agências governamentais norte-americanas.

é capaz de simplificar expressões algébricas e trigonométricas, efetuar cálculos com matrizes e com números complexos, construir diversos tipos de gráficos, fatorar polinômios, resolver diversos tipos de equações e sistemas etc.

Trata-se de um programa livre. Pode ser copiado, utilizado e distribuído gratuitamente. Isso faz com que o *Maxima* seja uma excelente ferramenta pedagógica, facilmente acessível a todos.

é considerado um Sistema de Computação Algébrica de uso geral, podendo ser usado nos sistemas operacionais Windows, Linux e Mac-OS.

Interface wxMaxima

São várias as formas pelas quais o *Maxima* comunica-se com o usuário. Neste artigo, citamos apenas a interface denominada wxMaxima, que é bastante amigável, intuitiva e fácil de se usar.

Podemos digitar os comandos para o *Maxima* linha por linha, e observar as respostas dadas pelo programa. Para isso, seguimos as seguintes regras:

- Os comandos vão sendo digitados ao lado de (%i1), (%i2), (%i3) etc. e o *Maxima* vai dando suas respostas ao lado de (%o1), (%o2), (%o3) etc.

- A linha de comando deve ser encerrada com um ponto e vírgula ou com um cifrão. Se for encerrada com um ponto e vírgula, o resultado obtido é mostrado imediatamente. Se for encerrada com um cifrão, o resultado não será mostrado de imediato, ficando guardado internamente.
- As operações aritméticas básicas são indicadas pelos símbolos $+$, $-$, $*$ (multiplicação), $/$ (divisão) e $^$ (potenciação).
- A raiz quadrada de x é indicada por $\text{sqrt}(x)$, o logaritmo natural de x é $\log(x)$, as funções trigonométricas são $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\sec(x)$, $\cot(x)$, $\csc(x)$ e as trigonométricas inversas são $\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$, $\text{atan}(x)$.
- Uma variável pode ter seu nome formado por uma única letra como x , y , z , ... ou ter um nome longo onde apareçam várias letras, algarismos e caracter de sublinhado como em expr1 , expr2 , result_1 , result_2 , ...
- Podemos atribuir valor a qualquer variável digitando-se o seu nome seguido de dois pontos e do valor da variável como em $x : 2$, $y : 4$, $z : -1$...
- O último resultado calculado pode ser referenciado por um símbolo de porcentagem (%).
- As constantes matemáticas $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$, $i = \sqrt{-1}$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são representadas por $\%pi$, $\%e$, $\%i$ e $\%phi$, respectivamente.
- Usamos o comando $\text{float}(x)$ para obtermos a representação decimal de x .
- Uma função pode ser definida utilizando-se um $:=$, como no exemplo $f(x) := \cos(x) + x/5 - 3$.

Algumas vezes, ao invés de digitar linhas de comando, pode-se escolher uma janela no menu principal e usá-la exclusivamente para digitação do comando. O menu principal aparece no topo da tela: “Arquivo Editar Célula Maxima Equações Álgebra ...”.

A seguir, alguns exemplos de comandos digitados no *Maxima*, bem como suas respectivas respostas. Calculamos $30 \times 50 + 8 \times 10$, fatoramos o resultado em produto de potências de primos, calculamos $a = \sqrt{49}$, $b = \frac{\sqrt{81}}{6}$, $a + b$, $x = \log(\cos(\frac{\pi}{6}) + \text{sen}(\frac{\pi}{4}))$ e a

sua representação decimal.

```
(%i1) 30*50 + 8*10;
```

```
(%o1) 1580
```

```
(%i2) factor(%);
```

```
(%o2) 2^2 5 79
```

```
(%i3) a: sqrt(49)$ b: sqrt(81)/6$ a+b;
```

```
(%o3)  $\frac{17}{2}$ 
```

```
(%i4) x: log(cos(%pi/6) + sin(%pi/4)); float(x);
```

```
(%o4)  $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 
```

```
(%o5) 0.45306865422064
```

Um comando é executado pressionando-se [Enter], [Shift][Enter] ou [Ctrl][Enter] na linha, dependendo do que estiver definido em “Editar/Configurações/Enter calcula células” no menu principal.

Muitos outros exemplos podem ser encontrados nas referências bibliográficas ou nas telas de ajuda do próprio programa.

Simplificação e desenvolvimento de expressões

Expressões algébricas podem ser simplificadas com o comando *ratsimp(...)* e desenvolvidas com um comando *expand(...)*. Se houver alguma função trigonométrica envolvida, então a expressão pode ser simplificada com um *trigsimp(...)* e ser desenvolvida com um *trigexpand(...)*.

```
(%i6) ex1: a^3/((a-b)*(a-c)) + b^3/((b-c)*(b-a)) +
```

```
c^3/((c-a)*(c-b));
```

```
(%o6)  $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ 
```

```
(%i7) ratsimp(ex1);
(%o7) c + b + a

(%i8) ex2: ((3*x^2+4*x+1)^2-(3*x^2+10*x+1)^2)/((3*x^2+11*x+1)^2-
(3*x^2+3*x+1)^2);
(%o8) 
$$\frac{(3x^2 + 4x + 1)^2 - (3x^2 + 10x + 1)^2}{(3x^2 + 11x + 1)^2 - (3x^2 + 3x + 1)^2}$$


(%i9) ratsimp(ex2);
(%o9)  $-\frac{3}{4}$ 

(%i10) y: (sin(x)^3 - cos(x)^3)/(sin(x) - cos(x));
(%o10) 
$$\frac{\sin(x)^3 - \cos(x)^3}{\sin(x) - \cos(x)}$$


(%i11) trigsimp(y);
(%o11) cos(x) sin(x) + 1
```

Operações com polinômios

Diversas operações com polinômios podem ser efetuadas com o *Maxima*. A fatoração é realizada com um comando *factor(...)*, o máximo divisor comum entre f e g é feita com um *gcd(f, g)* e a divisão com um *divide(f, g)*. O resultado da divisão é apresentado no formato $[q, r]$ onde q é o quociente e r é o resto da divisão.

Neste exemplo, definimos os polinômios $f = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 84$ e $g = (x + 4)(x^2 + x + 7)^2$, fatoramos e calculamos o MDC entre eles. Por fim, dividimos f por $x^2 + 3x + 7$.

```
(%i12) f: x^4 + 2*x^3 - 4*x^2 - 5*x - 84;
(%o12) x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 84

(%i13) factor(%);
(%o13) (x - 3)(x + 4)(x^2 + x + 7)

(%i14) g: expand((x + 4)*(x^2 + x + 7)^2);
```

```
(%o14)  $x^5 + 6x^4 + 23x^3 + 74x^2 + 105x + 196$ 
```

```
(%i15) factor(%);
```

```
(%o15)  $(x + 4)(x^2 + x + 7)^2$ 
```

```
(%i16) gcd(f, g);
```

```
(%o16)  $x^3 + 5x^2 + 11x + 28$ 
```

```
(%i17) divide(f, x^2 + 3*x + 7);
```

```
(%o17)  $[x^2 - x - 8, 26x - 28]$ 
```

Equações e sistemas

Uma equação pode ser resolvida com um comando solve(equação, variável). Podemos digitar uma linha de comando ou fornecer a equação em uma janela exclusiva para entrada de equações. Para obter essa janela de equações, escolhemos no menu principal do programa a opção “Equações” e depois escolhemos “Resolver ...”. Resolvemos a equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

```
(%i18) solve(x^4 - 5*x^2 + 6 = 0, x);
```

```
(%o18)  $[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}]$ 
```

Um sistema pode ser resolvido da mesma forma que uma equação, bastando colocar as equações e as variáveis entre colchetes. Resolvemos o sistema linear formado pelas equações $3x + 4y = 2$ e $2x - y = 3$.

```
(%i19) solve([3*x + 4*y = 2, 2*x - y = 3], [x, y]);
```

```
(%o19)  $[[x = \frac{14}{11}, y = -\frac{5}{11}]]$ 
```

Equações mais complicadas podem ter raízes no interior de um intervalo $[a, b]$ encontradas com um comando find_root(equação, variável, a, b). Neste exemplo, determina-

mos uma raiz da equação $\sin(3x) - 2\sin(x) = 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

```
(%i20) find_root(sin(3*x) - 2*sin(x) = 1, x, -1, 1);
(%o20) -0.86437521331831
```

Operações com matrizes

É possível fornecer uma matriz ao *Maxima* com um comando `matrix([linha 1], [linha 2], ...)` ou através de uma janela específica, obtida nos itens “Álgebra” e “Introduzir matriz...” do menu principal. A multiplicação de matrizes pode ser feita com um ponto como em $A.B$, o determinante com um comando `determinant(...)` e a inversa com um comando `invert(...)`. Definimos neste exemplo uma matriz M e calculamos seu determinante e sua matriz inversa.

```
(%i21) M: matrix( [-3,7,1], [4,5,0], [10,2,-5]);
```

```
(%o21) 
$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 10 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i22) determinant(%);
```

```
(%o22) 173
```

```
(%i23) invert(%);
```

```
(%o23) 
$$\begin{bmatrix} -\frac{25}{173} & \frac{37}{173} & -\frac{5}{173} \\ \frac{20}{173} & \frac{5}{173} & \frac{4}{173} \\ -\frac{42}{173} & \frac{76}{173} & -\frac{43}{173} \end{bmatrix}$$

```

```
(%i24) M . M;
```

```
(%o24) 
$$\begin{bmatrix} 47 & 16 & -8 \\ 8 & 53 & 4 \\ -72 & 70 & 35 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i25) I: matrix( [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]);
```

```
(%o25) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i26) P: x*I - M$ expand(determinant(P));
(%o26)  $x^3 + 3x^2 - 63x - 173$ 
```

Gráficos

O *Maxima* constrói vários tipos de gráficos planos ou tridimensionais. A construção do mais simples tipo de gráfico plano com $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ pode ser feita com um comando `plot2D(função, [x, a, b], [y, c, d])`. Mais de um gráfico podem ser construídos em um mesmo sistema de eixos, bastando colocar a lista de funções envolvidas entre colchetes e separadas entre si por vírgulas.

Neste exemplo construímos os gráficos de $\sin(6x)$, $\sec(x)$ e $\operatorname{tg}(x)$ com x e y variando de -5 a 5 . Uma janela exclusiva para a digitação dos dados do gráficos pode ser obtida com a opção “Gráfico” do menu principal, depois escolhendo-se “Gráfico2D ...”.

```
(%i27) plot2D( [sin(6*x), sec(x), tan(x)], [x, -5, 5], [y, -5, 5] );
```

Uma opção como `[color, green]` pode ser acrescentada para alterar a cor do gráfico ou `[style, [lines, 5]]` para alterar a largura do traço.

Gráficos tridimensionais

O gráfico tridimensional de uma função $f(x, y)$, com $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ pode ser construído com um comando `plot3d(f(x,y), [x, a, b], [y, a, b], opções)` ou fornecendo-se os dados

do gráfico nas janelas “Gráfico” e “Gráfico3D ...” no menu principal.

```
(%i28) plot3d(cos(x)*sin(y), [x, -5, 5], [y, -5, 5],
[palette, false], [color, red, blue]);
```

Se a superfície for definida por equações paramétricas, é possível construí-la fornecendo-se as equações entre colchetes.

```
(%i29) plot3d( [u*cos(v), u*sin(v), v], [u, 0, 3], [v, 0, 10]
);
```

Depois de construído, um gráfico tridimensional pode ser girado pressionando-se o botão do mouse e arrastando-o para uma nova posição.

Limites

O limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é calculado com um comando $\text{limit}(f(x), x, x_0)$. O infinito pode ser codificado por inf e o menos infinito por minf. Se for colocado um apóstrofo antes do comando, ele será apenas mostrado, mas não calculado.

```
(%i30) limit(sin(4*x)/x, x, 0);
```

```
(%o30) 4
```

```
(%i31) limit((1 + 3/n)^n, n, minf);
```

```
(%o31) %e3
```

```
(%i32) 'limit( sqrt(x + sqrt(x)) - sqrt(x), x, inf);
```

```
(%o32)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ 
```

```
(%i33) limit( sqrt(x + sqrt(x)) - sqrt(x), x, inf);
```

```
(%o33)  $\frac{1}{2}$ 
```

Derivadas

A derivada de $f(x)$ com relação a x pode ser calculada com um $\text{diff}(f(x), x)$. Se for colocado um apóstrofo antes do nome do comando, ele não será executado.

```
(%i34) diff(x^7 + 11*sin(x), x);
```

```
(%o34) 11*cos(x) + 7*x^6
```

```
(%i35) 'diff(cos(x^5), x) = diff(cos(x^5), x);
```

```
(%o35)  $\frac{d}{dx} \cos(x^5) = -5x^4 \sin(x^5)$ 
```

Derivadas parciais e derivadas de ordem superior também podem ser calculadas, conforme mostrado nos seguintes exemplos:

```
(%i36) diff((3*x + 5*y^3)^7, y);
```

```
(%o36) 105*y^2*(5*y^3 + 3*x)^6
```

```
(%i37) diff(tan(x), x, 6);
```

```
(%o37) 32*sec(x)^2*tan(x)^5 + 416*sec(x)^4*tan(x)^3 + 272*sec(x)^6*tan(x)
```

```
(%i38) f(x, y, z) := x^3 * y^4 * z^5 $
```

```
(%i39) diff(f(x, y, z), x, 2, y, 2, z, 3);
```

```
(%o39) 4320*x*y^2*z^2
```

Integrais

Integrais definidas em $[a, b]$ podem ser calculadas com comando do tipo $\text{integrate}(f(x), x, a, b)$.

```
(%i40) 'integrate( x^4*cos(x), x);
```

```
(%o40) 
$$\int x^4 \cos(x) dx$$

```

```
(%i41) integrate( x^4*cos(x), x);
```

```
(%o41) 
$$(x^4 - 12x^2 + 24) \sin(x) + (4x^3 - 24x) \cos(x)$$

```

```
(%i42) 'integrate(x^5, x, a, b) = integrate(x^5, x, a, b);
```

```
(%o42) 
$$\int_a^b x^5 dx = \frac{b^6}{6} - \frac{a^6}{6}$$

```

```
(%i43) 'integrate(%e^(-x^2), x, 0, inf) = integrate(%e^(-x^2),
x, 0, inf);
```

```
(%o43) 
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

```

Equações diferenciais

O *Maxima* possui vários comandos para resolução de equações diferenciais. Um deles, o `ode2(EDO, var1, var2)` resolve equações diferenciais ordinárias EDO de primeira ou segunda ordens, com *var1* sendo a variável dependente e *var2* a independente. Neste caso, é preciso que se digite um apóstrofo antes das derivadas. Nas soluções, o *Maxima* apresenta as constantes genéricas como sendo `%c`, `%k1`, `%k2` etc.

```
(%i44) eqn1: 'diff(y, x) + 4*y = cos(x);
```

```
(%o44) 
$$\frac{d}{dx}y + 4y = \cos(x)$$

```

```
(%i45) ode2(eqn1, y, x);
```

```
(%o45) 
$$y = \%e^{-4x} \left( \frac{\%e^{4x} (\sin(x) + 4 \cos(x))}{17} + \%c \right)$$

```

```
(%i46) eqn2: 'diff(y, x, 2) - 5*'diff(y, x) + 6 = 0;
```

```
(%o46) 
$$\frac{d^2}{dx^2}y - 5 \left( \frac{d}{dx}y \right) + 6 = 0$$

```

```
(%i47) ode2(eqn2, y, x);
```

```
(%o47) 
$$y = \%k1 \%e^{5x} + \frac{30x + 6}{25} + \%k2$$

```

Programação com o *Maxima*

O *Maxima* possui comandos que permitem que ele seja usado também como uma linguagem de programação, permitindo que sejam elaborados programas com essa linguagem. Alguns comandos para programação são:

- `if condição then comando1 else comando2`: executa `comando1` se a condição for verdadeira ou o `comando2` se a condição for falsa.
- `print("mensagem1", variável1, "mensagem2", variável2, ...)`: mostra uma ou várias mensagens entre aspas seguidas dos valores de uma ou várias variáveis.
- `for variável from início thru término step passo do comando`: o comando fornecido depois do `do` é executado para cada valor da variável no intervalo [início, término] com passo dado.
- `while condição do comando`: executa o comando enquanto a condição for verdadeira
- `block([variáveis locais], comando1, comando2, ..., return(valor))`: permite construção de um bloco de comandos. Se houver um comando `return(valor)`, então o valor é retornado; senão, é retornado o último valor calculado no bloco.

Exemplos:

- `if $x > 2$ then print("maior do que 2") else print("menor ou igual a 2");`
- `for k from 1 thru 20 step 2 do print(k);`
- `f(x) := block(%if $x < 2$ then return(1) else return($x*f(x-1)$));`
- `x: 1; while ($x < 30$) do (print(factor(x)), x: x+1);`

De onde copiar

O *Maxima* tem sua própria página na Internet, no endereço <http://maxima.sourceforge.net/download.html>. é denominada "Maxima, a Computer Algebra

System” e a partir dela pode-se copiar o programa (cerca de 30 megabytes), além da sua documentação em diversos idiomas.

Referências

- [1] J. R. R. Galván (2007), *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*, Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz, disponível na Internet em PDF.
- [2] Gómez, A. J. A. e outros, Prácticas de Matemáticas con Maxima, disponível em <http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm>
- [3] Urroz, G. E., Maxima Book, disponível em <http://www.neng.usu.edu/cee/faculty/gurro/Maxima.html>
- [4] *Maxima Manual* (2000), disponível em <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/en/maxima.pdf>
- [5] Macsyma Inc. (1998), *Macsyma Scientific Graphics Reference Manual*, disponível em www.cs.berkeley.edu/~fateman/macsyma/docs/
- [6] Macsyma Inc. (1996), *Macsyma Mathematics and System Reference Manual*, 16th ed., disponível em www.cs.berkeley.edu/~fateman/macsyma/docs/
- [7] Macsyma Inc. (1996), *Macsyma User's Guide*, 2nd ed., disponível em www.cs.berkeley.edu/~fateman/macsyma/docs/
- [8] Neble, M. V. R., Galván, J. R. R. (2005), *Introducción a Maxima*, Universidad de Cádiz, disponível na Internet em PDF.
- [9] M. R. Riotorto (2008), *Primeros pasos en Maxima*, disponível em www.telefonica.net/web2/biomates
- [10] J. E. Villate (2007), *Introdução aos Sistemas Dinâmicos – Uma abordagem prática com Maxima*, disponível em http://fisica.fe.up.pt/maxima/book/sistdinam-1_2.pdf

MC13 - Distribuições de Probabilidade e Aplicações

Fabiano Fortunato & Simone Vasconcelos (UFG)

Resumo

Neste mini-curso introduziremos o conceito de variável aleatória e a partir daí, apresentaremos algumas distribuições de probabilidade. Serão abordadas distribuições de probabilidade discretas: Bernoulli, binomial, Poisson e geométrica, por exemplo e distribuições de probabilidade contínuas: exponencial, uniforme, normal, entre outras. A proposta principal do mini-curso é deixar claro a aplicabilidade destas distribuições em alguns modelos matemáticos simples.

Introdução

Ao empregarmos matemática para estudar algum fenômeno de observação, é necessária a construção de um modelo matemático adequado. Existem dois tipos de Modelos Matemáticos:

A Modelos determinísticos:

As condições sobre as quais o modelo é executado determinam o resultado do experimento, ou seja, espera-se obter um determinado resultado devido as condições do experimento.

Exemplo 2.5. *Considere o experimento de verificar o tempo necessário, t , para um veículo percorrer uma distância fixa, d , sob uma velocidade constante, v .*

Como $v = \frac{d}{t}$, então $t = \frac{d}{v}$. Se o experimento for repetido um certo número de vezes, espera-se sempre observar valores próximos de t , obtidos pela fórmula acima.

B Modelos probabilísticos ou não-determinísticos:

As condições do experimento determinam somente o comportamento probabilístico do resultado observável, ou seja, não se sabe qual resultado particular ocorrerá. Este modelo é caracterizado por:

1. O experimento poderá ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições;
2. É possível descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento;
3. Não é possível determinar um resultado individual do experimento, porém, quando o experimento for repetido um número grande de vezes, uma regularidade surgirá.

Estamos interessados no estudo de modelos probabilísticos. Alguns exemplos são:

- E_1 : Jogue um dado e observe o número mostrado na face superior;
- E_2 : Jogue uma moeda até que se obtenha cara pela primeira vez;
- E_3 : Uma lâmpada é fabricada e em seguida é testada quanto a duração, registrando o tempo decorrido (em horas), até queimar.

Espaço Amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis do experimento é chamado *espaço amostral* e será denotado por Ω . Para os três exemplos descritos anteriormente temos, respectivamente:

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- $\Omega_2 = \{(c, c, c, c), (k, c, c, c), (c, k, c, c), (c, c, k, c), (c, c, c, k), (k, k, c, c), (k, c, k, c), (k, c, c, k), (c, k, k, c), (c, k, c, k), (c, c, k, k), (c, k, k, k), (k, c, k, k), (k, k, c, k), (k, k, k, c), (c, c, c, c)\}$, onde c representa cara e k representa coroa;
- $\Omega_3 = \{t \mid t \geq 0\}$, onde t representa o tempo de duração da lâmpada.

O espaço amostral de um experimento pode ser finito, infinito enumerável ou infinito não-enumerável.

Evento

Considere um experimento E , e um espaço amostral associado Ω . Então, um *evento* A é um subconjunto do espaço amostral Ω , ou seja, é um dos resultados possíveis do experimento. O próprio espaço Ω e o conjunto vazio \emptyset são exemplos de eventos.

No exemplo E_2 , considere o evento A em que mais caras que coroas ocorrem. Então A é o subconjunto de Ω , representado por

$$A = \{(c, c, c, c), (k, c, c, c), (c, k, c, c), (c, c, k, c), (c, c, c, k)\}.$$

Se Ω é finito ou infinito enumerável, qualquer subconjunto poderá ser considerado um evento. Se Ω tem exatamente n elementos, então existem exatamente 2^n subconjuntos (eventos) de Ω . Se Ω é infinito não-enumerável, nem todo subconjunto poderá ser considerado um evento. Este assunto porém, vai além do que se deseja explorar neste mini-curso, mas trabalharemos apenas com eventos possíveis em espaços amostrais não-enumeráveis.

Algumas combinações de eventos também são eventos:

1. Se A é um evento, então A^c é o evento que ocorre se, e somente se A não ocorre;
2. Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ é uma coleção finita ou infinita de eventos, então o evento $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ocorrerá se, e somente se pelo menos um evento A_i ocorrer.
3. Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ é uma coleção finita ou infinita de eventos, então o evento $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ ocorrerá se, e somente se todos os eventos A_i ocorrerem.

Exemplo 2.6. Um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço t , é registrado, em horas. Então

$$\Omega = \{t \mid t \geq 0\}.$$

Considere os eventos :

- A : O dispositivo funciona menos de 100 horas.
- B : O dispositivo funciona no mínimo 50 horas e no máximo 200 horas.
- C : O dispositivo funciona mais de 150 horas.

Então

- $A = \{t \mid 0 \leq t < 100\}$
- $B = \{t \mid 50 \leq t \leq 200\}$
- $C = \{t \mid t > 150\}$

Consequentemente, $A \cup B = \{t \mid 0 \leq t \leq 200\}$,

$B \cap C = \{t \mid 150 < t \leq 200\}$ e $C^c = \{t \mid t \leq 150\}$

Frequência Relativa

Não é possível afirmar com certeza se um evento A ocorrerá ou não. O objetivo então é associar um número ao evento A que medirá a chance de o evento A ocorrer. Uma primeira tentativa seria da seguinte maneira: Considere um experimento E repetido n vezes. e seja A um evento associado a E , onde n_A representa o número de vezes que A ocorreu nas n repetições. Definimos

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

como sendo a *frequência relativa* do evento A nas n repetições de E . A frequência relativa apresenta as seguintes propriedades:

1. $0 \leq f_A \leq 1$;
2. Se A e B são eventos mutuamente excludentes e $f_{A \cup B}$ é a frequência relativa do evento $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.
3. À medida que o número de repetições n , do experimento E cresce, a frequência relativa baseada neste número tende a se estabilizar próximo de algum valor numérico definido.

É evidente que a frequência relativa fornece uma informação precisa da chance de um evento ocorrer e este valor se estabilizará para um número grande de repetições. Porém, existem duas complicações: A primeira é que não é preciso quão grande deve ser n para que se escolha a frequência relativa como medidor de chance. A segunda é que não queremos que o número varie de acordo com a sorte como é o caso da frequência relativa.

Probabilidade

Deseja-se obter o medidor de chance de um evento sem ser necessário recorrer à experimentação. Formalmente, apresentamos este número da seguinte maneira:

Definição 2.7. *Seja E um experimento, Ω um espaço amostral associado a E . Para cada evento A , associamos um número real, representado por $P(A)$ e denominado probabilidade de A e satisfaça as seguintes propriedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Se A e B são eventos mutuamente excludentes, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
4. Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ são eventos dois-a-dois mutuamente excludentes, então $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Observe que as propriedades de probabilidade são sugeridas pelas propriedades de frequência relativa. A definição acima apresenta algumas propriedades da probabilidade de A , mas ainda não sabemos como calcular probabilidades. Outras propriedades que independem da maneira que $P(A)$ é calculada são:

1. Se \emptyset for o conjunto vazio, então $P(\emptyset) = 0$;
2. Se A^c é o complementar de A , então $P(A^c) = 1 - P(A)$;
3. Se A e B são eventos quaisquer, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
4. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

Uma maneira de calcular a probabilidade de um evento A , onde o espaço amostral Ω é finito é da seguinte maneira:

$$P(A) = \frac{\text{quantidade de casos favoráveis a } A \text{ no experimento}}{\text{quantidade de casos possíveis no experimento}}.$$

De fato, para se calcular a probabilidade de qualquer evento de um experimento onde Ω é finito, ou seja, $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, basta determinar a probabilidade de cada evento $\{a_i\}$. Para cada $i = 1, \dots, n$, considere $P(a_i) = p_i$. Então $p_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ e $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Qualquer outro evento é constituído de elementos a_i .

Exemplo 2.8. Um dado é lançado e todos os resultados são igualmente prováveis. Calcule a probabilidade de sair um número maior que 4. Temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, onde $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$. Considere o evento A : sair um número maior que 4. Então $P(A) = P(\{5, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Variáveis Aleatórias

Não necessariamente, o espaço amostral de um determinado evento é constituído de números, como é o caso do exemplo E_2 . Contudo, em muitas situações deseja-se obter um registro numérico dos eventos de um espaço amostral. Basta atribuímos um número a cada resultado não numérico do experimento, ou seja, deseja-se associar um número real x a cada elemento do espaço amostral. No caso do exemplo E_2 , podemos definir uma função X que associa a cada elemento do espaço amostral Ω_2 , a quantidade de caras. Logo

- $X((c, c, c, c)) = 4$;
- $X((k, c, c, c)) = X((c, k, c, c)) = X((c, c, k, c)) = X((c, c, c, k)) = 3$;
- $X((k, k, c, c)) = X((k, c, k, c)) = X((k, c, c, k)) = X((c, k, k, c)) = X((c, k, c, k)) = X((c, c, k, k)) = 2$;
- $X((c, k, k, k)) = X((k, c, k, k)) = X((k, k, c, k)) = X((k, k, k, c)) = 1$;
- $X((k, k, k, k)) = 0$.

Temos então a seguinte definição:

Definição 2.9. Seja E um experimento e Ω um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X , que associa a cada elemento de $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega)$ é denominada *variável aleatória*.

Note que variáveis aleatórias, apesar da terminologia usada, tratam-se de *funções*. Nem toda função de um espaço amostral Ω em \mathbb{R} é uma variável aleatória, mas trataremos apenas de funções que são variáveis aleatórias. Para um tratamento completamente numérico do experimento, podemos considerar o espaço amostral do experimento como sendo a imagem da variável aleatória X , que é um subconjunto dos números reais. No exemplo acima, tomando X o número de caras obtidas nos 4 lançamentos, poderíamos considerar o espaço amostral $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, que é a imagem de X . Para que a correspondência entre Ω e o contradomínio de X , denotado por R_X seja aceitável do ponto de vista probabilístico, precisamos identificar cada evento de Ω com um evento de R_X e vice-versa.

Definição 2.10. *Considere um experimento E e seu espaço amostral Ω . Seja X uma variável aleatória definida em Ω e seja R_X seu contradomínio. Seja B um evento definido em relação a R_X , ou seja, $B \subset R_X$. Então o evento equivalente a B em Ω é definido por*

$$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}.$$

A será constituído de por todos os resultados em Ω para os quais $X(\omega) \in B$.

Trabalharemos então com duas classes de variáveis aleatórias: *variáveis aleatórias discretas*, onde o espaço amostra é finito ou infinito enumerável, e *variáveis aleatórias contínuas*, onde o espaço amostral é não enumerável. Em cada classe, estudaremos os tipos de variáveis aleatórias mais conhecidas por serem mais comumente encontradas em experimentações.

Antes de apresentar alguns modelos discretos e contínuos, precisamos entender o que é uma *função de probabilidade* e uma *densidade*.

A função de probabilidade de uma v.a. discreta é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores assumidos pela variável, isto é, sendo X uma v.a. com valores x_1, x_2, \dots , temos para $i = 1, 2, \dots$

$$p(x_i) = P(X = i) = P(\{w \in \Omega : X(w) = x_i\}).$$

Note que

$$0 \leq p(x_i) \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad \sum_i p(x_i) = 1.$$

A densidade de uma v.a. contínua é uma função não-negativa f tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

onde F é a função de distribuição de X .

Observe que

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Estamos prontos para introduzir alguns modelos discretos e contínuos importantes.

Principais Modelos Discretos

Em estudos sobre a eficácia de uma nova droga, o número de pacientes curados entre o número total de pacientes que utilizaram tal droga, segue, aproximadamente uma distribuição binomial. Nos processos de controle de qualidade, o número de itens defeituosos em uma amostra extraída de um dado lote, pode ser modelado como uma v.a. hipergeométrica. O número de células brancas de uma quantidade fixa da amostra de sangue de um indivíduo, é usualmente aleatório e pode ser descrito por uma distribuição de Poisson. Veremos agora, algumas distribuições de probabilidade importantes e alguns exemplos de aplicação.

Modelo Uniforme Discreto

Uma v.a. segue o modelo *uniforme discreto*, com valores x_1, \dots, x_k , se tem função de probabilidade dada por

$$p(x_i) = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \dots, k.$$

A notação é $X \sim U_d[A]$, com A sendo o conjunto de seus valores.

Exemplo 2.11. Lançamos um dado honesto e observamos a face que ocorreu. Se X é a v.a. que anota a face ocorrida, então $X \sim U_d[A]$, com $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Neste caso, a função de distribuição é $p(x) = 1/6$, para $x = 1, \dots, 6$.

Modelo Bernoulli

Uma v.a. segue o modelo *Bernoulli*, se assume apenas os valores 0 ou 1. Sua função de probabilidade é dada por:

$$p(1) = P(X = 1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = P(X = 0) = 1 - p,$$

onde $0 < p < 1$ (comumente chamada de *probabilidade de sucesso*). A notação é: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Usualmente, denominamos por *ensaio de Bernoulli*, o experimento que tem resposta dicotômica do tipo sucesso-fracasso.

Exemplo 2.12. No lançamento de uma moeda, defina a v.a.:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se cara} \\ 0, & \text{se coroa} \end{cases}$$

Dessa forma, $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, onde $p = P(\text{cara})$. Se a moeda for honesta, então $p = 1/2$.

Modelo Binomial

Seja X o número de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes. Diremos que a v.a. X segue o modelo *binomial* com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

A notação utilizada é: $X \sim B(n, p)$.

Exemplo 2.13. A taxa de imunização de uma vacina é 90%. Se um grupo de 10 pessoas forem vacinadas, desejamos saber o comportamento probabilístico do número de pessoas imunizadas neste grupo. Seja X a v.a. de interesse. Para cada pessoa do grupo, a probabilidade de estar imunizada é 0,9 e admitimos, ainda, independência entre os resultados de várias pessoas vacinadas.

Dessa forma, temos $X \sim B(10; 0,9)$, em que sucesso corresponde à imunização. A probabilidade, por exemplo, de 9 pessoas estarem imunizadas é:

$$P(X = 9) = p(9) = \binom{10}{9} (0,9)^9 (0,1)^1 = 0,387.$$

Modelo de Poisson

Uma v.a. X segue o modelo de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade for a seguinte:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Usamos a notação $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

Exemplo 2.14. Durante um experimento de laboratório, o número médio de partículas que passam por um contador em um milésimo de segundo é quatro e segue o modelo de Poisson. Seja X a v.a. que conta o número de partículas que entram no contador. A probabilidade de que seis partículas entrem neste contador em um dado milésimo de segundo é:

$$P(X = 6) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!} = 0,104.$$

Na próxima seção, o objeto de estudo são as distribuições de probabilidade contínuas.

Principais Modelos Contínuos

Nesta seção será apresentada a mais importante distribuição de probabilidade que descreve uma v.a. contínua: a distribuição normal. Esta distribuição é utilizada para modelar altura e peso das pessoas, medições científicas e índices pluviométricos, por exemplo. A distribuição exponencial também será abordada; a sua utilização para modelar o tempo de vida de equipamentos elétricos e a importante propriedade da “falta de memória” não serão deixadas de lado.

Modelo Uniforme Contínuo

Dizemos que a v.a. X segue o modelo *uniforme contínuo* no intervalo $[a, b]$, cuja notação é $X \sim U_c[a, b]$, se sua densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 2.15. A maioria das linguagens de computador contém uma função que pode ser usada para gerar números aleatórios. No Excel, a função *ALEATÓRIO* pode ser usada para gerar números aleatórios entre 0 e 1. Admitindo-se que X denota um número gerado por esta função, então $X \sim U_c[0, 1]$. A probabilidade, por exemplo, de se gerar um número aleatório entre 0,10 e 0,30 é:

$$P(0,10 \leq X \leq 0,30) = \int_{0,10}^{0,30} 1dx = 0,20.$$

Modelo Exponencial

A v.a. X segue o modelo *exponencial* de parâmetro $\lambda > 0$, se tiver densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A notação utilizada é: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. O parâmetro λ indica a taxa de ocorrência por unidade de medida.

Exemplo 2.16. *Um serviço de atendimento ao consumidor (SAC) recebe chamadas telefônicas num intervalo de tempo, em horas, que segue uma distribuição exponencial com $\lambda = 5$. Neste caso, o parâmetro λ pode ser interpretado como sendo uma taxa de 5 chamadas por hora. Definindo X como o número de chamadas recebidas, a probabilidade de um intervalo entre chegadas ter duração inferior a 30 minutos é dada por:*

$$P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} 5e^{-5x} dx = 0,918.$$

Esta distribuição também pode ser utilizada para modelar o tempo de vida útil de equipamentos eletrônicos. Vale ressaltar também, que a distribuição exponencial goza da propriedade da “falta de memória”, ou em linguagem matemática, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então $P(X \geq t + s | X \geq s) = P(X \geq t)$; $t, s > 0$.

Modelo Normal

Uma v.a. segue o modelo *normal* se sua densidade é a seguinte:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Usaremos a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Os parâmetros μ e σ são, respectivamente, a média e a variância da variável aleatória.

Exemplo 2.17. *Uma indústria fabrica lâmpadas que têm vida útil, antes de queimarem, normalmente distribuídas com média igual a 800 horas e desvio-padrão de 40 horas. Se X representa a vida útil de uma lâmpada, em horas, então a probabilidade de que essa lâmpada queime entre 778 e 834 horas é*

$$P(778 < X < 834) = P(-0,55 < Z < 0,85) = 0,511,$$

onde Z é a normal-padrão ($\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$).

Referências

- [1] ANDERSON D. R. et al., *Estatística aplicada à administração e economia*, 2^a ed., Cengage Learning, São Paulo, 2008.
- [2] MAGALHÃES, N. M., *Probabilidade e variáveis aleatórias*, 2^a ed., Edusp, São Paulo, 2006.
- [3] MEYER, P. L., *Probabilidade: aplicações à estatística*, 1^a ed., LTC, Rio de Janeiro, 1978.
- [4] WALPOLE, R. E. et al., *Probabilidade e estatística para engenharia e ciências*, 8^a ed., Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

MC14 - Teorema da Base de Hilbert e Ideais Simétricos

Eudes Antônio da Costa (UFT)

Resumo

Sabemos que sobre um corpo K , todo ideal do anel de polinômios em $K[x]$ é principal, ou seja, todo ideal de $K[x]$ é gerado por um único elemento. Um resultado mais geral é que todo ideal de $R_n = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é finitamente gerado, ou seja, R_n é Noetheriano, este fato é conhecido como **Teorema da Base de Hilbert, 1890**. Para essa demonstração utilizaremos o método dos conjuntos parcialmente bem-ordenados.

Exporemos também que todo ideal simétrico da subálgebra simétrica de R_n é também finitamente gerado.

Comentaremos ainda resultados recentes de $\text{Sym}(\mathbb{N})$ -invariância na álgebra polinomial sobre um corpo K em um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ enumerável de variáveis.

Introdução

Seja K um corpo, X um conjunto não vazio e seja $R = K[X]$ a álgebra polinomial sobre o corpo K no conjunto X de variáveis. Considere $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ finito. Então, pelo **teorema da base de Hilbert**, cada ideal I de $K[X]$ é finitamente gerado.

Sendo $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto infinito contável. Claramente, $R = K[X]$ contém ideais que não são finitamente gerados. Por exemplo, o ideal $I = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$ não é finitamente gerado em $R = K[X]$. No entanto, cada ideal $\text{Sym}(\mathbb{N})$ -invariante de $K[X]$, ou seja, um ideal invariante por permutações no conjunto X de variáveis é finitamente gerado (como ideal $\text{Sym}(\mathbb{N})$ -invariante). Por exemplo, $I = \langle x_1, x_2, \dots \rangle = \langle \tau(x_1) \mid \tau \in \text{Sym}(\mathbb{N}) \rangle$, isto é, I é gerado como um ideal $\text{Sym}(\mathbb{N})$ -invariante, por x_1 .

Teorema [Cohen, 1967 [2]; Aschenbrenner e Hillar, 2007 [1]] Seja K um corpo

e seja $R = K[x_i | i \in \mathbb{N}]$ a álgebra polinomial. Então cada ideal $I \subset R$ $Sym(\mathbb{N})$ -invariante é finitamente gerado como ideal $Sym(\mathbb{N})$ -invariante.

Este fato foi provado por Cohen [2] em 1967 e redescoberto independentemente por Aschenbrenner e Hillar [1] em 2007.

O trabalho de Cohen foi motivado pelo problema da base finita para as identidades de grupos e os resultados de Aschenbrenner e Hillar por aplicações em Química e em Estatística Algébrica.

Agora seja $X = \{x_{ij} | 1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de n famílias variáveis. O grupo $S_{\mathbb{N}} = Sym(\mathbb{N})$ (o grupo de todas as permutações em \mathbb{N}) age em R_n por $\tau(x_{ij}) = x_{i\tau(j)}$ para cada $\tau \in S_{\mathbb{N}}$, para cada $1 \leq i \leq n$ e para todos os $j \in \mathbb{N}$.

Um subconjunto V de R_n é chamado $Sym(\mathbb{N})$ -invariante, se $\tau(V) = V$, para todo $\tau \in S_{\mathbb{N}}$.

Teorema [Cohen, 1987 [3]; Hillar e Sullivant, 2009 [5]] Seja K um corpo e seja $R_n = K[x_{ij} | 1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{N}]$ a álgebra polinomial. Então cada ideal $I \subset R_n$ $Sym(\mathbb{N})$ -invariante é finitamente gerado como ideal $Sym(\mathbb{N})$ -invariante.

Abordaremos estes resultados utilizando o método do conjuntos parcialmente ordenados.

Referências

- [1] Aschenbrenner, M. and Hillar, C. *Finite generation of symmetric ideals*, Trans. Amer. Math. Soc., 359 (2007), 5171-5192.
- [2] Cohen, D. E. *On the laws of a metabelian variety*. J. Algebra 5(1967), 267-273.
- [3] Cohen, D. E. *Closure relations. Buchberger's algorithm, and polynomials in infinitely many variables*. Computation theory and logic, Lecture Notes in Comput. Sci., 270(1987), 78-87.
- [4] Draisma, J. *Finiteness for the k -factor model and Chirality Varieties*. Advances in Mathematics, 223(2010), 243-256.

- [5] Hillar, C.H. and Sullivant, S. *Finite Gröbner bases in infinite dimensional polynomial rings and applications*. 2009. Preprint available at <http://arxiv.org/abs/0908.1777>.
- [6] Krasilnikov, A. *Identities of Lie Algebras with nilpotent commutator ideal over a Field of finite characteristic*. *Mathematical Notes*, 51(1992), 47-52.

2.2 Sessões Técnicas

ST1 - Superfícies mínimas no espaço Euclidiano tri-dimensional

Thamara Policarpo Mendes & Rosângela Maria da Silva (UFG)

ST2 - Método do Gradiente Projetado para Funções Quase-Convexas e Pseudo-Convexas

Kelvin Couto (UFG)

ST3 - Bolhas de Sabão e o Teorema de Alexandrov

Diogo Gonçalves Dias (UFG)

ST4 - Estudo sobre Sistemas Lineares e Não-Lineares

Ricardo Antônio Ventura Júnior & Durval José Tonon (UFG)

ST6 - Uma Introdução aos Loops de Código

Rosemary Pires (UFF) & Alexandre Grichkov (USP)

ST1 - Superfícies mínimas no espaço Euclidiano tri-dimensional

Thamara Policarpo Mendes & Rosângela Maria da Silva (UFG)

Resumo

Neste trabalho será apresentado um estudo introdutório sobre superfícies e posteriormente será tratado o assunto sobre superfícies mínimas e regradas no espaço Euclidiano tri-dimensional e introduzidas algumas formas de representação que nos permite construir novos tipos de superfícies mínimas, a saber, as representações de Enneper-Weierstrass e de Monge.

Introdução

Em 1760 Lagrange introduziu a noção de superfícies mínimas quando propôs o problema de encontrar uma superfície de área mínima com fronteira dada por uma curva fechada sem auto-interseções. Lagrange não deu nenhum exemplo além do plano. O catenóide e o helicóide são exemplos de tais superfícies e foram introduzidos por Meusnier em 1776. Em 1835 Scherk encontrou novos exemplos.

Na primeira seção serão apresentadas algumas definições e alguns resultados sobre a teoria local e global das superfícies que nos permitirá definir uma superfície mínima.

Na segunda seção serão apresentados a definição, exemplos e alguns resultados relacionados a tais superfícies.

E finalmente, na terceira seção serão apresentadas as formas de representação de Enneper- Weierstrass.

Superfícies Regulares

Teoria Local de Superfícies

Nesta seção serão introduzidos alguns conceitos importantes para a compreensão de superfície em um espaço Euclidiano tri-dimensional.

Definição 2.18. *Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável α de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 . A variável $t \in I$ é dita **parâmetro da curva** e o subconjunto de \mathbb{R}^2 dos pontos $\alpha(t)$, $t \in I$ é chamado **traço da curva**.*

Definição 2.19. *Definimos localmente uma superfície parametrizada regular como sendo uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:*

a) X é diferenciável de classe C^∞ ;

b) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u, v são ditas **parâmetros** da superfície. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido como a imagem de X é denominado como **traço de X** .

Definição 2.20. *Se X é uma superfície parametrizada regular, diremos que um vetor w de \mathbb{R}^3 é **tangente** a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.*

Exemplo 2.21. *A aplicação*

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$$

onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e a e b são constantes não nulas é uma aplicação diferenciável e os vetores $X_u = \left(1, 0, \frac{2u}{a^2} \right)$ e $X_v = \left(0, 1, \frac{2v}{b^2} \right)$ são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 2.22. *Plano tangente a X em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.*

Observamos que neste caso que o plano tangente é definido em pontos do domínio e não no traço de X . Veremos mais adiante que isso se difere na teoria global.

Proposição 2.23. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$ no domínio de X . Então $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.*

derivando parcialmente em

Um vetor é dito *normal* à uma superfície X em um ponto, quando é ortogonal a $T_q X$, isto é, quando é ortogonal à todos os vetores tangentes a X .

Definição 2.24. *Dado um plano tangente à uma superfície podemos definir uma aplicação $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ denominada **aplicação normal de Gauss**, definida por:*

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v),$$

cuja imagem está contida na esfera unitária centrada na origem.

Definição 2.25. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $\forall q \in U$, a aplicação*

$$I_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$$

é denominada **primeira forma quadrática de X em q** .

Dada uma superfície X então um vetor $w \in T_q X$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$$

onde a, b são constantes reais. Logo, aplicando a primeira forma quadrática temos

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2abF(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0)$$

onde

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0).$$

Definição 2.26. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X .*

Aplicando a segunda forma quadrática em um vetor de $T_q X$ temos

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0)$$

onde

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle,$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle,$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle.$$

Podemos agora definir curvatura de uma superfície quando introduzidas a primeira e segunda forma.

a) Curvatura Normal. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não-nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

A curvatura normal em um ponto q aplicada no vetor w , é a curvatura de uma secção normal a superfície no ponto q na direção do vetor w .

b) Curvaturas Principais. É possível provar que a curvatura normal admite valores de máximo e mínimo. Sendo assim definimos as curvaturas principais de uma superfície X como tais valores.

c) Curvatura de Gauss. Definimos a curvatura de Gauss K em uma superfície X como o produto de k_1 por k_2 isto é $K = k_1 k_2$. Podemos verificar que a curvatura Gaussiana de uma superfície X satisfaz em termos da primeira e segunda forma quadrática a

seguinte equação

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

d) Curvatura Média. Definimos curvatura média H em uma superfície X como a média aritmética entre k_1 e k_2 , ou seja, $H = \frac{k_1+k_2}{2}$. Em termos da primeira e segunda forma temos

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2}.$$

Teoria Global de Superfícies

Temos agora tudo o que precisamos para definir e avaliar resultados sobre superfícies mínimas, mas antes é preciso resaltar algumas propriedades globais sobre superfícies regulares. Segue abaixo a definição global de superfície.

Definição 2.27. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que X satisfaça as condições (a) e (b) da Definição 2 e além disso, X é um homeomorfismo.*

Em contraste com a definição local de superfície, neste caso definimos superfície regular como sendo um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, e não uma aplicação. Sendo assim, o plano tangente $T_q X$ é definido no ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e não no parâmetro, não admitindo então auto-interseções. Por este motivo usamos o fato de X ser um homeomorfismo como na definição 8.

A aplicação normal de Gauss neste contexto global é um pouco diferente.

Definição 2.28. *Seja S uma superfície admitindo uma parametrização X definida em um domínio U , então definimos uma aplicação*

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q)$$

diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A primeira forma fundamental também é definida pela mesma equação usada na definição (6), mas neste caso devemos perceber que o ponto q é um ponto de \mathbb{R}^3 pertencente à superfície S .

Como a aplicação de Gauss é diferenciável, podemos pensar na sua diferencial dN_p . Podemos definir então também a 5curvatura de Gauss K e a curvatura média H da seguinte maneira:

Definição 2.29. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado **curvatura Gaussiana** K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado **curvatura média** de S em p .*

Superfícies Mínimas

Uma superfície parametrizada regular é dita *mínima* quando sua curvatura média é identicamente nula para todos os pontos do domínio. Diremos que uma superfície regular é mínima se cada uma de suas parametrizações é mínima.

Exemplo 2.30. *Um exemplo de superfície parametrizada regular mínima é o catenóide, o qual é obtido pela rotação da curva catenária. Sua parametrização pode ser dada por*

$$X(u, v) = \left(u, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \operatorname{sen} v \right).$$

Sua curvatura média é identicamente nula para todos os pontos do domínio e portanto é mínima.

Para compreendermos mais sobre superfícies mínimas torna-se necessário o estudo sobre variação. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Considerando um domínio $D \subset U$ e uma função $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ onde \bar{D} é a união de D com sua fronteira ∂D . Definimos

$$\varphi : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v)$$

onde $(u, v) \in \bar{D}, t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

A aplicação φ é chamada de *variação normal* de $X(\bar{D})$ determinada por h .

Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixado, temos uma superfície parametrizada. Obtemos então os coeficientes da primeira forma em função de t , e portanto, podemos determinar a área desta superfície em função de t e de sua curvatura média H da seguinte maneira

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}\sqrt{EG - F^2}} dudv.$$

Daí, obtemos

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Veremos agora um importante resultado sobre superfícies mínimas.

Proposição 2.31. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e seja $D \subset U$ um domínio limitado em U . Então X é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para qualquer D e toda variação normal de $X(\bar{D})$.*

As superfícies mínimas são geralmente associadas à películas de sabão. Quando se mergulha uma moldura de arame em uma solução de água com sabão ao retirarmos, com cuidado, podemos observar uma película, tal película tem como fronteira a moldura e a superfície formada é mínima.

Esta relação entre superfícies mínimas e películas de sabão levou Plateau a pesquisar a respeito do seguinte problema: *Para toda curva fechada $C \subset \mathbb{R}^3$ existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira.*

Exemplo 2.32. *A superfície cuja parametrização é dada por*

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

é chamada helicóide e é outro exemplo de superfície mínima.

Finalizando aqui um breve estudo sobre superfícies mínimas, vamos falar um pouco das fórmulas de representação de Enneper-Weierstrass que nos permite construir novos tipos de superfícies

Representações de Enneper-Weierstrass

Antes de apresentarmos a fórmula de representação para superfícies mínimas, devemos definir dois tipos especiais de função.

Definição 2.33. Dizemos que uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função **holomorfa** se é diferenciável, ou seja, se é uma função analítica.

Definição 2.34. Dizemos que uma função $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função **meromorfa** se satisfaz as seguintes condições:

a) g é holomorfa;

b) g está definida em um domínio do tipo Ω/U , onde U é uma parte fechada e discreta de Ω ;

c) tem um pólo em cada $Z_0 \in U$;

Teorema 2.35. Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ uma superfície parametrizada isotérmica mínima, definida num domínio aberto $U \subset \mathbb{C}$. Então existe uma função holomorfa f e uma função meromorfa g , tais que

$$x(u, v) = x_0 + \operatorname{Re} \int \frac{1}{2} f(1 - g^2) d\zeta$$

$$y(u, v) = y_0 + \operatorname{Re} \int \frac{i}{2} f(1 + g^2) d\zeta$$

$$z(u, v) = z_0 + \operatorname{Re} \int f g d\zeta$$

para todo $\zeta \in U$ e cada polo de g com multiplicidade m correspondente a um zero de f com multiplicidade $2m$. Reciprocamente, se f é uma função holomorfa e g uma função meromorfa, num aberto simplesmente conexo U , tais que, cada pólo de g com multiplicidade m é zero de f com multiplicidade $2m$, então $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada isotérmica mínima.

Este é o conhecido Teorema de Enneper-Weierstrass que nos permite construir novos exemplos de superfícies mínimas. se obtenha superfícies mínimas.

Conclusão

As superfícies mínimas são talvez as superfícies mais estudadas em geometria diferencial. A teoria desenvolveu-se em um ramo rico da geometria diferencial, no qual questões interessantes e não-triviais ainda estão sendo investigadas, e este tema possui aplicações em várias áreas do conhecimento que não são exclusivante matemáticas.

Referências

- [1] BOLDRINI, JOSÉ LUIZ; COSTA; SUELI I. RODRIGUES; FIGUEIREDO, VERA LÚCIA; WETZLER, HENRY G., Álgebra Linear, 3ª edição, 1986. pp. 97-198.
- [2] BOYCE, WILLIAM E.; DI PRIMA, RICHARD C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 5ª edição, 1994. pp. 1-160.

[3] DO CARMO, MANFREDO P. Introdução à Geometria Diferencial Global, Impa, 3^a edição, 2005.

[4] TENENBLAT, KETI. Introdução à Geometria Diferencial, 2^a edição, 2008. pp. 28-211.

ST2 - Método do Gradiente Projetado para Funções Quase-Convexas e Pseudo-Convexas*Kelvin Couto (UFG)*

Resumo

Discutiremos o método do gradiente projetado, para solução de problemas restritos a um conjunto viável não-vazio, fechado e convexo, com função objetivo continuamente diferenciável e convexa-generalizada: pseudo-convexa ou quase-convexa. Apresentaremos os resultados obtidos por Wang e Xiu no artigo: Convergence of the Gradient Projection Method for Generalized Convex Minimization, *Comput. Optim. Appl.*, 16 no. 2, 2000.

Introdução

O Problema a ser estudado será:

$$\min f(x), \quad x \in D, \quad (2.2.1)$$

o qual consiste em minimizar a função objetivo f sobre o conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, não-vazio, fechado e convexo. Trabalharemos com a função f continuamente diferenciável em D e assumiremos f convexa-generalizada, isto é, pseudo-convexa ou quase-convexa. Um método para procurar soluções do problema (2.2.1), é o método do gradiente projetado, que foi originalmente estabelecido por Goldstein [4] e por Levitin e Polyak [9]. Este método consiste em definir uma sequência de pontos $\{x^k\}$ como:

$$x^{k+1} = x_k(t_k) := P(x^k - t_k \nabla f(x^k)), \quad (2.2.2)$$

onde $P(\cdot)$ denota a projeção sobre D . Assim as iterações para o método do gradiente projetado são uma combinação natural do método do gradiente para problemas irrestritos, com

a projeção das iterações obtidas sobre o conjunto viável D . O tamanho do passo t_k será escolhido de tal forma que, para constantes reais $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_+$ tivermos:

$$f(x_k(t_k)) \leq f(x^k) + \mu_1 \langle \nabla f(x^k), x_k(t_k) - x^k \rangle, \quad (2.2.3)$$

e além disso,

$$t_k \geq \gamma_1 \quad \text{ou} \quad t_k \geq \gamma_2 \bar{t}_k, \quad (2.2.4)$$

onde \bar{t}_k satisfaz

$$f(x_k(\bar{t}_k)) > f(x^k) + \mu_2 \langle \nabla f(x^k), x_k(\bar{t}_k) - x^k \rangle. \quad (2.2.5)$$

Com alguns cálculos vemos que (2.2.3) garante um decréscimo real que a função f deve sofrer. Esse decréscimo será uma fração de $\langle \nabla f(x^k), x_k(t_k) - x^k \rangle$, e essa fração será determinada por $\mu_1 \in (0, 1)$. E a condição (2.2.4) garante que o comprimento do passo t_k não será tão pequeno. o algoritmo conceitual do gradiente projetado, descrito pelas condições (2.2.3) - (2.2.5), pode ser enunciado formalmente da seguinte forma.

ALGORITMO DO GRADIENTE PROJETADO

Tome as constantes reais positivas $\mu_1, \mu_2 \in (0, 1)$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_+$.

INICIALIZAÇÃO. Tome $x^0 \in D$. Faça $k = 0$.

CRITÉRIO DE PARADA. Se $x^{k+1} = x^k$, então pare. Caso contrário, execute o passo seguinte.

PASSO ITERATIVO. Tome $t_k \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

1. $f(x_k(t_k)) \leq f(x^k) + \mu_1 \langle \nabla f(x^k), x_k(t_k) - x^k \rangle$;
2. $t_k \geq \gamma_1$ ou $t_k \geq \gamma_2 \bar{t}_k$, tal que \bar{t}_k satisfaz

$$f(x_k(\bar{t}_k)) > f(x^k) + \mu_2 \langle \nabla f(x^k), x_k(\bar{t}_k) - x^k \rangle.$$

Defina

$$x^{k+1} := P(x^k - t_k \nabla f(x^k)),$$

Faça $k = k + 1$ e volte ao CRITÉRIO DE PARADA.

Observamos, que através de alguns cálculos, podemos concluir que $x^{k+1} = x^k$ se, e somente se, x^{k+1} é ponto estacionário. E assim nosso algoritmo deve para em um ponto estacionário. A seguir vejamos dois resultados importantes de convergência do nosso algoritmo, que podem ser encontrados no artigo [13] de Wang e Xiu ou na dissertação [3].

Teorema 2.36. *Suponha f pseudo-convexa em D , e seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo Algoritmo. Supondo que existe $\gamma_3 > 0$ de tal modo que:*

$$t_k \leq \gamma_3, \quad k = 0, 1, \dots$$

Então as seguintes afirmações são verdadeiras.

- (a) *O conjunto solução de (2.2.1) é diferente de vazio, se e somente se, a sequência $\{x^k\}$ admite pelo menos um ponto de acumulação. Neste caso, a sequência $\{x^k\}$ converge para solução de (2.2.1);*
- (b) $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \inf\{f(x) : x \in D\}$.

Teorema 2.37. *Seja f uma função quase-convexa em D , e seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada pelo Algoritmo. Supondo que existe $\gamma_3 > 0$ de tal modo que,*

$$t_k \leq \gamma_3, \quad k = 0, 1, \dots$$

Então os seguintes itens serão verdadeiros.

- (a) *Se existe um ponto de acumulação x^* na sequência $\{x^k\}$, então x^* é um ponto estacionário do problema (2.2.1), além disso $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$;*
- (b) *Caso contrário, o conjunto solução S^* de (2.2.1) é vazio,*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k\| = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) = \inf f.$$

Observemos que o Teorema 2.37 não conseguiu afirmações tão fortes quanto as afirmações do Teorema 2.36, mas por outro lado, os resultados serão aplicáveis a uma classe maior de funções, já que trata de funções quase-convexas.

Referências

- [1] Burachik, R., Graña Drummond, L.M., Iusem, A.N., and Svaiter, B.F., *Full convergence of the steepest descent method with inexact line searches*, Optimization, **32**, p. 137-146 (1995)
- [2] Calamai, P.H., Moré, J.J., *Projected Gradient Methods for Linearly Constrained Problems*, Math. Programming, **39**, p. 93-116 (1987).
- [3] Couto, R.C., *Método do Gradiente para Funções Convexas-Generalizadas*, dissertação Mestrado Universidade Federal de Goiás, p. 58-71 (2009).
- [4] Goldstein, A.A., *Convex programming in Hilbert space*. Bull. Amer. Math. Soc., **70**, p. 709–710 (1964).
- [5] Iusem, A.N., Svaiter, B.F. *A proximal regularization of the steepest descent method*, RAIRO Rech. Opér., **29**, no.2, p. 123-130 (1995).
- [6] Izmailov, A., Solodov, M., *Otimização-Volume 1-Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] Izmailov, A., Solodov, M., *Otimização-Volume 2-Métodos computacionais*, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [8] Kiwiel, K.C., Murty, K., *Convergence of the Steepest Descent Method for Minimizing Quasiconvex Functions*, J. Optim. Theory Appl., **89**, no. 1, p. 221-226 (1996).
- [9] Levitin, E.S., Polyak, B.T., *Constrained minimization problems*, USSR. Comput. Math. Math. Phys., **6**, p. 1-50 (1966).
- [10] Lima, E.L., *Curso de análise - Volume 1*. IMPA, 12ª edição, 2007.
- [11] Lima, E.L., *Curso de análise - Volume 2*. IMPA, 6ª edição, 2006.
- [12] Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming*, Classics In Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [13] Wang, C., Xiu, N., *Convergence of the Gradient Projection Method for Generalized*

Convex Minimization, Comput. Optim. Appl., **16** no. 2, p. 111-120 (2000).

ST3 - Bolhas de Sabão e o Teorema de Alexandrov

Diogo Gonçalves Dias (UFG)

Resumo

Sabe-se que superfícies em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante respondem como modelos para numerosos fenômenos físicos. Isso deve-se ao fato que uma superfície CMC minimiza localmente a área sem alterar o volume que encerra a superfície. Um modelo bastante conhecido são as bolhas de sabão. O modelo teórico que descreve a geometria de uma bolha de sabão S , em equilíbrio mecânico, vem determinado pela equação de Laplace-Young

$$P_i(p) - P_e(p) = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (p)$$

para cada $p \in S$, onde P_i e P_e são as pressões exercidas pelo ar no interior e no exterior da bolha S , respectivamente, γ é o coeficiente de tensão superficial do líquido e R_1 e R_2 são os raios de curvaturas principais da superfície S . Por outro lado, como a curvatura média de uma superfície é dada por $H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ concluímos que

$$P_i(p) - P_e(p) = 2\gamma H(p).$$

Se supormos que as pressões exercidas pelo ar no interior e no exterior de S são constantes concluiremos que

Teorema 2.38. *Uma bolha de sabão tem sempre a forma de uma superfície com curvatura média constante.*

Intuitivamente, as únicas bolhas de sabão sem auto-interseção que podem ser formadas são esferas. Tal fato está de acordo com o Teorema 2.124, já que uma esfera é uma superfície CMC. A pergunta natural é:

Esferas são as únicas formas para uma bolha de sabão sem auto-interseção?

A resposta é sim! O teorema seguinte, devido ao matemático russo Alexandrov, nos garante isso.

Teorema 2.39. [Alexandrov,1956] *Se S é uma superfície compacta, conexa, sem auto-interseções e com curvatura média constante, então S é uma esfera.*

A proposta deste trabalho é apresentar uma elegante demonstração do teorema acima. A demonstração original utiliza o conhecido Método de Reflexão de Alexandrov [1]. Este método consiste em encontrar um plano de simetria da superfície para qualquer direção do \mathbb{R}^3 e para isso utiliza o Princípio do Máximo para superfícies com curvatura média constante. A demonstração que faremos é devida a Reilly [5] e não faz uso do Princípio do Máximo.

Alguns Resultados Preliminares

Iniciaremos com um resultado que relaciona o Laplaciano de uma função C^2 com a curvatura de uma curva contida em seu domínio.

Teorema 2.40. *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^2 onde U é um subconjunto aberto. Suponha que $\Gamma \subset U$ seja uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s e denote por $f = F|_{\Gamma}$ a restrição de F a Γ . Se n é um campo normal unitário a Γ e k representa a curvatura de Γ , correspondente a n , então*

$$\Delta F(p) = \frac{d^2 f}{ds^2}(p) - k(p) \frac{\partial F}{\partial n}(p) + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}(p) \quad (2.2.6)$$

para todo $p \in \Gamma$.

Demonstração. Dado $p \in \Gamma$, tomemos um sistema de coordenadas cartesianas x, y em \mathbb{R}^2 tal que $p = (0, 0)$ e $n(p) = (0, 1)$. Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ uma parametrização local de Γ pelo comprimento de arco s , tal que $\alpha(0) = (0, 0) = p$ e $\alpha'(0) = (\frac{dx}{ds}(0), \frac{dy}{ds}(0)) = (1, 0)$. Dessa forma, $f(s) = F(x(s), y(s))$, de onde segue que

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = F_{xx} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2F_{xy} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + F_{yy} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + F_x \frac{d^2 x}{ds^2} + F_y \frac{d^2 y}{ds^2}. \quad (2.2.7)$$

Logo

$$\left. \frac{d^2 f}{ds^2} \right|_{s=0} = F_{xx}(p) + k(p)F_y(p) \quad (2.2.8)$$

pois $\alpha''(0) = k(p)n(p)$, e com isso $\frac{d^2 y}{ds^2}(0) = k(p)$ e $\frac{d^2 x}{ds^2}(0) = 0$.

Por outro lado

$$\frac{\partial F}{\partial n}(p) = F_y(p) \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}(p) = F_{yy}(p). \quad (2.2.10)$$

Utilizando estas duas igualdades juntamente com 2.2.8 teremos

$$\begin{aligned} \Delta F(p) &= F_{xx}(p) + F_{yy}(p) \\ &= \left. \frac{d^2 f}{ds^2} \right|_{s=0} - k(p)F_y(p) + F_{yy}(p) \\ &= \left. \frac{d^2 f}{ds^2} \right|_{s=0} - k(p) \frac{\partial F}{\partial n}(p) + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}(p). \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

□

Nosso próximo passo é estender o teorema 2.40 para aplicações no \mathbb{R}^3 . Para isso, precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 2.41. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada pelo campo normal unitário $N : S \rightarrow S^2$ e $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Suponha ainda que Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$ sejam duas seções normais ortogonais de S em $p \in S$. Se considerarmos as restrições $g_0 = g|_{\Gamma_0}$ e $g_{\pi/2} = g|_{\Gamma_{\pi/2}}$, então*

$$\Delta_S g(p) = \ddot{g}_0(p) + \ddot{g}_{\pi/2}(p) \quad (2.2.12)$$

onde \ddot{g}_0 e $\ddot{g}_{\pi/2}$ representam a segunda derivada de g_0 e $g_{\pi/2}$ em relação ao comprimento de arco de Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$, respectivamente.

Demonstração. Seja x, y, z coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 tais que $p = (0, 0, 0)$, $N(p) = (0, 0, 1)$ e as seções normais Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$ são obtidas pelas intersecções dos planos xz e yz com S , respectivamente. Observe que dessa maneira $T_p S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ é o plano xy . Podemos descrever S , em uma vizinhança de p , como gráfico de uma função

diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto U contendo $(0, 0)$. Assim, a aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U$$

é uma parametrização local de S em torno de p .

Note que $E = 1 + f_x^2$, $F = f_x f_y$ e $G = 1 + f_y^2$ na parametrização φ . Como $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, segue que $E(0, 0) = G(0, 0) = 1$ e $F(0, 0) = 0$. A expressão do laplaciano em coordenadas locais nos garante que

$$\Delta_S g(p) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\left(\frac{g_x G - g_y F}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_x + \left(\frac{g_y E - g_x F}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_y \right) \right\} (0, 0).$$

Após calcular as derivadas envolvidas na expressão acima obtemos

$$\Delta_S g(p) = g_{xx}(0, 0) + g_{yy}(0, 0) \quad (2.2.13)$$

onde $g_{xx} = \frac{\partial^2(g \circ \varphi)}{\partial x^2}$ e $g_{yy} = \frac{\partial^2(g \circ \varphi)}{\partial y^2}$.

Seja $\alpha(s) = \varphi(x(s), 0)$ uma parametrização de Γ_0 pelo comprimento de arco s tal que $\alpha(0) = p$, ou seja, $x(0) = 0$. Segue que $g_0(s) = (g \circ \alpha)(s) = g(x(s), 0)$ e, conseqüentemente,

$$\ddot{g}_0(s) = g_{xx}(x(s), 0)x'(s)^2 + g_x(x(s), 0)x''(s). \quad (2.2.14)$$

Como $|\alpha'| = 1$ temos que

$$x'^2 (1 + f_x^2) = 1$$

e com isso

$$2x'x'' (1 + f_x^2) + 2x'^3 f_x f_{xx} = 0.$$

Calculando estas duas últimas expressões em $s = 0$ e voltando em 2.2.14 teremos

$$\ddot{g}_0(0) = g_{xx}(0, 0).$$

De maneira análoga obtém-se

$$\ddot{g}_{\pi/2}(0) = g_{yy}(0, 0).$$

Voltando em 2.2.13 concluímos que $\Delta_S g(p) = \ddot{g}_0(p) + \ddot{g}_{\pi/2}(p)$. □

Uma consequência imediata desta proposição é a seguinte.

Corolário 2.42. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada e $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se g é constante então $\Delta_S g = 0$.*

Chegamos enfim a generalização do teorema 2.40 em \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.43. *Seja $G : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 onde W é um subconjunto aberto. Suponha que $S \subset W$ seja uma superfície regular orientada pelo campo normal unitário $N : S \rightarrow S^2$, e denote por $g = G|_S$ a restrição de G a S . Se H é a curvatura média de S , correspondente a N , então*

$$\Delta G(p) = \Delta_S g(p) - 2H(p) \frac{\partial G}{\partial N}(p) + \frac{\partial^2 G}{\partial N^2}(p) \quad (2.2.15)$$

para todo $p \in S$.

Demonstração. Dado $p \in S$, tomemos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em \mathbb{R}^3 tal que $p = (0, 0, 0)$ e $N(p) = (0, 0, 1)$. Observe que dessa forma

$$\frac{\partial G}{\partial N}(p) = G_z(p) \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial N^2}(p) = G_{zz}(p). \quad (2.2.17)$$

Sejam Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$ as seções normais passando por p na direção de $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, respectivamente. Além disso, denote por $g_0 = g|_{\Gamma_0}$ e $g_{\pi/2} = g|_{\Gamma_{\pi/2}}$ as restrições de g a Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$. Pela expressão obtida em 2.2.8 temos

$$G_{xx}(p) = \ddot{g}_0(p) - k(0, p) \frac{\partial G}{\partial N}(p) \quad (2.2.18)$$

$$G_{yy}(p) = \ddot{g}_{\pi/2}(p) - k(\pi/2, p) \frac{\partial G}{\partial N}(p) \quad (2.2.19)$$

onde $k(0, p)$ e $k(\pi/2, p)$ representam as curvaturas das seções normais Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$ no ponto p , respectivamente.

Somando 2.2.17, 2.2.18 e 2.2.19 e utilizando a Proposição 2.41 obtemos

$$\begin{aligned} \Delta G(p) &= G_{xx}(p) + G_{yy}(p) + G_{zz}(p) \\ &= \ddot{g}_0(p) + \ddot{g}_{\pi/2}(p) - \frac{\partial G}{\partial N}(p)[k(0, p) + k(\pi/2, p)] + \frac{\partial^2 G}{\partial N^2}(p). \end{aligned}$$

Desde que $k(0, p) + k(\pi/2, p) = 2H(p)$, pois Γ_0 e $\Gamma_{\pi/2}$ são ortogonais, concluímos que

$$\Delta G(p) = \Delta_S g(p) - 2H(p) \frac{\partial G}{\partial N}(p) + \frac{\partial^2 G}{\partial N^2}(p).$$

□

A seguir definiremos o conceito de função suporte de uma superfície. Esta definição será útil nas próximas Proposições.

Definição 2.44. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada pelo campo normal unitário $N : S \rightarrow S^2$. A função suporte de S é a função*

$$\begin{aligned} \zeta : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \zeta(p) = \langle p, N(p) \rangle \end{aligned}$$

onde \langle, \rangle representa o produto interno canônico do \mathbb{R}^3 .

Proposição 2.45. *Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto conexo tal que \bar{D} é compacto. Suponha que o bordo de \bar{D} seja uma superfície regular S orientada por um campo normal unitário N que aponta para o exterior de \bar{D} . Se $\zeta : S \rightarrow \mathbb{R}$ é a função suporte de S , então*

$$\int_S \zeta \, dA = 3V$$

onde V representa o volume de \bar{D} e dA é o elemento de área de S .

Demonstração. Sejam x, y, z coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 . Defina $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \quad (x, y, z) \in \bar{D}.$$

O laplaciano de F , na métrica canônica do \mathbb{R}^3 , é dado por $\Delta F = 3$ para todo $(x, y, z) \in \bar{D}$.

Com isso, o Teorema da Divergência em \mathbb{R}^3 nos garante que

$$3V = \int_D \Delta F \, dV = \int_S \langle \text{grad} F, N \rangle \, dA = \int_S \zeta \, dA \quad (2.2.20)$$

onde dV representa o elemento de volume de D .

□

Ainda sobre a função suporte de uma superfície, demonstraremos na Proposição seguinte a expressão conhecida como Fórmula de Minkowski.

Proposição 2.46. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientada por um campo normal unitário $N : S \rightarrow S^2$. Se $\zeta : S \rightarrow \mathbb{R}$ é a função suporte de S e H representa a curvatura média de S então*

$$\int_S (H\zeta + 1) dA = 0$$

Demonstração. Defina $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Dessa forma, $\Delta G(p) = 3$ para todo $p \in S$. Além disso, escrevendo $N = (N_1, N_2, N_3)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial N}(p) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial G}{\partial x_j}(p) N_j(p) \\ &= \zeta(p). \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

para todo $p \in S$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial N^2}(p) &= \sum_{i,j=1}^3 N_i N_j \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^3 N_j^2 \\ &= |N|^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

para todo $p \in S$. Segue do Teorema 2.43 que

$$\Delta_S g - 2H\zeta + 1 = 3 \tag{2.2.23}$$

onde $g = G|_S$. Consequentemente,

$$H\zeta + 1 = \frac{1}{2} \Delta_S g. \tag{2.2.24}$$

Pelo Teorema da Divergência em superfícies concluímos que $\int_S (H\zeta + 1) dA = 0$. \square

A seguinte Proposição é uma versão da desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^{n^2} conhecida como Desigualdade de Newton.

Proposição 2.47. *Seja $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz $n \times n$ com entradas reais. Se $|A|$ representa a norma de A e $\text{tra}(A)$ denota o traço de A então*

$$a) |A|^2 \geq \frac{1}{n} \text{tra}(A)^2;$$

$$b) |A|^2 = \frac{1}{n} \text{tra}(A)^2 \text{ se, e somente se, } a_{ij} = c\delta_{ij} \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Demonstração. Seja $I = (\delta_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ a matriz identidade. A desigualdade de Cauchy-Schwarz nos garante que

$$\begin{aligned} |\text{tra}(A)| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{jj} \right| = | \langle A, I \rangle | \\ &\leq |A| |I| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \\ &= |A| n^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade acima teremos $|A|^2 \geq \frac{1}{n} \text{tra}(A)^2$.

A parte (2) da Proposição segue diretamente do fato que $| \langle A, I \rangle | = |A| |I|$ se, e somente se, A e I são vetores paralelos em \mathbb{R}^{n^2} . \square

Enunciaremos agora uma proposição que garante a existência de uma solução para um determinado problema de valor de fronteira. Sua demonstração segue dos resultados das Seções 6.3 e 6.4 de [2].

Proposição 2.48. *Seja \bar{D} um domínio compacto em \mathbb{R}^3 cujo bordo é uma superfície regular S . Nessas condições existe uma função $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que é de classe C^3 sobre \bar{D} e de classe C^∞ sobre D que é solução do seguinte problema de valor de fronteira:*

$$\begin{cases} \Delta F = 1 \text{ em } \bar{D}; \\ F|_S = 0. \end{cases}$$

A demonstração do Teorema de Alexandrov

A compacidade e a conexidade de S nos garantem que S é orientável e que existem exatamente duas orientações distintas para S . Considere x_1, x_2, x_3 coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 . Seja \bar{D} o domínio compacto do \mathbb{R}^3 cujo bordo é S e $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função descrita na Proposição 2.48. Assim, $\Delta F = 1$ em \bar{D} e $F|_S = 0$. Além disso, temos pela proposição 2.42 que $\Delta F|_S = 0$ e pelo Teorema 2.43 segue que

$$-2H(p)\frac{\partial F}{\partial N}(p) + \frac{\partial^2 F}{\partial N^2}(p) = 1 \quad (2.2.25)$$

para todo $p \in S$, onde N representa o campo normal unitário a S que aponta para o exterior de \bar{D} . Agora, multiplicando ambos os lados de 2.2.25 por $\frac{\partial F}{\partial N}(p)$ e em seguida integrando em relação a S obtemos,

$$\int_S \frac{\partial F}{\partial N} dA = \int_S -2H\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 dA + \int_S \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \frac{\partial F}{\partial N} dA. \quad (2.2.26)$$

O que faremos é analisar os dois lados da igualdade 2.2.26. A Proposição 2.46 nos diz que

$$\int_S (H\zeta + 1) dA = 0 \quad (2.2.27)$$

onde H é a curvatura média de S e ζ é a função suporte de S . Como H é constante, temos que

$$H \int_S \zeta dA = -A \quad (2.2.28)$$

onde A representa a área de S . Finalmente, pelo Corolário 2.45, segue que

$$H = -\frac{A}{3V} \quad (2.2.29)$$

onde V denota o volume de \bar{D} . Além disso, a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais e o Teorema da Divergência nos garante que

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 dA &\geq \frac{(\int_S 1 \frac{\partial F}{\partial N} dA)^2}{\int_S 1^2 dA} \\ &= \frac{(\int_{\bar{D}} \Delta F dV)^2}{A} \\ &= \frac{V^2}{A}. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_S -2H\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 dA &\geq \frac{2A}{3V} \frac{V^2}{A} \\ &= \frac{2}{3}V. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Do fato de $F|_S = 0$, temos que $\text{grad}F$ é ortogonal a S , e com isso $\text{grad}F$ é paralelo ao campo normal $N = (N_1, N_2, N_3)$ em cada ponto de S . Dessa forma podemos escrever $\text{grad}F = \langle \text{grad}F, N \rangle N$, de onde temos que

$$F_j = \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial N} N_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2.32)$$

Além disso

$$\frac{\partial^2 F}{\partial N^2} = \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} N_i N_j \quad (2.2.33)$$

onde $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, e então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \frac{\partial F}{\partial N} &= \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} N_i N_j \frac{\partial F}{\partial N} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 F_{ij} N_i F_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} F_j^2 \right) N_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} |\text{grad}F|^2 \right) N_i \\ &= \langle \text{grad} \left(\frac{1}{2} |\text{grad}F|^2 \right), N \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{2} |\text{grad}F|^2 \right). \end{aligned}$$

Agora, aplicando o Teorema da Divergência nesta última igualdade obtemos

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \frac{\partial F}{\partial N} dA &= \int_S \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{2} |\text{grad}F|^2 \right) dA \\ &= \int_{\bar{D}} \Delta \left(\frac{1}{2} |\text{grad}F|^2 \right) dV. \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

Mas observe que,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{1}{2}|\text{grad}F|^2\right) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 F_j^2\right) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 2F_j F_{ji}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2 + F_j F_{jii} = \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2 + \sum_{i,j=1}^3 F_j F_{ijj} \\
&= \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2 + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 F_j F_{ijj} = \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2 + \sum_{j=1}^3 F_j (\Delta F)_j \\
&= \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2. \tag{2.2.35}
\end{aligned}$$

A desigualdade de Newton nos garante que,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{1}{2}|\text{grad}F|^2\right) &= \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2 \\
&\geq \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^3 F_{jj}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3}. \tag{2.2.36}
\end{aligned}$$

Voltando em 2.2.34 teremos

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \frac{\partial F}{\partial N} dA &= \int_{\bar{D}} \Delta\left(\frac{1}{2}|\text{grad}F|^2\right) dV \\
&\geq \int_{\bar{D}} \frac{1}{3} dV \\
&= \frac{1}{3} V. \tag{2.2.37}
\end{aligned}$$

Somando 2.2.31 e 2.2.37 concluímos que

$$\int_S -2H \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 dA + \int_S \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \frac{\partial F}{\partial N} dA \geq \frac{2V}{3} + \frac{V}{3} = V. \tag{2.2.38}$$

Para analisar o lado esquerdo da igualdade 2.2.26 note que o Teorema da Divergência nos diz que,

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{\partial F}{\partial N} dA &= \int_{\bar{D}} \Delta F dV \\
&= \int_{\bar{D}} 1 dV \\
&= V \tag{2.2.39}
\end{aligned}$$

o que faz com que ocorra a igualdade em 2.2.38. Com isso, de 2.2.31 e 2.2.37, segue que

$$\int_S -2H\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 dA = \frac{2}{3}V \text{ e} \quad (2.2.40)$$

$$\int_S \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \frac{\partial F}{\partial N} dA = \frac{1}{3}V. \quad (2.2.41)$$

Observe que combinando 2.2.34, 2.2.36 e 2.2.41 temos que

$$\Delta\left(\frac{1}{2}|gradF|^2\right) = \sum_{i,j=1}^3 F_{ji}^2 = \frac{1}{3}. \quad (2.2.42)$$

Segue da Proposição 2.47 que a igualdade acima ocorre se, e somente se, $F_{ij} = c\delta_{ij}$, onde c é constante. Dessa forma, $c = F_{jj}$ para todo $j = 1, 2, 3$ de onde temos que $1 = \Delta F = \sum_{j=1}^3 F_{jj} = 3c$, e com isso $c = \frac{1}{3}$. Temos portanto o seguinte sistema de equações diferenciais parciais sobre \bar{D} :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{3}\delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3. \quad (2.2.43)$$

Integrando o sistema obtemos

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \bar{D}$$

onde a_1, a_2, a_3 e b são constantes de integração.

Como $F|_S = 0$ concluímos que S está contida em uma esfera de equação

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{a_1\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{a_2\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{6}} + \frac{a_3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - b$$

para constantes a_1, a_2, a_3 e b apropriadas. Da hipótese de S ser compacta (com bordo vazio) concluímos que S é uma esfera.

Referências

- [1] A. D. ALEXANDROV, Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large I, Vestnik Leningrad, Univ. Math. 11, 5–17 (1956);

- [2] D. GILBARG, AND N. S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin (2001);
- [3] J. OPREA, Differential Geometry and its Applications, Prentice-Hall, New Jersey (1997);
- [4] K. KENMOTSU, Surfaces with Constant Mean Curvature, American Mathematical Society, Providence (2003);
- [5] R. C. REILLY, Mean Curvature, the Laplacian, and Soap Bubbles, The American Mathematical Monthly, Vol. 89, 3, 180–188 + 197–198 (1982);
- [6] S. LANG, Introduction to Differentiable Manifolds, Springer-Verlag, New York (2002);

ST4 - Estudo sobre Sistemas Lineares e Não-Lineares

Ricardo Antônio Ventura Júnior & Durval José Tonon (UFG)

Resumo

Para um entendimento de vários fenômenos da natureza uma estratégia é se fazer uma modelagem matemática de tais eventos. Geralmente os fenômenos observados costumam ter uma dinâmica e é exatamente disso que a área de Sistemas Dinâmicos se ocupa: estudar a dinâmica de um sistema obtido de tais modelagens (podendo ser caótica ou não).

Nessa palestra mostraremos como é a dinâmica de sistemas lineares bidimensionais utilizando a representação geométrica dos sistemas baseados em seus respectivos retratos de fase. Enunciaremos também o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Sistemas Não Lineares. Este teorema nos diz que se estivermos lidando com um Problema de Valor Inicial e a função em questão for de classe C^1 num aberto e a condição inicial estiver contida nesse aberto, então a solução do referido sistema existirá e será única.

Dizemos que um sistema de equações diferenciais ordinárias é hiperbólico se a parte real de todos os autovalores do sistema linearizado é diferente de zero. Considerando o universo de tais sistemas, enunciaremos o Teorema de Grobman-Hartman o qual é um importante teorema do estudo local de Sistemas Dinâmicos Hiperbólicos. Este Teorema afirma que o comportamento local de um sistema não-linear em uma vizinhança de uma singularidade hiperbólica é equivalente, topologicamente falando, ao comportamento do sistema linearizado nesta vizinhança.

Por fim, com intuito de ilustrarmos a importância e grande aplicabilidade de tais teoremas, daremos alguns exemplos onde estes podem ser aplicados e trataremos também alguns casos onde os objetos estudados não satisfazem as hipóteses desses teoremas, obtendo assim soluções múltiplas e a necessidade do estudo de outras ferramentas para determinar a dinâmica.

Sistemas Lineares

Considere o seguinte Sistema Linear descrito pela Equação Diferencial abaixo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (2.2.44)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ e $A \in M_n(2 \times 2)$.

Para estudarmos a dinâmica do sistema acima, é importante que possamos resolvê-lo e encontrar expressões explícitas para cada uma das coordenadas envolvidas, então buscamos uma forma de desacoplarmos cada uma das coordenadas, i.e., escrever as derivadas temporais de cada uma das coordenadas de $\mathbf{x}(t)$ de forma a ser proporcional à própria coordenada, e.g, $\dot{x}_1(t) = \lambda x_1(t)$.

Para desacoplarmos o sistema (2.2.44), utilizamos as técnicas de diagonalização da matriz A e assim podemos expressar o Retrato de Fase do sistema. Começaremos por analisar o Sistema Linear abaixo que é exatamente o sistema (2.2.44) diagonalizado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = B\mathbf{x}(t) \quad (2.2.45)$$

onde B pode assumir as seguintes formas:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Então temos os seguintes casos:

1. $B = B_1$, a matriz possui auto-valores distintos entre si;

A solução do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = B_1\mathbf{x}(t)$ é apresentada abaixo

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} x_1(t_0) \\ e^{\mu t} x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

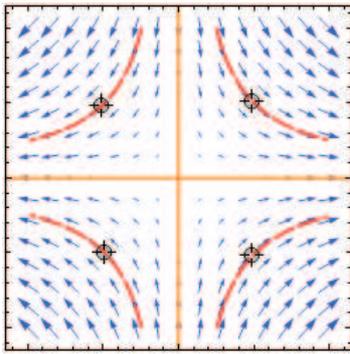


Figura 2.2.1: $\lambda < 0 < \mu$ -
Sela

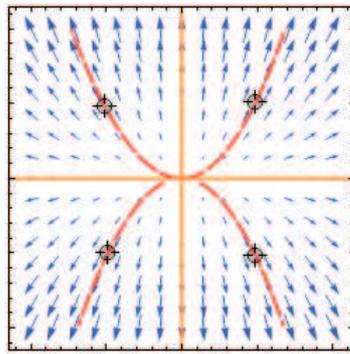


Figura 2.2.2: $\lambda, \mu > 0$ -
Fonte

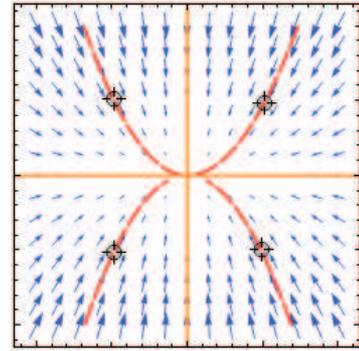


Figura 2.2.3: $\lambda, \mu < 0$ -
Poço

É importante mencionar a questão da estabilidade dos sistemas. Grosso modo, dizemos que um sistema linear é instável se $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$ e que um sistema linear é estável se $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = 0$. Note que a estabilidade dos sistemas lineares acima depende apenas do sinal dos auto-valores associados à matriz (B). No caso em que ambos são positivos temos o caso de Fonte que é um sistema instável. No caso em que ambos são negativos nota-se claramente que o sistema tende a ir para a origem.

2. $B = B_2$, a matriz possui auto-valores com multiplicidade 1;

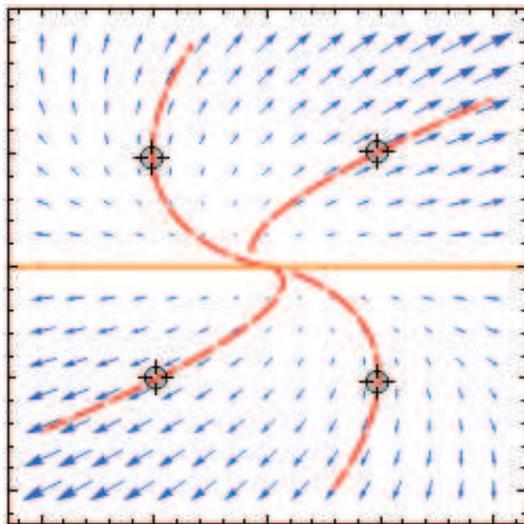


Figura 2.2.4: $\lambda > 0$ - Nó Instável

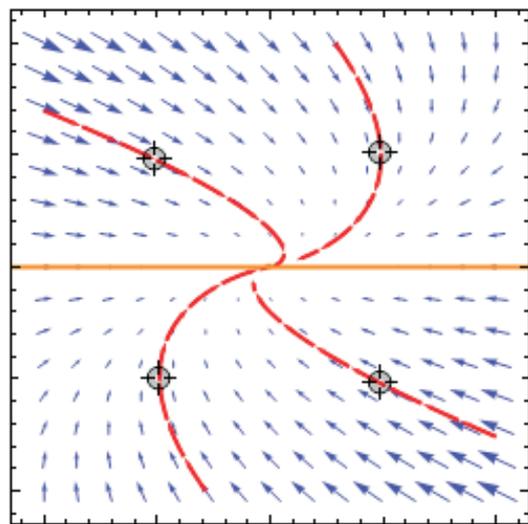


Figura 2.2.5: $\lambda < 0$ - Nó Estável

Temos a seguinte solução para esse caso

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}x_1(t_0) + x_2(t_0)te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t}x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

Note que nesse caso, temos apenas um auto-valor, cuja multiplicidade é 1, logo toda a estabilidade do sistema vai depender apenas do sinal de λ . Quando o sinal de λ for negativo teremos um Nó Estável e o sistema tende a ir para a origem com o passar do tempo. Quando o sinal de λ for positivo teremos um Nó Instável e o sistema irá divergir, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = \infty$.

3. $B = B_3$, a matriz possui auto-valores complexos.

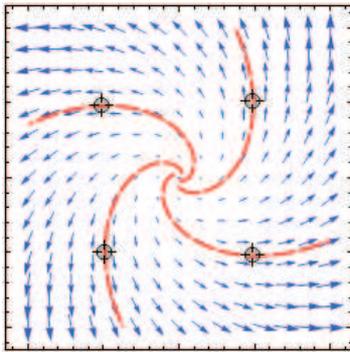


Figura 2.2.6: $a > 0, b > 0$ -
Foco Instável

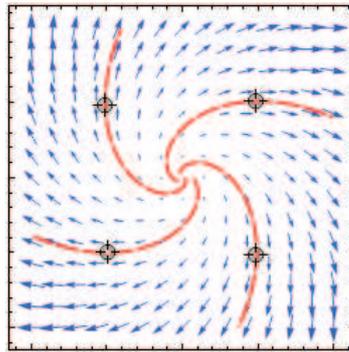


Figura 2.2.7: $a > 0, b < 0$ -
Foco Instável

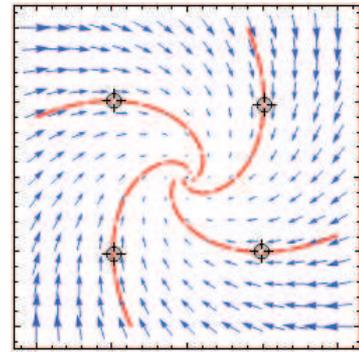


Figura 2.2.8: $a < 0, b > 0$ -
Foco Estável

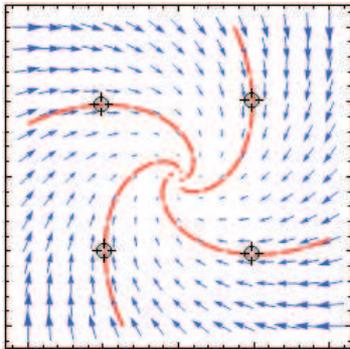


Figura 2.2.9: $a < 0, b < 0$ -
Foco Estável

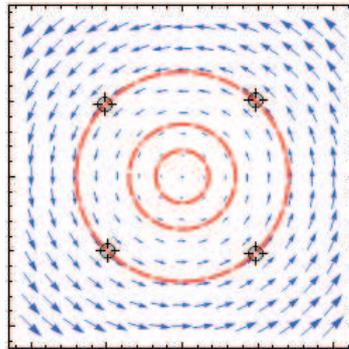


Figura 2.2.10: $a = 0, b > 0$ -
- Órbita Periódica

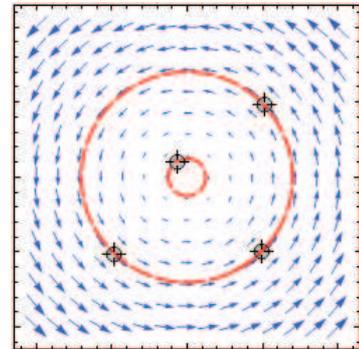


Figura 2.2.11: $a = 0, b < 0$ -
- Órbita Periódica

O sistema acima tem a seguinte solução

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}$$

Nesse caso em especial, teremos vários possíveis retratos de fase pois os parâmetros (que no nosso caso são os auto-valores) podem assumir sinais diferentes. Note que a solução do sistema é uma exponencial (em função de a) e um outro termo que é simplesmente a matriz de rotação em torno dos eixos. Mais uma vez, a estabilidade do sistema irá depender dos auto-valores associados. O interessante é que nesse caso,

a estabilidade dependerá apenas dos possíveis valores que a parte real (a) dos autovalores poderá assumir. Caso $a > 0$ teremos focos instáveis e o valor de b servirá apenas para a orientação positiva (sentido anti-horário) ou negativa (sentido horário) do sistema. No caso em que $a \leq 0$ teremos Focos estáveis ($a < 0$) ou órbitas Periódicas ($a = 0$).

Teorema da Existência e Unicidade

Nesse tópico estaremos estudando as condições necessárias para que um Sistema de Equações Diferenciais de Primeira Ordem admita uma solução e que essa solução seja única. Enunciarei o Teorema que nos dá essas condições e exporei alguns exemplos.

Teorema (Teorema Fundamental da Existência e Unicidade).

Seja E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo \mathbf{x}_0 e assumamos que $\mathbf{f} \in C^1(E)$. Então existe um $a > 0$ tal que o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

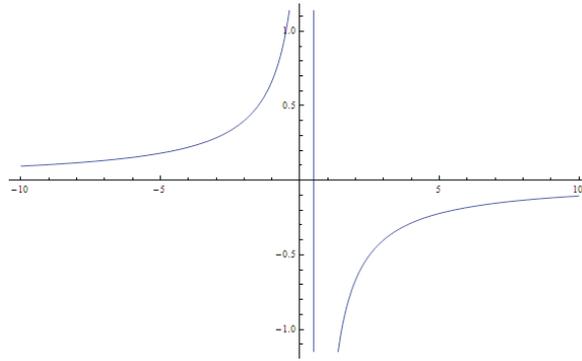
possui uma única solução $\mathbf{x}(t)$ no intervalo $[-a, a]$.

Exemplo 1. Considere o seguinte P.V.I (Problema de Valor Inicial)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Utilizando o método de separação de variáveis, chegamos à seguinte solução

$$x(t) = \frac{2}{1 - 2t}, \quad t < 1/2$$

Figura 2.2.12: $x(t) = \frac{2}{1-2t}$

Mostraremos agora um caso em que a solução existe porém não é única, a multiplicidade de solução no caso em questão está intimamente ligada com o fato da função não ser de classe C^1 no intervalo considerado.

Exemplo 2. Considere o seguinte P.V.I (Problema de Valor Inicial)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^{1/3}(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Utilizando novamente o método de separação de variáveis, chegamos à duas soluções para o mesmo P.V.I

$$x(t) = \pm \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}, t \in \mathbb{R}_+$$

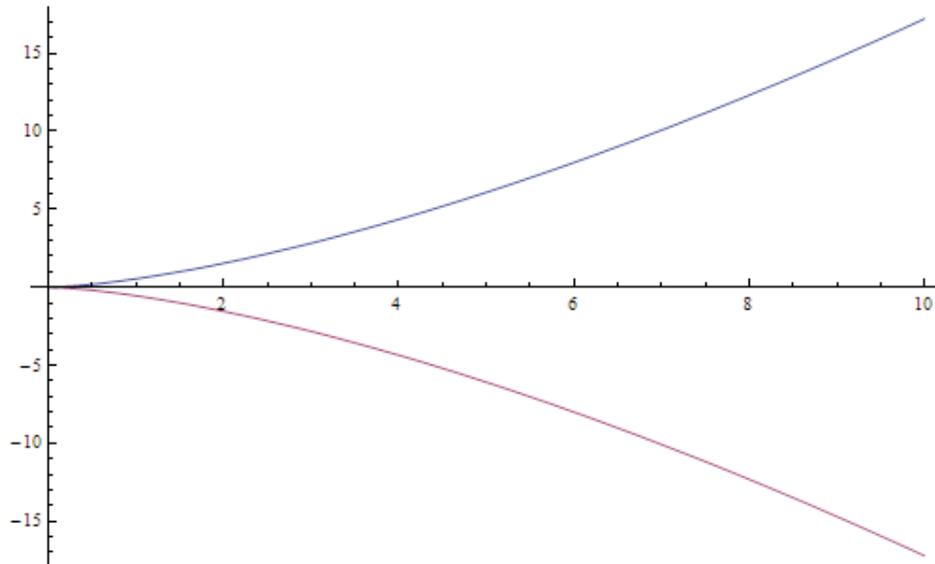


Figura 2.2.13: $x(t) = \pm(\frac{2t}{3})^{3/2}$

Teorema (Teorema de Grobman-Hartman).

Seja E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem, seja $\mathbf{f} \in C^1(E)$, e seja ϕ_t o fluxo do sistema não-linear

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (2.2.46)$$

Suponha que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e que a matriz $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ não possui autovalores com partes reais iguais a zero. Então existe um homeomorfismo H de um subconjunto aberto U contendo a origem em um subconjunto aberto V contendo a origem tal que para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, então existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo zero tal que para todo $\mathbf{x}_0 \in U$ e para $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At} H(\mathbf{x}_0); \quad (2.2.47)$$

i.e., H mapeia a trajetória de (2.2.46) em uma vizinhança da origem em trajetórias de (2.2.44) próximas à origem e preserva a parametrização do tempo.

Exemplo 3. Considere o Sistema de Equação Diferenciais

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y(t) \\ \dot{z}(t) = z(t) + y^2(t) \end{cases}$$

Seja $y(0) = y_0$ e $z(0) = z_0$, a solução por conseguinte dada por

$$y(t) = y_0 e^{-t}$$

$$z(t) = z_0 e^t + \frac{y_0^2}{3}(e^t - e^{-2t}).$$

Omitindo alguns passos, chegamos às seguintes transformações

$$L^t(y, z) = \begin{pmatrix} e^{-t}y \\ e^t z \end{pmatrix}$$

$$T^t(y, z) = \begin{pmatrix} e^{-t}y \\ e^t z + \frac{y^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

e ao seguinte homeomorfismo

$$H(y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z + \frac{y^2}{3} \end{pmatrix}$$

e verificamos que

$$L^t \circ H(y, z) = H \circ T^t(y, z)$$

Os retratos de fase do sistema não linear e do sistema linearizado se encontra logo abaixo

Exemplo 4. Considere o Sistema de Equações diferenciais logo abaixo, chamado de Sela-Nó.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ \dot{y}(t) = y(t) \end{cases}$$

Note que o Sistema Dinâmico acima possui ponto de equilíbrio na origem $(0, 0)$, ao calcularmos a Matriz Jacobiana do Sistema acima avaliado na origem encontramos:

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto o sistema linearizado admite dois autovalores: $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, como um deles possui parte real igual a zero não podemos aplicar o resultado que advém do Teorema de Grobman-Hartman, segue logo abaixo o Retrato de Fase do Sistema proposto e da sua linearização em torno da origem,

É evidente que ambos em nada se parecem, portanto para o estudo de sistemas cujos pontos de equilíbrio não sejam hiperbólicos é necessária a utilização de outras técnicas.

Referências

[L]L Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1991.

[S]S Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.

ST6 - Uma Introdução aos Loops de Código*Rosemary Pires (UFF) & Alexandre Grichkov (USP)***Resumo**

Nesta apresentação, daremos uma breve introdução aos loops de código. Caracterizamos loops de código de posto n como imagem homomórfica de certos loops de Moufang livres com n geradores e introduzimos o conceito de vetores característicos associados a um loop de código. Com os resultados da teoria estudada, classificamos todos os loops de código de posto 3, encontramos todos os grupos de automorfismos externos destes loops e, finalmente, determinamos todas as suas respectivas representações básicas. Este trabalho foi obtido como parte da tese de doutorado sob a orientação do professor Alexandre Grichkov.

Introdução

Consideremos \mathbf{F}_2^n um espaço vetorial n -dimensional sobre o corpo de 2 elementos $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$. Para vetores u e v em \mathbf{F}_2^n , $|v|$ denota o número de coordenadas não nulas de v (é chamado o peso de v) e $|u \cap v|$ denota o número de posições nas quais as coordenadas de u e v são ambas não nulas.

Por definição um **código par** é um subespaço $V \subseteq \mathbf{F}_2^n$ tal que $|v| \equiv 0 \pmod{4}$ e $|u \cap v| \equiv 0 \pmod{2}$ para quaisquer $u, v \in V$.

Seja V um código par. Denotemos por $L(V)$ o conjunto $\{1, -1\} \times V$. Seja a função (chamada **fator de conjunto**) $\phi : V \times V \rightarrow \{1, -1\}$, definida para todo $u, v, w \in V$, por :

1. $\phi(v, v) = (-1)^{\frac{|v|}{4}}$;
2. $\phi(v, w) = (-1)^{\frac{|v \cap w|}{2}} \phi(w, v)$;

3. $\phi(0, v) = \phi(v, 0) = 1$;
4. $\phi(v+w, u) = \phi(v, w+u)\phi(v, w)\phi(w, u)(-1)^{|v \cap w \cap u|}$, onde $|v \cap w \cap u|$ denota o número de posições nas quais as coordenadas de u, v e w são todas não nulas.

Definimos uma operação binária “.” sobre $L(V)$, chamada de produto, para quaisquer $v, w \in V$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} v.w &= \phi(v, w)(v+w), \quad \text{onde } \phi(v, w) \in \{1, -1\}, \\ v.(-w) &= (-v).w = -(v.w), \\ (-v).(-w) &= v.w. \end{aligned}$$

Na definição acima identificamos v com $(1, v)$ e $-v$ com $(-1, v)$.

Teorema 2.49. *O loop $L(V)$ é loop de Moufang e valem as seguintes propriedades, para quaisquer $u, v, w \in V$:*

- a) $v^2 = (-1)^{\frac{|v|}{4}}0$,
- b) $[u, v] = u^{-1}v^{-1}uv = (-1)^{\frac{|u \cap v|}{2}}0$,
- c) $(u, v, w) = ((uv)w)((u(vw))^{-1}) = (-1)^{|u \cap v \cap w|}0$.

Definição 2.50. *O loop de Moufang $L(V)$ é chamado de **loop de código**. Dizemos que $L(V)$ tem posto m , se $\dim_{\mathbb{F}_2} V = m$.*

Por definição uma **representação** de um dado loop de código L é um código par $V \subseteq \mathbb{F}_2^m$ tal que $L \cong L(V)$ e o grau da representação V é, por definição, o número $gr V = grau V = m$.

Definição 2.51. *Uma representação V é chamada **básica** se $gr V$ é minimal.*

Além disso, para um dado loop de código L , denotamos por $AutL$ o grupo dos automorfismos de L e por $OutL$ o grupo dos automorfismos externos de L , onde por definição $OutL = AutL/N(AutL)$ e $N(AutL) = \{\phi \in AutL | \phi(x) = \pm x, \forall x \in L\}$.

Nesse trabalho, classificamos os loops de código de posto 3 e 4, calculamos os grupos de automorfismos destes loops e além disso, classificamos as representações básicas correspondentes. Apresentaremos somente os resultados obtidos para os loops de código de posto 3.

Loops de código de posto 3

Seja L um loop de código não associativo de posto 3 com geradores a, b, c . Associamos a L o vetor característico $\lambda(L)$, definido da forma $\lambda(L) = (\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ onde $a^2 = (-1)^{\lambda_1}, b^2 = (-1)^{\lambda_2}, c^2 = (-1)^{\lambda_3}, [a, b] = (-1)^{\lambda_4}, [a, c] = (-1)^{\lambda_5}, [b, c] = (-1)^{\lambda_6}$.

Teorema 2.52. *Sejam C_1^3, \dots, C_5^3 os loops de código com os seguintes vetores característicos correspondentes:*

$$\lambda(C_1^3) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\lambda(C_2^3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\lambda(C_3^3) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\lambda(C_4^3) = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\lambda(C_5^3) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Então quaisquer dois loops da lista $\{C_1^3, \dots, C_5^3\}$ são não isomorfos e qualquer loop de código não associativo de posto 3 é isomorfo a um desta lista.

Proposição 2.53. *Na notação acima, temos:*

1. $OutC_1^3 \simeq GL_3(2)$,
2. $OutC_2^3 \simeq S_4$,
3. $OutC_3^3 \simeq S_4$,
4. $OutC_4^3 \simeq D_8$,
5. $OutC_5^3 \simeq S_3$.

Agora realizemos o \mathbf{F}_2 -espaço \mathbf{F}_2^m com o conjunto de todos os subconjuntos de $I_m = \{1, \dots, m\}$.

Teorema 2.54. *Os loops de código C_1^3, \dots, C_5^3 têm as seguintes representações básicas V_1, \dots, V_5 onde*

$$V_1 = \langle (1234), (1256), (1357) \rangle,$$

$$V_2 = \langle (1234), (125, 6 - 10), (13567, 11, 12, 13) \rangle,$$

$$V_3 = \langle (1 - 8), (1 - 6, 9, 10), (1 - 5, 7, 9, 11) \rangle,$$

$$V_4 = \langle (1234), (1, 2, 5 - 14), (1, 3, 5 - 11, 15 - 17) \rangle,$$

$$V_5 = \langle (1 - 12), (1 - 8, 13 - 16), (1 - 5, 10 - 15, 17) \rangle.$$

Referências

- [1] R. M. PIRES, Loops de código: automorfismos e representações, IME-USP (2011) - Tese de Doutorado.
- [2] R. L. GRIESS JR., Code loops, J.Algebra **100** (1986), 224–234.
- [3] R. H. BRUCK, A survey of binary systems, Springer-Verlag (1958).
- [4] O. CHEIN AND E. G. GOODAIRE, Moufang Loops with a Unique Nonidentity Commutator (Associator, Square), J. Algebra **130** (1990), 369–384.
- [5] O. CHEIN, H. O. PFLUGFELDER, Quasigroups and Loops: Theory and Applications, Berlin:Heldermann (1990).
- [6] H. O. PFLUGFELDER, Quasigroups and Loops: An Introduction, Berlin:Heldermann (1990).
- [7] E. G. GOODAIRE, E. JASPERS AND C. POLCINO, Alternative Loop Rings, North Holland Math **184** (1996).

2.3 Pôsteres

P1 - Um Anel de Lie Associado a um Grupo

Jhone Caldeira & Katiucy Freire de Oliveira (UFG)

P2 - Uma Condição Necessária e Suficiente para Nilpotência de Álgebras de Lie

Jhone Caldeira & Eliana Rodrigues (UFG)

P3 - Condição de Nilpotência para Grupos Localmente Finitos de Expoente p e

Álgebras de Lie $(p - 1)$ -Engel de Característica p (ou 0)

Jhone Caldeira, Lucimeire Alves Carvalho & Aline de Souza Lima (UFG)

P4 - Sobre Grupos Satisfazendo Leis Positivas e Variedades de Grupos

Jhone Caldeira, Aline de Souza Lima & Natália Silva Nascimento (UFG)

P5 - Campos Vetoriais Reversíveis no Plano

Kamila da Silva Andrade & João Carlos da Rocha Medrado (UFG)

P6 - Normal Forms for Sewing Linear Systems

Kamila da Silva Andrade & João Carlos da Rocha Medrado (UFG)

P7 - Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial Não-abeliano de um Grupo

Agenor Andrade & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)

P8 - Estudo da Série dos Custos da Cesta Básica de Goiânia

Karollyna Barbosa Bie (UFG) & Marcel Dantas de Quintela (UFS)

P9 - Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Caíke Damke (UFG)

P10 - Exemplos de Trajetória Central em Programação Semidefinida

Mayk dos Santos & Orizon Pereira Ferreira (UFG)

P11 - Grupos em que cada Elemento Comuta com suas Imagens Endomórficas

Sérgio Fernandes, Ticianne Bueno & Shirlei Serconek (UFG)

P12 - Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos

Silvio Macedo (IFG-Luziânia) & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)

P1 - Um Anel de Lie Associado a um Grupo

Jhone Caldeira & Katiucy Freire de Oliveira (UFG)

Introdução

O estudo de grupos nilpotentes e automorfismos permitem uma abordagem bastante interessante de parte da teoria algébrica e está diretamente relacionado com importantes problemas de interesse da comunidade científica matemática.

Muitos problemas na Teoria dos Grupos podem ser tratados com a teoria dos grupos nilpotentes e seus automorfismos. Além disso, a importância da teoria das álgebras de Lie está ligada às discussões sobre grupos nilpotentes e seus automorfismos.

Aqui apresentamos a construção padrão do anel de Lie associado a um grupo G , com base na menor série central de G , tratando a nilpotência de grupos solúveis de expoente primo, como ilustração das vantagens de usar anéis de Lie que são objetos mais lineares do que grupos.

Preliminares

Grupos Solúveis e Nilpotentes

Definição 2.55. *Definimos a série derivada de um grupo G por:*

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots \supset G^{(n)} \supset \dots,$$

onde $G^{(n)}$ é dito o n -ésimo grupo derivado de G , e os membros da série derivada de G são dados por

$$G^{(s+1)} = [G^{(s)}, G^{(s)}],$$

onde G' é chamado subgrupo derivado de G .

Definição 2.56. Um grupo G diz-se solúvel se admite uma série subnormal

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G,$$

onde cada subgrupo G_{i-1} é normal em G_i e o grupo quociente $\frac{G_i}{G_{i-1}}, 1 \leq i \leq n$, é abeliano.

Definição 2.57. Um grupo G diz-se nilpotente se ele contém uma série de subgrupos

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$$

tal que cada subgrupo G_{i-1} é normal em G e cada quociente $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ está contido no centro de $\frac{G}{G_{i-1}}, 1 \leq i \leq n$.

Definição 2.58. Denotaremos por $\gamma_i(G)$ os membros da série central inferior de G :

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G], \quad \dots, \quad \gamma_{s+1}(G) = [\gamma_s(G), G].$$

Dessa forma

$$G = \gamma_1(G) \supset \gamma_2(G) \supset \dots \supset \gamma_{s+1}(G).$$

Anéis de Lie Associados

Definição 2.59. Um anel de Lie é um anel não associativo sem identidade, cuja multiplicação, que é usualmente denotada por $[a, b]$, satisfaz os seguintes axiomas:

I) $[a, a] = 0$;

II) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$. (Identidade de Jacobi)

Ou seja, um anel de Lie não é comutativo e satisfaz a Identidade de Jacobi.

Definição 2.60. Os membros da série central inferior, $\gamma_{-i}(L)$, do anel de Lie L são definidos por indução, como seguinte:

$$\gamma_{-1}(L) = L, \dots, \gamma_{-s+1}(L) = [\gamma_{-s}(L), L]$$

(às vezes são denotados também por $L^i = \gamma_{-i}(L)$).

Definição 2.61. Os membros da série derivada são também definidos por indução:

$$L' = \gamma_2(L) = L^2, \quad L'' = L^{(2)} = [L', L'], \dots, \quad L^{(s+1)} = [L^{(s)}, L^{(s)}].$$

É fácil ver que $L^{(s)} \subseteq \gamma_{2^s}(L)$, para todo $s \in \mathbb{N}$.

Podemos definir anéis de Lie nilpotentes usando o seguinte teorema.

Teorema 2.62. As seguintes condições são equivalentes para um anel de Lie L :

- a) $\gamma_{-c+1}(L) = 0$;
- b) L tem uma série central de comprimento c

$$L = L_{-1} \geq L_{-2} \geq \dots \geq L_{-c} \geq L_{-c+1} = 0,$$

isto é, de tal forma que $[L_{-i}, L] \leq L_{i+1} \forall i = 1, 2, \dots, c$. c) O anel de Lie L satisfaz a identidade

$$[x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-c+1}] = 0.$$

Definição 2.63. Um anel de Lie L satisfazendo o teorema acima é dito nilpotente, e o menor número natural c com a propriedade indicada, é chamado classe de nilpotência de L .

Quando dizemos que um anel de Lie é nilpotente de classe c estamos querendo dizer que ele é nilpotente de classe $\leq c$. E ainda percebemos que para saber se um anel de Lie é nilpotente basta verificar se seus geradores são nilpotentes.

Teorema 2.64. *Se um anel de Lie é gerado por um subconjunto M , então ele é nilpotente de classe $\leq c$, se, e somente se, todo comutador de peso $c + 1$ nos elementos de M é igual a 0.*

Teorema 2.65. *As seguintes condições são equivalentes para um anel de Lie L .*

a) $L^{(s)} = 0$;

b) L tem uma série de ideais de comprimento s com fatores abelianos

$$L = L_0 \trianglelefteq L_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq L_{s-1} \trianglelefteq L_s = 0,$$

tal que $[L_i, L_i] \leq L_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, \dots, s - 1$.

c) L satisfaz a identidade

$$\delta_s(x_1, x_2, \dots, x_{2^s}) = 0.$$

Um anel de Lie satisfazendo essas condições é dito ser solúvel e o menor número s com a propriedade indicada, é chamado comprimento derivado de L . Podemos chamá-lo de “índice de solubilidade”.

Observe, que o análogo do Teorema 4.2.3 não se aplica a solubilidade, pois existem exemplos de anéis de Lie $G = \langle M \rangle$ com $\delta_k(m_1, m_2, \dots, m_{2^k}) = 1$, para certos $m_1, m_2, \dots, m_{2^k} \in M$ que, entretanto, não são solúveis de comprimento derivado k .

Construindo um Anel de Lie Associado a um Grupo

Seja G um grupo. Vamos colocar $\gamma_k = \gamma_k(G), k \in \mathbb{N}$, nos casos em que há somente um ambiente de grupo G de modo que não haja perigo de confusão.

Definição 2.66. *O grupo aditivo do anel associativo $L(G)$ de um grupo G é a soma direta*

$$L(G) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\gamma_{k+1}},$$

escrevendo os grupos abelianos $\frac{\gamma_k}{\gamma_{k+1}}$ aditivamente.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, o fator dessa soma direta é dito componente homogênea de $L(G)$ de peso k . Os elementos das componentes homogêneas $\frac{\gamma_{-k}}{\gamma_{-k+1}}$ de peso k do anel de Lie $L(G)$ são chamados elementos homogêneos de $L(G)$ de peso k . A multiplicação em G é definida pelos elementos homogêneos por

$$[a + \gamma_{-i} + 1, b + \gamma_{-j} + 1] = [a, b] + \gamma_{-i} + j + 1,$$

onde $a + \gamma_{-i} + 1$ e $b + \gamma_{-j} + 1$ são as imagens dos elementos $a \in \gamma_{-i}$ e $b \in \gamma_{-j}$ nos grupos quociente $\frac{\gamma_{-i}}{\gamma_{-i+1}}$ e $\frac{\gamma_{-j}}{\gamma_{-j+1}}$, respectivamente. Logo $[a, b] + \gamma_{-i} + j + 1$ são as imagens do grupo comutador $[a, b]$ no grupo quociente $\frac{\gamma_{-i+j}}{\gamma_{-i+j+1}}$. Então a multiplicação é estendida para $L(G)$ por linearidade. Isto define uma estrutura de anel de Lie em $L(G)$.

Teorema 2.67. *Se G é nilpotente de classe c , então $L(G)$ é um anel de Lie e também é nilpotente de classe c , e se G é finito, então $|L(G)| = |G|$. Se G é solúvel de comprimento derivado s , então $L(G)$ também é solúvel de comprimento derivado $\leq s$. Além disso, cada automorfismo φ do grupo G induz um automorfismo do anel de Lie $L(G)$ por sua ação sobre os grupos quocientes $\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}$ e se G é finito e a ordem de φ é coprima a ordem de G , então φ atua em $L(G)$ e $|C_{L(G)}(\varphi)| = |C_G(\varphi)|$.*

Lema 2.68. *No anel de Lie associado a um grupo arbitrário G , vale para qualquer k :*

$$\begin{aligned} a) \frac{\gamma_{-k}}{\gamma_{-k+1}} &= \left\langle [a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-k}] \mid a_{-i} \in \frac{\gamma_{-i}}{\gamma_{-i+1}} \right\rangle; \\ b) \gamma_k(L(G)) &= \bigoplus_{i=k}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}. \end{aligned}$$

Uma observação a se fazer é que em contraste com a classe de nilpotência, o comprimento derivado do anel Lie associado $L(G)$ pode ser menor do que o comprimento derivado do grupo G , mesmo que o grupo G seja nilpotente.

Corolário 2.69. *Para qualquer grupo G , o anel de Lie associado $L(G)$ é gerado pela sua componente homogênea $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ de peso 1. Se o grupo G é gerado por um conjunto M , então o anel de Lie $L(G)$ é gerado pelas imagens dos elementos de M no grupo quociente $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.*

Embora o anel de Lie associado possa ser construído a partir de um grupo arbitrário, é claro que ele reflete apenas as propriedades do grupo fator $G/\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$, pois, claramente, $L(G) \cong L(G/\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G))$.

Referências

- [1] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York, 1968.
- [2] I. N. Herstein, *Topics in algebra*. 2.ed., New York, J. Wiley & Sons, 1995.
- [3] G. Higman, *Groups and Lie rings having automorphisms without non-trivial fixed points*, J. London Math. Soc., **32** (1957), 321 – 334.
- [4] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra linear*. 2.ed., Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [5] E. I. Khukhro, *Nilpotent Groups and their Automorphisms*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [6] E. I. Khukhro, *p-Automorphisms of finite p-groups*, Cambridge Univ. Press, Lecture Note Series **246** (1998).
- [7] M. Hall Jr., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.
- [8] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [9] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Campinas, Editora da Unicamp, 1999.
- [11] P. Shumyatsky, *On the nilpotency class of Lie rings with fixed-point-free automorphisms*, Turk. J. Math., **29** (2005), 65-74.
- [12] J. C. Silva, *Álgebras de Lie de Derivações Livres de Constantes*, Dissertação de Mes-

trado,

Universidade de Brasília, 2004.

[13] J. C. Silva, *Varietades de Grupos e Generalizações Verbais para o Problema Restrito de Burnside*, Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2009.

P2 - Uma Condição Necessária e Suficiente para Nilpotência de Álgebras de Lie

Jhone Caldeira & Eliana Rodrigues (UFG)

Resumo

A teoria das álgebras de Lie teve suas origens por volta de 1870 a partir da idéia de abordar as equações diferenciais sob o mesmo ponto de vista que o adotado por Galois para as equações algébricas.

O programa lançado por Sophus Lie e Felix Klein, consistia em estudar as equações diferenciais via seus grupos de simetrias. Esse programa colocou em evidência os grupos contínuos de transformações para os quais foi criada, ao longo dos anos, uma extensa teoria com ramificações nas mais diversas áreas da matemática e de suas aplicações.

A criação desse vasto corpo do conhecimento matemático se deve à descoberta, feita por Sophus Lie, dos grupos infinitesimais ou como é conhecida atualmente, das álgebras de Lie.

Introdução

A teoria das álgebras de Lie teve suas origens por volta de 1870 a partir da ideia de abordar as equações diferenciais sob o mesmo ponto de vista que o adotado por Galois para as equações algébricas.

O programa lançado por Sophus Lie e Felix Klein, consistia em estudar as equações diferenciais via seus grupos de simetrias. Esse programa colocou em evidência os grupos contínuos de transformações para os quais foi criada, ao longo dos anos, uma extensa teoria com ramificações nas mais diversas áreas da matemática e de suas aplicações.

A criação desse vasto corpo do conhecimento matemático se deve à descoberta, feita por Sophus Lie, dos grupos infinitesimais ou como é conhecida atualmente, das álgebras de Lie.

Objetivos

Apresentar as ideias principais da Teoria das Álgebras de Lie, sobretudo o estudo de conceitos como *derivação*, *homomorfismo*, *solubilidade*, *nilpotência*, bem como importantes resultados relativos a esses conceitos. Por fim, demonstraremos o Teorema de Engel.

A Noção de Álgebra de Lie e Derivações

Definição 3.1. Uma *Álgebra de Lie* L é um espaço vetorial sobre um corpo F , munido de uma operação $[\] : L \times L \rightarrow L$ chamada *colchete* ou *comutador* de x e y , que satisfaz os seguintes axiomas:

(L1) a operação colchete é bilinear;

(L2) $[x, x] = 0$, para todo $x \in L$;

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para quaisquer x, y e z pertencentes a L .

O axioma (L3) é chamado *Identidade de Jacobi*.

(L1) e (L2) aplicados a $[x + y, x + y]$ implicam a anticomutatividade: (L2)' $[x, y] = -[y, x]$. Reciprocamente, (L2)' implica (L2), quando a característica de F é diferente de 2.

Definição 3.2. A *dimensão* de uma álgebra de Lie L é sua dimensão como espaço vetorial.

Definição 3.3. Um subespaço K de uma álgebra de Lie L é chamado uma *subálgebra* (de Lie) de L se $[x, y] \in K$, para quaisquer $x, y \in K$.

Por $(L2)$, qualquer elemento não nulo pertencente a L define uma subálgebra unidimensional com o mesmo produto de L .

Exemplo 3.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre F . Defina $EndV = \{T : V \rightarrow V; T \text{ é transformação linear}\}$. Como um espaço vetorial sobre F , $EndV$ tem dimensão n^2 e é uma álgebra associativa relativamente ao produto usual. É de fácil verificação que, com a operação colchete, $EndV$ é uma álgebra de Lie sobre F .

Para distinguir esta nova estrutura, denotaremos $gl(V)$ por $EndV$ visto como uma álgebra de Lie e a chamaremos *Álgebra Linear Geral* (devido à sua relação com o *Grupo Linear Geral*, que consiste dos endomorfismos invertíveis sobre V).

Definição 3.4. Qualquer subálgebra da álgebra de Lie $gl(V)$ é chamada *Álgebra de Lie Linear*.

Mencionaremos agora um importante exemplo de subálgebra de Lie linear.

Exemplo 3.2. Sejam $T(n, F)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores, $N(n, F)$ o conjunto das matrizes triangulares estritamente superiores e $D(n, F)$ o conjunto das matrizes diagonais. É fácil verificar que esses conjuntos são fechados em relação à operação colchete e ainda que

$$T(n, F) = D(n, F) \oplus N(n, F), [D(n, F), N(n, F)] = N(n, F) \text{ e } [T(n, F), T(n, F)] = N(n, F).$$

Exemplo 3.3. Subálgebras de $gl(V)$.

(a) $so(V) = \{X \in gl(V); X + X^t = 0\}$, onde X^t indica a transposta da matriz X .

O espaço das matrizes simétricas $\{X \in gl(V); X = X^t\}$ não é subálgebra se $n \geq 2$, pois se X e Y são simétricas, então $[X, Y]$ é antissimétrica.

(b) $sl(V) = \{X \in gl(V); Tr X = 0\}$.

Algumas álgebras de Lie de transformações lineares surgem naturalmente como derivações de álgebras.

Definição 3.5. Seja A uma álgebra. Uma aplicação linear $\delta : A \rightarrow A$ satisfazendo a regra

$\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ é chamada *derivação*.

Denotaremos por $DerA$ o conjunto de todas as derivações de A .

Exemplo 3.4. $DerA$ é uma subálgebra de $gl(V)$, isto é, $DerA$ é um subespaço vetorial de $EndV$ e é fechado em relação à operação colchete.

Demonstração. $DerA \subset EndV$. Sejam $\delta_1, \delta_2 \in DerA$ e $\alpha \in F$.

$$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = (\alpha\delta_1)(xy) + (\delta_2)(xy)$$

$$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = x(\alpha\delta_1)(y) + (\alpha\delta_1)(x)y + x\delta_2(y) + \delta_2(x)y$$

$$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = x((\alpha\delta_1)(y) + \delta_2(y)) + ((\alpha\delta_1)(x) + \delta_2(x))y$$

$$(\alpha\delta_1 + \delta_2)(xy) = x((\alpha\delta_1 + \delta_2)(y)) + ((\alpha\delta_1 + \delta_2)(x))y.$$

Logo $DerA$ é subespaço vetorial de $EndV$.

Mostraremos agora, que $[\delta_1, \delta_2]$ ainda é uma derivação:

$$[\delta_1, \delta_2](xy) = \delta_1\delta_2(xy) - \delta_2\delta_1(xy)$$

$$[\delta_1, \delta_2](xy) = \delta_1(x(\delta_2(y) + \delta_2(x)y)) - \delta_2(x(\delta_1(y) + \delta_1(x)y))$$

$$[\delta_1, \delta_2](xy) = x(\delta_1(\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(y))) + (\delta_1(\delta_2(x)) - \delta_2\delta_1(x))y$$

$$[\delta_1, \delta_2](xy) = x[\delta_1, \delta_2](y) + [\delta_1, \delta_2](x)y. \quad \blacksquare$$

Observação 3.4.1 Não é necessariamente verdade que o produto ordinário de duas derivações é ainda uma derivação.

Certas derivações surgem naturalmente como no

Exemplo 3.5. Seja $x \in L$. Definimos $adx : L \rightarrow L$ por $adx(y) = [x, y]$, que é uma derivação de L .

Demonstração. É de fácil verificação que $adx \in EndV$. Para mostrar que $adx([y, z]) = yadx(z) + adx(y)z$, basta observar que usando (L2)' podemos reescrever a Identidade de Jacobi da seguinte forma $[x[y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$. \blacksquare

Ideais, Homomorfismos e Representações

Ideais e Homomorfismos

Definição 4.1.1. Um subespaço I de uma álgebra de Lie L é um *ideal* de L quando $x \in L$, $y \in I$ implica $[x, y] \in I$.

Os ideais desempenham na teoria das álgebras de Lie, o mesmo papel dos subgrupos normais na teoria dos grupos e dos ideais bilaterais na teoria dos anéis. Será visto adiante que eles surgem como núcleos de homomorfismos.

Trivialmente, o subespaço que consiste apenas do vetor nulo e L são ideais de L .

Exemplo 4.1.1. O *centro* da álgebra de Lie L , definido por $Z(L) = \{z \in L; [x, z] = 0, \forall x \in L\}$, é um ideal de L .

Definição 4.1.2. Seja L uma álgebra de Lie, se $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in L$, dizemos que L é *abeliana*.

Assim, L é abeliana se, e somente se, $Z(L) = L$.

Exemplo 4.1.2. Um exemplo importante de ideal de uma álgebra de Lie L é a *álgebra derivada*, denotada por $[L, L]$, ela é análoga ao subgrupo comutador de um grupo. Esta álgebra consiste de todas as combinações lineares dos comutadores $[x, y]$ com $x, y \in L$.

Deste modo, L é abeliana se, e somente se, $[L, L] = 0$.

Exemplo 4.1.3. Se I e J são dois ideais da álgebra de Lie L , então $I + J = \{x + y; x \in I, y \in J\}$ e $[I, J] = \{\sum a_{ij}[x_i, y_j]; x_i \in I, y_i \in J\}$ também são ideais de L .

É natural analisar a estrutura de uma álgebra de Lie olhando para seus ideais. Se L não possuir ideais não triviais e, além disso, se $[L, L] \neq 0$, L é dita uma álgebra *simples*.

Assim, L simples implica $Z(L) = 0$ e $L = [L, L]$.

No caso de uma álgebra de Lie L não ser simples (e não unidimensional) é possível extrair de L um ideal próprio I e então obter uma álgebra de Lie de dimensão

”menor”, a *álgebra quociente* L/I , cuja construção formal é a mesma de um anel quociente.

Como um espaço vetorial, L/I é simplesmente o espaço quociente e seu produto de Lie está bem definido por: $[x + I, y + I] = [x, y] + I$.

Para uso posterior, definiremos duas noções relacionadas. Elas são análogas àquelas definidas na teoria dos grupos.

Definição 4.1.3. O *normalizador* de uma subálgebra (ou apenas um subespaço) K de uma álgebra de Lie L é definido por $N_L(K) = \{x \in L; [x, L] \subset K\}$.

$N_L(K)$ é uma subálgebra de Lie de L e é descrita como a maior subálgebra de L que possui K como ideal.

Definição 4.1.4. O *centralizador* de um subconjunto $X \subset L$ é $C_L(X) = \{x \in L; [x, X] = 0\}$.

Utilizando a Identidade de Jacobi, demonstra-se que $C_L(X)$ é subálgebra de L . No caso particular em que $X = L$, tem-se $C_L(L) = Z(L)$.

Homomorfismos e Representações

Definição 4.2.1. Sejam L, L' álgebras de Lie sobre F e $\phi : L \rightarrow L'$ uma transformação linear. Dizemos que:

- (a) ϕ é um *homomorfismo* se $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$, para todos $x, y \in L$.
- (b) ϕ é um *monomorfismo*, se $\text{Ker}\phi = 0$.
- (c) ϕ é um *epimorfismo*, se $\text{Im}\phi = L'$.
- (d) ϕ é um *isomorfismo*, se ϕ é monomorfismo e epimorfismo.
- (e) ϕ é um *automorfismo*, se ϕ é um *isomorfismo* de L sobre L .

Observação 4.2.1. $\text{Ker}\phi$ é um ideal de L e $\text{Im}\phi$ é uma subálgebra de L' .

Como nas demais teorias algébricas, existe uma bijeção natural entre homomorfismos e ideais: a ϕ associamos $\text{Ker}\phi$ e ao ideal I associamos a *aplicação canônica* que leva

x em $x + I \in L/I$.

Apresentaremos a seguir um importante resultado.

Teorema 4.2.1. (Teoremas do Isomorfismo)

(a) Se $\phi : L \rightarrow L'$ é um isomorfismo de álgebras de Lie, então $\frac{L}{\text{Ker}\phi} \cong \text{Im}\phi$.

(b) Se I e J são ideais de L tais que $I \subset J$, então $\frac{J}{I}$ é um ideal de $\frac{L}{I}$ e $\frac{L/I}{J/I}$ é isomorfo a $\frac{L}{J}$.

(c) Se I e J são ideais de L , então existe um isomorfismo natural entre $\frac{I+J}{J}$ e $\frac{I}{I \cap J}$.

Definição 4.2.2. Sejam V um espaço vetorial e $gl(V)$ a álgebra de Lie de transformações lineares de V . Seja L uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma *representação* de L em V é um homomorfismo $\phi : L \rightarrow gl(V)$.

Exemplo 4.2.1. A aplicação linear $ad : L \rightarrow DerL$ que leva x em adx define uma representação de L , chamada *representação adjunta*.

Demonstração. O fato de ad ser transformação linear decorre imediatamente da bilinearidade do colchete.

Mostraremos que ad é um homomorfismo.

$$\begin{aligned} [adx, ady](z) &= adxady(z) - adyadx(z) \\ &= adx([y, z]) - ady([x, z]) \\ &= -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] - [y, [x, z]] \\ &= [[x, y], z] \\ &= ad[x, y](z). \end{aligned}$$

Álgebras de Lie Solúveis, Nilpotentes e o Teorema de Engel

Solubilidade

Nesta seção vamos estudar a formação das álgebras derivadas.

Definição 5.1.1 A sequência de ideais de L definida por $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L, L]$, $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \dots$, $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$ é chamada *série derivada*.

Definição 5.1.2. Diz-se que L é *solúvel* se $L^{(n)} = 0$ para algum inteiro positivo n .

Claramente temos que toda álgebra de Lie abeliana é solúvel.

Exemplo 5.1.1. $T(n, F)$ é solúvel.

Teorema 5.1.1. Seja L uma álgebra de Lie.

(a) Se L é solúvel, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de L são solúveis.

(b) Se I é um ideal solúvel de L tal que $\frac{L}{I}$ é solúvel, então L é solúvel.

(c) Se I, J são ideais solúveis de L , então $I + J$ é solúvel.

Exemplo 5.1.2. Sejam L uma álgebra de Lie arbitrária e S um ideal maximal solúvel. Se I é um ideal solúvel qualquer de L , então pelo Teorema 5.1.1(c) temos que $S + I = S$, ou seja, $I \subset S$. Isto mostra a existência de um único ideal maximal solúvel, o chamaremos *radical* de L e denotaremos por $RadL$. Quando $RadL = 0$, diz-se que L é *semisimples*.

Note que uma álgebra simples é semisimples.

Nilpotência

A definição de solubilidade imita a noção correspondente na teoria dos grupos, a qual remete a Abel e Galois. Por outro lado, a noção de grupo nilpotente é mais recente, e é modelada na noção correspondente para álgebras de Lie.

Definição 5.2.1. A sequência de ideais de L definida por $L^0 = L$, $L^1 = [L, L](= L^{(1)})$, $L^2 = [L, L^1]$, \dots , $L^i = [L, L^{i-1}]$ é chamada *série central descendente*.

Definição 5.2.2. L é nilpotente se $L^n = 0$ para algum inteiro positivo n .

Note que toda álgebra abeliana é nilpotente

Como $L^{(i)} \subset L^i$ para todo i , temos que toda álgebra nilpotente é solúvel. A recíproca é falsa.

Teorema 5.2.1. Seja L uma álgebra de Lie.

(a) Se L é nilpotente, então todas as subálgebras e imagens homomórficas de L são nilpotentes.

(b) Se $\frac{L}{Z(L)}$ é nilpotente, então L é nilpotente.

(c) Se L é nilpotente e não-zero, então $Z(L) \neq 0$.

A condição para L ser nilpotente pode ser escrita como segue: para algum n (dependendo somente de L), $adx_1 adx_2 \cdots adx_n(y) = 0$, para todos $x_i, y \in L$. Em particular, $(adx)^n = 0$ para todos $x \in L$.

Definição 5.2.3. Se L é uma álgebra de Lie qualquer e $x \in L$, dizemos que x é *ad-nilpotente* se adx é um endomorfismo nilpotente.

Com esta linguagem, concluímos que se L é nilpotente então todos os elementos de L são ad-nilpotentes. Demonstraremos no Teorema de Engel que a recíproca deste resultado é verdadeira.

O Teorema de Engel

Lema 5.3.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $X \in gl(V)$ um endomorfismo nilpotente. Então adX também é nilpotente.

Demonstração. Note que $(adX)^n(Y)$ é a soma de termos da forma $\pm X^i Y X^j$, onde $i + j = n$. Assim, se $X^k = 0$, então $(adX)^{2k-1} = 0$, para todo $y \in gl(V)$. ■

Uma transformação linear nilpotente sempre tem pelo menos um autovetor, correspondendo ao seu único autovalor zero. Este é o caso em que $dimL = 1$ do próximo teorema. Ele será utilizado na demonstração do Teorema de Engel.

Teorema 5.3.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e L uma álgebra de $gl(V)$. Se L consiste de endomorfismos nilpotentes e $V \neq 0$, então existe $0 \neq v \in V$ para o qual $Lv = 0$.

Veja a demonstração em [Hum, pg 13].

Teorema 5.3.2. (Teorema de Engel) Seja L uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então L é nilpotente se, e somente se, todos os elementos de L são ad-nilpotentes.

Demonstração. Uma parte do teorema já foi demonstrada no Lema 5.3.1.

Suponhamos que L é uma álgebra de Lie cujos elementos são ad-nilpotentes. Assim, a álgebra $adL \subset gl(V)$ satisfaz as condições do Teorema 5.3.1 (podemos admitir $L \neq 0$). Concluimos que existe $0 \neq X \in L$ para o qual $adL(X) = [L, X] = 0$, isto é, $Z(L) \neq 0$. Logo $\frac{L}{Z(L)}$ consiste de elementos ad-nilpotentes e tem dimensão menor do que a dimensão de L .

Usando indução sobre a ordem de L , temos que: se $dimL = 0$, então $\frac{L}{Z(L)}$ é nilpotente. Logo, L é nilpotente. Se $dimL = 1$, considere X um gerador de L . Por hipótese, X é ad-nilpotente, ou seja, existe um inteiro positivo n tal que $(adX)^n = 0$, isto é, $[X, [X, [\dots, [X, Y] \dots]] = 0$, para todo $Y \in L$. Logo qualquer comutador com $n + 1$ elementos de L é zero. Portanto, L é nilpotente.

Suponhamos por hipótese de indução que $\frac{L}{Z(L)}$ é nilpotente. Pelo Teorema 5.2.1(b),

segue que L é nilpotente. ■

Podemos discutir o significado do Teorema de Engel olhando para os colchetes sucessivos na álgebra. Por um lado, uma álgebra é nilpotente se todos os produtos que envolvem uma certa quantidade de elementos é zero. Agora para que a representação adjunta de L seja nilpotente, a condição é mais fraca, pois exigimos apenas que certos produtos que envolvem dois elementos, um deles aparecendo uma única vez, seja zero. O interessante nesse caso é que o número de produtos não é fixo para todos os pares de elementos e o anulamento desses produtos levam à nilpotência da álgebra L .

Exemplo 5.3.1. $N(n, F)$ é nilpotente. De fato, basta aplicar o Lema 5.3.1 e o Teorema de Engel.

Referências

- [Bur] W. Burnside, *Theory of Groups*, 2.ed. edition, Dover, New York, 1955.
- [Fri] B. Fritzsche, *Sophus Lie: a sketch of his life and work*. J. of Lie Theory, **9** (1999), 1 – 38.
- [Her] I. N. Herstein, *Topics in algebra*. 2.ed., New York, J. Wiley & Sons, 1995.
- [Hof] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra linear*. 2.ed., Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [Hum] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. New York, Springer-Verlag, 1972.
- [Jac] N. JACOBSON, *Lie algebras*. New York, Interscience, 1962.
- [Rob] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Rot] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4.ed., Graduate Texts in

Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Sam] H. Samelson, *Notes on Lie algebras*. Van Nostrand Mathematical Studies, **23**, 1969.

[San] L. A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Campinas, Editora da Unicamp, 1999.

[Sil] J. C. Silva, *Álgebras de Lie de Derivações Livres de Constantes*, Universidade de Brasília, Dissertação de Mestrado, 2004.

P3 - Condição de Nilpotência para Grupos Localmente Finitos de Expoente p

Álgebras de Lie $(p - 1)$ -Engel de Característica p (ou 0)

Jhone Caldeira, Lucimeire Alves Carvalho & Aline de Souza Lima (UFG)

Resumo

Seja P um grupo localmente finito de expoente primo p , admitindo um grupo G de automorfismos solúvel finito de ordem n coprima com p . Neste trabalho estudaremos a influência dos centralizadores dos automorfismos em G sobre a estrutura de P . Nesse sentido, mostraremos que se $C_P(G)$, o subgrupo de pontos fixos, é solúvel de comprimento derivado d , então P é nilpotente de classe limitada em termos de p , n e d . Será demonstrado também que se uma álgebra de Lie $(p - 1)$ -Engel L , de característica p (ou 0) admite um grupo de automorfismos G solúvel finito de ordem n coprima com a característica de L , tal que $C_L(G)$, a subálgebra de pontos fixos, é solúvel de comprimento derivado d , então a álgebra de Lie L é nilpotente de classe limitada em termos de p , n e d .

Introdução

Sejam G um grupo finito e α um automorfismo de G . Denotamos o centralizador de α em G , ou subgrupo de pontos fixos, por $C_G(\alpha) = \{x \in G \mid x^\alpha = x\}$. Se $C_G(\alpha) = 1$, dizemos que α é livre de pontos fixos e se a ordem de α é coprima com a ordem de G , então α é um automorfismo coprimo de G . Sabe-se que com o estudo de centralizadores de automorfismos de grupos finitos podemos obter várias informações importantes sobre o grupo em questão.

Em 1902, Burnside provou que um grupo G admitindo um automorfismo de ordem 2 livre de pontos fixos é abeliano. Este foi o primeiro resultado significativo, de que temos registro, sobre o fato da existência de automorfismos livres de pontos fixos implicar em conclusões substanciais em relação ao grupo. Burnside também analisou o caso em que

o automorfismo é de ordem 3 e provou que tal grupo é necessariamente nilpotente de classe no máximo 2.

Passados mais de cinquenta anos das descobertas de Burnside, em 1957 e 1959, dois resultados se destacam, relativos a grupos admitindo automorfismos de ordem prima livre de pontos fixos, devidos à Higman [3] e Thompson [8]. Higman mostrou que existe uma função $h(p)$ dependendo somente de p tal que todo grupo nilpotente admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima p é nilpotente de classe no máximo $h(p)$. Thompson por sua vez mostrou que todo grupo admitindo um automorfismo livre de pontos fixos de ordem prima é nilpotente.

A partir dos resultados acima, uma questão que ficou em voga foi apresentar explicitamente a função $h(p)$. Higman deu um limitante inferior para $h(p)$ quando $p > 2$, sendo $h(p) \geq \frac{p^2-1}{4}$. Ele também mostrou que $h(5) = 6$. Um limitante superior para $h(p)$ foi dado por Kreknin e Kostrikin. Eles mostraram que

$$h(p) \leq \frac{(p-1)^{2^{p-1}-1} - 1}{p-2}.$$

A partir da década de 60 do século passado, houve o interesse de se buscar resultados

semelhantes para o caso em que a ordem do automorfismo não fosse um número primo. Como exemplo, em 1971 Ward [9] provou em que se V é um grupo abeliano elementar de ordem p^3 agindo sobre um p' -grupo G finito tal que $C_G(v)$ é nilpotente para cada v em $V^\#$, então G é nilpotente. Ainda Ward [10] mostra que se V é um grupo abeliano elementar de ordem p^4 agindo sobre um p' -grupo solúvel finito e tal que o grupo derivado de $C_G(v)$ é nilpotente para cada v em $V^\#$, então o grupo derivado de G é nilpotente. Já em 1992, Shumyatsky [7], generaliza os resultados de Ward, mostrando que os mesmos são válidos na classe dos grupos solúveis periódicos.

A fim de observar algumas conjecturas feitas na década de 60 precisamos de algumas definições.

Seja G um grupo solúvel. O subgrupo de Fitting de G , denotado por $F(G)$, é o

subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de G . Pelo Teorema de Fitting, $F(G)$ é nilpotente. Podemos definir a série superior de Fitting de G dada por

$$F_0(G) = 1; \quad F_{i+1}(G)/F_i(G) = F(G/F_i(G)); \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Como G é um grupo solúvel, temos que existe h tal que $G = F_h(G)$. O menor h tal que isto acontece é chamado altura de Fitting de G e é denotado por $h(G)$.

Definimos também o comprimento composição $k(G)$ de um grupo solúvel G , que é o número de divisores primos de $|G|$ contando as multiplicidades. Isto é, se $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$, então

$$k(G) = \sum_{i=1}^s r_i.$$

Sejam G um grupo finito e A um grupo solúvel de automorfismos de G . Suponha que $C_G(A) = 1$ e que a ordem de A e a ordem de G sejam coprimas. Então temos as seguintes conjecturas que podem ser consideradas como generalizações do Teorema de Higman-Thompson.

Conjectura A. G é solúvel.

Conjectura B. $h(G) \leq k(A)$.

Conjectura C. Se A é cíclico, então G é solúvel de comprimento derivado limitado em termos de $|A|$.

A Conjectura A é conhecida como verdadeira pois segue da classificação dos grupos simples finitos.

A Conjectura B está sendo hoje usualmente abordada usando um trabalho importante feito por Hall e Higman [1] em 1956. Quando A é abeliano ela é verdadeira, mas o caso geral continua em aberto.

Sabe-se pouco a respeito da Conjectura C. É conhecido que ela é verdadeira somente se A é de ordem prima, que é o caso demonstrado por Higman-Thompson, e no caso onde a ordem de A é 4. Por outro lado, o problema análogo para álgebras de Lie foi resolvido por Kreknin em 1963 que afirma que toda álgebra de Lie admitindo um automorfismo livre

de pontos fixos de ordem n é solúvel de comprimento derivado no máximo $2^n - 2$.

Apesar da descoberta feita por Kreknin, infelizmente não existe nenhum sinal de como aplicar este teorema para grupos.

Seja L uma álgebra de Lie. Dizemos que L satisfaz a n -ésima condição de Engel se

$[x, \underbrace{y, y, \dots, y}_n] = 0$, para todos $x, y \in L$. Dentro do contexto das álgebras de Lie, mais especificamente com relação às álgebras de Lie satisfazendo a n -ésima condição de Engel, temos outro resultado importante devido a Higgins que afirma que se uma álgebra de Lie $(p - 1)$ -Engel de característica p (ou zero) é solúvel de comprimento derivado d , então ela é nilpotente de classe no máximo $\frac{(p-1)^d - 1}{p-2}$.

Uma nova ferramenta para o desenvolvimento dessas questões surgiu pelas técnicas utilizadas por Efim Zelmanov [11,12] durante a resolução do Problema Restrito de Burnside, resolução esta que lhe rendeu a Medalha Fields em 1994. No presente trabalho estudamos um dos problemas que foi motivado pelos trabalhos de Higman-Thompson, de Kreknin e, principalmente, pelas técnicas utilizadas e desenvolvidas por Zelmanov.

Objetivo

Nosso interesse principal baseia-se no estudo do comportamento de centralizadores de automorfismos de grupos finitos permitindo a obtenção de informações importantes sobre grupos. As abordagens permeiam substancialmente resultados de anéis e álgebras de Lie, condições de Engel, centralizadores e automorfismos coprimos. As técnicas empregadas na demonstração do resultado principal são baseadas nos métodos utilizados por Zelmanov na resolução do Problema Restrito de Burnside. A demonstração pode ser encontrada em [4].

Resultados e Discussões

Este trabalho tem como objetivo principal, dentro do contexto da álgebra, provar que

Teorema 2.70. (Khukhro, Shumyatsky [4]) *Se um grupo localmente finito P de expoente primo p admite um grupo de automorfismos G solúvel de ordem n , com n e p primos entre si, tal que o grupo de pontos fixos $C_P(G)$ é solúvel de comprimento derivado d , então P é nilpotente de classe limitada por uma função que depende somente dos números p, n e d .*

Para isso, faremos uso de uma generalização do Teorema de Kreknin e uma generalização do Teorema de Higgins, dadas, respectivamente pelos:

Teorema 2.71. (Khukhro, Shumyatsky [4]) *Seja α um automorfismo semissimples de ordem n de uma álgebra de Lie L tal que*

$$[L, \underbrace{C_y(\alpha), \dots, C_y(\alpha)}_m] = 0.$$

Então

$$dlL \leq (m + 1)^{n-1} + \log_2 m.$$

Teorema 2.72. (Khukhro, Shumyatsky [4]) *Se uma álgebra de Lie $(p - 1)$ -Engel L de característica p (ou 0) admite um grupo de automorfismos G solúvel finito de ordem n coprima com a característica, tal que $C_L(G)$, a subálgebra de pontos fixos, é solúvel de comprimento derivado d , então a álgebra de Lie L é nilpotente de classe limitada somente em termos de p, n e d .*

Faremos o estudo de álgebras de Lie e utilizaremos o Método de Lie para associar uma álgebra de Lie a um grupo. Também estudaremos centralizadores de automorfismos, grupos e álgebras de Lie solúveis e nilpotentes, entre outros conceitos presentes na Teoria de Grupos.

Conclusões

Concluimos que o estudo dos centralizadores de automorfismos se torna uma ferramenta muito importante durante a tentativa de se obter informações sobre grupos. Com este estudo, vivenciamos o enriquecimento das pesquisas e o desenvolvimento do estudo na área de Álgebra, principalmente, da Teoria de Grupos.

Referências

- [1] HALL, P.; HIGMAN, G. *On the p -length of p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's Problem*, Proc. London Math. Soc.,6, 1-42, (1956).
- [2] HIGGINS, P. J., *Lie rings satisfying the Engel condition*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 50, 8-15, (1954).
- [3] HIGMAN, G., *Groups e lie rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements*, J. London. Math. Soc. 32, 321-334, (1957).
- [4] KHUKHRO, E. I.; SHUMYATSKY, P. *Fixed Points of Automorphisms of Lie Rings and Locally Finite Groups*, Algebra and Logic, Vol. 34, No. 6, (1995).
- [5] KREKNIN, V. A., *The solubility of Lie algebras with regular automorphisms of finite period*, English Trasl. in Math. USSR Doklady 4, 683-685, (1963).
- [6] MAGNUS, W., *A connection between the baker-hausdrff formula and a problem of Burnside*, Ann. of Math. (2) 52, 111-126, (1950).
- [7] SHUMYATSKY, P., *On Periodic Soluble Groups and Fixed Point Group of Operators*, Comm. Algebra 20(10), (1992).
- [8] THOMPSON, J. G., *Finite Groups With Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 578-581, (1959).

- [9] WARD, J. N., *On finite groups admitting automorphisms with nilpotent fixed-point groups*, Bull. Austral. Math. Soc. 5, 281-282, (1971).
- [10] WARD, J. N., *On finite soluble groups and the fixed-point groups of automorphisms*, Bull. Austral. Math. Soc. 5, 275-378, (1971).
- [11] ZELMANOV, E. *The solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent*, Math. USSR Izvestija 36, 41-60, (1991).
- [12] ZELMANOV, E. *The solution of the Restricted Burnside Problem for 2-groups*, Math. Sb. 182, 568-592, (1991).

P4 - Sobre Grupos Satisfazendo Leis Positivas e Variedades de Grupos

Jhone Caldeira, Aline de Souza Lima & Natália Silva Nascimento (UFG)

Resumo

Neste trabalho estudaremos a estrutura de grupos satisfazendo uma lei positiva, ou seja, uma identidade da forma $u \equiv v$, onde u e v são palavras positivas. A questão principal é saber quando tais grupos são extensão de grupos nilpotentes por grupos de expoente finito. Estudaremos a resposta afirmativa a essa questão para uma larga classe C de grupos, incluindo grupos solúveis e residualmente finitos, mostrando que, além disso, as classes de grupos nilpotentes e de grupos de expoente finito em questão são as únicas limitadas em termos do comprimento da lei positiva. Veremos também que, em particular, se a variedade de grupos é localmente finita e nilpotente, então ela pode, de fato, estar contida em um produto de uma variedade nilpotente por uma variedade localmente finita de expoente finito. Disso seguem corolários interessantes, por exemplo, que grupos de livres de torção, residualmente finitos, n -Engel são nilpotentes de classe limitada em termos de n . Ainda, consideraremos a questão de Bergman para saber se uma lei positiva em uma generalização de um subsemigrupo de um grupo deve ser de fato uma lei em todo o grupo, mostrando que ela tem uma resposta afirmativa para grupos solúveis. Todas as nossas discussões estão baseadas nos trabalhos de Burns, Macedońska e Medvedev [2] e Fernández-Alcober e Shumyatsky [4].

Introdução

Neste trabalho estudaremos a estrutura de grupos satisfazendo uma lei positiva, ou seja, uma identidade da forma $u \equiv v$, onde u e v são palavras positivas. A questão principal é saber quando tais grupos são extensão de grupos nilpotentes por grupos de expoente finito. Estudaremos a resposta afirmativa a essa questão para uma larga classe C de grupos, incluindo grupos solúveis e residualmente finitos, mostrando que, além disso, as classes de

grupos nilpotentes e de grupos de expoente finito em questão são as únicas limitadas em termos do comprimento da lei positiva. Veremos também que, em particular, se a variedade de grupos é localmente finita e nilpotente, então ela pode, de fato, estar contida em um produto de uma variedade nilpotente por uma variedade localmente finita de expoente finito. Disso seguem corolários interessantes, por exemplo, que grupos de livres de torção, residualmente finitos, n -Engel são nilpotentes de classe limitada em termos de n . Ainda, consideraremos a questão de Bergman para saber se uma lei positiva em uma generalização de um subsemigrupo de um grupo deve ser de fato uma lei em todo o grupo, mostrando que ela tem uma resposta afirmativa para grupos solúveis. Todas as nossas discussões estão baseadas nos trabalhos de Burns, Macedońska e Medvedev [2] e Fernández-Alcober e Shumyatsky [4].

Materiais e Métodos

Nossos estudos e demonstrações a respeito dessas questões e resultados são baseados fortemente nos trabalhos de Shalev [12] sobre os grupos finitos satisfazendo uma lei positiva e vários trabalhos de Zelmanov [15-18] sobre o Problema Restrito Burnside, condições de Engel e anéis de Lie, além de resultados de Lubotzky e Mann [9] sobre p -grupos potentes.

Definição 2.73. *Seja F um grupo livre sobre $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dizemos que um elemento da forma $x_{i_1}^{m_1} x_{i_2}^{m_2} \dots x_{i_k}^{m_k}$ é uma palavra positiva se x_i é um elemento não trivial de F e tal elemento não envolve os inversos de x_i , ou seja, $k \geq 1$ e $m_j \geq 1$ para $j = 1, \dots, k$. Uma lei positiva (ou de semigrupo) de um grupo G é uma identidade não trivial da forma $u \equiv v$, onde u e v são palavras positivas em F , sobre toda substituição $X \rightarrow G$. O grau de uma lei é o máximo dos comprimentos dentre u e v .*

Neste trabalho, estudaremos uma estrutura de grupos satisfazendo uma lei positiva por um resultado de Mal'cev: Um grupo que é a extensão de um grupo nilpotente por um grupo de expoente finito satisfaz uma lei positiva. A questão principal de nosso interesse é discutir a veracidade da recíproca.

Resultados e Discussões

Questão 2.74. *Se um grupo G satisfaz uma lei positiva, então G deve ser uma extensão de um grupo nilpotente por um grupo finito?*

Olshanskii e Storozhev [10] têm mostrado que em geral a resposta dessa questão é falsa. Eles exibem um exemplo de um grupo 2 -gerado satisfazendo uma lei positiva que não é uma extensão de um grupo nilpotente por um grupo finito. Mas existe um outro resultado, enunciado mais tarde, que nos dá uma resposta afirmativa para uma larga classe C de grupos incluindo os grupos solúveis e residualmente finitos. Além disso, é possível considerar uma outra ilustração para a dicotomia indicada. Em particular, pela diferença da metodologia e dos resultados associados com, por um lado, a solução positiva do Problema Restrito de Burnside e, por outro lado, a solução negativa do Problema Geral de Burnside, dentre os grupos obtidos por um caminho padrão via abordagens para grupos solúveis e localmente finitos, o que não é o caso dos exemplos apresentados.

Para um inteiro positivo e , denotamos por \mathfrak{B}_e a variedade de Burnside restrita de expoente e , ou seja, a variedade gerada por todos os grupos finitos de expoente e . Também definimos um *SB-grupo* como sendo igual a um produto de muitas (finitas) variedades onde cada uma delas é ou solúvel ou \mathfrak{B}_e (para algum e).

Teorema 2.75 (2). *Seja n um inteiro positivo. Existem funções $c(n)$ e $e(n)$, dependendo apenas de n , tal que um SB-grupo G satisfazendo uma lei positiva de grau n é uma extensão de um grupo nilpotente de classe no máximo $c(n)$ por um grupo localmente finito de expoente dividindo $e(n)$, isto é,*

$$G \in \mathfrak{N}_{c(n)} \mathfrak{B}_{e(n)},$$

onde $\mathfrak{N}_{c(n)}$ denota a variedade de todos os grupos nilpotentes de classe no máximo $c(n)$.

A dependência de n nos parâmetros $c(n)$ e $e(n)$ do teorema anterior tem como consequência que se em um grupo G todo subgrupo finitamente gerado é um *SB-grupo*

e satisfaz a lei positiva (possivelmente dependendo do subgrupo) de grau no máximo n , então $G \in \mathfrak{R}_{c(n)}\mathfrak{B}_{e(n)}$. Similarmente, se G é um produto subcartesiano de SB -grupos todos satisfazendo uma lei positiva de grau no máximo n , então novamente $G \in \mathfrak{R}_{c(n)}\mathfrak{B}_{e(n)}$.

Seja C uma classe de grupos obtidos pela classe de todos os SB -grupos por repetidas aplicações das operações L e R , onde para todo grupo em uma classe X de grupos, LX é a classe de todos os grupos localmente X e RX é a classe dos grupos residualmente X . Em particular, grupos residualmente finitos e grupos localmente solúveis pertencem a C . Veremos a seguinte extensão do Teorema 2.75.

Teorema 2.76. *Se um grupo G pertence a classe C e satisfaz uma lei positiva de grau n , então*

$$G \in \mathfrak{R}_{c(n)}\mathfrak{B}_{e(n)}.$$

Para G residualmente finito isto melhora o Teorema A devido a Shalev [12], que afirma que um grupo residualmente finito satisfazendo uma lei positiva é uma extensão de um “grupo fortemente localmente nilpotente” por um grupo de expoente finito. Entendemos por um grupo fortemente localmente nilpotente um grupo que gera variedades localmente nilpotentes.

Segue do Teorema 2.75 que de fato um tal grupo pertence a $\mathfrak{R}_c\mathfrak{B}_e$, para alguns c e e .

Teorema 2.77. *Uma variedade \mathfrak{B} de grupos é localmente nilpotente-por-finito (isto é, todos os seus subgrupos finitamente gerados são extensões de um grupo nilpotente por um finito) se, e somente se,*

$$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}_c\mathfrak{B}_e$$

para alguns c e e .

Questão 2.78 (Questão de Bergman). *Sejam G um grupo e $S \subseteq G$ algum subsemigrupo gerador de G . Existe alguma lei positiva satisfeita por S (isto é, valendo sobre todas as substituições $X \rightarrow S$) sendo na verdade satisfeita por G ?*

Burns, Macedońska e Medvedev [2] afirmam que Ivanov e Rips têm independentemente construído exemplos mostrando que a resposta em geral para a questão de Bergman é negativa.

Teorema 2.79. *A questão de Bergman tem uma resposta afirmativa para grupos solúveis: se G é um grupo solúvel (ou um pouco mais geral, uma extensão de um grupo solúvel por um grupo localmente finito de expoente finito) e $S \subseteq G$ é um subsemigrupo gerador satisfazendo uma lei positiva, então essa lei vale em G (daí, pelo Teorema 2.75, G está realmente em $\mathfrak{R}_{c(n)}\mathfrak{B}_{c(n)}$, onde n é o grau da lei positiva).*

Burns, Macedońska e Medvedev [2] conjecturaram que este resultado se mantém em geral para SB -grupos, e conseqüentemente, para os grupos em C . Também afirmam ser capazes de mostrar que para alcançar esta extensão do teorema anterior é suficiente impor que G seja uma extensão de um grupo localmente finito de expoente finito por um grupo nilpotente.

Conclusões

Acreditamos que realizando essas discussões e aprofundando o estudo das demonstrações dessas questões e teoremas, poderemos interagir de forma bastante interessante com importantes problemas em discussão pela comunidade matemática, em especial, pelos pesquisadores na área de Álgebra e Teoria dos Grupos. Estas abordagens nos permitirão conhecer fortemente resultados de Shalev [12], de Burns & Macedońska & Medvedev [2] e de Fernández-Alcober & Shumyatsky [4] sobre grupos finitos satisfazendo uma lei positiva e outros de Zelmanov [15-18] a respeito do Problema Restrito de Burnside e anéis de Lie com condições de Engel, além de importantes trabalhos de Lubotzky e Mann [9] sobre p -grupos potentes.

Referências

- [1] R. G. BURNS, Y. MEDVEDEV, *A note on Engel groups and local nilpotence*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 64 (1998), 92-100.
- [2] R. G. BURNS, O. MACEDOŃSKA, Y. MEDVEDEV, *Groups satisfying semigroup laws, and nilpotent-by-Burnside varieties*. J. Algebra 195 (1997), no. 2, 510-525.
- [3] W. BURNSIDE, *Theory of Groups*, 2.ed. edition, Dover, New York, 1955.
- [4] G. FERNÁNDEZ-ALCOBER, P. SHUMYATSKY, *Positive laws on large sets of generators and on word values*. Ischia Group Theory 2006, 125-137, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [5] I. N. HERSTEIN, *Topics in Algebra*. 2.ed., New York, J. Wiley & Sons, 1995.
- [6] N. JACOBSON, *Lectures in abstract algebra*. II, Van Nostrand, 1953.
- [7] N. JACOBSON, *Lie Algebras*. New York, Interscience, 1962.
- [8] M. I. KARGAPOLOV, JU. I. MERZLJAKOV, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [9] A. LUBOTZKY, A. MANN, *Powerful p -groups*, I. Finite groups, J. Álgebra 105 (1987), 484-505.
- [10] A. YU. OLSHANSKII, A. STOROZHEV, *A group variety defined by a semigroup law* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 60 (1996), 255-259.
- [11] D. J. S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, 2.ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [12] A. SHALEV, *Combinatorial conditions in residually finite groups*, II, J. Algebra 157 (1993) 51-62.
- [13] P. SHUMYATSKY, J. C. SILVA, *Varieties of Groups and the Restricted Burnside Problem*, Ischia Group Theory 2008, World Scientific, 2009.
- [14] J. C. SILVA, *Variedades de Grupos e Generalizações Verbais para o Problema Restrito de Burnside*, Universidade de Brasília, Tese de Doutorado, 2009.

[15] E. ZELMANOV, *Engel Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 292 (1987), 265-268.

[16] E. ZELMANOV, *The solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent*. Math. USSR Izvestija 36, 1991, 41-60.

[17] E. ZELMANOV, *The solution of the Restricted Burnside Problem for 2-groups*, Math. Sb. 182, 1991, 568-592.

[18] E. ZELMANOV, *Nil rings and periodic groups*, The Korean Math. Soc. Lecture Notes in Math., Seoul, (1992).

P5 - Campos Vetoriais Reversíveis no Plano

Kamila da Silva Andrade & João Carlos da Rocha Medrado (UFG)

Resumo

Introdução

Consideremos no espaço de campos vetoriais definidos em \mathbb{R}^2 o conjunto Ω composto pelos germes de campos de vetores C^r -reversíveis em 0 de \mathbb{R}^2 com a topologia C^r para $r > 3$.

Dizemos que o campo de vetores X é ϕ -reversível do tipo $(2, 1)$ se

$$D\phi(p).X(p) = -X(\phi(p))$$

para p em $\mathbb{R}^2, 0$, onde ϕ é uma involução e $\dim(\text{Fix}(\phi)) = 1$.

Estudamos bifurcações genéricas de campos vetoriais reversíveis definidos no plano, ao redor de um ponto singular simétrico. A técnica do estudo consiste em primeiro mudarmos as coordenadas ao redor da singularidade simétrica e então estudamos o contato entre as órbitas do campo vetorial e a subvariedade do \mathbb{R}^2 dada pelos pontos fixos da involução ϕ . Descrevemos o comportamento das singularidades estabelecendo uma relação com as singularidades que originam do contato entre o campo de vetores e a curva simétrica original. A principal razão de usar esta técnica é que a teoria de contatos fornece poderosas ferramentas geométricas. Observamos ainda que este método também pode ser utilizado para campos vetoriais definidos em variedades em dimensões mais altas.

Apresentamos todos os diferentes tipos topológicos de singularidades simétricas no plano de campos de vetores de codimensão 0, 1 e 2, suas formas normais, seus respectivos desdobramentos e portanto, uma completa lista de modelos topológicos para todas famílias a dois parâmetros de campos vetoriais reversíveis.

Apresentamos ainda os retratos de fase destes campos em seus diagramas de bifurcação e demonstraremos os teoremas:

Teorema 2.80 (Singularidades Genéricas). *As formas normais de campos de vetores C^0 -estruturalmente estáveis em Ω são:*

1. $X_{00}(x, y) = (0, 1/2)$;
2. $X_{01}(x, y) = (y, x/2)$;
3. $X_{02}(x, y) = (y, -x/2)$.

Teorema 2.81 (Classificação de Singularidades de Codimensão 1). *Em um espaço de famílias de 1-parâmetro de campos de vetores em Ω , um conjunto denso é formado por famílias tais que suas formas normais são:*

1. *As formas normais de campos de vetores C^0 -estruturalmente estáveis em Ω ;*
2. $X_\lambda(x, y) = (y, 1/2(\lambda + x^2))$;
3. $X_\lambda(x, y) = (\epsilon xy, 1/2(2\epsilon y^2 + x + \lambda))$ com $\epsilon = \pm 1$;
4. $X_\lambda(x, y) = (xy, 1/2(-y^2 + x + \lambda))$;
5. $X_\lambda(x, y) = (xy + y^3, 1/2(-x + y^2 + \lambda))$.

Teorema 2.82 (Classificação de singularidades de codimensão 2). *Em um espaço de famílias de 2-parâmetros de campos de vetores em Ω , um conjunto denso é formado por famílias tais que suas formas normais são:*

1. *As formas normais de campos de vetores listadas no Teorema 2.81;*
2. $X_{\alpha\beta}(x, y) = (y, \frac{1}{2}[bx^3 + \alpha x^2 + \beta x])$ com $b = \pm 1$;
3. $X_{\alpha\beta}(x, y) = (-xy, \frac{1}{2}[-x + a(y^2 - x + \alpha)^2] + \beta)$ com $a = \pm 1$;
4. $X_{\alpha\beta}(x, y) = (\beta y - y^3 + xy[\alpha + x^2 + (y^2 - \beta)^2], \frac{1}{2}[x + (y^2 - \beta)[\alpha + x^2 + (y^2 - \beta)^2]])$;

5. $X_{\alpha\beta}(x, y) = (xy + \alpha y^3, \frac{1}{2}[x + y^2 + \beta]);$
6. $X_{\alpha\beta}(x, y) = (xy, \frac{1}{2}[\alpha x - y^2 + ax^2 + \beta])$ com $a = \pm 1;$
7. $X_{\alpha\beta}(x, y) = (axy, \frac{1}{2}[\alpha x + by^2 \pm 3x^2 + \beta])$ com $a = 1$ e $b = 3$ ou $a = 3$ e $b = 1.$

Campos Vetoriais Reversíveis

Seja Ω o espaço dos germes de campos de vetores C^r -reversíveis em 0 de \mathbb{R}^2 com topologia C^r para $r > 3$.

Definição 2.83. *Dois campos de vetores X_1 e X_2 em Ω são C^0 -equivalentes se existe um homeomorfismo que aplica as trajetórias de X_1 nas trajetórias de X_2 .*

Vamos trabalhar com as involuções que são germes de difeomorfismos C^∞ , $\phi : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$, satisfazendo $\phi \circ \phi = Id$ e $\det(D\phi(0)) = -1$. E o conjunto $S = fix\{\phi\}$ é uma curva integrável em $\mathbb{R}^2, 0$.

Pelo Teorema de Montgomery–Bochner temos que, na vizinhança de um ponto fixo, a involução ϕ é C^∞ -conjugada a $\varphi = (x, -y)$.

Denotamos por Ω o conjunto de todos os campos de vetores φ -reversíveis em $\mathbb{R}^2, 0$. Nestas coordenadas temos que $S = \{y = 0\}$. Dotamos Ω com topologia C^r , $r > 3$.

Consideremos a seguir (u, v) um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2, 0$, o conjunto

$$M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 0; v \geq 0\}$$

e o conjunto χ de todos os C^r -campos de vetores em M ($r > 3$) dotado com topologia C^r . Denotamos o bordo de M por S .

Definição 2.84. *Dois campos de vetores F_1 e F_2 (definidos em M), em χ são ditos C^0 -equivalentes se existe um homeomorfismo em $\{v \geq 0\}$, (necessariamente preservando o bordo $\{v = 0\}$) que aplica trajetórias de F_1 em trajetórias de F_2 .*

Definição 2.85. Um ponto $p \in S$ é uma S -singularidade de $F \in \chi$ se $F(p)$ é tangente a S em p .

Seja $h : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u, v) = v$. Nestas coordenadas o conjunto S -singular de F em χ é determinado pelas equações:

$$h = 0 \text{ e } Fh = \nabla h \cdot F = 0.$$

Observamos que $F^n h = F F^{n-1} h = \nabla(F^{n-1} h) \cdot F$.

Definição 2.86. Dizemos que uma singularidade $p \in S$ é uma dobra de F se

$$h(p) = Fh(p) = 0 \text{ e } F^2 h(p) \neq 0.$$

Definição 2.87. Dizemos que uma singularidade $p \in S$ é uma cúspide de F se

$$h(p) = Fh(p) = F^2 h(p) = 0 \text{ e } F^3 h(p) \neq 0.$$

Singularidades Genéricas

Seja $X \in \Omega$. Nas coordenadas (x, y) determinadas acima temos que, se $X = (f(x, y), g(x, y))$ e X é φ -reversível então podemos escrever X na forma:

$$X(x, y) = (yf(x, y^2), 1/2g(x, y^2)).$$

No semiplano $y > 0$, considere

$$u = x \text{ e } v = y^2.$$

Um simples cálculo mostra que nestas coordenadas X é transformado em:

$$\tilde{X}(u, v) = (\sqrt{v}f(u, v), \sqrt{v}g(u, v)) \text{ em } v > 0.$$

Segue que em $y > 0$, X é topologicamente equivalente à $F = F(X)$, onde

$$F(u, v) = (f(u, v), g(u, v)) \text{ para } v > 0.$$

Observação 2.88. *F pode ser C^∞ –estendido para uma vizinhança de 0 . Pelas propriedades simétricas de X (com respeito à involução canônica) deduzimos o comportamento de $F(X)$ em $M, 0$ e assim, determinando completamente o comportamento de X em 0 . Portanto, o problema inicial é transformado em analisar o retrato de fase de F em M . Não fazemos distinção entre F e qualquer de suas extensões.*

Singularidades de Codimensão 1

Denotamos por Σ_0 o conjunto de todos os elementos em χ que são estruturalmente estáveis em 0 e por v_0 o subconjunto de Ω constituído de elementos que são estruturalmente estáveis (em Ω).

Consideremos os conjuntos $\chi_1 = \chi \setminus \Sigma_0$ e $\Omega_1 = \Omega \setminus v_0$ (a bifurcação dos conjuntos χ e Ω , respectivamente). Seja Σ_1 o subconjunto de χ_1 constituído pelos elementos que são estruturalmente estáveis com relação à χ_1 .

O primeiro passo é encontrar formas normais para singularidades de codimensão 1 no bordo. Primeiramente, damos uma idéia intuitiva da estratégia usada para classificar singularidades no bordo. Dado $F = (f, g)$ em χ tal que $g(0) = 0$, temos as seguintes possibilidades:

- (i) $f(0) \neq 0$
- (ii) $f(0) = 0$.

No caso (i) todas as formas normais podem ser obtidas do Lema da Forma Normal de Vishik em [Vis]. O caso (ii) não pode ocorrer em codimensão zero. As S –singularidades de codimensão 1 são classificadas sob as seguintes condições:

- (a) 0 é um ponto singular hiperbólico de F ;
- (b) os autovalores de $DF(0)$ são distintos;
- (c) os autoespaços de $DF(0)$ são transversais a S , em 0 .

As S -singularidades de codimensão 2 são caracterizadas por violações genéricas de cada uma das condições acima.

Lema 2.89. [Lema de Classificação] Σ_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de χ_1 . Além disso, os elementos de Σ_1 são classificados a seguir:

1. S -singularidade cúspide (definição 2.87);
2. S -singularidade nó: $F(0) = 0$, os autovalores de $DF(0)$ (λ_1 e λ_2) são reais, distintos, $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e os autoespaços são transversais a S em 0;
3. S -singularidade sela: $F(0) = 0$, os autovalores de $DF(0)$ são reais, distintos, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ e os autoespaços são transversais a S em 0;
4. S -singularidade foco: 0 é um ponto singular hiperbólico de F e os autovalores de $DF(0)$ são $\lambda = a \pm ib$, com $a, b \neq 0$.

Lema 2.90. [Lema da Forma Normal] Uma família à 1-parâmetro F_λ , $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$, do campo de vetores em χ , transversal à Σ_1 em F_0 , tem as seguintes formas normais:

1. F_0 é uma S -singularidade cúspide: $F_\lambda(u, v) = (1, \lambda + u^2)$;
2. F_0 é uma S -singularidade nó: $F_\lambda(u, v) = (au, u + bv + \lambda)$ com $a = 1, b = 2$ (ou $a = -1, b = -2$);
3. F_0 é uma S -singularidade sela: $F_\lambda(u, v) = (u, u - v + \lambda)$;
4. F_0 é uma S -singularidade foco: $F_\lambda(u, v) = (u + v, -u + v + \lambda)$;

O restante da seção será voltada para determinar resultados similares (Lemas 2.89 e 2.90) para sistemas reversíveis segundo uma correlação entre X e $F(X)$.

Em Ω definimos o subconjunto v_1 da seguinte maneira:

“ $X \in v_1$ se a origem é uma singularidade genérica de codimensão 1 do correspondente $F = F(X)$.”

Isto significa que $X \in v_1$ se, e somente se, $F = F(X) \in \Sigma_1$.

O seguinte lema segue da definição de v_1 e do teorema em [Tei2]:

Lema 2.91. v_1 é aberto e denso em Ω_1 . Além disso, v_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de Ω .

O seguinte resultado é consequência dos Lemas 2.89 e 2.90.

Proposição 2.92. (i) X (em Ω_1) é estruturalmente estável com relação à Ω_1 se, e somente se, $F(X)$ é estruturalmente estável com relação a χ_1 ;

(ii) X é estruturalmente estável em Ω_1 se, e somente se, $X \in v_1$;

(iii) As formas normais de qualquer família a 1-parâmetro de elementos em Ω passando por $X_0 \in v_1$ e transversal a v_1 são:

1. tipo cúspide: $X_\lambda = (y, \frac{1}{2}(\lambda + x^2))$;
2. tipo nó: $X_\lambda = (xy, \frac{1}{2}(x + 2y^2 + \lambda))$
(ou $X_\lambda = (-xy, \frac{1}{2}(x - 2y^2 + \lambda))$);
3. tipo sela: $X_\lambda = (xy, \frac{1}{2}(x - y^2 + \lambda))$;
4. tipo foco: $X_\lambda = (xy + y^3, \frac{1}{2}(-x + y^2 + \lambda))$.

Singularidades de Codimensão 2

Começamos derivando preliminarmente formas normais de S -singularidades de codimensão 2 e então deduzimos os tipos topológicos de uma família a 2-parâmetros genérica de campos de vetores em Ω .

Seja X em $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus v_1$. Então o correspondente $F = F(X)$ está em $\chi_2 = \chi_1 \setminus \Sigma_1$ e vice versa.

Seja Σ_2 o subconjunto de χ_2 constituído pelos elementos de F tais que:

1. S -singularidade dove's tail: $F(0) \neq 0$, $Fh(0) = F^2h(0) = F^3h(0) = 0$ e $F^4(0) \neq 0$;
2. S -singularidade sela-nó: 0 é uma sela-nó de F e os autoespaços de $DF(0)$ são transversais a S em 0 ;
3. S -singularidade Hopf: $F(0) = 0$, 0 é uma singularidade Hopf de codimensão 1 de F ;
4. S -singularidade nó-degenerado: $F(0) = 0$, os autovalores de $DF(0)$ são iguais a λ , $\text{rank}(DF(0) - \lambda Id) = 1$ e os correspondentes autoespaços são transversais a S em 0 ;
5. S -singularidade tangente hiperbólica: $F(0) = 0$, os autovalores de $DF(0)$ são reais e distintos, e tem uma variedade invariante tendo contato quadrático com S em 0 . Além disso, aos autovalores não satisfazem a equação $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Observe que no caso (5) determinamos diferentes tipos topológicos de uma S -singularidade. Eles dependem principalmente da posição relativa da variedade invariante com respeito ao bordo e se a singularidade é uma sela ou um nó. Além disso, no caso nó temos que a separar quando a variedade invariante forte é tangente a S ou não.

Abaixo listamos alguns resultados, a maior parte provada em [Tei3].

Lema 2.93. (i) Σ_2 é aberto e denso em χ_2 ;

(ii) F é estruturalmente estável com relação à χ_2 se, e somente se, $F \in \Sigma_2$;

(iii) Σ_2 é uma subvariedade de codimensão 2 de χ ;

(iv) as formas normais de qualquer família a 2-parâmetros $F_{\alpha\beta}$ transversal a Σ_2 em F_{00} são:

1. dove's tail: $F_{\alpha\beta}(u, v) = (1, bu^3 + \alpha u^2 + \beta u)$ com $b = \pm 1$;

2. *sela-nó*: $F_{\alpha\beta}(u, v) = (-u, -u + a(v - u + \alpha)^2 + \beta)$ com $a = \pm 1$;

3. *bifurcação Hopf*:

$$F_{\alpha\beta}(u, v) = (\beta - v + u[\alpha + u^2 + (v - \beta)^2], u + (v - \beta)[\alpha + u^2 + (v - \beta)^2]);$$

4. *nó-degenerado*: $F_{\alpha\beta}(u, v) = (u + \alpha v, u + v + \beta)$;

5. *sela tangente*: $F_{\alpha\beta}(u, v) = (u, \alpha u - v + au^2 + \beta)$ com $a = \pm 1$;

6. *nó tangente*: $F_{\alpha\beta}(u, v) = (au, \alpha u + bv \pm 3u^2 + \beta)$

com $a = 1$ e $b = 3$ ou $a = 3$ e $b = 1$;

Referências

[Per] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems, Texts in applied mathematics*, Vol. 7, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Tei1] M. A. Teixeira, *Singularities of reversible vector fields*, *Physica D* **100**, 101–118, 1997.

[Tei2] M. A. Teixeira, *Generic bifurcation in manifolds with boundary*, *J. Differential Equations* **25**, 65–89, 1977.

[Tei3] M. A. Teixeira, *Generic bifurcation of certain singularities*, *Boll. Un. Mat. Italiana* **25**, 15–29, 1979.

[Vis] S.N. Vishik, *Vector fields near boundary of a manifold*, *Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika* **27** (1), 21–28, 1972.

P6 - Normal Forms for Sewing Linear Systems

Kamila da Silva Andrade & João Carlos da Rocha Medrado (UFG)

Resumo

Resultados e Discussão

A large number of problems from mechanics, electrical engineering and the theory of automatic control are described by non-smooth differential systems, see [AVK]. The basic methods of qualitative theory for this kind of differential systems were established or developed in the book [Fi] and in a large number of papers, see for instance [Ba], [CGP], [BBCK], [GT], [KM]. Besides planar linear global differential systems can have at most 10 (7 non degenerated) different phase portraits (see for instance [dum81]) and no limit cycles, the number of different phase portraits, and the maximum number of limit cycles of piecewise linear systems (even with as few as two regions) is still unknown. The fact that we can situate on each region a linear system with either a real singular point, or a virtual one, plus the fact that another singular point may appear on the set of discontinuity by the combination of the two flows, and the possible existence of limit cycles, increases a lot the number of possible phase portraits of a piecewise linear differential system.

In this work we study piecewise linear systems on the Euclidean space, \mathbb{R}^2 , and we consider the straight line $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ as the set of discontinuity. Observe that if $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is given by $f(x, y) = y$ then $\Sigma = f^{-1}(0)$, thus Σ is the separating boundary of the regions $\Sigma^+ = \{p \in \mathbb{R}^2 | f(p) \geq 0\}$ and $\Sigma^- = \{p \in \mathbb{R}^2 | f(p) \leq 0\}$.

A vector field $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$, on \mathbb{R}^2 , is an application that for each point $p \in \mathbb{R}^2$ we get the associated the vector $X(p) \in T_p\mathbb{R}^2$, where $T_p\mathbb{R}^2$ is the tangent plane to \mathbb{R}^2 in the point p . The plane $T_p\mathbb{R}^2$ has a basis which we denote by $\{\frac{p}{p_x}, \frac{p}{p_y}\}$ and,

therefore, in this basis

$$X(p) = X_1(p) \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_x} + X_2(p) \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_y}.$$

So, given a smooth function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, we define

$$\begin{aligned} Xf(p) &= \left(X_1(p) \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_x} + X_2(p) \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_y} \right) f(p) \\ &= X_1(p) \frac{\mathcal{P}f}{\mathcal{P}_x}(p) + X_2(p) \frac{\mathcal{P}f}{\mathcal{P}_y}(p) \\ &= \langle (X_1(p), X_2(p)), \nabla f(p) \rangle \\ &= \langle X(p), \nabla f(p) \rangle, \end{aligned}$$

and $X^n f(p) = X(X^{n-1} f)(p) = \langle X(p), \nabla X^{n-1} f(p) \rangle$ for all $n \in \mathbb{N}$. We say that an orbit of X is tangent to Σ at p if $Xf(p) = 0$.

Let Γ be the space of C^∞ linear vector fields on \mathbb{R}^2 of the form $AX + B$, where $B \in \mathbb{R}^2$ and $A \in M^{2,2}(\mathbb{R})$ with $\det(A) \neq 0$, endowed with the C^∞ -topology and let $\Omega = \Omega(\mathbb{R}^2, f)$ be the space of vector fields $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{for } (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & \text{for } (x, y) \in \Sigma^-, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

where $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \Gamma$. We write $Z = (X, Y)$, which can be multivalued at points of Σ endowed with product topology on $\Omega = \Omega(\mathbb{R}^2, f)$.

The trajectories of Z are solutions of the autonomous differential equation system $\dot{p} = Z(p)$, which has, in general, discontinuous righthand side. The basic results of differential equations, in this context, were stated by Filippov in [Fi]. Related theories can be found in [K], [ST], [T].

Given $Z = (X, Y) \in \Omega$ the following regions in the discontinuity set Σ are distinguished:

- (i) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ is the *sewing region* if $(Xf)(Yf) > 0$ on Σ_1 ;

(ii) $\Sigma_2 \subseteq \Sigma$ is the *escaping region* if $(Xf) > 0$ and $(Yf) < 0$ on Σ_2 ;

(iii) $\Sigma_3 \subseteq \Sigma$ is the *sliding region* if $(Xf) < 0$ and $(Yf) > 0$ on Σ_3 .

A point $p \in \Sigma$ is a *sewing point*, an *escaping point* or a *sliding point* if $p \in \Sigma_1$, $p \in \Sigma_2$ or $p \in \Sigma_3$ respectively.

We are interested in the study of discontinuous linear systems, $Z = (X, Y) \in \Omega$, having only tangency and sewing points in Σ , this is, having the property $Xf(p)Yf(p) \geq 0$ for all $p \in \Sigma$, which we called *sewing linear systems*. We show that there are three normal forms for represent this systems, moreover, we present the phase portraits for the cases where the singular points of X and Y are on Σ . We remark that in this case both are the same. So, we can consider this point at origin.

We denoted by $\varphi(t, A)$ the flow of (2.3.1) and $\varphi^\pm(t, A)$ the flows of X and Y respectively. If $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ then $\varphi(t, A) = \varphi^\pm(t, A)$, if $A \in \Sigma$ and $(XfYf)(A) = 0$ then $\varphi(t, A) = A$ for all $t \in \mathbb{R}$, finally if $A \in \Sigma$ but $(XfYf)(A) \neq 0$ we have

- if $Xf(A), Yf(A) > 0$ then

$$\begin{cases} \varphi^-(t, A), & t < 0 \\ A, & t = 0 \\ \varphi^+(t, A), & t > 0 \end{cases}$$

- if $Xf(A), Yf(A) < 0$ then

$$\begin{cases} \varphi^+(t, A), & t < 0 \\ A, & t = 0 \\ \varphi^-(t, A), & t > 0 \end{cases}$$

Consider $Z = (X, Y) \in \Omega$ a sewing linear system. Then Z can be expressed by

$$Z = (X, Y) = \begin{cases} (a_1x + a_2y + a_3, b_1x + b_2y + b_3), & (x, y) \in \Sigma^+ \\ (c_1x + c_2y + c_3, d_1x + d_2y + d_3), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases} \quad . \quad (2.3.2)$$

Given $X \in \Gamma$, we say that an orbit of X is tangent to Σ at p if $Xf(p) = 0$ and this contact is of order n if $X^i f(p) = 0$ for $i = 1, \dots, n - 1$ and $X^n f(p) \neq 0$.

Lema 2.94. *Let $X \in \Gamma$ be expressed by $X = (a_1x + a_2y + a_3, b_1x + b_2y + b_3)$. If there exists an isolated tangency point $p \in \Sigma$ then $b_1 \neq 0$. Moreover, if $X^2 f(p) = 0$ then p is a singular point of X .*

So, we can conclude that if $p \in \Sigma$ is a tangency point but it is not a singular point of X then it is a fold point, this is, the contact on p is of order 2, which can be either internal (if $X^2 f(p) > 0$) or external (if $X^2 f(p) < 0$).

Lema 2.95. *Consider a sewing linear system $Z = (X, Y) \in \Omega$ given by (2.3.2) such that there are isolated tangency points of X and Y on Σ , then Y can be expressed by*

$$Y(x, y) = \left(c_1x + c_2y + c_3, d_1x + d_2y + \frac{b_3d_1}{b_1} \right), \quad (x, y) \in \Sigma^-, \quad (2.3.3)$$

with $b_1d_1 > 0$.

Now, in order to simplify the expression of (2.3.2), we consider the linear change of coordinates $\varphi = (\varphi_+, \varphi_-)$ such that φ_+ is definite on Σ^+ and φ_- on Σ^- , satisfying:

- (i) φ_+ and φ_- must be non degenerate,
- (ii) each point of Σ must be transformed for both, φ_+ and φ_- , into the same point again of Σ , and
- (iii) the rescaling of the time must have the same sign on Σ^+ and on Σ^- .

Lema 2.96. *Let φ_+ and φ_- be a pair of linear change of coordinates defined on Σ^+ and Σ^- respectively. If $\varphi_+(p) = \varphi_-(p) \in \Sigma$ for all $p \in \Sigma$, then*

$$\varphi_+(q_1) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} q_1 \quad \text{and} \quad \varphi_-(q_2) = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} q_2$$

for all $q_1 \in \Sigma^+$ and $q_2 \in \Sigma^-$.

Definição 2.97. We say that two sewing systems Z_1 and Z_2 on Ω are topologically equivalent if there exists a homeomorphism which maps trajectories of Z_1 onto trajectories of Z_2 , preserving Σ .

Lema 2.98. Consider a sewing linear system $Z = (X, Y) \in \Omega$ of the form

$$X = \begin{pmatrix} ay + b \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} ey + f \\ gx + hy \end{pmatrix}. \quad \text{Then } Z = (X, Y) \text{ is topo-}$$

logically equivalent to $\tilde{Z} = (Y, X)$.

Lema 2.99. Given $X \in \Gamma$ by

$$X = \begin{pmatrix} ay + b \\ cx + dy \end{pmatrix}, \quad \text{on } \Sigma^-.$$

Then X is equivalent to

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} -ay + b \\ -cx + dy \end{pmatrix}, \quad \text{on } \Sigma^+.$$

Lema 2.100. Given the vector field $X = \begin{pmatrix} ay + b \\ cx + dy + e \end{pmatrix} \in \Gamma^r$. Then it is equivalent to

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} a\tilde{y} + b \\ c\tilde{x} + d\tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Observação 2.101. Observe that a horizontal translation does not change phase portraits of the vector fields on Σ .

And now, we present the main result.

Theorem 1: Normal Forms for Sewing Linear Systems

Let $Z = (X, Y) \in \Omega$ a sewing system whit X and Y having a isolated tangency point. Then it can be written by

$$(i) \quad Z = \begin{cases} (y + \alpha_1, x + \alpha_2 y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ (y + \beta_1, x + \beta_2 y), & (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases}$$

$$(ii) Z = \begin{cases} (y + \alpha_1, x + \alpha_2 y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ (-y + \beta_1, x + \beta_2 y), & (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases}$$

$$(iii) Z = \begin{cases} (-y + \alpha_1, x + \alpha_2 y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ (-y + \beta_1, x + \beta_2 y), & (x, y) \in \Sigma^-. \end{cases}$$

Observação 2.102. *We don't present here the phase portraits, but we have done it in the original paper.*

Referências

[AVK] A.A. Andronov, A.A. Vitt, S.E. Khaikin, *Vibration Theory*, Fizmatgiz, Moscow, (in Russian), 1959.

[Ba] N.N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Mat. Sb. (N.S.) 30 (72) (1952) 181–196 (in Russian); Trans. Amer. Math. Soc. 100(1), 397–413, 1954.

[CGP] B. Coll, A. Gasull, R. Prohens, *Degenerate Hopf bifurcation in discontinuous planar systems*, J. Math. Anal. Appl. 253, 671–690, 2001.

[BBCK] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk, *Piecewise-Smooth Dynamical Systems, Theory and Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.

[dum81] F. Dumortier, P. R. Rodrigues, R. Roussarie, *Germes of diffeomorphisms in the plane. Lecture Notes in Mathematics*, 902. Springer-Verlag, Berlin-New York, iv+197 pp, 1981.

[Fi] A.F. Filippov, *Differential Equation with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer Academic, Netherlands, 1988.

[GT] A. Gasull, J. Torregrosa, *Center-focus problem for discontinuous planar differential equations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13, 1755-1765, 2003.

[K] V. S. Kozlova, *Roughness of a Discontinuous System*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika 5, 16–20, 1984.

[KM] T. Küpper, S. Moritz, *Generalized Hopf bifurcation for non-smooth planar systems*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 359, 2483–2496, 2001.

[ST] J. Sotomayor, M.A. Teixeira, *Regularization of Discontinuous Vector Fields*, International Conference on Differential Equations, Lisboa, 207–223, 1996.

[T] M.A. Teixeira, *Generic Singularities of Discontinuous Vector Fields*, An. Ac. Bras. Cienc. 53, no. 2, 257–260, 1991.

P7 - Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial Não-abeliano de um Grupo*Agenor Andrade & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)***Introdução**

Este trabalho destina-se ao estudo do artigo “On Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group” de Rocco [1]. O objetivo então é analisar um operador ν na classe dos grupos, que está relacionado com o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo, onde apresentaremos algumas propriedades envolvidas com tal operador, relacionando a finitude, solubilidade ou a nilpotência de um grupo G com a finitude, solubilidade ou nilpotência, respectivamente, de \mathcal{V} . Por fim, são estabelecidas algumas cotas para o quadrado tensorial $G \otimes G$, quando G é um p -grupo finito.

Definição 2.103. *Sejam G e G^φ grupos isomorfos por $\varphi, g \mapsto g^\varphi$, para todo $g \in G$. Definimos o seguinte grupo:*

$$\mathcal{V} = \left\langle G, G^\varphi \mid [g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^\varphi}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

Nossa motivação para introduzir \mathcal{V} é que ele possui um subgrupo $[G, G^\varphi]$ isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$, como será visto mais adiante.

Resultados e Discussão

Muito útil para o estudo desse artigo, foi o seguinte subgrupos do grupo \mathcal{V} .

$$\Delta = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G \rangle$$

A importância deste subgrupo, é destacada na demonstração de que \mathcal{V} herda as propriedades de finitude, nilpotência e solubilidade do grupo G , usando o fato de que

$$\frac{\mathcal{V}}{\Delta} \cong \frac{\chi(G)}{R(G)}.$$

Lema 2.104.

$$\Delta \leq \mathcal{V}' \cap Z(\mathcal{V}),$$

onde \mathcal{V}' e $Z(\mathcal{V})$ são respectivamente os subgrupos derivado e o centro do grupo \mathcal{V} .

Outro subgrupo muito importante é

$$\Upsilon = [G, G^\varphi] = \langle [g, h^\varphi] \mid g, h \in G \rangle.$$

A importância deste subgrupo deve-se ao fato dele ser isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano do grupo G .

Os principais resultados apresentados no artigo foram:

Lema 2.105. *Sejam g, g_1, g_2, g_3, g_4 elementos quaisquer de um grupo G . As seguintes relações são válidas em $\mathcal{V}(G)$:*

1. $[g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4^\varphi]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]^\varphi}$;
2. $[g_1, g_2^\varphi, g_3] = [g_1, g_2, g_3^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi, g_3^\varphi]$;
3. $[g_1^\varphi, g_2, g_3] = [g_1^\varphi, g_2, g_3^\varphi] = [g_1^\varphi, g_2^\varphi, g_3]$;
4. $[g, g^\varphi]$ é central em $\mathcal{V}(G)$;
5. $[g_1, g_2^\varphi][g_2, g_1^\varphi]$ é central em $\mathcal{V}(G)$;
6. $[g, g^\varphi] = 1$, para todo $g \in G'$.

Proposição 2.106. *Seja G um π -grupo finito ou, um grupo nilpotente finito ou, um grupo solúvel. Então \mathcal{V} é respectivamente um π -grupo finito ou, um grupo nilpotente finito ou, um grupo solúvel.*

A seguir apresentamos um dos resultados centrais obtidos por Rocco [1] em seu artigo.

Considere a aplicação τ abaixo, definida sobre os geradores de $G \otimes G$

$$\begin{aligned} \tau: G \otimes G &\longrightarrow \Upsilon \\ (g_1 \otimes g_2) &\longmapsto [g_1, g_2^\varphi]. \end{aligned}$$

Tal aplicação pode ser estendida à um epimorfismo de $G \otimes G$ em Υ , uma vez que, τ preserva as relações definidoras de $G \otimes G$.

Proposição 2.107. $\tau: G \otimes G \rightarrow \Upsilon$, dada por $(g_1 \otimes g_2)^\tau = [g_1, g_2^\varphi]$ é um isomorfismo.

Proposição 2.108. *Sejam*

$$\begin{aligned} G &= G^{(1)} \triangleright G^{(2)} (= G') \triangleright \dots \triangleright G^j \triangleright \dots, \\ 1 &= \xi_0(G) \trianglelefteq \xi_1(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \xi_j(G) \trianglelefteq \dots, \\ &e \\ G &= \gamma_1(G) \triangleright \gamma_2(G) \triangleright \dots \triangleright \gamma_j(G) \triangleright \dots, \end{aligned}$$

respectivamente, a série derivada, a série central superior e a série central inferior de G .

Então

1. $[\xi_j(G), (G^{(j+1)})^\varphi] = 1$, para todo $j \geq 0$;
2. $[\xi_{j+1}(G), \gamma_j(G^\varphi)] \cdot [\gamma_j(G), \xi_{j+1}(G^\varphi)]$ é central em Υ , para todo $j \geq 1$;
3. $[\xi_j(G), \gamma_j(G^\varphi)]$ é central em \mathcal{V} , para todo $j \geq 1$.

Os Resultados Principais

Lema 2.109.

$$\mathcal{V} = (\Upsilon \rtimes G) \rtimes G^\varphi.$$

Teorema 2.110. Para $i \geq 2$ o i -ésimo termo da série central inferior de \mathcal{V} é dado por

$$\gamma_i(\mathcal{V}) = \gamma_i(G) \gamma_i(G^\varphi) [\gamma_{i-1}(G), G^\varphi] [G, \gamma_{i-1}(G^\varphi)],$$

onde $\gamma_i(G)$ denota o i -ésimo termo da série central inferior do grupo G .

Em particular, se G é nilpotente de classe c , então \mathcal{V} é nilpotente de classe no máximo $c + 1$.

Teorema 2.111. Para $i \geq 2$, o i -ésimo termo da série derivada de \mathcal{V} é dado por

$$\mathcal{V}^{(i)} = G^{(i)}(G^\varphi)^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^\varphi)^{(i-1)}],$$

onde $G^{(i)}$ denota o i -ésimo termo da série derivada de G .

Em particular, se G é um grupo solúvel de comprimento derivado l , então \mathcal{V} é solúvel de comprimento derivado no máximo $l + 1$.

Mudando agora o foco para p -grupos finitos, Rocco [1], obteve os seguintes resultados, referentes a um limitante para a ordem dos grupos \mathcal{V} e Υ e, conseqüentemente, também para $G \otimes G$.

Lema 2.112. Seja G um p -grupo finito e $c \in Z(G) \cap G'$ um elemento de ordem p . Se Φ denota o subgrupo de Frattini de G , então

$$|\mathcal{V}| \text{ divide } p^2 \left| \frac{G}{\Phi} \right| \cdot \left| \left\langle \frac{G}{\langle c \rangle} \right\rangle \right|.$$

Proposição 2.113. Seja G um p -grupo finito de classe (de nilpotência) 2. Então $|\Upsilon|$ divide

$$\left| G' \otimes_Z \frac{G}{G'} \right| \cdot \left| \Upsilon \left(\frac{G}{G'} \right) \right|.$$

Corolário 2.114. Seja G um p -grupo de classe menor do que, ou igual a 2, com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então $|\Upsilon|$ divide $p^{n(n-m)}$.

Por fim, Rocco apresentou um limitante para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano de um p -grupo finito G .

Teorema 2.115. Seja G um p -grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então $|\mathcal{V}|$ divide $p^{n^2+2n-nm}$.

Através deste teorema que o limitante para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano foi estipulada, mediante o seguinte corolário:

Corolário 2.116. *Seja $|G| = p^n$, $|G'| = p^m$ e $d = d(G)$ o número minimal de geradores de G . Então*

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

Conclusões

Os principais fatos observados (e demonstrados) no artigo proposto pelo professor Rocco são:

- G finito $\implies \mathcal{V}$ finito;
- G π -grupo finito $\implies \mathcal{V}$ π - grupo finito;
- G nilpotente finito $\implies \mathcal{V}$ nilpotente finito , com $cl(\mathcal{V}) = cl(G)$ ou $cl(\mathcal{V}) = cl(G) + 1$;
- G solúvel $\implies \mathcal{V}$ solúvel, com $dl(\mathcal{V}) = dl(G)$ ou $dl(\mathcal{V}) = dl(G) + 1$;
- $\Upsilon = [G, G^\varphi] \cong G \otimes G$;
- G um p -grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m \implies p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}$.

Referências

- [1] Noraí. R., *On a Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group*, Bol. Soc. Bras. Mat., 1991.
- [2] Johnson, D. L., *Presentation of groups*, Cambridge University Press, 2. edição, 1997.
- [3] BROWN, R. and LODAY, J. L. Lyndon., *Van Kampen Theoremas for Diagrams of Spaces* , J. Topology, 1987.
- [4] Magnus, W., Karras, A., Solitar, D., *Presentation of groups in terms of generators and relations*, Interscience, 1966.

- [5] Robinson, D. J. S., *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, 2. edição, 1995.
- [6] Rotman, J. J., *The introduction to the theory of groups*, Springer-Verlag, 4. edição, 1994.
- [7] The GAP Group, *GAP- Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.4.12,(2008).
(<http://www.gap-system.org>).

P8 - Estudo da Série dos Custos da Cesta Básica de Goiânia

Karollyna Barbosa Bie (UFG) & Marcel Dantas de Quintela (UFS)

Resumo

Tendo a pesquisa da Cesta Básica Nacional, uma das principais formas de medir o custo de vida do trabalhador brasileiro previstos no Decreto de Lei nº 399 de 30/04/1938, o presente trabalho aborda no âmbito da capital goiana a série representativa do custo mensal da cesta básica no período de janeiro de 2003 a junho de 2011. Foi realizado o inflacionamento da série pelo IPCA (06/2010=1), desta forma trazendo ao cenário econômico atual dos custos reais de compra. Apoiados pelo software estatístico R-Project 2.12.1 foi aplicada à decomposição da cesta básica observou-se o comportamento de cada item, suas participações e variações, aplicando o exercício de modelar uma regressão múltipla, compostas pelos custos individuais de seus itens, desta forma subsidiar um modelo que permita predizer num momento futuro.

Introdução

A análise de regressão é uma ferramenta estatística muito poderosa aplicável a situações em que se desejam explicar valores de uma variável dependente em função de valores conhecidos de variáveis independentes. A utilização dessa ferramenta de análise em recursos computacionais potencializa o poder da estatística, e movidos pelo instinto investigativo intrínseco do ser humano motivaram o exercício da análise da série de custos da Cesta Básica da cidade de Goiânia.

Objetivo

Este estudo tem como objetivo explorar a Série de Custos da Cesta Básica de Goiânia, de forma descritiva e sob a aplicação de técnicas dos Modelos de Regressão Linear, propostas em (GURJARATI, 2005), aplicado aos custos totais da cesta e aos custos individuais dos itens que as compõe, utilizando o software de análise estatística R-Project.

Materiais e Métodos

O termo regressão foi criado por Francis Galton (Galton, Francis. “Family Likeness in Stature”. Londres: Proceedings of Royal Society. vol. 40, 1886, p. 42-72.), que verificou em um de seus artigos, que embora existisse uma tendência de que pais altos tivessem filhos altos e os pais baixos, filhos baixos, a estatura média das crianças nascidas de pais com dada altura tendiam a mover-se ou regredir à altura média da população. Em outras palavras, a altura de crianças filhas de pais mais altos ou mais baixos que o comum tende a mover-se no sentido da altura média da população.

Em termos modernos, pode-se dizer que:

A análise de regressão se ocupa da dependência de uma variável, a variável dependente, em relação a uma ou mais variáveis, as variáveis explanatórias, com vistas a estimar e/ou prever o valor médio (da população) da primeira em termos dos valores conhecidos ou fixados (em amostragens repetidas) das segundas. (GUJARATI, 2005, p.13)

Em termos práticos, suponhamos dispor de uma amostra com n unidades, e, ainda, que para cada unidade, temos um par de valores das variáveis X e Y (Custo total da Cesta Básica e os custos individuais de seus itens, por exemplo). Buscando estabelecer uma possível relação matemática entre as duas variáveis e, se a relação for boa, usá-la para fazer previsões. No exemplo, o interesse será estabelecer uma relação matemática (linear) entre os

valores individuais dos itens (X) e o custo total da Cesta Básica (Y), e dessa maneira prever valores o Custo Total da Cesta Básica em função dos valores individuais de seus itens.

O Modelo de Regressão Linear pode ser representado como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_i X_i + \beta_{i+1} X_{i+1} + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon_i$$

- **Y** – Variável Dependente ou Resposta;
- **X** – Variável Independente ou Preditora;
- β_0 – Intercepto ou coeficiente linear da reta;
- ε_i – erro aleatório de Y para a observação i;
- **i** – 1,2,...,n
- β_0 e β_i , também são conhecidos como parâmetros ou coeficientes da regressão.

Para se determinar a “equação” de regressão linear simples devem-se encontrar os coeficientes:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_i X_i + \hat{\beta}_{i+1} X_{i+1} + \dots + \hat{\beta}_n X_n$$

- \hat{Y}_i – valor da previsão de Y para uma observação de X_i ;
- X_i – valor de X para a observação i;
- $\hat{\beta}_0$ – estimador de β_0
- $\hat{\beta}_i$ – estimadores de β_i

A pesquisa da Cesta Básica Nacional, realizada pelo DIEESE - Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos, em dezesseis capitais do Brasil, acompanha mensalmente a evolução de preços de treze produtos de alimentação, assim como o gasto mensal que um trabalhador teria para comprá-los. A metodologia utilizada para a pesquisa da Cesta Básica Nacional é estabelecida com base no Decreto Lei nº. 399 de

30/04/1938, que regulamenta o salário mínimo no Brasil. A Cesta Básica Nacional, segundo esse decreto, seria suficiente para o sustento e o bem estar de um trabalhador em idade adulta, contendo quantidades balanceadas de proteínas, calorias, ferro, cálcio e fósforo.

Os produtos da Cesta Básica, da Região 1 (Região 1: SP, MG, ES, RJ, GO, DF) , e suas respectivas quantidades mensais: Carne - 6,0 kg; Leite - 7,5 l; Feijão - 4,5 kg; Arroz - 3,0 kg; Farinha - 1,5 kg; Tomate - 6,0 kg; Batata - 9,0 kg; Pão - 6,0 kg; Café - 600 g; Banana - 90 unid.; Açúcar - 3,0 kg; Óleo - 750 ml; e Manteiga - 750 g.

O *Índice de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA*, trabalhado pelo IBGE, foi utilizado como indexador da inflação. Através dele se verifica as variações dos custos com os gastos das pessoas que ganham de um a quarenta salários mínimos nas regiões metropolitanas de Belém, Belo Horizonte, Brasília, Curitiba, Fortaleza, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador, São Paulo e município de Goiânia. Coletado no dia 27 de julho de 2011 às 17:25, em:

http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/lista_tema.aspx?op=0&no=11

Resultados e Conclusões

Para iniciar qualquer estudo preliminar, foi necessário aplicar o inflacionamento da série de custo da cesta básica da cidade de Goiânia, compreendida entre janeiro de 2003 e dezembro de 2010, para o período final da série ($Dez.2010 = 1$).

Com o intuito de analisar os itens que compõe a cesta básica, foram exploradas inicialmente suas estatísticas descritivas, incluídas do percentual dos custos individuais dos itens em relação ao custo total, baseados pelas médias de preços da série.

	Máximo	Minimo	Media	Variância	DesPadrao	CV	Percent
Custo Total	241.00	169.32	201.30	347.11	18.63	9.26	100.00
Carne	89.36	50.99	61.95	81.20	9.01	14.55	30.77
Leite	16.72	10.66	12.61	2.17	1.47	11.69	6.26
Feijao	33.26	9.87	15.45	26.29	5.13	33.19	7.68
Arroz	8.41	4.96	6.05	1.04	1.02	16.86	3.00
Farinha	4.31	2.42	3.08	0.21	0.46	14.82	1.53
Batata	17.18	4.50	9.39	6.43	2.54	27.00	4.67
Tomate	30.12	7.50	16.69	21.67	4.65	27.90	8.29
Pao	43.64	34.20	38.01	5.38	2.32	6.11	18.88
Café	7.15	5.69	6.46	0.14	0.37	5.70	3.21
Banana	19.14	9.96	12.67	4.78	2.19	17.25	6.29
Acucar	5.76	2.31	3.66	0.90	0.95	25.97	1.82
Oleo	3.58	2.05	2.66	0.22	0.47	17.65	1.32
Manteiga	16.25	11.31	12.62	1.00	1.00	7.92	6.27

Quadro 1: Estatísticas Descritivas Custos da Cesta Básica Goiânia

Movidos pelo objetivo de exploração do conhecimento estatístico na prática do estudo econométrico aplicado à execução das técnicas de modelagem de regressões lineares, não se utilizou a equação total do custo da cesta básica, visando o exercício da determinação de seu padrão de custo pelas tendências de preços de seus itens de maior custo.

Sendo os itens: Carne, Pão, Tomate e Feijão os de maior participação percentual no preço médio da cesta básica da cidade de Goiânia, decidiu-se pela utilização desses para a composição do modelo da equação de regressão. A observação da série de preços desses quatro itens associados as suas estatísticas descritivas, remete além desses item serem os proporcionalmente mais participativos eles são os de maior Desvio Padrão, mostrando-se itens de grande variabilidade e sensibilidade de seus preço. Essas situações reforçam a ideia de maior influencia deles no custo total.

Se observa que todos os itens tem o mesmo padrão de crescimento em relação

ao custo total da cesta básica, porém, o feijão e, sobretudo a carne mostram-se com maior linearidade que o pão e o tomate. Esses diagramas mostram que quanto maior os custos individuais de seus itens, maior será o seu custo total, isso principalmente nos itens em que a dispersão se mostra com padrão de linearidade mais definido, como no caso do item carne.

No Quadro 2, abaixo, apresenta outra forma de escola das variáveis independentes dentre o universo delas. A matriz de correlação testa a colinearidade entre as variáveis dependentes, isso significa que variáveis preditoras com ausência de colinearidade não podem ser escritas como combinação linear das demais. Em termos práticos, variáveis altamente correlacionadas podem tem pouco poder de contribuição para o modelo, caso as duas compuserem o modelo seu poder de determinação será praticamente o mesmo assim para o estatístico, é mais parcimonioso o uso de somente uma variável com poder de previsão. Essa matriz traz as correlações de Pearson, que nos mostra que todas as variáveis se correlacionam.

	Carne	Pao	Tomate	Feijao
Carne	1.000	0.696	0.058	0.400
Pao	0.696	1.000	0.031	0.056
Tomate	0.058	0.031	1.000	0.130
Feijao	0.400	0.056	0.130	1.000

Quadro 2: Matriz de Correlações entre as Variáveis Independentes

O problema da colinearidade traz como consequência a diminuição do poder de predição do modelo de regressão. Contudo para os objetivos desse trabalho essa situação não será determinante para considerar que isso seja um empecilho. Baseados nos critérios já mencionados anteriormente, e após o métodos computacionais executados no R-Project, chegamos ao modelo para o Custo Total da Cesta Básica da cidade de Goiânia:

$$CustoTotal_i = 46,75 + 1,42 Carne_i + 0,78 Pao_i + 1,36 Tomate_i + 0,94 Feijao_i$$

De acordo com o valor dos parâmetros, temos que para cada aumento de R\$ 1,00 no preço da Carne, mantida das demais variáveis do modelo, haverá um acréscimo de R\$ 1,42 no custo total da Cesta Básica de Goiânia. Da mesma forma, mantidas as condições acima, temos que a cada real de acréscimo no custo do Pão, do Tomate ou do Feijão, o custo total aumentará em R\$ 0,78; R\$ 1,36; e R\$ 0,94, respectivamente. Segundo o modelo, de acordo com a série de custos o valor mínimo da cesta básica que não contenham os itens do modelo (Carne, Pão, Tomate e Feijão) teria o custo de R\$ 46,75.

```
Call: lm(formula = CestaGyn_N$Cesta ~ CestaGyn_N$Carne + CestaGyn_N$Pao +
CestaGyn_N$Tomate + CestaGyn_N$Feijao)
```

Residuals:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	46.75164	8.23715	5.676	1.63e-07 ***
CestaGyn_N\$Carne	1.41702	0.07843	18.068	< 2e-16 ***
CestaGyn_N\$Pao	0.77910	0.27959	2.787	0.00648 **
CestaGyn_N\$Tomate	1.35842	0.09491	14.313	< 2e-16 ***
CestaGyn_N\$Feijao	0.93767	0.09976	9.399	4.61e-15 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.267 on 91 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9497, Adjusted R-squared: 0.9475

F-statistic: 429.9 on 4 and 91 DF, p-value: < 2.2e-16

Quadro 3: Resumo do Modelo de Regressão*

O coeficiente de determinação - R^2 e Adjusted R^2 (ajustado à quantidade de variáveis contida no modelo), mede a qualidade do ajustamento linear da regressão ao conjunto de dados observados, assim ele mede a proporção percentual total da variável dependente (Y), é explicada pelas variações das variáveis independentes (X). No estudo em questão 95% dos custos totais da cesta básica é explicado pelos custos da Carne, Pão, Tomate e

*Resumo obtido por meio da função `summary()` do R-Project

Feijão, deixando os 10% restantes para possíveis variáveis que foram omitidas no estudo ou para flutuações do acaso.

O erro padrão refere-se ao erro total da estimativa. Assim, como exercício de previsão, se em determinado período i seus custos fossem seus respectivos custos médios da série de jan.2004 a dez.2010 (Carne - R\$ 61,95; Pão - R\$ 38,01; Tomate - R\$ 16,69; Feijão - R\$ 26,29), teríamos:

$$CustoTotal = 46,75 + 1,42 \times 61,95 + 0,78 \times 38,01 + 1,36 \times 16,69 + 0,94 \times 26,29$$

$$CustoTotal = 211,78$$

Levando em consideração a previsão de custo total calculada por meio da equação de regressão, a cesta básica de Goiânia sairia por R\$ 211,78, previsão compreendida no intervalo de confiança entre $211,78 \pm 8,48^*$, um valor muito preciso tendo em vista a baixa variabilidade do modelo.

Analysis of Variance Table					
Response: CestaGyn_N\$Cesta					
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
CestaGyn_N\$Carne	1	25301.8	25301.8	1389.3535	< 2.2e-16 ***
CestaGyn_N\$Pao	1	7.4	7.4	0.4083	0.5244
CestaGyn_N\$Tomate	1	4400.6	4400.6	241.6442	< 2.2e-16 ***
CestaGyn_N\$Feijao	1	1608.8	1608.8	88.3428	4.614e-15 ***
Residuals	91	1657.2	18.2		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Quadro

4: ANOVA(ANOVA - Análise de Variância) do Modelo de Regressão

IC = [Valor \pm T(sig,gl) Erro Padrão]

Analisando os resíduos da regressão, podemos observar a validade dos pressupostos (Normalidade, Independência, Variância constante - homogeneidade) através de técnicas de observação dos gráficos, essa análise é feita com base na experiência do pesquisador, devendo ser complementada pelos testes de hipóteses paramétricos ou não paramétricos para se comprovar os pressupostos.

Observamos uma leve tendência quadrática na distribuição dos resíduos, no entanto a distribuição desses parece ser simétrica em torno da linha média. Segundo o Q-Q plot é notória a normalidade dos resíduos, nele observa-se os pontos distribuídos de modo aproximadamente linear, sugerindo que eles sigam uma distribuição normal. O terceiro gráfico mostra a distribuição da raiz do modulo dos resíduos em comparação aos valores preditos, este nos permite observar a tendência a heteroscedasticidade em que a magnitude da variação dos resíduos está relacionada com os valores preditos. Na ocasião não se observa padrão de correlacionamento entre os módulos dos desvios e os valores preditos.

P9 - Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares*Caíke Damke (UFG)***Resumo**

Nosso trabalho busca estudar a existência e multiplicidade de soluções positivas para o seguinte problema de Dirichlet assintoticamente linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega. \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.4)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, para $N \geq 3$, é um aberto limitado com fronteira regular e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(H1) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$; $f(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$; $f(x, t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $x \in \Omega$ e $f(x, t) \equiv 0$, $\forall t \leq 0$, $x \in \Omega$;

(H2) $\frac{f(x, t)}{t}$ é não-decrescente com respeito a $t \geq 0$, $\forall x \in \Omega$;

(H3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = \mu$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l$ uniformemente $\forall x \in \Omega$, onde $\mu \in [0, +\infty)$, $l \in (0, +\infty]$ são constantes e $\mu < \lambda_1 \leq l$ e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Para garantir a existência e multiplicidade de soluções necessitamos verificar que o funcional energia relacionado ao problema

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (2.3.5)$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$, satisfaz a condição de Palais-Smale, a ser descrita abaixo. Além disso, devemos garantir que (2.3.5) possua a geometria do Passo da Montanha e obtendo a existência de solução do problema (2.3.4).

Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Primeiramente, começaremos com algumas definições básicas.

Definição 2.117. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma derivada fraca de u , se*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx \quad (2.3.6)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotamos $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas fracas de primeira ordem de u definem funções em $L^1_{loc}(\Omega)$ e vale (2.3.6).

Considere o seguinte espaço de funções

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

chamado de espaço de Sobolev. Definimos também $W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \cap W^{1,2}(\Omega)$.

Agora, temos suporte para definir o que vem a ser solução fraca do problema (2.3.4).

Obter uma solução fraca do problema (2.3.4) é equivalente a encontrar um ponto crítico não-nulo do funcional J que é de classe C^1 . Este resultado pode ser obtido em [1], capítulo 5.

Necessitamos, agora, introduzir o Teorema do Passo da Montanha, mas para isto definiremos sequência de Palais-Smale e de Cerami e quando um funcional satisfaz a condição de Palais-Smale e de Cerami.

Seja \mathbf{H} um espaço de Hilbert. Então definimos:

Definição 2.118. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência em \mathbf{H} . Dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale, ou simplesmente (PS), em \mathbf{H} se $\{J(u_n)\}$ é limitado e $J'(u_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Se $J(u_n) \rightarrow c$, então a (PS)-sequência é denotada por $(PS)_c$ -sequência. Analogamente, dizemos que uma sequência $\{u_n\}$ em \mathbf{H} é uma sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$*

se

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \text{ e } (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Considere $J : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 .

Definição 2.119. Diz-se que o funcional J satisfaz a condição (PS) , respectivamente $(PS)_c$, em \mathbf{H} , se para toda (PS) -sequência, respectivamente $(PS)_c$ -sequência, possui uma sub-sequência convergente na norma. E dizemos que J satisfaz a condição de Cerami se para toda sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente na norma.

O Teorema do Passo da Montanha necessita que o funcional (2.3.5) satisfaça duas condições descritas a seguir.

(PM-1) $J \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$, $J(0) = 0$ e $\exists r, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq \rho, \quad \forall u \in S_r = \{u \in \mathcal{H} : \|u\| = r\}$$

(PM-2) $\exists e \in \mathcal{H}$ com $\|e\| > r$ tal que $J(e) \leq 0$.

Dizemos que quando um funcional satisfaz (PM-1) e (PM-2) ele possui a geometria do Passo da Montanha. Além disso, denote por Γ o conjunto de todos os caminhos que ligam $u = 0$ e $u = e$, isto é,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], \mathcal{H}) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$, pois $\gamma(t) = te$ é tal que $\gamma \in \Gamma$. Considere,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max\{J(\gamma(t)) : t \in [0, 1]\} \geq \rho > 0. \quad (2.3.7)$$

onde ρ é obtido da condição **(PM-1)**.

O resultado a seguir nos garante que o valor c , dado por (2.3.7), é um valor crítico para o funcional em questão.

Teorema 2.120. [Passo da Montanha] Suponha que J satisfaça as condições (PM-1) e (PM-2) e que J satisfaz $(PS)_c$, onde c é dado por (2.3.7). Então c é um valor crítico para J , ou seja, existe $z \in \mathcal{H}$, não-nulo, tal que $J(z) = c$ e $J'(z) = 0$.

Demonstração: Veja [1], capítulo 5, página 118.

Enunciaremos uma condição imposta ao nosso funcional, chamada de Condição de Cerami. Para maiores detalhes veja [7].

Proposição 2.121. *[Existência de uma sequência de Cerami] Suponha que J dado por (2.3.5) satisfaça*

$$\max\{J(0), J(e)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=r} J(u)$$

para algum $\alpha < \beta$, $r > 0$ e $e \in \mathcal{H}$ com $\|e\| > r$. Seja $c \geq \beta$ dado por (2.3.7). Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ tal que

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \geq \beta \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}_0^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Introduziremos dois lemas técnicos, que juntamente com a Proposição 2.121, nos ajudam na demonstração do nosso resultado principal.

Lema 2.122. *Seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada ao autovalor λ_1 do problema $(-\Delta, \mathcal{H})$ normalizada e suponha que vale (H1), (H2) e (H3). Então o funcional J satisfaz a geometria do Passo da Montanha da seguinte maneira:*

1. *Existem $r, \beta > 0$ tais que $J(u) \geq \beta$, $\forall u \in \mathcal{H}$ com $\|u\| = r$*
2. *$J(t\varphi_1) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$ se $l \in (\lambda_1, +\infty]$, onde l é obtido em (H3).*

Lema 2.123. *Seja J dado por (2.3.5) tal que*

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Então existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ao qual denotaremos igualmente por $\{u_n\}$, tal que

$$J(tu_n) \leq \frac{(1+t^2)}{2n} + J(u_n), \quad \forall t > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente enunciaremos o resultado principal do nosso trabalho que nos fornece em quais condições o problema (2.3.4) possui solução.

Teorema 2.124. *Se as condições (H1), (H2) e (H3) são satisfeitas, então*

1. O problema (2.3.4) não possui solução se $l < \lambda_1$;
2. Se $\lambda_1 < l < +\infty$, então o problema (2.3.4) possui uma solução positiva;
3. Suponha que $l = \lambda_1$ (neste caso, dizemos que o problema (2.3.4) é ressonante). O problema (2.3.4) possui uma solução positiva $u \in \mathcal{H}$ se, e só se, existe algum $a > 0$ tal que $u(x) = a\varphi_1$ e $f(x, u) = \lambda_1 u(x)$.

Demonstrações dos Lemas 2.122, 2.123 e do Teorema 2.124 são obtidas no artigo [7].

Conclusões

Concluimos que o resultado acima, Teorema 2.124, nos fornece condições boas para obtenção de uma solução positiva para o problema de Dirichlet assintoticamente linear (2.3.4), pois não precisamos impor na função f a seguinte condição:

(A-R) para algum $\theta > 2$ e $M > 0$, então $0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s$, q.t.p. $x \in \Omega$ e $|s| \geq M$. conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Esta condição implica facilmente a condição (PS) (veja [1], capítulo 5). Entretanto, para problemas assintoticamente lineares a condição **(A-R)** não é aplicável. Neste caso, vemos que **(H1)**, **(H2)** e **(H3)** são cruciais para obtermos a condição de Cerami, obtida na Proposição 2.121.

P10 - Exemplos de Trajetória Central em Programação Semidefinida

Mayk dos Santos & Orizon Pereira Ferreira (UFG)

Resumo

Apresentaremos um de exemplo de trajetória central primal e dual na ausência de estrita complementaridade com a propriedade que a medida em que a dimensão do problema associado cresce as velocidades de convergência da trajetória central primal diminui e da trajetória dual permanece constante igual a $1/2$.

Caracterização do Problema

Seja S^n o espaço das matrizes simétricas de ordem n com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por $\langle U, V \rangle = \text{traço}(UV)$, S_+^n o cone das matrizes simétricas positivas semi-definidas e S_{++}^n seu interior. Dados $A_1, \dots, A_m \in S^n$, defina o operador linear $\mathcal{A} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\mathcal{A}X = (\langle A_1, X \rangle, \dots, \langle A_m, X \rangle)^T$, e seja $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n$ o operador adjunto de \mathcal{A} o qual é dado por $\mathcal{A}^*v = \sum_{i=1}^m v_i A_i$.

Dadas as funções $f : (0, +\infty) \rightarrow S^n$ e $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, escrevemos $f(\mu) = \mathcal{O}(g(\mu))$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$, se para alguma constante $M > 0$ temos $\|f(\mu)\| \leq Mg(\mu)$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$. Além disso, escrevemos $f(\mu) = \Theta(g(\mu))$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$ se $f(\mu) = \mathcal{O}(g(\mu))$ e $g(\mu) = \mathcal{O}(\|f(\mu)\|)$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$, i.e., existe uma constante $M > 0$, $g(\mu) \leq M\|f(\mu)\|$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$.

Os problema de programação semi-definida na forma primal e dual são definidos, respectivamente, por

$$(P) \begin{cases} \min_X \langle C, X \rangle, \\ \text{s.t. } \mathcal{A}X = b, \\ X \in S_+^n, \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max_y b^T y, \\ \text{s.t. } \mathcal{A}^*y + S = C, \\ S \in S_+^n, \end{cases}$$

onde $C \in S^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A_1, \dots, A_m \in S^n$ são dados e $X \in S_+^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $S \in S_+^n$ são as variáveis. As condições de otimalidade destes problemas é dada pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b, & X \in S_{++}^n, \\ \mathcal{A}^*y + S = C, & S \in S_{++}^n, \\ XS = 0. \end{cases}$$

A trajetoria central primal $\{X(\mu) : \mu > 0\}$ associada ao problema primal (P) e a trajetoria central dual $\{S(\mu) : \mu > 0\}$ associada ao problema dual (D) com respeito a barreira $f(X) = -\ln \det \big(X\big)$ sao definidas, respectivamente, por $X(\mu) = \arg\min_{\{X\}} \{ \langle C, X \rangle + \mu f(X) : \mathcal{A}X = b \}$, $\mu \in \mathbb{R}_+$,

ou equivalentemente, pelo sistema de equações primal-dual,

$$(PD) \begin{cases} \mathcal{A}X = b, & X \in S_{++}^n, \\ \mathcal{A}^*y + S = C, & S \in S_{++}^n, \\ XS = \mu I, & \mu \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

É bem conhecido que, se $A_1, \dots, A_m \in S^n$ são linearmente independente, os seguintes conjuntos $F^o(P) = \{X \in S^n : \mathcal{A}X = b, X \in S_{++}^n\}$ e $F^o(D) = \{(y, S) \in \mathbb{R}^m \times S^n : \mathcal{A}^*y + S = C, S \in S_{++}^n\}$ são não vazios. Então os problemas (P) e (D) tem conjuntos soluções compactos e não vázios e as trajetórias centrais estão bem definidas, veja Todd [11].

Por exemplo: Na presença de estrita complementaridade temos a seguinte decomposição

$$X = \begin{pmatrix} X_B & X_{BN} \\ X_{BN}^t & X_N \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_B & S_{BN} \\ S_{BN}^t & S_N \end{pmatrix},$$

para mais detalhes veja [8]. Foi mostrado em [8] que a ordem de convegência dos blocos ao longo da trajetória central, quando μ tende a zero, são iguais à

$$X_B(\mu) = \Theta(1), \quad X_{BN}(\mu) = \Theta(\sqrt{\mu}), \quad X_N(\mu) = \Theta(\mu),$$

$$S_B(\mu) = \Theta(\mu), \quad S_{BN}(\mu) = \Theta(\sqrt{\mu}), \quad S_N(\mu) = \Theta(1).$$

Na ausência de estrita complementaridade temos na decomposição acima o surgimento de mais um bloco, a saber, o bloco T onde a estrita complementaridade falha. Resultando assim a seguinte decomposição

$$X = \begin{pmatrix} X_B & X_{BT} & X_{BN} \\ X_{BT}^t & X_T & X_{TN} \\ X_{BN}^t & X_{TN}^t & X_N \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} S_B & S_{BT} & S_{BN} \\ S_{BT}^t & S_T & S_{TN} \\ S_{BN}^t & S_{TN}^t & S_N \end{pmatrix},$$

para mais detalhes veja [1], [2] e [4]. Neste caso, quando a complementaridade estrita falha, não se sabe a ordem exata de convergência ao longo da trajetória central, dos blocos $X_T, X_{BT}, X_{TN}, S_T, S_{BT}$ e S_{TN} . Mais especificamente, alguns problemas que se colocam são obter os seguintes resultados:

1. A velocidade de convergência dos blocos onde a estrita complementaridade falha, e
2. o comportamento limite da derivada das trajetórias primal e dual.

As respostas para estes problemas são importantes, por exemplo, para obtenção de algoritmos de convergência superlinear para programação semidefinida. Com o objetivo de entender o comportamento da trajetória central. No trabalho apresentaremos um exemplo de trajetória central, na ausência da estrita complementaridade, com dimensão arbitrária, com a propriedade que a medida que a dimensão do problema associado cresce a velocidade de convergência da trajetória central primal diminui e a velocidade da trajetória dual permanece constante igual a $1/2$.

Referências

- [1] CRUZ NETO, J. X. DA; FERREIRA, O. P.; MONTEIRO, R. D. C., *Asymptotic behavior of the central path for a special class of degenerate SDP problems*, Mathematical Programming, 103, no. 3, 487-514 (2005).

- [2] GOLDFARB, D.; SCHEINBERG, K., *Interior point trajectories in semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 8 (1998), pp. 871–886.
- [3] DRUMMOND, L. M. GRAÑA; PETERZIL, H. Y., *The central path in smooth convex semidefinite programs*, Optimization, 51 (2002), pp. 207–233.
- [4] HALICKÁ, M.; KLERK, DE E.; ROOS, C., *Limiting Behavior of the Central Path in Semidefinite Optimization*, Optimization Methods Software, Vol.20, No.1, pp.99-113, 2005.
- [5] HALICKÁ, M.; KLERK, DE E.; ROOS, C., *On the convergence of the central path in semidefinite optimization*, SIAM Journal on Optimization, 12 (2002), pp. 1090–1099.
- [6] KLERK E. DE, *Aspects of semidefinite programming: interior point algorithms and selected applications*. Applied Optimization Series 65. Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 2002.
- [7] KOJIMA, M.; SHINDOH, S.; HARA, S., *Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices*, SIAM Journal on Optimization, 7 (1997), pp. 86–125.
- [8] LUO, Z. Q.; STURM, J. F.; ZHANG, S., *Superlinear convergence of a symmetric primal-dual path-following algorithm for semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 8 (1998), pp. 59–81.
- [9] MONTEIRO, R.; TODD, M. J., *Path-following methods for semidefinite programming*, in Handbook of Semidefinite Programming, R. Saigal, L. Vandenberghe, and H. Wolkowicz, eds., Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2000.
- [10] SPORRE, G.; FORSGREN, A., *Characterization of the limit point of the central path in semidefinite programming*, Technical Report TRITA-MAT-2002-OS12, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, SE-100 44 Stockholm, Sweden, June 2002.
- [11] TODD, M.J., *Semidefinite optimization* in Acta Numerica 10 (2001), pp. 515–560.

P11 - Grupos em que cada Elemento Comuta com suas Imagens Endomórficas*Sérgio Fernandes, Ticianne Bueno & Shirlei Serconek (UFG)***Resumo****Introdução**

Seja G um grupo finito em que cada elemento comuta com sua imagem endomórfica (E -grupo). Vamos dar um contra exemplo-exemplo à conjectura que G é abeliano.

Para g e h em G , g e $g^{-1}(h^{-1}gh)$ comutam. Então g comuta com seu conjugado e G satisfaz a identidade $[x, y, x] = 1$. Portanto G satisfaz as relações $[x, y, z, w] = 1$ e $[x, y, z]^3 = 1$ (veja [4, p. 322]). Logo G é nilpotente de classe menor ou igual a 3 e se G é um p -grupo para um primo $p \neq 3$, G é nilpotente de classe menor ou igual a 2. Vamos exibir para um primo qualquer p um p -grupo nilpotente de classe 2 em que cada elemento comuta com todas as suas imagens endomórficas.

Seja

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 : a_i^{p^2} = 1, [a_i, a_j, a_k] = 1, (1 \leq i, j, k \leq 4) \rangle$$

$$\text{e } (1) [a_1, a_2] = a_1^p, (2) [a_1, a_3] = a_3^p, (3) [a_1, a_4] = a_4^p,$$

$$(4) [a_2, a_3] = a_2^p, (5) [a_2, a_4] = 1, (6) [a_3, a_4] = a_1^p \rangle.$$

Sejam $End(G)$ e $Aut(G)$ o endomorfismo e o automorfismo de G respectivamente. Denotaremos por $End_c(G) = \{\theta \in End(G) | \theta(G) \leq Z(G)\}$ e por $Aut_c(G) = \{\theta \in Aut(G) | \theta(g)g^{-1} \in Z(G) \text{ para todo } g \in G\}$, o automorfismo central de G .

O grupo G é um grupo não abeliano de expoente p^2 , objetivo do trabalho é mostrar que,

1. $G^p = U(G) = G' = Z(G)$, onde $U(G) = \{g \in G \mid o(g) \mid p\}$.
2. cada endomorfismo estrito (i.é. um endomorfismo que não é um automorfismo) de G tem sua imagem em $Z(G)$, e
3. cada automorfismo é central.

Que consiste em provar o Teorema 1.1, que nos dá um E -grupo não abeliano.

Resultados e Discussão

Nosso objetivo consiste em mostrar o seguinte teorema.

Teorema 1.1 $End(G) = End_c(G) \cup Aut_c(G)$.

Corolário 1.1 Cada elemento em G comuta com sua imagem endomórfica.

Lema 1.1 Ordem de G é p^8 .

Prova: Das relações definidoras de G , temos $|G| \leq p^8$. Vamos construir um grupo de ordem p^8 que satisfaz as relações definidoras de G .

Sejam

$$K = \langle k_i, 1 \leq i \leq 4 : k_1^p = k_3^p = 1, k_2^{p^2} = k_4^{p^2} = 1$$

$$\text{e } [k_i, k_j] = 1, 1 \leq i, j \leq 4 \rangle$$

$$\text{e } H = \langle h_1, h_3 : h_1^{p^2} = h_3^{p^2} \text{ e } [h_1, h_3] = h_3^p \rangle.$$

K é um grupo abeliano de ordem p^6 e H é um grupo nilpotente de classe 2 de ordem p^4 . Sejam σ_1 e σ_3 os automorfismos de K determinados por, $\sigma_1(k_1) = k_1, \sigma_1(k_3) = k_3, \sigma_1(k_2) = k_1^{-1}k_2$ e $\sigma_1(k_4) = k_4^{-p}k_4, \sigma_3(k_1) = k_1, \sigma_3(k_3) = k_3, \sigma_3(k_2) = k_2^p k_2$ e $\sigma_3(k_4) =$

$k_3^{-1}k_4$. O subgrupo de $Aut(K)$ gerado por σ_1 e σ_3 é um grupo abeliano de expoente p de ordem p^2 . Seja θ um homomorfismo de H em $Aut(K)$, definido por

$$\begin{aligned}\theta : H &\longrightarrow Aut(K) \\ h_1 &\longmapsto \sigma_1 \\ h_3 &\longmapsto \sigma_3\end{aligned}$$

Seja $S = K \rtimes_{\theta} H = \{kh, h \in H \text{ e } k \in K\}$ o produto semidireto de K por H determinado por θ . Assim $hk = (\theta(h^{-1})(k))h$. S é um grupo de ordem p^{10} e os elementos $k_1^{-1}h_1^p$ e $k_3^{-1}h_3^p$ geram um subgrupo R de ordem p^2 em $Z(G)$. Seja $T = S/R$, $t_1 = h_1 \cdot R$, $t_2 = k_2 \cdot R$, $t_3 = h_3 \cdot R$ e $t_4 = k_4 \cdot R$. O grupo T de ordem p^8 é gerado por $\{t_i : 1 \leq i \leq 4\}$ e os t_i satisfazem as relações definidoras de G .

Lema 1.2 $Z(G) = G' = G^p = U(G)$ onde $U(G)$ é o conjunto de todos os elementos cuja ordem divide p .

Prova: Temos que $G' = \langle a_i^p, 1 \leq i \leq 4 \rangle = G^p$. Como G é nilpotente de classe 2 $\gamma_2(G) \leq Z(G)$, que implica $G' \subseteq Z(G)$ e $G' \subseteq U(G)$. Uma vez que $|G| = p^8$, $|G'| = p^4$. Se $|Z(G)| \geq p^5$, então $[G : Z(G)] \leq p^3$, mas $G/Z(G)$ é gerado por $\{a_1Z(G), a_2Z(G), a_3Z(G), a_4Z(G)\}$. Assim, dois geradores de G são congruentes *mod* $Z(G)$ e $G/Z(G)$ é gerado por, no máximo, três elementos. Assim $|G'| \leq p^3$, uma contradição. Logo $Z(G) = G'$. Da mesma forma se $|U_p(G)| \geq p^5$, então $[G : U(G)] \leq p^3$ então $|G^p| \leq p^3$, que é uma contradição. Donde concluímos que $Z(G) = G' = G^p = U(G)$.

Para um $g \in G$ fixado, seja

$$\begin{aligned}\theta_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow [h, g]\end{aligned}$$

Como G é Nilpotente de classe 2, θ_g é um homomorfismo. $Ker \theta_g = C_G(\langle g \rangle)$ e $[G : C_G(\langle g \rangle)] = |\theta_g(G)|$.

Lema 1.3

- (i) $C_G(\langle a_1 \rangle) = G' \cdot \langle a_1 \rangle$,
- (ii) $C_G(\langle a_2 \rangle) = C_G(\langle a_4 \rangle) = G' \cdot \langle a_2, a_4 \rangle$,
- (iii) $C_G(\langle a_3 \rangle) = G' \cdot \langle a_3, a_1 a_4 \rangle$.

Prova: É fácil ver que o lado direito está contido no lado esquerdo. $\theta_{a_1}(G) = \langle a_1^p, a_3^p, a_4^p \rangle$. Assim $[G : C_G(\langle a_1 \rangle)] = p^3$, que dá a primeira igualdade. Da mesma forma, $|\theta_{a_i}| = p^2$ e $[G : C_G(\langle a_i \rangle)] = p^2$ ($2 \leq i \leq 4$).

Lema 1.4 Seja n_i ($1 \leq i \leq 4$) inteiros. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} n_2 & 0 & n_3 & n_4 \\ -n_1 & n_3 & 0 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_4 - n_1 & 0 \\ 0 & 0 & -n_3 & -n_1 \end{pmatrix}$$

considerada sobre o corpo primo de característica p tem posto 0, 2, ou 3.

Prova: O posto de $A \neq 4$ uma vez que $\det A = 0$. Pode-se verificar se todas as submatrizes de ordem 2 tem determinante 0 (mod p), então $n_i \equiv 0 \pmod{p}$, ($1 \leq i \leq 4$). Logo posto de $A \neq 2$.

Lema 1.5 Se $\theta \notin \text{Aut}(G)$ e $\theta \in \text{End}(G)$ então $\theta \in \text{End}_c(G)$.

Prova: Seja $\theta \notin \text{Aut}(G)$ não trivial. Então deve existir um elemento h de ordem maior que p tal que $\theta(h)$ tem ordem p . Agora, o Lema 1.2 diz que G' é o conjunto de todos os elementos cujas ordens divide p . Assim se $\theta \notin \text{Aut}(G)$ implica que para algum $h \notin G'$ temos $\theta(h)$ é um elemento de G' . Daí $h = \prod_{i=1}^4 a_i^{n_i}$ com $n_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ para pelo menos

um i . Temos que $\theta([a_i, h])[\theta(a_i), \theta(h)] = 1$, ($1 \leq i \leq 4$), uma vez que G é nilpotente de classe menor ou igual a dois, logo

$$\langle [a_i, h], 1 \leq i \leq 4 \rangle \subseteq \text{Ker } \theta. \quad (2.3.8)$$

Assim obtemos

$$(*) \quad \begin{aligned} [a_1, h] &= a_1^{pn_2} a_3^{pn_3} a_4^{pn_4}, \\ [a_2, h] &= a_1^{-pn_1} a_2^{pn_3}, \\ [a_3, h] &= a_2^{-pn_2} a_4^{p(n_4-n_1)}, \\ [a_4, h] &= a_3^{-pn_3} a_4^{-pn_1}. \end{aligned}$$

Observe que as linhas da matriz A são justamente os expoentes em a_i^p nas equações do lado direito de (*). A partir da sentença 2.3.8, vemos que os quatro elementos de (*) estão no $\text{Ker } \theta$. Obviamente, elas também são comutadores e, portanto estão na intersecção de $\text{Ker } \theta$ e G' . Pelo Lema 1.2 cada de (*) tem ordem 1 ou p , logo cada um destes quatro elementos está no $Z(G)$. Assim as equações do lado direito de (*) são produtos de potências de elementos em $Z(G)$. Mas como posto $(A) \leq 2$, A tem pelo menos 2 linhas L.I. (Linearmente Independentes). Assim há entre os quatro elementos de (*) pelo menos dois elementos de ordem p tal que um não é potência do outro. Mas uma que estes elementos são de ordem p e estão em $Z(G)$, eles geram um subgrupo de ordem p^2 . Logo $|\text{ker } \theta \cup G'| \geq p^2$.

Como $G^p = U(G)$. Assim, cada elemento de ordem p é uma p -ésima potência de algum elemento de ordem p^2 . Assim, da intersecção de $\text{Ker } \theta$ e G' resulta que existem h_1 e h_2 , cada um de ordem p^2 , tal que $\theta(h_1^p)$ e $\theta(h_2^p)$ são comutadores que estão no $\text{Ker } \theta$. Como G tem ordem p^8 e expoente p^2 , devem existir dois elementos adicionais de ordem p^2 , h_3 e h_4 , de tal forma que $G = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$. Uma vez que h_1^p e h_2^p estão no $\text{Ker } \theta$, $\theta(h_1^p) = \theta(h_2^p) = 1$. Agora $(\theta(G))' = \langle \theta(h_1), \theta(h_2), \theta(h_3), \theta(h_4) \rangle'$. Mas $\theta(h_1)$ e $\theta(h_2)$ estão em $G' = Z(G)$ e por isso não podem gerar comutadores não-trivial. Daí, $(\theta(G))' = \langle \theta(h_3), \theta(h_4) \rangle'$. Considere o comutador gerado por $\theta(h_3)$ e $\theta(h_4)$, tem ordem no máximo p . Assim, $(\theta(G))'$ tem ordem $\leq p$. Temos pelo teorema do Núcleo e da Imagem que $|\text{Ker } \theta \cup G'| \leq p^3$.

Desta forma podemos assumir que $\theta(h_3) \in G'$ e $\theta(h_3^p) = 1$. Mas então $\theta(h_1), \theta(h_2)$ e $\theta(h_3) \in G' = Z(G)$. Então $\theta(h_1), \theta(h_2), \theta(h_3)$ e $\theta(h_4)$ comutam entre si e $\theta(G)$ é abeliano. Assim $G' \subset \text{Ker } \theta$. Uma vez que $G' = U(G)$ todos os elementos de G que tem ordem p estão em $\text{Ker } \theta$. Seja x um elemento de ordem p^2 em G , então $\theta(x)$ tem ordem no máximo p . Como $U(G) = Z(G)$ resulta que $\theta(G) \subset Z(G)$.

Seja

$$R = \{g \in G \mid [G : C_G(\langle g \rangle)] = p^2\}$$

$$R_1 = \{g \in G \mid g \notin G'eg = a_2^r\}$$

$$R_2 = \{g \in G \mid g \notin G'eg = a_1^r a_3^s a_4^r\}$$

Pelo menos um dos números inteiros r ou s não é divisível por p uma vez que $g \notin G'$.

Lema 1.6 $R = R_1 \cup R_2$.

Prova: Seja $h = \prod_{i=1}^4 a_i^{n_i}$. $h \in R$ se, e somente se, $|\theta_h(G)| = p^2$. O argumento no Lema 1.5 nos dá que $|\theta_h(G)| = p^2$ se, e somente se, posto de $A = 2$. Por inspeção podemos observar que posto de $A = 2$ se $h \in R_1 \cup R_2$. Portanto $R = R_1 \cup R_2$.

Seja d_{ij} denota o determinante (i, j) -menor de A . Se posto de $A = 2$ então $d_{ij} \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq i, j \leq 4$. Em particular

$$\begin{aligned} -n_1^2 n_2 &\equiv d_{13} \equiv 0 \pmod{p}, \\ -n_1^2 (n_1 - n_4) &\equiv d_{12} \equiv 0 \pmod{p}, \\ -n_3^2 n_2 &\equiv d_{34} \equiv 0 \pmod{p}, \\ -n_3 n_4 (n_1 - n_4) &\equiv d_{41} \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

As equações 2.3.9 implicam que cada um $n_1 \equiv n_3 \equiv 0 \pmod{p}$ ou $n_2 \equiv n_1 - n_4 \equiv 0 \pmod{p}$.

Lema 1.7 $Aut(G) = Aut_c(G)$.

Prova: Temos que $C_G(\langle h \rangle) = G' \cdot \langle a_2, a_4 \rangle$ se $h \in R_1$ e $C_G(\langle h \rangle) = G' \cdot \langle a_3, a_1 a_4 \rangle$ se $h \in R_2$. Seja $\theta \in Aut(G)$. Ou *i*) $\theta(a_2), \theta(a_4) \in R_1$ e $\theta(a_3) \in R_2$ ou *ii*) $\theta(a_2), \theta(a_4) \in R_2$ e $\theta(a_3) \in R_1$. Das relações 2 e 3 de G implica $[\theta(a_1), h_i] = h_i^p$ para algum $h_i \in R_i, i = 1, 2$.
Seja

$$\begin{aligned} h_1 &= a_2^r a_4^s \\ h_2 &= a_1^t a_3^u a_4^t \\ \theta(a_1) &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4} \end{aligned}$$

Portanto, temos, entre outras igualdades, as seguintes:

$$r\alpha_1 \equiv r(\alpha_3 + 1) \equiv s(\alpha_1 - 1) \equiv (\alpha_1 - \alpha_4 - 1)u \equiv (\alpha_1 - \alpha_4 - 1)t \equiv 0 \pmod{p}.$$

As únicas soluções são $\alpha_1 - 1 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4 \pmod{p}$.

Considere o caso *ii*). Assim

$$\begin{aligned} \theta(a_1) &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_1-1} a_4^{\alpha_1-1}, & \theta(a_2) &= a_1^{\beta_1} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_1}, \\ \theta(a_3) &= a_2^{\gamma_2} a_4^{\gamma_4}, & \theta(a_4) &= a_1^{\delta_1} a_3^{\delta_3} a_4^{\delta_1}. \end{aligned}$$

Das relações 1, 4 e 6 e G , implica que $[\theta(a_i), \theta(a_2)] = \theta(a_i)^p$ temos, entre outras igualdades, as seguintes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 &\equiv \alpha_1 - \beta_1 - 1 \equiv \beta_1(\gamma_2 - 1) \equiv \beta_1(\gamma_4 - 1) \\ &\equiv \beta_3(\gamma_4 - 1) \equiv \delta_3 \gamma_4 \equiv (\delta_3 - 1)\gamma_2 \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ou $\beta_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ou $\beta_3 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Logo $\gamma_4 - 1 \equiv \delta_3 \equiv \gamma_2 \equiv \beta_1 \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_1 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, uma contradição.

Considere o caso *i*). Assim

$$\begin{aligned} \theta(a_1) &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_1-1} a_4^{\alpha_1-1}, & \theta(a_2) &= a_2^{\beta_2} a_4^{\beta_4}, \\ \theta(a_3) &= a_1^{\gamma_1} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_1}, & \theta(a_4) &= a_2^{\delta_2} a_4^{\delta_4}. \end{aligned}$$

Das relações 1, 4 e 6 e G , implica que $[\theta(a_i), \theta(a_2)] = \theta(a_i)^p$ temos, entre outras igualdades, as seguintes:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\beta_2 - 1) &\equiv (\alpha_1 - 1)\beta_2 + \alpha_2 \equiv \alpha_1(\beta_4 - 1) + 1 \equiv \beta_2\gamma_1 \equiv \beta_2(\gamma_3 - 1) \\ &\equiv \beta_2\gamma_3 \equiv \beta_4(\gamma_1 + 1) \equiv \delta_2(\gamma_1 - 1) \equiv (\delta_4 - 1)\gamma_3 \equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Se $\beta_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$, então $\gamma_3 \equiv \gamma_1 + 1 \equiv \beta_2 \equiv \alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Assim $1 \equiv 0 \pmod{p}$, uma contradição. Se $\beta_4 \equiv 0 \pmod{p}$, então $\beta_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$ e

$$\gamma_1 \equiv \gamma_3 - 1 \equiv \delta_2 \equiv \alpha_1 - 1 \equiv \alpha_2 \equiv \beta_2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Logo $\theta \in \text{Aut}_c(G)$.

Conclusões

Concluimos que G é um grupo não abeliano de expoente p^2 e ordem p^8 que tem a propriedade de que todo elemento comuta com sua imagem endomórfica. E posteriormente iremos estudar o artigo [6] Malone que mostra, para $p = 2$, o exemplo de Fraudree não tem a propriedade citada no título. E estudaremos o artigo principal Abdollahi, Faghili, Linton e O'Brien que nos dá um exemplo de um 3-grupo de classe 3 que comuta com sua imagem automórfica.

Temos então a partir deste estudo o enriquecimento das pesquisas e desenvolvimento do estudo na área de álgebra e principalmente da teoria de grupos.

Referências

- [1] ABDOLLAHI, A., FAGHIHI, A., LINTON, S.A., AND O'BRIEN, E.A. - *Finite 3-Groups of Class 3 Whose Elements Commute with their Automorphic Images*, Arch. Math, 95, 1-7 (2010).
- [2] FAUDREE, R. - *Groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. Amer. Math. Soc., 27, 236-240 (1968).

- [3] GAP - *The GAP Group-Groups, Algorithms and Programming*, www.gap-system.org.
- [4] HALL, MARSHALL JR. - *The theory of groups*, The Macmillan Company, New York, 1973.
- [5] HOLT, D., EICK, B. AND O'BRIEN, E. A. - *Handbook of computational group theory*, Chapman and Hall/CRC, London, 2005.
- [6] MALONE, J.J. - *More on groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. Amer. Math. Soc., 65, 209-214 (1977).
- [7] ROBINSON, D.J.S. - *A course in the theory of groups*, Second Edition, Springer, New York, 1995.

P12 - Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos

Silvio Macedo (IFG-Luziânia) & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)

Resumo

The weak commutativity group by bijection $G(H, K, \sigma) = \langle H, K | [h, h^\sigma] = 1, \forall h \in H \rangle$ is defined as being the quotient of the free product $H * K$ by normal closure of $\{[h, h^\sigma] : \forall h \in H\}$ in $H * K$. In this paper, is a resume of the Macedo [MAC], that studied the results obtained in 2009 by Oliveira and Sidki [OS] that support the following conjecture:

If $H, K \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}$, then $G(H, K, \sigma)$ is p -group.

Keys words: Free groups, presentations of groups, weak commutativity, nilpotency class, double cosets.

Resultados e Discussão

Em 1980, Sidki [SIDKI] introduziu o grupo de comutatividade fraca

$$\chi(H) = \langle H, H^\varphi | [h, h^\varphi] = 1, \forall h \in H \rangle,$$

definindo-o como o quociente do produto livre $H * H^\varphi$ ($\varphi : H \rightarrow H^\varphi$ um isomorfismo) pelo fecho normal de $\{[h, h^\varphi] : \forall h \in H\}$ em $H * H^\varphi$, (h^φ denota $\varphi(h)$). Nesse artigo, Sidki fez um estudo detalhado do grupo $\chi(H)$ e obteve, dentre outros resultados, o seguinte

Teorema 2.125. *Seja \mathcal{P} qualquer uma das seguintes propriedades de grupos: finitude, p -grupo, nilpotente, solúvel; então*

$$H \text{ é um } \mathcal{P}\text{-grupo} \implies \chi(H) \text{ é um } \mathcal{P}\text{-grupo.}$$

Em 1981, Rocco [ROCCO2] considerou o caso onde H é um p -grupo finito de ordem p^n , p ímpar e classe de nilpotência c e provou que $\chi(H)$ é um p -grupo de ordem divisor de $p^{2n}p^{\binom{n}{2}}$ com classe de nilpotência no máximo $2c$. Posteriormente, Gupta, Rocco e Sidki [GRS], obtiveram um refinamento para esse resultado, mostrando que a classe de nilpotência é no máximo $2 + c$.

Seguindo outra direção, em 2009, Oliveira e Sidki [OS] consideraram um caso mais geral do grupo de comutatividade fraca $\chi(H)$, a saber, quando $\sigma : H \rightarrow K$ é uma bijeção entre grupos finitos com σ fixando a identidade, o grupo

$$G(H, K, \sigma) = \langle H, K \mid [h, h^\sigma] = 1, \forall h \in H \rangle$$

foi definido como sendo o quociente do produto livre $H * K$ pelo fecho normal de $\{[h, h^\sigma] : \forall h \in H\}$ em $H * K$. Assim, quando $H \cong K$ e σ for um isomorfismo, os grupos $\chi(H)$ e $G(H, K, \sigma)$ coincidem. Surge então, a seguinte pergunta:

Quais resultados obtidos para $\chi(H)$ continuam válidos para $G(H, K, \sigma)$?

Oliveira e Sidki [OS] propoem então a seguinte:

Conjectura 2.126. *Se H e K são grupos nilpotentes finitos e $\sigma : H \rightarrow K$ é uma bijeção fixando a identidade, então $G(H, K, \sigma)$ é nilpotente.*

Mas devido a dificuldade do problema, eles se concentraram no caso mais particular em que os grupos H e K da conjectura acima são isomorfos a $\mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, p primo. Assim o problema básico tratado nesse artigo foi o seguinte:

Conjectura 2.127. *Se $H, K \cong \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, então $G = G(H, K, \sigma)$ é um p -grupo.*

Neste caso, o estudo do grupo G é facilitado pelas seguintes propriedades do grupo $H = \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$:

- (i) H pode ser visto como um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p ;
- (ii) Todo elemento de H possui ordem p .

Este artigo é um resumo da dissertação de Macedo [MAC], que fez um estudo dos resultados obtidos por Oliveira e Sidki [OS].

A finitude do grupo $G(H, K, \sigma)$

Definição 2.128. (Sidki[?]) Sejam H e K grupos finitos e $\gamma : H \rightarrow K$ uma função. Então a tripla (H, K, γ) é dita especial se γ satisfaz

$$(i) \quad 1^\gamma = 1 \text{ e } 1^{\gamma^{-1}} = 1,$$

$$(ii) \quad |(S^{\gamma^{-1}}h)^\gamma| \geq |S|,$$

para todo subconjunto S de K tal que $1 \in S$ e para todo $h \in H$.

O critério de finitude a seguir é dado para um grupo mais geral do que $G(H, K, \sigma)$.

Teorema 2.129. (Sidki [SIDKI]) Seja (H, K, γ) uma tripla especial, onde H e K são grupos finitos de ordens m e n , respectivamente, tal que $1 < n \leq m$. Sejam $\delta : H \rightarrow K$ e $\epsilon : H \rightarrow H$ funções. Então o grupo definido por

$$G(H, K, \gamma, \delta, \epsilon) = \langle H, K | hh^\gamma(h^\epsilon)^{-1}(h^\delta)^{-1} = 1, \forall h \in H \rangle$$

é finito de ordem no máximo $(m-1)e^m$, onde e é o número de Euler.

O grupo de comutatividade fraca $G(H, K, \sigma)$ é um caso particular do grupo definido acima e nesse caso, Sidki [SIDKI] mostrou, como um corolário do Teorema acima, que $G(H, K, \sigma)$ possui ordem limitada por ne^{n-1} . Quando $H, K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, utilizando o GAP [GAP], vemos que para algumas permutações σ , $|G(H, K, \sigma)| = 2^{19} = 16 \cdot 2^{16-1}$. Quando $H \cong K$ escreveremos simplesmente $G(H, \sigma)$.

O grupo $G(H, \sigma)$ com H cíclico de ordem n .

Sejam $H = \langle X | R \rangle$ e $K = \langle Y | S \rangle$. Então $H \times K = \langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle$. A partir disso, vemos que $\frac{G(H, K, \sigma)}{[H, K]} \cong H \times K$. Segue então que se $G = G(H, K, \sigma)$ for abeliano, então $G \cong H \times K$.

Teorema 2.130. Se H é um grupo cíclico de ordem n , então $G = G(H, \sigma)$ é abeliano. Logo $G \cong H \times H$.

Cálculo de alguns grupos $G(H, \sigma)$ com o GAP

O cálculo direto dos $(|H| - 1)!$ grupos $G(H, \sigma)$ torna-se inviável muito rapidamente por causa do crescimento fatorial. O teorema abaixo nos permite fazer uma melhoria no cálculo dos grupos $G(H, \sigma)$ via GAP, pois ele afirma que a maioria desses grupos são isomorfos.

Teorema 2.131. (Oliveira e Sidki [OS]) *Sejam H, K grupos e $\sigma : H \rightarrow K$ uma bijeção fixando a identidade. Se $\alpha \in \text{Aut}(H)$ e $\beta \in \text{Aut}(K)$, então $G(H, K, \sigma) \cong G(H, K, \alpha\sigma\beta)$.*

Seja $H = \{1, h_2, \dots, h_n\}$, podemos identificar $\text{Aut}(H)$ com um subgrupo de $S_{|H|-1}$ simplesmente observando que um automorfismo α de H induz uma permutação σ nos índices dos elementos de H , isto é $i^\sigma = j \iff h_i^\alpha = h_j$. Fazendo as mesmas considerações para $K \cong H$, podemos escrever

$$A = \text{Aut}(H) = \text{Aut}(K) \leq S_{n-1}.$$

Agora podemos calcular as classes duplas $A \backslash S_{n-1} / A = \{AsA : s \in S_{n-1}\}$ no GAP, utilizando a função

`DoubleCosetRepsAndSizes(G, U, V)`

que retorna uma lista com os representantes das classes duplas $U \backslash G / U$ junto com a respectiva ordem de cada classe. Nas tabelas abaixo, c é a classe de nilpotência e d é o comprimento derivado do grupo $G(H, \sigma)$.

(i) $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

σ	$ G(H, \sigma) $	c	d
$()$	2^5	2	2

(ii) $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

σ	$ G(H, \sigma) $	c	d
()	2^{10}	3	2
(6, 7)	2^{10}	3	2
(5, 6, 7)	2^8	2	2
(4, 5, 6, 7)	2^8	2	2

(iii) $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Para este caso, listamos apenas os grupos de ordem máxima.

σ	$ G(H, \sigma) $	c
()	2^{19}	4
(14, 15)	2^{19}	5
(10, 13)(14, 15)	2^{19}	5
(8, 11)(9, 12)(10, 13)	2^{19}	4
(8, 11)(9, 12)(10, 14, 13, 15)	2^{19}	5

(iv) $H = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

σ	$ G(H, \sigma) $	c	d
()	3^5	2	2
(6, 7)	3^5	2	2
(4, 6, 8, 7)	3^5	2	2
(7, 8)	3^4	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(3, 4, 7, 5, 6, 8)	3^4	1	1

Observação 2.132. Em sua tese de doutorado, Oliveira [OL] deu provas diretas para todos esses casos apresentados.

O grupo $G(H, \sigma)$ com $H = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$

Adaptando alguns resultados em Oliveira e Sidki [OS], pudemos mostrar em Macedo [MAC] que:

Teorema 2.133. *Seja $H, K \cong A_{p,2}$ com $H = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $K = \langle b_1, b_2 \rangle$. Então $G = G(H, \sigma)$ é um p -grupo com classe de nilpotência no máximo 2.*

Permutando os subgrupos cíclicos

Nesta seção vamos denotar $H = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ (k cópias) por $H = A_{k,p}$ e olhar para H como um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p . Consideraremos também $H, K \cong A_{k,p}$ e escreveremos $G(H, \sigma)$ ao invés de $G(H, K, \sigma)$.

Proposição 2.134. *(Oliveira e Sidki [OS]) Sejam $H, K \cong A_{p,k}$ com $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ e $K = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$. Então para toda bijeção $\sigma : H \rightarrow K$, fixando a identidade, podemos obter uma bijeção $\tilde{\sigma} : H \rightarrow K$, fixando a identidade, tal que $a_i^{\tilde{\sigma}} = b_i, i = 1, 2, \dots, k$ e $G(H, \sigma) \cong G(H, \tilde{\sigma})$.*

Teorema 2.135. *(Oliveira e Sidki [OS]) Seja σ uma permutação de $H = A_{k,p}$, fixando a identidade, e considere a relação $R \subseteq H \times H$ definida por*

$$R = \{(a^i, b^j) \mid (1 \leq i, j \leq p-1) : a^\sigma = b\}.$$

Então existe pelo menos $p-1$ permutações $\hat{\sigma}$ de H fixando a identidade tal que $(a^i)^{\hat{\sigma}} = (a^\sigma)^i$ para todo $1 \leq i \leq p-1$, cujo gráfico $\{(a, a^{\hat{\sigma}}) : h \in H\}$ está contido em R .

Corolário 2.136. *Para toda permutação σ de H fixando a identidade, existem uma permutação $\hat{\sigma}$ de H e um epimorfismo de $G(H, \hat{\sigma})$ em $G(H, \sigma)$.*

O teorema abaixo é um refinamento do método das classes duplas.

Teorema 2.137. *Se $\alpha, \beta \in PGL(k, p)$, então $G(H, \hat{\sigma}) \cong G(H, \alpha \hat{\sigma} \beta)$.*

Exemplo 2.138. *Para o grupo $A_{3,3}$ temos 13 geradores de subgrupos cíclicos e 252 classes duplas em $PGL(3, 3)S_{13}PGL(3, 3)$. As ordens dos grupos com as respectivas quantidades são:*

$$\{3^6, 235\}, \{3^7, 11\}, \{3^8, 5\}, \{3^9, 1\}.$$

Obtemos ainda as seguintes informações:

- (i) Todos os grupos de ordem 3^6 possuem classes de nilpotência iguais a 1, isto é, são abelianos e portanto isomorfos a $A_{3,3} \times A_{3,3}$. Os demais grupos são todos nilpotentes de classe 2.
- (ii) Para o único grupo de ordem 3^9 , o representante de classe dupla é $\sigma = id$, logo este grupo de ordem máxima é isomorfo a $\chi(A_{3,3})$.

O grupo $G(\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{\sigma})$, \tilde{H} e \tilde{K} extensões de H e K

Sejam \tilde{H} e \tilde{K} grupos possuindo subgrupos normais M e N , respectivamente. Seja H um transversal de M em \tilde{H} com $1 \in H$ e K um transversal de N em \tilde{K} com $1 \in K$. Deste modo podemos fazer a seguinte identificação

$$H = \frac{\tilde{H}}{M}, \quad K = \frac{\tilde{K}}{N}.$$

Considerando $|\tilde{H}| = |\tilde{K}|$ e $|M| = |N|$, tomemos bijeções $\sigma : H \rightarrow K$ e $\alpha : M \rightarrow N$, ambas fixando a identidade. Seja ainda γ uma bijeção entre M e N (não necessariamente fixando a identidade). Observe que $\tilde{H} = \{mh : m \in M, h \in H\}$ e $\tilde{K} = \{nk : n \in N, k \in K\}$. Obtemos assim uma bijeção $\tilde{\sigma} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{K}$ definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} & : m \rightarrow m^\alpha & (2.3.1) \\ \tilde{\sigma} & : mh \rightarrow m^\gamma h^\sigma \quad \text{se } h \neq 1, \end{aligned}$$

Lema 2.139. *O grupo $G(H, K, \sigma)$ é isomorfo ao quociente de $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{\sigma})$ pelo fecho normal de $\langle M, N \rangle$ em \tilde{G} .*

Teorema 2.140. *Mantendo a notação prévia, suponha M, N centrais em \tilde{H}, \tilde{K} , respectivamente e que $G(M, N, \alpha)$ seja abeliano. Então $V = \langle M, N \rangle^{\tilde{G}}$ é abeliano.*

Corolário 2.141. *Suponha nas hipóteses do teorema acima que $M = \langle m \rangle$ e $N = \langle n \rangle$ são cíclicos, cada um deles com ordem igual a um primo p . Então $V = \langle M, N \rangle^{\tilde{G}}$ é um p -grupo abeliano elementar de posto no máximo $|H| + 1$.*

Mais alguns casos particulares de $G(H, \sigma)$

Teorema 2.142. *Sejam H, K grupos abelianos finitos de ordem n e $G = G(H, K, \sigma)$. Então o grupo G/G'' é nilpotente de classe no máximo n .*

Teorema 2.143. *Seja $H = A_{k,p}$, p ímpar e $\sigma : H \rightarrow \dot{H}$ uma transposição. Então $G(H, \sigma)$ é um p -grupo com classe de nilpotência no máximo 3.*

Observação 2.144. *Para $p = 2$ o teorema acima pode não ser verdadeiro. De fato, o grupo $G(A_{2,4}, (14, 15))$ calculado na Seção 2.3 possui classe de nilpotência igual a 5.*

Referências

[GRS] Gupta, N.; Rocco, N.; Sidki, S., *Diagonal embeddings of nilpotent groups*, Illinois J. of Math, 30, 1986.

[MAC] Macedo, S.S.A., *Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos*, Dissertação de Mestrado. UFG, 2010.

[OL] Oliveira, R. N., *Comutatividade Fraca entre Grupos Isomorfos*, Tese de Doutorado. UNB, 2007.

[OS] Oliveira, R. N.; Sidki, S. N., *On commutativity and finiteness in groups*, Bull. of the Braz. Math. Soc., 40(2): 149-180, 2009.

[ROCCO2] Rocco, N. R., *On weak commutativity between finite p -groups, p odd*. Journal of Algebra, 76, 1982.

[SIDKI] Sidki, S. N., *On weak permutability between groups*. Journal of Algebra, 63: 186-225, 1980.

[GAP] The GAP Groups, GAP-Groups, *Algorithms and Programming*, Version 4.4.12. (<http://www.gap-system.org>), 2008.

CAPÍTULO 3

RESUMOS SIMPLES

3.1 Conferências

C2 - Observações sob o Delta de Dirac

Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)

C3 - Cotas nas Universidades: Quantas? Para Quem?

Dani Gamerman (UFRJ)

C4 - Regularity Results for Semimonotone Operators: an Extension of Minty's Theorem

Rolando Gárciga Otero (IMPA)

C5 - Um Teorema de Lagrange, a Exponencial Complexa e o Plano Euclidiano

como um Parabolóide no Cone de Luz

Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior (UFSCar)

C6 - Caminhos Ótimos para Veículos Autônomos

Nancy Lopes Garcia (UNICAMP)

C7 - Teoria de Ramsey

Irene Naomi Nakaoka (UEM)

C8 - Soluções Estacionárias de Fluidos Incompressíveis com uma Lei de Potência

para a Viscosidade, em Domínios com Fronteiras Ilimitadas

Marcelo Martins dos Santos (UNICAMP)

C9 - Problemas Quasilineares com Termos Singulares e Convectivos

Manuela Caetano Martins de Rezende (UnB)

C11 - Produtos Tensoriais não Abelianos de Grupos e Construções Relacionadas

Noraí Romeu Rocco (UnB)

C12 - Bayesian Analysis of Aggregated Functional Data

Ronaldo Dias (UNICAMP)

C13 - Soluções Ground State para um Problema Elíptico Singular

Carlos Alberto Pereira dos Santos (UnB)

C2 - Observações sob o Delta de Dirac

Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)

Resumo

Será introduzido o delta de Dirac, e motivando o estudo das Distribuições de Schwartz. Faz-se algumas observações históricas das personagens da época tais como: Dirac, Schwartz, Hadamard etc. Finalmente conclui-se que delta de Dirac trata-se de uma distribuição. Serão apresentados algumas aplicações.

C3 - Cotas nas Universidades: Quantas? Para Quem?

Dani Gamerman (UFRJ)

Resumo

A crescente utilização do ENEM como meio de avaliação de entrada nas universidades trouxe a atenção da sociedade brasileira para o uso da Teoria de Resposta ao Ítem (TRI). Mais recentemente, tem ganho força a idéia que correções precisam ser feitas na avaliação baseada apenas no ENEM, para acomodar grupos desprivilegiados. São as chamadas cotas e propostas com vários matizes e motivações tem sido formuladas com os mais variados níveis de sustentação científica. Essa palestra se propõe a mostrar em uma linguagem simples como esse problema deve ser abordado do ponto de vista científico. Inicialmente serão apresentados os conceitos básicos da TRI. Posteriormente serão discutidas algumas de suas extensões. Através de uma generalização da TRI que é rotineiramente utilizada, pode se entender que modificações precisam ser incorporadas e de que forma se dá o efeito dessas mudanças.

C4 - Regularity Results for Semimonotone Operators: an Extension of Minty's Theorem*Rolando Garciga Otero (IMPA)***Resumo**

We introduce the concept of ρ -semimonotone point-to-set operators in Hilbert spaces. This notion is symmetrical with respect to the graph of T , as is the case for monotonicity, but not for other related notions, like e.g. hypomonotonicity, of which our new class is a relaxation. We give a necessary condition for ρ -semimonotonicity of T in terms of Lipschitz continuity of $[T + \rho^{-1}I]^{-1}$ and a sufficient condition related to expansivity of T . We also establish surjectivity results for maximal ρ -semimonotone operators. This is a work joint Alfredo Iusem.

C5 - Um Teorema de Lagrange, a Exponencial Complexa e o Plano Euclidiano

como um Parabolóide no Cone de Luz

Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior (UFSCar)

Resumo

Em 1779 (!), Lagrange resolveu o problema de determinar todos os mapas conformes da Terra com a propriedade de que os meridianos (ou paralelos) sejam representados por círculos ou retas. Um passo importante na solução é caracterizar os pares de famílias de círculos ou retas tais que cada elemento de uma delas é ortogonal a todos os elementos da outra. Nesta palestra, usaremos o teorema de Lagrange como uma motivação para discutir aplicações conformes, veremos como a exponencial complexa aparece naturalmente em sua solução e introduziremos o modelo do plano Euclidiano como um parabolóide no cone de luz do espaço de Lorentz, com o qual obteremos de uma maneira simples a caracterização de famílias ortogonais de círculos ou retas necessária à demonstração do Teorema de Lagrange.

C6 - Caminhos Ótimos para Veículos Autônomos

Nancy Lopes Garcia (UNICAMP)

Resumo

Nosso objetivo é encontrar automaticamente o menor caminho entre dois pontos A e B quando a estrada é povoada de obstáculos. Um método não paramétrico penalizado é utilizado tanto quando os obstáculos são vistos perfeitamente como quando estão sujeitos a erros de medição.

C7 - Teoria de Ramsey

Irene Naomi Nakaoka (UEM)

Resumo

A teoria de Ramsey é, atualmente, um dos ramos mais importantes da combinatória e teve seu início em 1930 com o trabalho On a problem in formal logic do matemático, filósofo e economista Frank P. Ramsey. Ela investiga questões do tipo:

Dado um conjunto S que tem uma propriedade P , é verdade que sempre que S é particionado em um número finito de subconjuntos, um dos subconjuntos deve também ter a propriedade P ?

O resultado mais simples da teoria de Ramsey é o princípio da casa dos pombos (PCP), também conhecido como princípio das gavetas de Dirichlet, o qual estabelece que

Se mais que n pombos são colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deve conter pelo menos dois pombos.

Nesta palestra, serão apresentadas algumas aplicações do PCP e introduzida a teoria de Ramsey, bem como algumas de suas aplicações.

Referências

- [1] R. Brusamarello, E. L. Monte Carmelo, Paul Erdős: o mago húngaro, Matemática Universitária, v. 43, p. 74-81, 2009.
- [2] P. J. Cameron, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, Cambridge University Press, 1994.

- [3] S. Jukna, Extremal Combinatorics, Springer, 2001.
- [4] B. M. Landman, A. Robertson, Ramsey Theory on the Integers, AMS, 2004.
- [5] J. P. O. Santos, Introdução à Teoria dos Números, IMPA, 1998.

C8 - Soluções Estacionárias de Fluidos Incompressíveis com uma Lei de Potência

para a Viscosidade, em Domínios com Fronteiras Ilimitadas

Marcelo Martins dos Santos (UNICAMP)

Resumo

Falaremos sobre o modelo estacionário para fluidos incompressíveis com a viscosidade μ dada pela lei de Ostwald-De Waele, ou seja, $\mu = |D(u)|^{p-2}$, onde $|D(u)|^{p-2}$ é a taxa de cisalhamento. Discutiremos a solução de Amick para o problema conhecido como “problema de Leray”, para fluidos newtonianos, isto é, $p = 2$, e a versão modificada do problema de Leray devido a Ladyzhenskaya e Solonikov. Em seguida, nos restringiremos ao caso $p > 2$ (“shear thickening fluids”) e apresentaremos um resultado nosso, em colaboração com Gilberlândio J. Dias (UNIFAP, Universidade Federal do Amapá e IMECC-UNICAMP), o qual generaliza o teorema Ladyzhenskaya-Solonikov’s para $p \geq 2$.

C9 - Problemas Quasilineares com Termos Singulares e Convectivos

Manuela Caetano Martins de Rezende (UnB)

Resumo

We establish the existence of solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(x, u) + \lambda f(x, u) + \mu V(x, \nabla u) \text{ in } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ and } u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

where Δ_p is the p-Laplacian operator, $1 < p < \infty$; λ and μ are real parameters; $g, f : \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ and $V : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ are continuous functions satisfying appropriated hypotheses.

No monotonicity conditions or the existence of singularity is required on the nonlinearities g and f , but singular and super linear terms are included in our results. To study the problem, with or without the convective term V , we apply a regularization and monotonicity technique, sub and super solutions methods and approximation arguments.

The results presented are obtained in a joint work with J.V.Gonçalves (UFG) and C.A.Santos (UnB).

C11 - Produtos Tensoriais não Abelianos de Grupos e Construções Relacionadas

Noráí Romeu Rocco (UnB)

Resumo

Nesta palestra abordamos o produto tensorial não abeliano de grupos, explorando em particular algumas propriedades estruturais do quadrado tensorial de um grupo G módulo um inteiro não negativo q , $G \otimes^q G$ (quadrado q -tensorial de G), com vistas à computação desses e outros invariantes de um grupo G .

Nossa abordagem é conduzida via um operador ν^q na classe dos grupos. Propriedades estruturais e condições de finitude de $\nu^q(G)$ são estudadas. Apresentamos resultados teóricos e descrevemos um algoritmo para computar $\nu^q(G)$ e algumas das suas seções mais relevantes para o nosso propósito, para o caso de grupos policíclicos G . Concluimos exibindo alguns exemplos computados com auxílio do sistema GAP (Groups, Algorithms and Programming).

C12 - Bayesian Analysis of Aggregated Functional Data

Ronaldo Dias (UNICAMP)

Resumo

In many areas of science one aims to estimate latent sub-population mean curves based only on observations of aggregated population curves. By aggregated curves we mean linear combination of functional data that cannot be observed individually. We assume that several aggregated curves with linear independent coefficients are available. More specifically, we assume each aggregated curve is an independent partial realization of a Gaussian process with mean modeled through a weighted linear combination of the disaggregated curves. We model the mean of the Gaussian processes as a smooth function approximated by a function belonging to a finite dimensional space H_K which is spanned by K B-splines basis functions. We explore two different specifications of the covariance function of the Gaussian process: one that assumes a constant variance across the domain of the process, and a more general variance structure which is itself modelled as a smooth function, providing a nonstationary covariance function. Inference procedure is performed following the Bayesian paradigm allowing experts' opinion to be considered when estimating the disaggregated curves. Moreover, it naturally provides the uncertainty associated with the parameters estimates and fitted values. Our model is suitable for a wide range of applications. We concentrate on two different real examples: calibration problem for NIR spectroscopy data and an analysis of distribution of energy among different type of consumers.

C13 - Soluções Ground State para um Problema Elíptico Singular

Carlos Alberto Pereira dos Santos (UnB)

Resumo

Nesta palestra apresentaremos alguns resultados relacionados à existência, não-existência e comportamento assintótico de soluções “ground state” para o problema não-linear, elíptico e singular

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u)|\nabla u|^2 + \lambda\psi(x)f(u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, \quad u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, $\psi \geq 0$, não identicamente nula, é uma função localmente H

older contínua; $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ são funções contínuas, (possivelmente) singulares em 0, isto é, $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \infty$ e $g(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \infty$ ou $g(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} -\infty$.

Os principais resultados que serão apresentados estão publicados em A. L. Melo, C. A. Santos; Structure of ground state solutions for singular elliptic equations with a quadratic gradient term, *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2011 (2011), No. 70, pp. 1-14.

3.2 Minicursos

MC3 - Teoria das Ciências e Pensamento Livre

Ole Peter Smith (UFG)

MC3 - Teoria das Ciências e Pensamento Livre

Ole Peter Smith (UFG)

Resumo

Abordamos os conceitos, raciocínios e métodos básicas comum de todas as ciências, expondo exemplos de várias áreas de conhecimento. Introduzindo Pensamento Livre, tentamos definir o conceito liberdade em suas várias formas: individual e social, levando-nos a uma observação sobre as sociedades humanas.

3.3 Sessões Técnicas

ST5 - Método de ponto proximal para otimização convexa

Ilton Ferreira de Menezes (UFG)

ST7 - Método de ponto Proximal para uma classe de funções que satisfazem a desigualdade de Lojasiewicz

José Henrique Amaral (UFG)

ST5 - Método de ponto proximal para otimização convexa

Ilton Ferreira de Menezes (UFG)

Resumo

Neste trabalho é apresentado o método de ponto proximal aplicado à minimização irrestrita de funções convexas não necessariamente diferenciáveis. A boa definição da sequência gerada pelo método de ponto proximal é garantida. Além disso é provado a convergência total da sequência a um minimizador global do problema em questão.

ST7 - Método de ponto Proximal para uma classe de funções que satisfazem a desigualdade de Lojasiewicz

José Henrique Amaral (UFG)

Resumo

Neste trabalho é apresentado o método de ponto proximal aplicado à minimização irrestrita de funções não necessariamente diferenciáveis que satisfazem a desigualdade de Lojasiewicz. Além disso, seguindo a ideia original de Lojasiewicz, é apresentado a convergência total da sequência gerada pelo método de ponto proximal (quando esta é limitada) a algum ponto crítico generalizado.