
SUMÁRIO

1	Textos Completos	2
1.1	Minicursos	2
2	Resumos Expandidos	54
2.1	Minicursos	54
2.2	Sessões Técnicas	68
2.3	Pôsteres	68
3	Resumos Simples	109
3.1	Conferências	109
3.2	Minicursos	119
3.3	Sessões Técnicas	121

CAPÍTULO 1

TEXTOS COMPLETOS

1.1 Minicursos

MC7 - Cadeias de Markov e Aplicações

Valdivino Vargas Júnior (UFG)

MC11 - Uso do Maxima como Ferramenta no Ciclo Básico

Reginaldo de Jesus Santos (UFMG)

MC16 - Introdução à Análise Bayesiana

Marta Cristina Bianchi & David Henriques (UFG)

MC7 - Cadeias de Markov e Aplicações

Valdivino Vargas Júnior (UFG)

Resumo

Uma Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que possui a chamada propriedade markoviana. Um processo estocástico tem a propriedade markoviana se os estados anteriores do processo são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Os primeiros resultados para estes processos foram obtidos por Andrey Markov em 1906. Nos últimos anos, Cadeias de Markov tem sido amplamente estudadas e utilizadas nas mais variadas áreas do conhecimento. As aplicações mais básicas encontradas em livros introdutórios incluem probabilidades associadas jogos, evolução de populações e resultados sobre teoria de filas. Em geral, encontra-se aplicações de Cadeias de Markov em modelos epidêmicos, processos de migração, estudos sobre o DNA, modelos de gerenciamento de recursos, modelos para processos de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros.

Neste trabalho apresentamos conceitos elementares de Cadeias de Markov e diversas aplicações do uso de seus conceitos. Consideramos problemas envolvendo passeios aleatórios, processos de ramificação, teoria de filas etc.

Introdução

Um processo estocástico representa um sistema na qual o estado muda ao longo do tempo de forma aleatória. Podemos pensar um processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias indexadas por elementos t que pertencem a um determinado conjunto T , muitas vezes interpretados como o tempo. Se T é discreto temos um processo estocástico a tempo discreto. Se T é contínuo temos um processo estocástico a tempo contínuo. Representamos um processo estocástico por $\{X_t\}_{t \in T}$. As variáveis X_t possuem possíveis valores num conjunto E chamado conjunto de estados ou espaço de estados. Este pode ser continuo ou dis-

creto. Quando $X_t = i$ diz-se que o processo está no estado i no instante de tempo t . Quando temos um processo a tempo discreto, é comum utilizar a notação $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ para processo estocástico. Nesse caso, usamos a notação X_n no lugar de X_t .

Exemplo 1.1. (*Jogo de Azar*) Considere a seguinte situação hipotética. Um jogador entra em um cassino com k reais em dinheiro para “tentar a sorte”. Admita que ele participa de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta um dado honesto é lançado, se sai a face ímpar i ele recebe i reais. Caso saia a face par j ele perde j reais. Defina como X_i a variável aleatória que representa o ganho do jogador na i -ésima jogada. Neste caso, o capital acumulado pelo jogador, digamos S_n , é dado por

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

onde $S_0 = k$. Nesse caso, o processo $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é um processo estocástico a tempo discreto com espaço de estados discreto.

Exemplo 1.2. (*Fila M/M/1*)

Suponha que clientes chegam a uma estação de serviço com um único servidor (único atendente) de acordo com um processo de Poisson de taxa λ . Ou seja, o tempo entre sucessivas chegadas são variáveis aleatórias exponenciais independentes com média $\frac{1}{\lambda}$. Na chegada, cada cliente será atendido imediatamente se o servidor estiver livre. Caso contrário, ele vai para uma fila de espera. Quando o servidor termina de servir a um cliente, o cliente deixa o sistema e o próximo cliente na fila, se existe algum, entra para o ser atendido. Os tempos sucessivos de serviço são considerados variáveis aleatórias exponencialmente distribuídas e independentes com média $\frac{1}{\mu}$. Tal sistema é conhecido como sistema de fila M/M/1. Se chamarmos de $X(t)$ o número de clientes no sistema no instante t temos um processo estocástico a tempo contínuo com espaço de estados discreto.

Exemplo 1.3. (*Atividade seguradora*)

O modelo clássico do risco na atividade seguradora é um processo

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

onde $U(t)$ é o capital da seguradora no instante t (reserva de risco) e c é uma constante que representa o prêmio por unidade de tempo, de forma que ct será o prêmio que recebeu a

seguradora até o instante t . u é a reserva inicial da seguradora e $S(t)$ representa o valor total das indenizações até o instante t ,

$$S(t) = \sum_{n=1}^{X_t} Y_n$$

onde $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não negativas que representam os valores das indenizações individuais que deve pagar a seguradora ante a ocorrência de sinistros e $\{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson homogêneo das ocorrências das indenizações até o instante t . O processo $\{U_t\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico a tempo contínuo com espaço de estados contínuo.

Uma Cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico que possui a chamada propriedade markoviana. Um processo estocástico tem a propriedade markoviana se os estados anteriores do processo são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Os primeiros resultados para estes processos foram obtidos por Andrey Markov em 1906.

Nos últimos anos, Cadeias de Markov tem sido amplamente estudadas e utilizadas nas mais variadas áreas do conhecimento. As aplicações mais básicas encontradas em livros introdutórios incluem probabilidades associadas jogos, evolução de populações e resultados sobre teoria de filas. Em geral, encontra-se aplicações de Cadeias de Markov em modelos epidêmicos, processos de migração, estudos sobre o DNA, modelos de gerenciamento de recursos, modelos para processos de decisão, modelo para difusão de informação, dentre outros.

No exemplo da fila M/M/1 temos um processo markoviano a tempo contínuo. O primeiro M significa que o processo de chegada é markoviano (Poisson) e o segundo é devido ao serviço de distribuição ser exponencial (markoviano). O número 1 se refere ao fato de haver um único servidor. Neste texto, consideraremos apenas Cadeias de Markov a tempo discreto, isto é, cadeias com conjunto $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definição

Seja o processo estocástico $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ em tempo discreto. Supomos que as variáveis X_n assumem valores num conjunto E finito ou infinito enumerável.

Definição 1.4. X_n é cadeia de Markov a tempo discreto se

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{i,j}$$

para qualquer escolha dos estados $j, i, i_{n-1}, \dots, i_1, i_0$ e todo instante n .

Em uma Cadeia de Markov, o símbolo $P_{i,j}$ (probabilidade de passar de i para j em um passo) é usado para representar a probabilidade (condicional) de que, dado que o sistema esteja no estado i em certo momento, venha a estar no estado j no instante de tempo seguinte. Em geral, as $P_{i,j}$ são chamadas probabilidades de transição da Cadeia de Markov. De fato, podemos pensar $P_{i,j}$ como a probabilidade de ocorrer uma transição do estado i para o estado j .

A definição dada diz que numa Cadeia de Markov a chance do processo estar no instante $n + 1$ no estado j depende somente do estado do processo no instante n , isto é, independe de toda a história passada do processo (estados X_0, X_1, \dots, X_{n-1}). Esta propriedade chama-se propriedade markoviana.

Exemplo 1.5. (*Jogo de Azar*) Suponha um jogo no qual em cada aposta você perde um real com probabilidade $1 - p$ ou ganha um real com probabilidade p . Suponha ainda que você decide parar de jogar se a sua fortuna atingir N reais e se ela atingir 0 reais o cassino não deixa você jogar mais. Seja X_n o capital que você tem depois de n apostas. Claramente é o capital corrente e o resultado do próximo sorteio que irão determinar a sua fortuna depois da aposta seguinte. Qualquer que tenha sido a evolução da sua fortuna no passado (ou seja, os valores de $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$), para prever o próximo estado X_{n+1} , é suficiente conhecer a sua fortuna no presente (X_n). De fato, se $X_n = i$, com $0 < i < N$, então independentemente dos valores i_0, \dots, i_{n-1} , temos

$$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p$$

pois isso significa que se se você ganhar a aposta $n + 1$, a sua fortuna vai ser acrescentada em um real e portanto é suficiente conhecer o valor da sua fortuna no presente. Em cada

aposta a sua fortuna somente poderá aumentar ou diminuir em um real com uma chance que não depende do número de apostas que você fez. Em outras palavras, a probabilidade condicional deste exemplo não depende de n .

Teoria Elementar

Matriz de Transição

Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{i_0, i_1, \dots\}$. As probabilidades de transição podem ser representadas através de uma matriz chamada matriz de transição:

$$P^n = \begin{pmatrix} P_{i_0, i_0} & P_{i_0, i_1} & P_{i_0, i_2} & \cdots \\ P_{i_1, i_0} & P_{i_1, i_1} & P_{i_1, i_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{i_n, i_0} & P_{i_n, i_1} & P_{i_n, i_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Claramente, uma matriz de transição satisfaz:

1. $P_{i,j} \geq 0$
2. $\sum_{j \in E} P_{i,j} = 1$

Exemplo 1.6. No exemplo do jogo de azar se $N = 4$ e $p = 0,4$ temos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposição 1.7. Suponha uma Cadeia de Markov com distribuição inicial π_0 e matriz de transição $P = (P_{i,j})_{i,j \in E}$. Sejam $i_0, \dots, i_n \in E$. Temos:

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n \mid X_0 = i_0) = P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

As equações de Chapman-Kolmogorov possibilitam o cálculo de probabilidades de transição em n passos. Estas equações dizem que as probabilidades de transição de n passos podem ser obtidas, recursivamente, a partir das probabilidades de transição de uma etapa. Temos:

$$P_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(m)} \text{ para todos } n, m \geq 0, \text{ e todos } i, j \in E$$

Assim, se a matriz de ordem n é $P^{(n)} = (P_{i,j}^{(n)})$ então $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$. Por indução, podemos escrever $P^{(n)} = P^n$.

Portanto, para uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{i_o, i_1, \dots\}$ as probabilidades de transição em n passos podem ser representadas através da matriz

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{i_0, i_0}^n & P_{i_0, i_1}^n & P_{i_0, i_2}^n & \cdots \\ P_{i_1, i_0}^n & P_{i_1, i_1}^n & P_{i_1, i_2}^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{i_n, i_0}^n & P_{i_n, i_1}^n & P_{i_n, i_2}^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

onde $P_{i_j, i_k}^n = P(X_{m+n} = i_k \mid X_m = i_j)$.

Exemplo 1.8. (Mobilidade Social) Considere a história de várias gerações de uma família que ao longo do tempo tem somente um filho. Neste modelo simples, a observação da classe social (alta, média ou baixa) da família para cada geração permitiria descrever sua evolução social ao longo do tempo. Se tivermos uma sociedade composta por famílias deste tipo, podemos escolher ao acaso uma família e para cada geração n chamar de X_n a uma quantidade que valerá 3 se a família for de classe alta, 2 se ela for de classe média e 1 se for

de classe baixa. Desta forma, cada X_n será uma variável aleatória e a sua evolução ao longo do tempo, permitirá tirar conclusões sobre as mudanças na estrutura da sociedade. Suponha que o processo X_n é uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ cujas mudanças de classe social estão dadas pela seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,20 & 0,10 \\ 0,30 & 0,50 & 0,20 \\ 0,20 & 0,40 & 0,40 \end{pmatrix}$$

a) Suponha que a família comece na classe média (estado 2) na geração 0. Qual a probabilidade que a geração 1 ascenda à classe alta (estado 3) e a geração 2 desça para a baixa (estado 1)?

Solução:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 1 \mid X_0 = 2) &= P(X_2 = 1 \mid X_1 = 3)P(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = P_{2,3} \cdot P_{3,1} \\ &= 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \end{aligned}$$

b) Suponha de novo que a família comece na classe média (estado 2) na geração 0. Qual a probabilidade que a geração 2 desça para a classe baixa (estado 1)?

Solução:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) &= \sum_{k=1}^3 P(X_1 = k, X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = \sum_{k=1}^3 P_{2,k} P_{k,2} \\ &= 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,4 \end{aligned}$$

Distribuição Inicial

Definição 1.9. Seja π_0 uma distribuição de probabilidades no conjunto E satisfazendo:

1. $\pi_0(i) \geq 0$ para todo $i \in E$,
2. $\sum_{j \in E} \pi_0(j) = 1$

Dizemos que π_0 é a distribuição inicial da cadeia se para todo $i \in E$ temos $P(X_0 = i) = \pi_0(i)$. Em outras palavras, a distribuição inicial de uma cadeia é a função de probabilidade do seu estado inicial X_0 .

Note que

$$P(X_n = k) = \sum_{i \in E} \pi_0(i) P_{i,k}^{(n)}$$

Proposição 1.10. Suponha uma Cadeia de Markov com distribuição inicial π_0 e matriz de transição $P = (P_{i,j})_{i,j \in E}$. Sejam $i_0, \dots, i_n \in E$. Temos:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) = \pi_0(i_0) P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} \cdots P_{i_{n-1},i_n}$$

Exemplo 1.11. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Suponha que a distribuição inicial da cadeia é dada por $\pi_0 = (0, 3/10, 3/10, 4)$.

a) Calcule $P(X_2 = 2, X_1 = 3, X_0 = 1)$.

b) Calcule $P(X_2 = 2)$.

Solução:

$$a) P(X_2 = 2, X_1 = 3, X_0 = 1) = \pi_0(1) P_{1,3} P_{3,2} = 0.3 \cdot 0.25 \cdot 0.4 = 0.03$$

$$b) P(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^3 \pi_0(i) P_{i,2}^{(2)} = \pi_0(1) P_{1,2}^{(2)} + \pi_0(2) P_{2,2}^{(2)} + \pi_0(3) P_{3,2}^{(2)}$$

Mas

$$P_{1,2}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P_{1,k} P_{k,2} = P_{1,1} P_{1,2} + P_{1,2} P_{2,2} + P_{1,3} P_{3,2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{40}$$

$$P_{2,2}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P_{2,k} P_{k,2} = P_{2,1} P_{1,2} + P_{2,2} P_{2,2} + P_{2,3} P_{3,2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + 0.0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{30}$$

$$P_{3,2}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 P_{3,k} P_{k,2} = P_{3,1} P_{1,2} + P_{3,2} P_{2,2} + P_{3,3} P_{3,2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$$

Logo

$$P(X_2 = 2) = 0.3 \cdot \frac{9}{40} + 0.3 \cdot \frac{9}{30} + 0.4 \cdot \frac{3}{20} = \frac{87}{400} = 0.2175.$$

Em geral, para uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

se

$$P(n) = [P(X_n = i_1) \ P(X_n = i_2) \ \cdots \ P(X_n = i_k)]$$

é um vetor contendo as marginais de X_n então

$$P(n) = P(0).P^n$$

onde

$$P(0) = [P(X_0 = i_1) \ P(X_0 = i_2) \ \cdots \ P(X_0 = i_k)] = [\pi_0(i_1) \ \pi_0(i_2) \ \cdots \ \pi_0(i_k)].$$

Distribuição Assintótica

Definição 1.12. A distribuição π_∞ será a distribuição assintótica da cadeia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ se satisfaizer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^n = \pi_\infty(j) \text{ para todo } j \in E.$$

Exemplo 1.13. *Telefone sem fio*

(Problema extraído da prova da VI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA, realizada em 8 DE NOVEMBRO DE 2003). Várias crianças estão brincando de telefone sem fio. A criança C_0 sussurra três palavras para a criança C_1 , que sussurra o que ouviu para a criança C_2 e assim por diante até uma mensagem chegar à criança C_n . Cada uma das três palavras tem exatamente uma "gêmea" errada (por exemplo, as palavras ração e razão são "gêmeas" pois é muito fácil confundi-las). Cada criança $(i+1)$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$ de ouvir corretamente o que a criança i falou, tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a primeira palavra dita pela criança i pela sua "gêmea", $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a segunda palavra e $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a terceira palavra (e portanto nunca troca mais de uma palavra). Note que numa troca a mensagem pode ser acidentalmente corrigida. Calcule a probabilidade de que a criança C_n ouça exatamente a mensagem original. Qual é o valor dessa probabilidade quando $n \rightarrow \infty$?

Solução:

Sejam a, b, c as três palavras e $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ suas gêmeas. Construímos uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{a_i, i = 1, 2, 3 \dots 8\}$, onde $a_1 = (a, b, c)$, $a_2 = (\bar{a}, b, c)$, $a_3 = (\bar{a}, \bar{b}, c)$, $a_4 = (a, \bar{b}, c)$, $a_5 = (a, b, \bar{c})$, $a_6 = (\bar{a}, b, \bar{c})$, $a_7 = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ e $a_8 = (a, \bar{b}, \bar{c})$. Daí temos

a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para obtermos a resposta do problema em questão calculamos a matriz P^n . Nesta $P^{(n)}(1, 1) = P(X_n = a_1 | X_0 = a_1)$ representa a probabilidade pedida. Realizando o cálculo, temos:

$$P(X_n = a_1 | X_0 = a_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Observe que no limite,

$$\pi_\infty(a_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = a_1 | X_0 = a_1) = \frac{1}{8}.$$

Distribuição Invariante

Definição 1.14. Toda distribuição π será chamada de distribuição invariante da cadeia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ se satisfizer

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j} = \pi(j), \text{ para todo } j \in E.$$

Observe que, se E é finito podemos obter a distribuição invariante resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_{i \in E} \pi(i) = 1 \end{cases}.$$

Proposição 1.15. Para um distribuição invariante são válidas as afirmações:

i) Para todo $j \in E$ e $n \geq 1$ temos que

$$\sum_{i \in E} \pi(i) P_{i,j}^{(n)} = \pi(j).$$

ii) Se π é a distribuição inicial da Cadeia então para todo $n \geq 1$, temos que

$$P(X_n = i) = \pi(i).$$

Intuitivamente falando, se a cadeia começa com a distribuição invariante então a distribuição em todos os instantes será a mesma (daí o nome de distribuição invariante).

Proposição 1.16. *Seja $\{X_n\}_{n \geq 0}$ uma Cadeia de Markov com matriz de transição P e com distribuição assintótica π_∞ . Então π_∞ é a única distribuição invariante da cadeia.*

Exemplo 1.17. Considere uma Cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a distribuição invariante existe e corresponde a

$$\pi = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$$

O limite de P^n quando $n \rightarrow \infty$ não existe pois $P^{2n+1} = P$ e $P^{2n} = P^2$, dessa maneira não existe distribuição assintótica.

Exemplo 1.18. (Cadeia de Ehrenfest)

Suponha que o total de bolas contidas em duas urnas é 3. A cada instante de tempo n , pegamos uma bola da primeira urna e a colocamos na segunda ou vice-versa. Seja X_n a quantidade de bolas na primeira urna. Claramente, X_n é uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, a distribuição invariante existe e corresponde a

$$\pi = \left(\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8} \right)$$

Note que $\pi \sim \text{Binomial}(3, \frac{1}{2})$.

Classificação dos estados de uma Cadeia de Markov

Definição 1.19. (*Estado acessível*)

Um estado j é acessível a partir do estado i , se existe $n \geq 0$ tal que $P_{i,j}^n > 0$. Em outras palavras, se for possível atingir o estado j partindo do estado i , então j é dito acessível a partir de i . Admitimos que, qualquer estado i é acessível a partir dele próprio.

Definição 1.20. (*Estados comunicáveis*)

Dizemos que dois estados se comunicam caso cada um for acessível a partir do outro. A relação de comunicação no espaço de estados é uma relação de equivalência. De fato, ela satisfaz as seguintes condições:

- i) (Reflexiva) Qualquer estado i se comunica com ele mesmo: $(i \leftrightarrow i)$, pois $P_{i,i}^0 = 1$.
- ii) (Simétrica) Se o estado i se comunica com o estado j , o estado j se comunica com o estado i : $(i \leftrightarrow j) \Rightarrow (j \leftrightarrow i)$.
- iii) (Transitiva) Se o estado i se comunica com o estado j , e o estado j comunica com o estado k , então o estado i comunica com o estado k : $(i \leftrightarrow j) \text{ e } (j \leftrightarrow k) \Rightarrow (i \leftrightarrow k)$.

Definição 1.21. (*Estado não essencial*)

Um estado $i \in E$ é não essencial se existe um instante n e $j \in E$ tais que $P_{i,j}^n > 0$ e $P_{j,i}^m = 0$ para todo m natural. Caso contrário, temos um estado essencial.

Definição 1.22. (*Estado recorrente e transiente*)

Seja f_i a probabilidade de que iniciando no estado i a cadeia de Markov X_n volte a este estado. Então $f_i = P(\text{existe } n > 0 \text{ tal que } X_n = i \mid X_0 = i)$.

Se $f_i = 1$ o estado é chamado recorrente, já se $f_i < 1$ o estado é chamado transiente.

Proposição 1.23. O estado i é

recorrente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} = \infty$ e
transiente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} < \infty$.

Definição 1.24. (*Estado absorvente*)

Um estado i é absorvente se uma vez adentrado nele, a cadeia jamais o deixa, isto é,

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em particular, todo estado absorvente é recorrente.

Definição 1.25. Um conjunto de estados de uma Cadeia de Markov formam uma classe C , se quaisquer dois estados desse conjunto se comuniarem, e quaisquer dois estados comunicáveis de cadeia pertencem a mesma classe. Desse modo, se existe duas classes para uma Cadeia de Markov, então elas são disjuntas ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$) ou idênticas ($C_1 \equiv C_2$).

Exemplo 1.26. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

O estado 1 é absorvente, 2 é transitente, 1, 3, 4 e 5 são recorrentes. Temos três classes: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$ e $C_3 = \{3, 4, 5\}$.

Definição 1.27. Cadeia Irredutível

Uma Cadeia de Markov X_n é irredutível se todos os estados formam apenas uma classe.

Definição 1.28. Período de um estado

Um estado i tem período d se $P_{ii}^{(n)} = 0$ se e somente se n não se divide d . Um estado é chamado aperiódico se $d = 1$.

Exemplo 1.29. Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{1, 2, 3\}$ e a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, os estados 1, 2 e 3 tem período 2.

Definição 1.30. Seja T_i o tempo de retorno do estado i . Se o estado i é recorrente, então ele é chamado recorrente positivo, se $E(T_i) < \infty$. Um estado é ergódico se for aperiódico e recorrente positivo.

Teorema 1.31. *Teorema básico de convergência*

Se uma Cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ com distribuição invariante π for irredutível e aperiódica então π será a sua distribuição assintótica.

Exemplo 1.32. *No exemplo do Telefone sem fio poderíamos ter obtido a distribuição assintótica simplesmente calculando a distribuição invariante. A marginal $\pi(i), i \in E$ da distribuição invariante para uma Cadeia de Markov a tempo discreto pode ser interpretada ainda como a proporção do tempo que o processo permanece no estado i . Assim, no problema do Telefone sem fio pode-se dizer que para uma quantidade grande de crianças (n grande) a proporção de crianças que ouvem exatamente a mensagem original é $\frac{1}{8}$.*

Passeios Aleatórios

Apresentamos agora um dos processos markovianos mais famosos, o chamado passeio aleatório. Estes são a formalização matemática de uma trajetória (de uma partícula, digamos) a partir de uma sequência de passos dados de forma aleatória. Diversas áreas do conhecimento como estatística, economia, computação, eletricidade, ecologia, química, dentre outras fazem uso de resultados oriundos desse majestoso modelo.

Definição 1.33. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que $E |X_i| < \infty$. Seja $S_0 = C$ e*

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1.$$

O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado Passeio Aleatório.

Observe que nesse caso,

$$P_{i,j} = P(S_{n+1} = j | S_n = i) = P(X_{n+1} = j - i).$$

Exemplo 1.34. *Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Temos um passeio aleatório simples. Se além disso, $p = q$ temos um passeio aleatório simples simétrico.

Para um passeio aleatório simples:

$$P(S_{n+1} = i + 1 | S_n = i) = P(X_{n+1} = 1) = p = 1 - P(S_{n+1} = i - 1 | S_n = i).$$

O problema da ruína do jogador

Considere a seguinte situação hipotética. Um jogador entra em um cassino com k reais em dinheiro para “tentar a sorte”. Admita que ele participa de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta ele recebe um real em caso de vitória e caso contrário perde um real. A chance de vitória em cada aposta é p e consequentemente de derrota $1 - p = q$. Admita que os recursos do cassino são ilimitados, isto é, por mais sorte que o jogador tenha, não consegue “quebrar a banca”. Suponha que ele jogue indefinidamente, apenas parando em caso de ficar sem dinheiro. Uma questão interessante é saber qual é a probabilidade do jogador em algum momento ficar sem dinheiro. Nesta dinâmica, o capital acumulado pelo jogador ao longo das apostas pode ser visto como um passeio aleatório. Nesse caso, a variável aleatória X_i representa o ganho do jogador na i -ésima jogada. Vamos mostrar que mesmo estando em um “cassino justo” (isto é, $p = 0.5$), com probabilidade 1, o jogador fica sem dinheiro em algum momento. Este problema é conhecido como ruína do jogador.

Demonstração. Seja $h_i = \mathbf{P}_i(\text{acertar } 0)$. Então h é a solução minimal não negativa de

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_i &= \frac{1}{2}h_{i+1} + \frac{1}{2}h_{i-1} \text{ para } i=1,2,\dots \end{aligned}$$

Essa relação de recorrência tem solução geral

$$h_i = A + Bi$$

Mas a restrição $0 \leq h_i \leq 1$ força $B = 0$. Assim, $h_i = 0$ para todo i e temos então o resultado desejado. \square

Processos de Ramificação

Outro grupo de processos markovianos importantes é o dos processos de ramificação. Estes foram inicialmente estudados por Galton e Watson. O objetivo era investigar o problema da

extinção de sobrenomes, ou seja, analisar a ocorrência da extinção do nome da família.

Atualmente, podemos encontrar aplicações de processos de ramificação em diversas áreas do conhecimento incluindo Física, Biologia, Medicina, Economia e Computação.

Definição 1.35. Considera-se uma Cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ com $X_0 = k$ e

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$$

onde as Z_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é chamado processo de ramificação.

Podemos pensar X_0 como o número de indivíduos iniciais na população. Todos os descendentes destes indivíduos formam a primeira geração e seu número é denotado por X_1 . Em geral, X_n é o tamanho da n -ésima geração. Na definição acima, Z_i representa o número de descendentes do i -ésimo indivíduo da geração $n - 1$.

$$P_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P\left(\sum_{r=1}^i Z_r = j\right)$$

Proposição 1.36. Suponha que $X_0 = 1$. Então $E[X_n] = \mu^n$, onde μ é o número médio de descendentes por indivíduo.

Demonstração.

$$E[X_n] = E[E[X_n | X_{n-1}]] = \mu E[X_{n-1}] = \mu E[E[X_{n-1} | X_{n-2}]] = \mu E[X_{n-2}] = \dots = \mu^n.$$

□

Note que:

Se $\mu < 1$: $E[X_n]$ converge para zero.

Se $\mu = 1$: $E[X_n]$ é constante e igual a 1.

Se $\mu > 1$: $E[X_n]$ diverge para infinito.

Seja π a probabilidade de extinção de um processo de ramificação, isto é, $\pi = P(X_n = 0 \text{ para algum } n)$.

Teorema 1.37. Suponha que $P(X_1 = 0) > 0$ e $P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) < 1$. Então

i) π é o menor número positivo satisfazendo

$$x = \sum_j x^j P(X_1 = j)$$

ou seja, o menor número inteiro positivo satisfazendo $x = G_{X_1}(x)$, onde G_{X_1} é a função geradora de probabilidade de X_1 .

ii) $\pi = 1$ se e somente se $\mu \leq 1$.

Conclusão

Pesquisas Recentes

Como já foi mencionado, processos markovianos estão envolvidos em estudos nas mais variadas áreas do conhecimento. A título de exemplo apresentaremos dois problemas que tem sido amplamente estudados recentemente e que fazem uso de processos markovianos.

Problema 1

Suponha que inicialmente um único elemento de uma população possui uma informação. Este repassa a informação para uma quantidade aleatória de vizinhos e depois deixa de fazer isso. Cada indivíduo ao receber a informação repete este mesmo processo. Aqui algumas perguntas surgem: Que proporção da população toma conhecimento da informação ? Qual é a velocidade com que a informação se espalha ? Se a população é infinita existe probabilidade deste processo ocorrer indefinidamente sempre existindo algum indivíduo transmitindo a informação ?

Problema 2

Considere um modelo para estudo da disseminação de vírus em redes de computadores. Imagine uma sequência de computadores ligados em rede. No instante inicial um único computador é infectado por um vírus o qual se movimenta aleatoriamente na rede infectando computadores pelo caminho. Quando um ou mais vírus chegam a um computador, este é infectado por um novo vírus que inicia a mesma dinâmica de movimentos. Ao ser infectado cada computador ativa um antivírus que irá matar qualquer vírus que ali saltar futuramente.

Neste modelo algumas perguntas surgem: Numa população com infinitos computadores, existe probabilidade de infinitos computadores serem infectados? O que ocorre se criarmos um vírus forte capaz de sobreviver a um grande número de computadores com antivírus? Numa população finita, qual proporção de computadores é infectada pelo vírus?

Referências

- [Dur] R. Durrett, Probability: theory and examples, (2nd edn.), Duxbury, Belmont. Calif.
- [Fel] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, New York, 1966.
- [HIN] Hinojosa, A., Milanés, A., Uma introdução aos processos estocásticos com aplicações, Departamento de Estatística. UFMG.
- [Nor] J. Norris, Markov Chains, Cambridge University Press, 1996.
- [Ros] S.H. Ross, Stochastic Processes, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1996.
- [Sti] D. Stirzaker, Elementary Probability, Cambridge University Press, 2003.

MC11 - Uso do Maxima como Ferramenta no Ciclo Básico

Reginaldo de Jesus Santos (UFMG)

Departamento de Matemática-ICEEx - Universidade Federal de Minas Gerais

<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Resumo

Mostramos como podemos usar o programa de computação algébrica Maxima e o pacote GAAL, escrito pelo autor, no ensino de disciplinas de Matemática do ciclo básico de cursos da área de Ciências Exatas, como Geometria Analítica, Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

Maxima é um programa para fazer cálculos matemáticos, manipulações simbólicas, cálculos numéricos e gráficos. Podem ser escritas funções para executar tarefas mais complexas. Existem algumas interfaces para o uso do Maxima. Aqui estamos usando a interface chamada wxMaxima.

Introdução

Cada arquivo do wxMaxima é formado de células onde podem ser escritos blocos de comandos. Cada célula tem um colchete à esquerda indicando onde começa e termina o bloco. Para executar uma célula você deve clicar nele e digitar SHIFT-ENTER.

```
(%i1) /*Por exemplo para calcular a derivada da função cos(x) */  
/* Clique nesta célula e digite SHIFT-ENTER. */  
diff(cos(x),x);  
  
(%o1) - sin(x)
```

Maxima pode calcular integrais indefinidas

```
(%i3) integrate( x/(1+x^2),x );
```

$$(%o3) \frac{\log(x^2 + 1)}{2}$$

e integrais definidas.

```
(%i4) integrate( 1/(1+x^2), x, 0, 1 );
```

$$(%o4) \frac{\pi}{4}$$

Podem ser calculados limites:

```
(%i5) limit( (2*x+1)/(3*x+2), x, inf );
```

```
limit( sin(3*x)/x, x, 0 );
```

$$(%o5) \frac{2}{3}$$

$$(%o6) 3$$

Maxima pode resolver equações e sistemas de equações:

```
(%i7) solve(x^2-5*x+6 =0,x);
```

```
solve([x+y+z=5,3*x-5*y=10,y+2*z=3],[x,y,z]);
```

$$(%o7) [x = 3, x = 2]$$

$$(%o8) [[x = \frac{45}{13}, y = \frac{1}{13}, z = \frac{19}{13}]]$$

Álgebra Linear

Matrizes podem ser criadas e manipuladas.

```
(%i9) A:matrix([1,2],[3,4]);
```

```
B:matrix([1,1],[1,1]);
```

$$(%o9) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\%o10) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes podem ser somadas:

(%i13) $A + B ;$

$$(\%o13) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

multiplicadas:

(%i14) $A . B ;$

$$(\%o14) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

podemos elevar ao quadrado:

(%i15) $A^{^2};$

$$(\%o15) \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

A inversa pode ser obtida:

(%i16) $A^{^-1};$

$$(\%o16) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Podemos calcular o determinante:

(%i17) $\text{determinant}(\text{matrix}([a,b],[c,d]));$

(%o17) $a d - b c$

Matrizes podem ser concatenadas lado a lado:

(%i18) $C:\text{addcol}(A,B);$

(%o18)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos eliminar colunas:

Por exemplo, o comando abaixo elimina as colunas 3 e 4 da matriz C

(%i19) `submatrix(C, 3, 4);`

(%o19)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

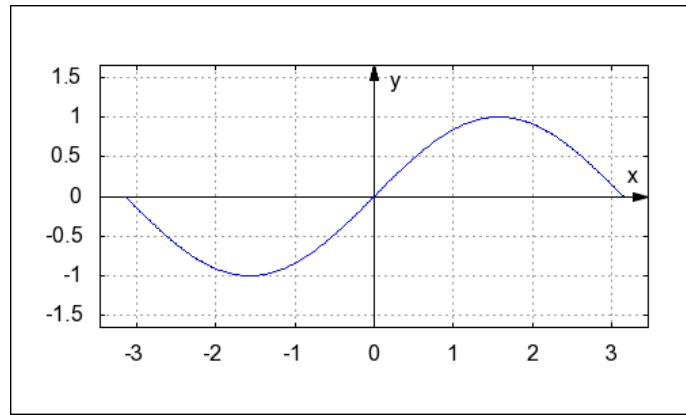
Gráficos

Desenha o gráfico da função $\sin(x)$ para x no intervalo $[-\pi, \pi]$ e y em $[-1.5, 1.5]$.

```
(%i20) f:sin(x)$ a:-%pi$ b:%pi$ c:-1.5$ d:1.5$

(%i25) wxdraw2d(grid      = true,
                  user_preamble = "set size ratio -1",
                  xrange = 1.1*[a,b],yrange = 1.1*[c,d],
                  line_type = solid,
                  head_length = 0.2,
                  head_angle = 15,
                  color      = black,
                  label(["x",1.05*b,0.08*(d-c)]),
                  label(["y",0.05*(b-a),d-0.02*(d-c)]),
                  vector(1.1*[a,0],1.1*[b-a,0]),
                  vector(1.1*[0,c],1.1*[0,d-c]),
                  color = blue,
                  explicit(f, x, a,b)
) $
```

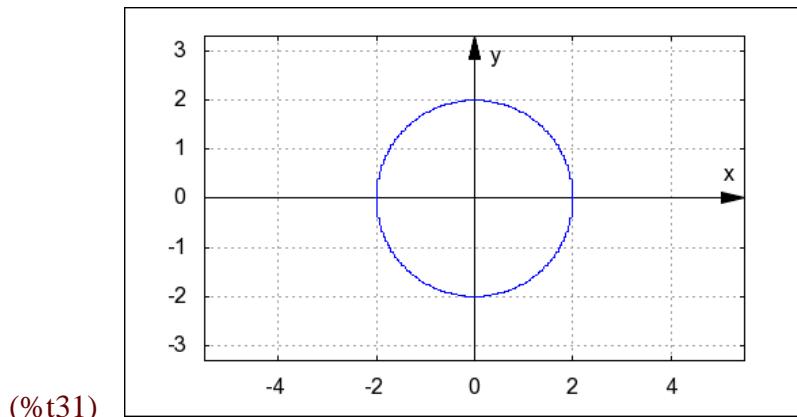
(%)t25)



Desenha o círculo $x^2 + y^2 = 4$ para x no intervalo $[-5, 5]$ e y em $[-3, 3]$.

```
(%i26) f:x^2+y^2$ a:-5$ b:5$ c:-3$ d:3$

(%i31) wxdraw2d(grid      = true,
                  user_preamble = "set size ratio -1",
                  xrange = 1.1*[a,b],yrange = 1.1*[c,d],
                  line_type = solid,
                  head_length = 0.5,
                  head_angle = 15,
                  color      = black,
                  label(["x",1.05*b,0.08*(d-c)]),
                  label(["y",0.05*(b-a),d-0.02*(d-c)]),
                  vector(1.1*[a,0],1.1*[b-a,0]),
                  vector(1.1*[0,c],1.1*[0,d-c]),
                  color = blue,
                  /*ip_grid=[200,200],*/
                  implicit(f=4, x, a,b,y,c,d)
) $
```



O Pacote GAAL

Escrevemos um pacote com várias funções para facilitar o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear. O comando abaixo carrega o pacote GAAL:

```
(%i32) load("C:/maxima/gaal.mac");
(%o32) C:/maxima/gaal.mac
```

Matrizes

```
(%i33) D:randi(1,3);
```

```
(%o33) \left(\begin{array}{ccc} -3 & -3 & -1 \end{array}\right)
```

cria uma matriz 1x3 aleatória com entradas entre -5 e 5.

```
(%i34) D:diag(D);
```

```
(%o34) \left(\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)
```

cria uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal estavam na matriz D.

Vamos descobrir de 1000 pares de matrizes aleatórias 2×2 quantos comutam.

```
(%i35) c:0$  
for n:1 thru 1000 do  
(A:randi(2), B:randi(2), if (A.B=B.A) then c:c+1)$  
c;  
(%o37) 2
```

Troque A:randi(2) por A:diag(randi(1,2)) editando a célula anterior e assim a matriz A será diagonal. Repita o comando com SHIFT-ENTER.

Sistemas Lineares

Vamos resolver um sistema linear que depende de um parâmetro:

```
(%i42) kill(a)$  
A:matrix([1,2,1,3],[1,1,-1,2],[1,1,a^2-5,a]);  
(%o43) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{pmatrix}$$

```

faz o escalonamento da matriz A passo a passo. Responda digitando 1 para continuar e 2 para parar e SHIFT-ENTER. Pare o escalonamento ao final da 2a. eliminação respondendo com 2 e SHIFT-ENTER.

```
(%i44) B:escalona(A);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2 - 5 & a \end{pmatrix}$$

1a. eliminação:

linha 2 --> linha 2 + (-1)*linha 1

```
linha 3 --> linha 3 + (-1)*linha 1
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a^2 - 6 & a - 3 \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)1;

2a. eliminação:

```
linha 2 --> -1*linha 2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a^2 - 6 & a - 3 \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)1;

```
linha 1 --> linha 1 + (-2)*linha 2
```

```
linha 3 --> linha 3 + (1)*linha 2
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)2;

(%o44) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$

(%i45) /*substitui a por 2. */

```
C:subst(a=2,B);
```

(%o45) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A matriz C já está na forma escalonada reduzida.

(%i46) /*substitui a por -2. */

C:subst(a=-2,B);

$$(%o46) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A matriz C já está na forma escalonada reduzida.

Para $a \neq \pm 2$ pode-se continuar a escalar a matriz B

(%i47) C:escalona(B);

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$$

3a. eliminação:

linha 3 --> 1/(a^2-4)*linha 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a^2-4} \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)1;

linha 1 --> linha 1 + (3)*linha 3

linha 2 --> linha 2 + (-2)*linha 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3(a-2)}{a^2-4} + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \frac{2(a-2)}{a^2-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a^2-4} \end{pmatrix}$$

Continua? (sim=1;/não=2;)1;

$$(%o47) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3(a-2)}{a^2-4} + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \frac{2(a-2)}{a^2-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a^2-4} \end{pmatrix}$$

Simplificando o resultado

```
(%i48) C:ratsimp(C);
```

$$(\%o48) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a+5}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

Cônica que Passa por 5 Pontos

Vamos encontrar a curva dada implicitamente pela equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

que passa por 5 pontos.

```
(%i1) load("C:/maxima/gaal");
```

```
(%o1) C:/maxima/gaal.mac
```

cria uma matriz com entradas inteiras e aleatórias em que cada linha tem as coordenadas de um ponto.

```
(%i2) P:randi(5,2);
```

$$(%o2) \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & -4 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

gera uma matriz de Vandermonde usando as colunas de P .

```
(%i3) A:matvand(P,2);
```

$$(%o3) \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & -1 & -4 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 9 & -6 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

escalona a matriz do sistema $AX = 0$.

```
(%i4) S:escalona(A);
```

$$(\%o4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{48} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{71}{48} \end{pmatrix}$$

obtém $f(x, y)$ tal que a cônica de equação $f(x, y) = 0$ interpola os pontos.

```
(%i5) kill(x,y)$
f:poly2sym2(addrw(-col(s,6),[1]));
```

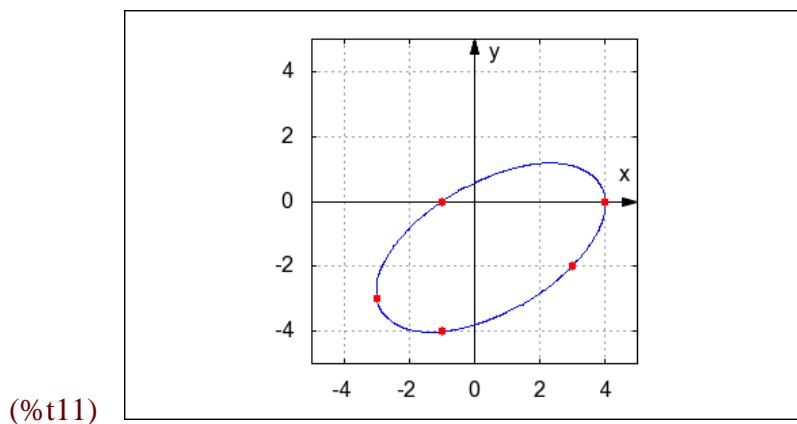
$$(\%o6) \quad -\frac{11 y^2}{24} + \frac{17 x y}{48} - \frac{71 y}{48} - \frac{x^2}{4} + \frac{3 x}{4} + 1$$

desenha o gráfico da cônica $f(x, y) = 0$ que interpola os pontos que estão em P .

```
(%i7) a:-5$ b:5$ c:-5$ d:5$

wxdraw2d(grid      = true,
          user_preamble = "set size ratio -1",
          xrange = [a,b],yrange = [c,d],
          line_type = solid,
          head_length = 0.5,
          head_angle = 15,
          color      = black,
          label(["x",b-0.03*(b-a),0.08*(d-c)]),
          label(["y",0.07*(b-a),d-0.04*(d-c)]),
          vector([a,0],[b-a,0]),
          vector([0,c],[0,d-c]),
          color = blue,
          implicit(f, x, -5,5, y, -5,5),
          point_type = filled_circle,
          point_size = 1,
          color      = red,
          points(P)

)$
```



Identificação de Cônicas

Exemplo

Vamos identificar a cônica de equação $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$.

```
(%i1) kill(all)$
load("C:/maxima/gaal");
x:transpose([x,y])$ x1:transpose([x1,y1])$

(%o1) C:/maxima/gaal.mac

(%i4) A:matrix([9,-2],[-2,6]);
f:expand(transpose(X) . A . X - 30);

(%o4)

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(%o5)  $6y^2 - 4xy + 9x^2 - 30$ 
```

diagonaliza a matriz A , ou seja, encontra matrizes P (invertível) e D (diagonal) tais que $A = PDP^t$.

```
(%i6) l:diagonal(A); p:l[1]$ d:l[2]$
(%o6) [ $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ]
```

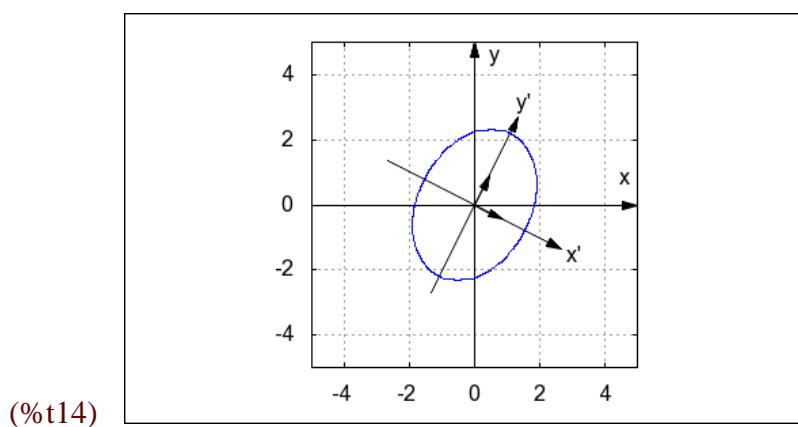
substitui X por PX_1 .

```
(%i9) f1:substi(f,X,P . x1);
(%o9)  $5y^2 + 10x^2 - 30$ 
```

desenha o gráfico da cônica $f(x, y) = 0$.

```
(%i10) a:-5$ b:5$ c:-5$ d:5$

wxdraw2d(grid      = true,
          user_preamble  = "set size ratio -1",
          xrange = [a,b],yrange = [c,d],
          line_type = solid,
          head_length = 0.5,
          head_angle = 15,
          color      = black,
          vector([a,0],[b-a,0]),
          vector([0,c],[0,d-c]),
          label(["x",b-0.03*(b-a),0.08*(d-c)]),
          label(["y",0.07*(b-a),d-0.04*(d-c)]),
          vector([0,0],[P[1,2],P[2,2]]),
          vector([0,0],[P[1,1],P[2,1]]),
          vector(-3*[P[1,2],P[2,2]],6*[P[1,2],P[2,2]]),
          vector(-3*[P[1,1],P[2,1]],6*[P[1,1],P[2,1]]),
          label(["x'",3.5*P[1,1],3.5*P[2,1]]),
          label(["y'",3.5*P[1,2],3.5*P[2,2]]),
          color = blue,
          implicit(f, x, -5,5, y, -5,5)
)$
```



Exemplo

Vamos identificar a cônica de equação $9x^2 + 6xy + y^2 - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$.

```
(%i15) A:matrix([9,3],[3,1]);
K:matrix([-10*10^(1/2),10*10^(1/2)]);
f:expand(transpose(X) . A . X + K . X + 90);
```

```
(%o15)  $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 
(%o16)  $\begin{pmatrix} -10^{\frac{3}{2}} & 10^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ 
(%o17)  $y^2 + 6xy + 10^{\frac{3}{2}}y + 9x^2 - 10^{\frac{3}{2}}x + 90$ 
```

```
(%i18) l:diagonal(A);
P:l[1]$ D:l[2]$
```

$$(\%o18) \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \right]$$

substitui X por PX_1 .

```
(%i21) f1:substi(f,X,P . x1);
(%o21)  $10y_1^2 - 20y_1 - 40x_1 + 90$ 
```

substitui x_1 por $x_2 + 2$.

```
(%i22) f2:substi(f1,x1,x2+2);
(%o22)  $10y_1^2 - 20y_1 - 40x_2 + 10$ 
```

substitui y_1 por $y_2 + 1$.

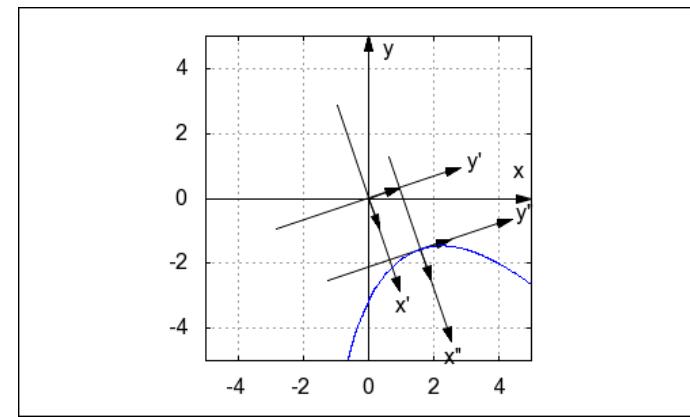
```
(%i23) f2:substi(f2,y1,y2+1);
(%o23)  $10y_2^2 - 40x_2$ 
```

```
(%i24) X0:P. matrix([2],[1]);
```

$$(\%o24) \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{10}} \\ -\frac{5}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

```
(%i25) a:-5$ b:5$ c:-5$ d:5$

wxdraw2d(grid      = true,
          user_preamble  = "set size ratio -1",
          xrange = [a,b],yrange = [c,d],
          line_type = solid,
          head_length = 0.5,
          head_angle = 15,
          color      = black,
          vector([a,0],[b-a,0]),
          vector([0,c],[0,d-c]),
          label(["x",b-0.03*(b-a),0.08*(d-c)]),
          label(["y",0.07*(b-a),d-0.04*(d-c)]),
          vector([0,0],[P[1,2],P[2,2]]),
          vector([0,0],[P[1,1],P[2,1]]),
          vector(-3*[P[1,2],P[2,2]],6*[P[1,2],P[2,2]]),
          vector(-3*[P[1,1],P[2,1]],6*[P[1,1],P[2,1]]),
          label(["x'",3.5*P[1,1],3.5*P[2,1]]),
          label(["y'",3.5*P[1,2],3.5*P[2,2]]),
          vector([X0[1,1],X0[2,1]],[P[1,2],P[2,2]]),
          vector([X0[1,1],X0[2,1]],[P[1,1],P[2,1]]),
          vector(-3*[P[1,2],P[2,2]]+[X0[1,1],X0[2,1]],
                 6*[P[1,2],P[2,2]]),
          vector(-3*[P[1,1],P[2,1]]+[X0[1,1],X0[2,1]],
                 6*[P[1,1],P[2,1]]),
          label(["x''",3.5*P[1,1]+X0[1,1],3.5*P[2,1]+X0[2,1]]),
          label(["y''",3.5*P[1,2]+X0[1,1],3.5*P[2,2]+X0[2,1]]),
          color = blue,
          implicit(f, x, -5,5, y, -5,5)
)$
```



(t29)

Sistemas de Equações Diferenciais não Homogêneos

Vamos encontrar a solução geral do sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2 \\ x'_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2t \end{cases}$$

```
(%i65) kill(all)$

load("C:/Maxima/gaal.mac");

(%o1) C:/Maxima/gaal.mac

(%i2) A:matrix([1,1],[1,1]); F:matrix([2],[2*t]);

(%o2) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(%o3) 
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

```

Decompõe a matriz A na forma $A = PDP^{-1}$

```
(%i4) l:jordand(A); P:l[1]$ D:l[2]$

(%o4) [
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}]$$


(%i7) G:(P^-1).F;

(%o7) 
$$\begin{pmatrix} 1-t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

```

Encontra uma solução particular da equação diferencial $y'_1 = d_{11}y_1 + g_{11}$

```
(%i8) kill(y1)$

y1:rhs(ratsimp(ode2('diff(y1,t)=D[1,1]*y1+G[1,1],y1,t)));
y1:subst(%c=0,y1);

(%o9) 
$$-\frac{t^2 - 2t - 2\%c}{2}$$

```

$$(\%o10) - \frac{t^2 - 2t}{2}$$

Encontra uma solução particular da equação diferencial $y'_2 = d_{22}y_2 + g_{21}$

(%i11) `kill(y2)$`

```
          y2:rhs(ratsimp(ode2('diff(y2,t)=D[2,2]*y2+G[2,1],y2,t)));
          y2:subst(%c=0,y2);
```

$$(\%o12) \frac{4\%ce^{2t} - 2t - 3}{4}$$

$$(\%o13) \frac{-2t - 3}{4}$$

Uma solução particular do sistema é dada por

(%i14) `Xp:ratsimp(P.matrix([y1],[y2]));`

$$(\%o14) \begin{pmatrix} \frac{-2t^2-2t+3}{4} \\ \frac{2t^2-6t-3}{4} \end{pmatrix}$$

A solução geral é então a soma da solução geral do sistema homogêneo com uma solução particular do sistema não homogêneo

(%i15) `doallmxops:false$`

```
X:c[1]*%e^(D[1,1]*t)*col(P,1) +
c[2]*%e^(D[2,2]*t)*col(P,2)+Xp;
doallmxops:true$
```

$$(\%o16) \begin{pmatrix} \frac{-2t^2-2t+3}{4} \\ \frac{2t^2-6t-3}{4} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MC16 - Introdução à Análise Bayesiana*Marta Cristina Bianchi & David Henriques (UFG)*

Resumo

A informação sobre um parâmetro de interesse θ , em um modelo probabilístico, é crucial no estudo da Estatística. O objetivo em uma análise inferencial é tentar reduzir o desconhecimento sobre o verdadeiro valor de θ . Com o intuito de propor uma solução para esta questão, a Inferência Bayesiana traz uma metodologia que trata a incerteza sobre o verdadeiro valor de θ através de um *modelo probabilístico* para esse parâmetro.

Neste mini-curso será apresentada uma introdução a Inferência Bayesiana confrontando-a à Inferência Clássica. Serão apresentados os fundamentos da teoria Bayesiana, bem como alguns métodos inferenciais e computacionais inerentes a esta teoria.

Fundamentos da Teoria Bayesiana

Em inferência clássica, as inferências sobre o parâmetro de interesse θ , quantidade fixa e desconhecida, provém exclusivamente de informação amostral, por meio da realização de experimentos e respectivo modelo de verossimilhança. Por outro lado, a Inferência Bayesiana une a informação amostral ao conhecimento do pesquisador para realizar inferências sobre o parâmetro de interesse.

A filosofia bayesiana incorpora a informação *a priori* sobre o parâmetro θ , formada por juízos ou experiências individuais do pesquisador anteriores à realização do experimento, à informação amostral advinda dos dados e função verossimilhança. A informação *a priori*, anterior à informação amostral, é modelada por uma distribuição denominada *a priori*. Esta informação, quando atualizada pela informação amostral, é modelada por uma distribuição denominada *a posteriori*.

O principal fundamento da Inferência Bayesiana provém do Teorema de Bayes,

resultado da Teoria de Probabilidade que atualiza probabilidades após o acontecimento de um dado fenômeno.

Teorema 1: Sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos que formam uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer de Ω . Então, temos

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Uma interpretação para este teorema consiste em considerar os $A_i, i = 1, \dots, n$ como "causas", "hipóteses" ou "estados" a que o pesquisador atribui graus de credibilidade ou probabilidades *a priori* $P(A_i)$ de natureza subjetiva. Após a informação adicional - realização do acontecimento B - o investigador revê suas probabilidades *a priori* por meio do Teorema de Bayes e passa a atribuir aos A_i probabilidades *a posteriori* $P(A_i|B)$.

Considere $h(\theta)$ a distribuição *a priori* de θ dada pelo pesquisador, e $f(\cdot|\theta)$ a verossimilhança do modelo amostral indexado por θ , o Teorema de Bayes para densidades conduz à relação,

$$h(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)h(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)h(\theta)d\theta}, \quad \theta \in \Theta, \tag{1.1}$$

sendo $h(\theta|x)$ a distribuição *a posteriori* de θ , após realizado o experimento e observada a amostra $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Caso o espaço paramétrico seja discreto, temos:

$$h(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)h(\theta)}{\sum_{\theta} f(x|\theta)h(\theta)}, \quad \theta \in \Theta. \tag{1.2}$$

Como os denominadores nas equações (2.6) e (1.2) não dependem de θ , pode-se reescrever a distribuição *a posteriori* da maneira a seguir

$$h(\theta|x) = k(x)f(x|\theta)h(\theta) \propto f(x|\theta)h(\theta), \quad \theta \in \Theta.$$

Verifica-se então que a informação *a posteriori* provém de uma combinação entre a informação amostral, representada pela verossimilhança, e a informação inicial do pesquisador, representada pela distribuição *a priori*.

Assim como na inferência clássica, em inferência bayesiana o modelo normal também possui importantes resultados. A seguir, dois desses resultados serão apresentados.

Teorema 2: Suponha $\theta \sim N(a, b^2)$ e $X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido, então a distribuição a posteriori de θ é $(\theta|X = x) \sim N(A, B^2)$ onde,

$$A = \frac{\frac{1}{b^2}a + \frac{1}{\sigma^2}x}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\sigma^2}} \quad \text{e} \quad B^2 = \frac{1}{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{\sigma^2}}.$$

Corolário 1: Considere uma amostra aleatória (X_1, X_2, \dots, X_n) da distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido, e como priori $\theta \sim N(a, b^2)$, então como posterior temos $\theta|x \sim N(C, D^2)$ onde

$$C = \frac{b^{-2}a + n\sigma^{-2}\bar{x}}{b^{-2} + n\sigma^{-2}} \quad \text{e} \quad D^{-2} = b^{-2} + n\sigma^{-2}.$$

Os exemplos 1 e 2 ilustram casos em que a informação amostral é mais significante que a informação *a priori*. O terceiro exemplo ilustra o contrário, a significância da priori frente os dados.

Exemplo 1:

Situação A: Um pesquisador deseja estudar proporção de fumantes θ . Suponha que ele não disponha de qualquer informação inicial que lhe permita fazer distinção entre os valores do intervalo $[0, 1]$ para θ . Neste caso, poderia-se tomar uma distribuição *a priori* uniforme,

$$h(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \in [0, 1] \\ 0, & \text{se } \theta \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Considerando o número de fumantes, entre um grupo de n indivíduos, como a variável aleatória X a ser observada, temos então para os dados o modelo binomial dado por:

$$f(x|\theta) = C_x^n \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Observado o valor $X = x$, atualiza-se a informação *a priori* por meio da distribuição *a posteriori*,

$$h(\theta|x) \propto f(x|\theta)h(\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

sendo então, a menos de uma constante, a distribuição $Beta(x+1, n-x+1)$.

Situação B: Considere agora que o pesquisador possui algumas informações sobre a verdadeira proporção de fumantes θ . Suponha que esta informação possa ser traduzida através de uma distribuição *a priori* assumindo o formato de uma *Beta*, com valor médio da ordem de 0.4 e variância da ordem de 0.04. Desta forma temos $\theta \sim Beta(2, 3)$. Logo, a respectiva distribuição *a posteriori*, após observado $X = x$, é calculada por,

$$h(\theta|x) \propto f(x|\theta)h(\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\theta(1-\theta)^2 = \theta^{x+1}(1-\theta)^{n-x+2},$$

sendo então, a menos de uma constante, a distribuição $Beta(x+2, n-x+3)$.

As Figuras 1(a) e 1(b) apresentam respectivamente os gráficos das densidades *a priori* e *a posteriori* de θ nas situações A e B, quando observado 20% de fumantes em um grupo de 10 pessoas. Observa-se que neste caso as diferentes informações *a priori* sobre θ , após atualização pelos dados, conduzem à mesma informação *a posteriori*, indicando que a informação amostral é mais significante que a informação *a priori*.

Exemplo 2:

Situação A: Dois físicos, F_1 e F_2 , desejam estudar uma constante física θ através de um método experimental que consiste em observar uma variável aleatória $X \sim N(\theta, 40^2)$.

O físico F_1 domina melhor a área em estudo e determina a priori $\theta \sim N(900, 20^2)$. O físico F_2 menos experiente indica a priori $\theta \sim N(800, 80^2)$.

Realizado o experimento obtém-se $X = 850$. De acordo como Teorema 2, as distribuições *a posteriori* são:

$$\begin{aligned} \text{físico } F_1 : \theta|X=850 &\sim N(890, 17.9^2); \\ \text{físico } F_2 : \theta|X=850 &\sim N(840, 35.7^2). \end{aligned}$$

Note que neste caso a diferença entre os conhecimentos a priori, apresentados pelos físicos, implicou em uma diferença a posteriori quando observado apenas um valor amostral. Veja Figura 2(a).

Situação B: Suponha que do método experimental obtém-se uma amostra aleatória de tamanho $n = 50$ sendo observado $\bar{x} = 870$. De acordo com o Corolário 1 as distribuições *a posteriori* passam a ser:

$$\begin{aligned}\text{físico } F_1 : \theta | \bar{x} = 870 &\sim N(872.2, 5.44^2); \\ \text{físico } F_2 : \theta | \bar{x} = 870 &\sim N(869.7, 5.64^2).\end{aligned}$$

Nesta situação, observando a Figura 2 (b), nota-se que a informação dos dois físicos após o experimento pouco diferem, mesmo sendo suas posições iniciais muito diferentes. Este fato reflete a força dos dados frente *a priori*.

F_2 com respectivas distribuições a posteriori; (b)Posterioris dos físicos F_1 e F_2 ao observar a mesma amostra, tamanho $n = 50$.

Exemplo 3: Sejam duas amostras aleatórias de tamanho $n = 5$ da distribuição normal $N(\theta, 6^2)$, observados $\bar{x} = 30$ e $\bar{x} = 70$ na primeira e segunda amostra respectivamente. Admitindo como *priori* $\theta \sim N(20, 5^2)$, conforme Corolário 1 temos como respectivas posteriores:

$$\begin{aligned}\theta | \bar{x} = 30 &\sim N(27.8, 2.4^2); \\ \theta | \bar{x} = 70 &\sim N(58.8, 2.4^2).\end{aligned}$$

Para este caso, observando a Figura 3(a) nota-se uma certa conformidade entre distribuição a posteriori e verossimilhança, fato este que implica em inferências "similares" tanto do ponto de vista clássico quanto bayesiano. No entanto, a distância entre informação amostral ($\bar{x} = 70$) e informação a priori ($E(\theta) = 20$) destaca a possibilidade de um conflito entre a distribuição a posteriori e verossimilhança, ou seja, um conflito entre filosofias bayesiana e clássica (Figura 3(b)).

A distribuição a posteriori é o elemento fundamental que serve de base ao desenvolvimento de toda a inferência bayesiana: é a descrição do conhecimento corrente so-

bre θ obtido da quantificação da informação *a priori* e informação amostral. A partir desta distribuição definem-se as inferências sobre o parâmetro. Como introdução, a próxima seção apresenta como serão definidos estimação e teste de hipótese do ponto de vista bayesiano.

Estimação e Testes de Hipótese Bayesianos

No cenário bayesiano a idéia de estimação pontual é tomar como estimativas pontos típicos da distribuição *a posteriori*. As estimativas mais usadas são a moda *a posteriori*, a média *a posteriori* e a mediana *a posteriori* definidas a seguir. Considere $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$:

- Moda *a posteriori*: $\hat{\theta}$ tal que

$$h(\hat{\theta}|x) = \max_{\theta \in \Theta} h(\theta|x) = \max_{\theta \in \Theta} \{h(\theta)L(\theta|x)\};$$

- Média *a posteriori*: $\hat{\theta} = E[\theta|x]$ sendo,

$$E[\theta_i|x] = \int_{\Theta} \theta_i h(\theta|x)d\theta, \quad i = 1, \dots, p;$$

- Mediana *a posteriori*: $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ tal que

$$P(\theta_i \geq \hat{\theta}_i|x) \geq 0.5 \quad e \quad P(\theta_i \leq \hat{\theta}_i|x) \geq 0.5, \quad i = 1, \dots, p$$

A escolha de uma destas estimativas pode basear-se na relevância de cada uma dessas quantidades para o problema ou na facilidade de seu cálculo. A relevância de cada uma destas estimativas pode ser traduzida pela escolha de uma função perda adequada ao problema. No contexto da teoria da decisão, analogamente à inferência clássica, um estimador bayesiano também é uma regra de decisão que minimiza o valor esperado de uma determinada função perda, porém, em relação à distribuição *a posteriori*.

Definição 1: Uma regra de decisão δ é uma função definida no espaço amostral Ω que assume valores em um espaço de ações A , $\delta : \Omega \rightarrow A$. A cada decisão δ e possível valor de θ associa-se uma perda $L(\delta, \theta)$, desta forma definindo uma *função perda* L .

Definição 2: O risco, associado a uma função perda L , de uma regra de decisão, denotado por $R(\delta)$ é a perda esperada *a posteriori* dada por $R(\delta) = E[L(\theta, \delta)|x]$.

Definição 3: O estimador de bayes é a regra de decisão δ^* que minimiza o risco, ou seja, $R(\delta^*) < R(\delta), \forall \delta$. O risco de δ^* é denominado *risco de bayes..*

Exemplo 4: Seja $\delta_1 = E[\theta|x]$ e δ estimadores de θ . Calculemos o risco de δ associado à função perda quadrática $L(\delta, \theta) = (\delta - \theta)^2$

$$\begin{aligned} R(\delta) &= E[(\delta - \theta)^2|x] = E\{[(\delta - \delta_1) + (\delta_1 - \theta)]^2|x\} \\ &= E[(\delta - \delta_1)^2|x] + E[(\delta_1 - \theta)^2|x] + 2E[(\delta - \delta_1)(\delta_1 - \theta)|x] \\ &= (\delta - \delta_1)^2 + E[(\delta_1 - \theta)^2|x] + 2(\delta - \delta_1)E[(\delta_1 - \theta)|x] \\ &= (\delta - \delta_1)^2 + E[(\delta_1 - \theta)^2|x] = (\delta - \delta_1)^2 + VAR[\theta|x] \end{aligned}$$

Desta forma o risco é mínimo quando $\delta = \delta_1$, sendo o risco de bayes $R(\delta_1) = VAR[\theta|x]$. Logo a média a posteriori minimiza o risco associado à função perda quadrática.

Também pode-se mostrar que a mediana *a posteriori* e moda *a posteriori* minimizam, respectivamente, o risco associado às funções perda modular, $L(\theta, \delta) = |\theta - \delta|$, e perda "zero-um", $L(\theta, \delta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{|\theta-\delta|}([\epsilon, \infty))$ para θ contínuo, e

$$L(\theta, \delta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \neq \delta \\ 0, & \text{se } \theta = \delta \end{cases}$$

para θ discreto.

A principal restrição na estimação pontual bayesiana é o resumo de toda informação presente na distribuição *a posteriori* em um único valor numérico. Embora também se possa especificar a precisão, incerteza de um estimador bayesiano pontual. Por exemplo, pode-se quantificar a precisão da média a posteriori por sua variância ou coeficiente de variação, da mediana *a posteriori* pela distância entre quartis e da moda *a posteriori* pela informação de Fisher observada. Um resumo de $h(\theta|x)$ mais informativo do que qualquer estimativa pontual pode ser obtido ao extrair uma região $C \subset \Omega$ com grande probabilidade *a posteriori*, o paralelo bayesiano da região de confiança.

Definição 4: C é uma região de $(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ de credibilidade para θ se

$$P(\theta \in C|x) \geq 1 - \alpha$$

sendo $1-\alpha$ chamado de nível de credibilidade ou confiança. No caso em que θ é escalar, C é dado por um intervalo $(c_1(x), c_2(x))$.

Qualquer região de credibilidade é definida numericamente (não é aleatória) e admite interpretação probabilística direta em contraste com a interpretação da região de confiança clássica.

Exemplo 5: Considere amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n da distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido. Assumindo como priori $\theta \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, então, pelo Teorema 2, $\theta|{\bf x} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Usando o fato que

$$\frac{\theta - \mu_1}{\sigma_1}|{\bf x} \sim N(0, 1)$$

Pode-se obter um intervalo de credibilidade para θ por

$$P(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1 \leq \theta \leq \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1 | {\bf x}) = 1 - \alpha$$

Logo $(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1, \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1)$ é um intervalo de credibilidade $1-\alpha$ para θ .

Fazer a variância da priori tender a infinito é uma forma de tornar a distribuição a priori não informativa, ou seja reduzir ao máximo a informação inicial sobre θ , valorizando somente a informação amostral na distribuição a posteriori. Desta forma, note que ao fazer $\sigma_0^2 \rightarrow \infty$, pelo Corolário 1, temos $\sigma_1^{-2} \rightarrow n\sigma^{-2}$ e $\mu_1 \rightarrow \bar{x}$, ou seja, a distribuição *a posteriori* coincide com a distribuição amostral, implicando que as inferências sobre θ clássicas e bayesianas coincidem, inclusive o intervalo de confiança

$$(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$$

porém, do ponto de vista bayesiano a interpretação do intervalo é uma afirmação probabilística sobre θ .

Dada a infinidade de regiões de credibilidade com o mesmo grau de credibilidade $1-\alpha$ há o interesse em selecionar aquela que englobe todos os valores de θ mais credíveis *a posteriori*, de modo que

$$h(\theta_1|x) \geq h(\theta_2|x), \forall \theta_1 \in C, \theta_2 \notin C$$

.

Deste interesse, pretende-se então obter a região HPD (*highest probability density*).

Definição 5: Um intervalo de credibilidade C de $(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ para θ é de máxima densidade a posteriori, ou HPD, se $C = \{\theta \in \Theta : h(\theta|x) \geq k(\alpha)\}$ onde $k(\alpha)$ é a maior constante tal que $P(\theta \in C|x) \geq 1 - \alpha$.

Note que pela definição, no caso de distribuições a posteriori com duas caudas, por exemplo a distribuição normal, o intervalo HPD é idêntico ao intervalo de credibilidade central.

O problema de testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra $H_1 : \theta \in \Theta_1$ no contexto bayesiano é também conceitualmente mais simples que no contexto clássico: consiste em calcular probabilidades a posteriori $P(H_0|x)$ e $P(H_1|x)$ e optar por uma das hipóteses segundo algum critério que traduza uma grandeza relativa entre elas.

Com o objetivo de medir a influência da amostra x na alteração da credibilidade relativa de H_0 e H_1 contrapõe-se a razão *a posteriori* à respeitiva razão de probabilidades *a priori* das hipóteses. A razão destas razões dada por

$$B(x) = \frac{\frac{P(H_0|x)}{P(H_1|x)}}{\frac{P(H_0)}{P(H_1)}}$$

é denominada *fator de Bayes*. Em geral, um valor de fator de Bayes entre um e dez, $1 \leq B(x) \leq 10$, fornece evidência a favor de H_0 ; entre dez e cem, $10 \leq B(x) \leq 100$, fornece forte evidência a favor de H_0 ; e fator de bayes com valor maior que cem, $B(x) > 100$, fornece evidência decisiva a favor de H_0 . A utilização do fator de Bayes torna-se problemática e inviável quando trabalha-se com prioris impróprias ou desconhe-se, sendo de difícil obtenção, a constante de normalização da posteriori.

Em um teste de hipótese simples $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$, no caso em que θ é contínuo o procedimento de teste de hipótese utilizando o fator de Bayes torna-se

inadequado uma vez que $P(\theta = \theta_0) = P(\theta = \theta_0|x) = 0$. Mas ainda pode-se calcular o fator de Bayes, representando o valor θ_0 como uma bola centrada em θ_0 , $V_\epsilon(\theta_0)$, com raio ϵ escolhido de modo que os pontos interiores a bola sejam praticamente indistinguíveis de θ_0 a posteriori. Transformando então o teste para $H_0 : \theta \in V_\epsilon(\theta_0)$ contra $H_1 : \theta \notin V_\epsilon(\theta_0)$.

Existe outro método menos complexo para lidar com teste de hipótese simples que é análogo a construção de teste de hipótese em inferência clássica a partir da inversão de intervalos de confiança. Este método consiste em construir uma região de credibilidade $(1 - \alpha)$ para θ , de preferência HPD, e tomar a decisão de rejeitar H_0 ao nível α se ela não incluir θ_0 .

Continuação Exemplo 5: A hipótese $H_0 : \theta = \theta_0$ não é rejeitada se θ_0 pertence ao intervalo, $(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1, \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1)$. No caso de não informação na priori, temos $\sigma_1 \rightarrow \sigma/\sqrt{n}$ e $\mu_1 \rightarrow \bar{x}$, e a hipótese H_0 não é rejeitada se θ_0 pertence ao intervalo $(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$ coincidindo com o teste clássico.

Computação Bayesiana

Como visto nas seções anteriores, as inferências sobre θ são todas baseadas em sua distribuição a posteriori, porém, encontrar a forma analítica da distribuição a posteriori torna-se tarefa difícil ou impossível em alguns casos. Há então a necessidade de simular a distribuição a posteriori para se obter aproximações para as inferências sobre θ , por exemplo, baseadas em cálculo de esperanças e probabilidades a posteriori:

- Média a posteriori: $\mu = E[\theta|x] = \int \theta h(\theta|x)d\theta$;
- Variância a posteriori: $\sigma^2 = VAR(\theta|x) = E[(\theta - E(\theta))^2|x]$;
- Probabilidades a posteriori: $P(\theta \in A|x) = \int_A h(\theta|x)d\theta$.

Costuma-se utilizar métodos baseados em simulação da posteriori, como Monte Carlo, para aproximação destas integrais.

Às vezes, na prática, é muito difícil ou mesmo impossível simular valores da distribuição a posteriori, tornando-se necessário usar *métodos de reamostragem*, como por

exemplo o *método de rejeição*, gerando valores em duas etapas. Na primeira etapa gera-se valores de uma distribuição auxiliar conhecida, em geral da distribuição *a priori*. Na segunda etapa utiliza-se um mecanismo de correção para que os valores gerados da distribuição auxiliar sejam representativos da distribuição a posteriori.

Nos métodos de monte carlo e reamostragem não há uma preocupação com a convergência do algoritmo, bastando que o tamanho da amostra seja suficientemente grande. E ainda, uma limitação dos métodos de reamostragem em muitos casos, é a difícil tarefa de utilizar uma densidade auxiliar que seja simultaneamente uma boa aproximação da posteriori e fácil de ser simulada. Uma alternativa ao uso destes métodos é a utilização dos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). O objetivo ainda é obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas amostrais de características desta distribuição (esperanças, probabilidades a posteriori), mas por base em uma simulação de um passeio aleatório no espaço de θ que converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição a posteriori de interesse. Os métodos MCMC mais utilizados são amostrador de Gibbs e Metropolis-Hasting.

Referências

- [1] Gelman, A.;Carlin, J. B. ; Stern, H. S.; Rubin, D. B. *Bayesian Data Analysis* , 2a ed., *Chapman & Hall*, 2004.
- [2] Migon, H.; Gamerman, D. *Statistical Inference: An Integrated Approach*. *Arnold*, 1999.
- [3] Paulino, C.D.; Turkman, M.A.A.; Murteiro,B. *Estatística Bayesiana*. *Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa*, 2003.
- [4] Robert, C.P. *The Bayesian Choice*. *Springer, New York*, 1994.

CAPÍTULO 2

RESUMOS EXPANDIDOS

2.1 Minicursos

MC1 - Aulas de Matemática para Além do Livro Didático: Aventure-se Você Também

Anne Michelle Dysman Gomes (UFF)

MC4 - Desvendando o Cubo Mágico

Âder Silva, Juliana Oliveira, Eduardo Divino Pereira & Yu Chi Chen (UFG)

MC6 - Representações Lineares para Grupos Finitos

Ivonildes Martins (UFG) & Eunice Cândida Rodrigues (UFMT)

MC1 - Aulas de matemática para além do livro didático: Aventure-se você também!

Anne Michelle Dysman - Universidade Federal Fluminense

Enquanto as deficiências no processo de ensino e aprendizagem em matemática nas escolas da rede pública de educação básica são notórias em nosso país, observamos nas universidades públicas a existência de um ambiente de alta qualidade em ensino e pesquisa nas mais diversas áreas, dentre elas o campo da Educação Matemática. Contudo, não raro os frutos da pesquisa nesta área acabam por permanecerem dentro dos muros das universidades, ou, mais precisamente, dos muros virtuais que delimitam o espaço da comunidade científica dedicada à Educação Matemática. Mesmo quando chegam aos alunos das Licenciaturas em Matemática, muitos deles futuros professores da rede pública de educação básica, frequentemente isto se dá através da transmissão em disciplinas de graduação sem garantias de que esta aprendizagem teórica, muitas vezes realizada de forma apartada da realidade escolar, se traduzirá em ações práticas no futuro em benefício da melhoria da qualidade do ensino básico de Matemática. De fato, vários pesquisadores já identificaram a primariedade da experiência na construção da identidade profissional do professor, dentre eles Tardif e Raymond:

Em resumo, como vemos, os saberes que servem de base para o ensino [...] não correspondem, ou pelo menos muito pouco, aos conhecimentos teóricos obtidos na universidade e produzidos pela pesquisa na área da Educação: para os professores de profissão, a experiência de trabalho parece ser a fonte privilegiada de seu saber-ensinar. [7]

Através do Projeto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF) para o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da CAPES, desenvolvemos Módulos Instrucionais com objetivo de colaborar para a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem em Matemática. O trabalho se realiza através de ações cujos efeitos e benefícios devem atingir sujeitos envolvidos de diferentes formas no processo educativo, fornecendo a estes condições para que exerçam seus papéis (como docentes, discentes, licenciandos ou pesquisadores) de forma mais consciente e criativa.

A equipe da área de Matemática/Niterói do PIBID/UFF é composta por vinte

alunos do curso de Licenciatura em Matemática, três professoras supervisoras nas escolas parceiras e uma coordenadora (professora pesquisadora na universidade). Além disso, participam do projeto diversos outros pesquisadores através de colaborações ou parcerias com outros projetos como a estabelecida com o LEG (Laboratório de Ensino de Geometria) da UFF.

Os módulos instrucionais desenvolvidos no projeto seguem os princípios educacionais dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da geometria para as séries do Ensino Fundamental e do Médio ([1], [2] e [3]). Consistem de planos de aulas, listas de exercícios e materiais didáticos alternativos. As atividades propostas buscam explorar recursos como materiais concretos, conteúdos digitais para ensino de matemática, problemas do cotidiano e jogos. A seguir descrevemos um pouco a forma como cada um destes recursos é geralmente explorada em nosso trabalho.

- **Materiais Concretos:** Em nossos módulos instrucionais os materiais concretos são explorados seguindo o referencial construtivista ([6]) e os preceitos da teoria de registros de representação semiótica ([5] e [4]). Desta forma, privilegiamos o uso de materiais cuja manipulação permite ao aluno experimentar e observar propriedades e conceitos matemáticos de forma concreta e adotamos como diretriz metodológica a articulação das representações fornecidas pelos materiais concretos com aquelas que se constituem através dos registros matemáticos usuais. Nesta articulação enfocamos os algoritmos matemáticos que devem ser ensinados e os desenvolvemos simultaneamente utilizando os dois registros de representação (concreto e matemático abstrato), buscando fazer com que o aluno vincule a observação concreta ao algoritmo matemático e, desta forma, atribua significado a este último. Alguns exemplos de módulos desenvolvidos com estes recursos são: Adição e subtração com ábacos; Multiplicação e Divisão com Material Dourado; Exponenciais e Logaritmos com Dobraduras, Árvores e Fractais; Trigonometria com Rampas e Teodolitos; Frações com Réguas etc.
- **Conteúdos Digitais:** Ao explorar conteúdos digitais desenvolvidos para ensino de matemática também seguimos o referencial construtivista privilegiando recursos que permitam ao aluno observar propriedades e conceitos matemáticos. Aqui temos como diferencial a possibilidade de explorar a dualidade estático-dinâmico que, entre outras vantagens, nos fornecem representações que articulam de forma peculiar a bidimensi-

onalidade com a tridimensionalidade. Dentre as ferramentas digitais que mais utilizamos estão os aplicativos desenvolvidos no projeto Conteúdos Digitais para Ensino de Matemática e Estatística (CDME) da UFF (coordenado por Humberto Bortolossi).

- Problemas do Cotidiano: Quando utilizamos problemas do cotidiano em nossos módulos instrucionais objetivamos relacionar o conteúdo ensinado com os problemas reais que o aluno encontra em seu meio. Esta ferramenta reforça para o aluno a utilidade dos conteúdos ensinados. Um dos temas que mais exploramos com este recurso são questões que envolvem decisões financeiras.
- Jogos: Em nossos módulos os jogos são utilizados majoritariamente para fixação de conteúdos. É de conhecimento comum o fato de que a aprendizagem matemática não se encerra com a compreensão de conteúdos. Especialmente em temas mais básicos, como operações aritméticas, é necessário que o aluno exercente os conhecimentos adquiridos para obter agilidade no uso dos mesmos. Contudo, sabemos também que esta parte é geralmente considerada como enfadonha pelos alunos. Através de jogos introduzimos componentes lúdicos nesta prática, o que faz com que o aluno exercente seus conhecimentos com mais motivação e interesse.

Referências

- [1] Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática (5^ª a 8^ª séries). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental., Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [2] Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais-Ensino Médio. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnologia., Brasília, 1998.
- [3] Brasil. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. v. 02. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica., Brasília, 2006.
- [4] Damm, R. F. Registros de representação. In: Educação matemática: uma introdução, pp. 135-154. São Paulo: Educ, 1999.

[5] Duval, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). pp. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

[6] Piaget, J. Abstração Reflexionante: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Trad. Fernando Becker e Petronilha G. da Silva, Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

[7] Tardif, M. e Raymond, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. Educação & Sociedade, ano XXI, vol. 73, 209-244.

Abstração Reflexionante: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Trad. Fernando Becker e Petronilha G. da Silva, Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

Materiais concretos, jogos e novas tecnologias. Se você acha tudo isso muito legal, mas não sabe como usar na aula de matemática ou se sente inseguro para fazê-lo, podemos ajudá-lo! O projeto PIBID/UFF Matemática tem desenvolvido e testado planos de aulas com uso de recursos pedagógicos tais como materiais concretos, jogos e novas tecnologias para ensino de matemática e tem obtido como resultados aulas mais dinâmicas, alunos mais interessados e um processo de ensino e aprendizagem mais eficiente. Nesta oficina apresentaremos alguns planos de aulas desenvolvidos no projeto, mostraremos como utilizá-los e comentaremos sobre suas aplicações e seus resultados. Abarcaremos diversos temas de ensino fundamental e médio, sempre buscando uma abordagem mais prazerosa e eficiente dos conteúdos. Tanto os planos de aulas apresentados quanto as fichas de acompanhamento (exercícios) a para as atividades propostas serão disponibilizadas aos participantes por meio eletrônico.

MC4 - Desvendando o Cubo Mágico

Éder Silva, Juliana Oliveira, Eduardo Divino Pereira & Yu Chi Chen (UFG)

Resumo

Trata-se de um mini-curso que explora as possibilidades de um quebra-cabeça na matemática, geometria e evolução do raciocínio lógico. Consiste no ensino dos algoritmos básicos de resolução do cubo mágico dando a possibilidade dos participantes de desvendarem o cubo e usufruírem de seus benefícios. Inserindo assim o uso de quebra-cabeças tridimensionais mais elaborados no ensino superior e na docência.

Desvendando o cubo mágico

História

Cubo Mágico e Cubo-Velocidade

O cubo mágico foi inventado pelo húngaro Erno Rubik na década de 70 para fins didáticos. Seu criador queria provar a possibilidade de se fazer um cubo apoiado em 3 eixos que permitisse a rotação de todas as 6 faces. Anos mais tarde tornou-se o brinquedo mais vendido de todos os tempos e passou a ser comercializado não mais como cubo mágico e sim com Cubo de Rubik. Houve uma verdadeira febre nos anos oitenta incluindo a realização de um campeonato mundial em Budapeste no ano de 82. Passou por um período de esquecimento e ressurgiu nos anos 2000 como mais que um passatempo e quase um esporte. Surgiram campeonatos em todo o mundo incluindo o Brasil. Foi fundada a WCA (World Cube Association - <http://www.worldcubeassociation.org/>) que regulamenta e oficializa os campeonatos em todo o globo. Goiânia terá o seu primeiro campeonato oficial em outubro deste ano e passará a existir na “rota do cubo” brasileira entrando no seletivo hall de cidades com campeonatos oficiais (www.cubomagicogoiás.com.br/goianiaopen2011/index.go11).

Cubo-velocidade: denominação dada a prática de resoluções do cubo mágico e outros quebra-cabeças tridimensionais em que se objetiva o menor tempo de resolução. Os campeonatos de cubo mágico são na verdade torneios de cubo-velocidade. O nome mais popular utilizado é o termo inglês speedcubing.

Motivação

Com o tempo de prática começamos a perceber os ganhos de se aprender a manusear o cubo e também da prática do cubo-velocidade. Percebemos um enorme ganho no poder de concentração, trata-se de uma atividade em que o indivíduo coloca toda sua atenção nos passos da resolução. Percebemos que por mais agitadas que sejam, os praticantes acabam desenvolvendo essa capacidade de se manterem focados em uma atividade. Percebemos também a agilidade que os praticantes desenvolvem na interpretação espacial dos objetos. Ao serem apresentados a novos quebra-cabeças existe uma imensa facilidade em vencer esses novos desafios tridimensionais. Outra motivação é o fato de se tratar de um hobby barato e extremamente democrático. Os interessados necessitam de um bom cubo e disposição, nada mais. Não é necessário pagar uma mensalidade ou encontrar um enorme espaço, como um campo de futebol, para brincar. Não se limita por idade, sexo ou formação escolar/acadêmica, mais uma vez é necessário somente um cubo e disposição.

Justificativa

O cubo possui um incalculável potencial pedagógico em torno de sua estrutura. Pouco explorado em técnicas de aprendizado, observamos as melhorias que acontecem na percepção daqueles que passam a praticar a modalidade, que passam a brincar com o quebra-cabeça.

Existe um grande desenvolvimento da acuidade visual levando em consideração as novas noções de geometria espacial que se adquire com a prática.

Lembramos também do poder de concentração que aumenta significativamente.

Observa-se a mudança de postura e um novo interesse pelo aprendizado.

O mini-curso é uma forma de levar o conhecimento de mais uma ferramenta aos participantes da XXV Semana do IME sabendo que nesse público estarão docentes e discentes que poderão futuramente explorar essas técnicas no ensino.

O evento é uma forma de proliferar mais uma ferramenta de desenvolvimento intelectual e das habilidades. Sendo esta ferramenta isenta de discriminação, por ser amplamente acessível. Democrático, o cubo pode encurtar algumas diferenças encontradas nas oportunidades de formação escolar de crianças, jovens e adultos.

Público-Alvo

Público acadêmico em geral com foco nas ciências exatas e licenciaturas. Pessoas de todas as idades, que se interessem por formas lúdicas de aprendizado e que valorizem a utilização da lógica, seja por diversão, seja pelo desafio ou mesmo pelo desenvolvimento e preservação da saúde mental.

Estrutura para o minicurso

2.5.1 Existe uma teoria que deve ser ensinada e assim como qualquer tipo de conhecimento deve existir uma sequência lógica no aprendizado. Por isso necessita-se do controle de participantes e de um local fechado. Se possível que sejam feitas inscrições para a participação. A inscrição filtra os que estão realmente dispostos para o curso e isso tem sido bastante benéfico para esse tipo de evento.

2.5.2 Sala de aula com carteiras para os alunos possam apoiar tanto o cubo quanto a folha com os algoritmos de resolução.

2.5.3 O curso é ministrado com o auxilio de projeção e de demonstrações ao vivo. Por se tratar de uma habilidade bastante específica tem um limite de 40 participantes para assegurar o bom andamento e resultados satisfatórios.

2.5.4 Cada participante porta seu próprio cubo. O ensino é prático sendo imprescindível o uso do cubo mágico por cada um dos inscritos.

2.5.5 O curso é ministrado por um palestrante e acompanhado por mais 5 monitores que ajudam em dúvidas específicas e revisam as técnicas com os participantes sempre que necessário.

Método utilizado

Existem várias formas e técnicas utilizadas para se resolver um cubo mágico. O curso utilizará o Método das Camadas com adaptações próprias feitas com base na experiência e no aproveitamento das pessoas que já passaram pelo mesmo.

O Método das Camadas consiste na separação do cubo em 3 camadas e a resolução de cada uma em momentos distintos. Essa é a forma mais didática encontrada, ao contrário do que o público leigo acredita, não se resolve um cubo por faces e sim por camadas.

Existirá uma introdução sobre os fundamentos do cubo e as nomenclaturas envolvidas, posteriormente entra-se efetivamente nos métodos.

Etapas do Método das Camadas

1. Primeira Camada

(a) Realização intuitiva da cruz da primeira face. Algoritmo I para casos específicos.

- (b) Encaixe dos cantos e finalização da primeira camada. Algoritmo II e as repetições necessárias.

2. Segunda Camada

- (a) Uso do algoritmo III (A e B) para finalização da segunda camada.

3. Terceira Camada

- (a) Realização da cruz da face oposta com uso do algoritmo IV e suas repetições.
- (b) Orientação de toda a última face com o algoritmo V e suas repetições.
- (c) Permutação dos cantos da última camada com o algoritmo VI e suas repetições.
- (d) Permutação das peças da cruz com o algoritmo VII (A ou B) e as repetições necessárias.

MC6 - Representações Lineares para Grupos Finitos*Ivonildes Martins (UFG) & Eunice Cândida Rodrigues (UFMT)*

Resumo

As representações de grupos descrevem grupos abstratos em termos de transformações lineares de espaços vetoriais. Em particular, uma representação de um grupo G nos dá um modo de visualizarmos o grupo G como um grupo de matrizes.

A teoria das representações nada mais é do que o estudo e a descrição das possibilidades para concretizar grupos abstratos através de grupos matriciais. Assim, é importante porque ela permite que muitos problemas teóricos de grupos sejam reduzidos a problemas em álgebra linear, a qual é bem compreendida.

Representações Lineares para Grupos Finitos

A teoria das representações é o estudo e a descrição das possibilidades para concretizar grupos abstratos através de grupos matriciais sobre corpos.

Uma representação do grupo G sobre um corpo F é um homomorfismo ρ de G para $GL(n, F)$, para algum inteiro n . Dizemos que ρ é fiel se $Ker \rho = \{1\}$.

Grupos finitos possuem representações fiéis.

O estudo de um espaço vetorial V como FG -módulo nos permite compreender o processo de se obter as citadas representações, bem como na obtenção de outras representações.

A conexão entre FG -módulos e representações de G sobre F é revelada por meio do seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Se $\rho : G \rightarrow GL(nF)$ é uma representação de G sobre F e $V = F^n$, então V torna-se um FG -módulo se definirmos a multiplicação vg por*

$$g\rho = v(g\rho), \text{ para todo } v \in V \text{ e } g \in G.$$

Além disso, existe uma base β de V tal que

$$g\rho = [g]_{\beta}, \text{ para todo } g \in G.$$

Assuma que V é um FG -módulo e seja β uma base de V . Então a função

$$g \mapsto [g]_{\beta}, g \in G;$$

é uma representação de G sobre F .

A matriz $[g]_{\beta}$ é invertível com inversa $[g^{-1}]_{\beta}$.

Mostraremos algumas maneiras de construir FG -módulos diretamente sem usar representação. Para isto, transformamos um espaço vetorial V sobre um corpo F em um FG -módulo especificando a ação dos elementos do grupo G sobre uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e estendemos a ação por linearidade sobre todo V , isto é, primeiro definimos $v_i g$, para todo $1 \leq i \leq n$, e todo $g \in G$ e então definimos

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g, \lambda_i \in F;$$

como sendo $\lambda_1(v_1g) + \dots + \lambda_n(v_ng)$.

Proposição 2.2. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo F com base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e G um grupo. Suponha que esteja definida uma multiplicação vg , para todo $v \in V$, $g \in G$, e $\lambda_i \in F$, com $1 \leq i \leq n$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $v_i g \in V$,
2. $v_i(gh) = (v_i g)h$,
3. $v_i 1 = v_i$,
4. $(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1g) + \dots + \lambda_n(v_ng)$.

Então V é um FG -módulo.

Definição 2.3. 1. O FG -módulo trivial é o espaço vetorial V 1-dimensional sobre F com $vg = v$, para todo $v \in V$ e $g \in G$.

2. Um FG -módulo V é dito fiel se a identidade de G é o único elemento g para o qual $vg = v$, para todo $v \in V$.

Um exemplo de FG -módulos são os FG -módulos permutacionais.

Considere G um grupo de permutação de $\{1, \dots, n\}$. Seja V um espaço vetorial n -dimensional sobre um corpo F , com base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para cada $1 \leq i \leq n$ e cada permutação $g \in G$ defina

$$v_i g = v_{ig}.$$

Então $v_i g \in V$ e $v_i 1 = v_i$. Também, para $g, h \in G$, $v_i(gh) = (v_i g)h$.

Estendemos a ação de cada g linearmente para todo V .

Então V é um FG -módulo, denominado *FG -módulo permutacional* para G sobre F .

Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é a base do módulo permutacional, então para todo $g \in G$, a matriz $[g]_\beta$ possui precisamente uma entrada não nula em cada linha e cada coluna e esta entrada é 1. Uma tal matriz é chamada *matriz permutacional*.

Desde que o único elemento de G que fixa todo elemento v_i é a identidade, temos que o módulo permutacional é um *FG -módulo fiel*.

O Teorema de Maschke é um resultado importante na teoria das representações. Uma consequência deste teorema é que todo FG -módulo é uma soma direta de FG -submódulos irreduzíveis.

Teorema 2.4. Seja G um grupo finito, seja $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$ e seja V um FG -módulo. Se U é um FG -submódulo, então existe W um FG -submódulo de V tal que

$$V = U \oplus W.$$

Referências

- [1] Bueno H. P., *Álgebra Linear -Um segundo Curso*, 2006, Rio de Janeiro, ISBN.
- [2] Milies C. P. and Shegal S. K., *An Introduction to Group Rings*, 2002, Kluwer Academic Publishers, Volume I, Boston and London.
- [3] Rotman J. J., *An Introduction to the theory of Groups*, fourth edition Springer, USA, 1994.

2.2 Sessões Técnicas

2.3 Pôsteres

P7 - Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial Não-abeliano de um Grupo

Agenor Andrade & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)

P8 - Estudo da Série dos Custos da Cesta Básica de Goiânia

Karollyna Barbosa Bie (UFG) & *Marcel Dantas de Quintela* (UFS)

P9 - Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Caíke Damke (UFG)

P10 - Exemplos de Trajetória Central em Programação Semidefinida

Mayk dos Santos & Orizon Pereira Ferreira (UFG)

P11 - Grupos em que cada Elemento Comuta com suas Imagens Endomórficas

Sérgio Fernandes, Ticianne Bueno & Shirlei Serconeck (UFG)

P12 - Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos

Silvio Macedo (IFG-Luziânia) & *Ricardo Nunes de Oliveira* (UFG)

P7 - Sobre uma Construção Relacionada ao Quadrado Tensorial Não-abeliano de um Grupo

Agenor Andrade & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)

Introdução

Este trabalho destina-se ao estudo do artigo “On Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group” de Rocco [1]. O objetivo então é analisar um operador ν na classe dos grupos, que está relacionado com o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo, onde apresentaremos algumas propriedades envolvidas com tal operador, relacionando a finitude, solubilidade ou a nilpotência de um grupo G com a finitude, solubilidade ou nilpotência, respectivamente, de \mathcal{V} . Por fim, são estabelecidas algumas cotas para o quadrado tensorial $G \otimes G$, quando G é um p -grupo finito.

Definição 2.5. *Sejam G e G^φ grupos isomorfos por φ , $g \mapsto g^\varphi$, para todo $g \in G$. Definimos o seguinte grupo:*

$$\mathcal{V} = \left\langle G, G^\varphi \mid [g_1, g_2^\varphi]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi]^{g_3^\varphi}, \forall g_1, g_2, g_3 \in G \right\rangle.$$

Nossa motivação para introduzir \mathcal{V} é que ele possui um subgrupo $[G, G^\varphi]$ isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano $G \otimes G$, como será visto mais adiante.

Resultados e Discussão

Muito útil para o estudo desse artigo, foi o seguinte subgrupos do grupo \mathcal{V} .

$$\Delta = \langle [g, g^\varphi] \mid g \in G \rangle$$

A importância deste subgrupo, é destacada na demonstração de que \mathcal{V} herda as propriedades de finitude, nilpotência e solubilidade do grupo G , usando o fato de que

$$\frac{\mathcal{V}}{\Delta} \cong \frac{\chi(G)}{R(G)}.$$

Lema 2.6.

$$\Delta \leq \mathcal{V}' \cap Z(\mathcal{V}),$$

onde \mathcal{V}' e $Z(\mathcal{V})$ são respectivamente os subgrupos derivado e o centro do grupo \mathcal{V} .

Outro subgrupo muito importante é

$$\Upsilon = [G, G^\varphi] = \langle [g, h^\varphi] | g, h \in G \rangle.$$

A importância deste subgrupo deve-se ao fato dele ser isomorfo ao quadrado tensorial não-abeliano do grupo G .

Os principais resultados apresentados no artigo foram:

Lema 2.7. Sejam g, g_1, g_2, g_3, g_4 elementos quaisquer de um grupo G . As seguintes relações são válidas em $\mathcal{V}(G)$:

1. $[g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4^\varphi]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]} = [g_1, g_2^\varphi]^{[g_3, g_4]^\varphi};$
2. $[g_1, g_2^\varphi, g_3] = [g_1, g_2, g_3^\varphi] = [g_1, g_2^\varphi, g_3^\varphi];$
3. $[g_1^\varphi, g_2, g_3] = [g_1^\varphi, g_2, g_3^\varphi] = [g_1^\varphi, g_2^\varphi, g_3];$
4. $[g, g^\varphi]$ é central em $\mathcal{V}(G)$;
5. $[g_1, g_2^\varphi][g_2, g_1^\varphi]$ é central em $\mathcal{V}(G)$;
6. $[g, g^\varphi] = 1$, para todo $g \in G'$.

Proposição 2.8. Seja G um π -grupo finito ou, um grupo nilpotente finito ou, um grupo solúvel. Então \mathcal{V} é respectivamente um π -grupo finito ou, um grupo nilpotente finito ou, um grupo solúvel.

A seguir apresentamos um dos resultados centrais obtidos por Rocco [1] em seu artigo.

Considere a aplicação τ abaixo, definida sobre os geradores de $G \otimes G$

$$\begin{aligned}\tau: \quad G \otimes G &\longrightarrow \quad \Upsilon \\ (g_1 \otimes g_2) &\longmapsto [g_1, g_2^\varphi].\end{aligned}$$

Tal aplicação pode ser estendida à um epimorfismo de $G \otimes G$ em Υ , uma vez que, τ preserva as relações definidoras de $G \otimes G$.

Proposição 2.9. $\tau: G \otimes G \rightarrow \Upsilon$, dada por $(g_1 \otimes g_2)^\tau = [g_1, g_2^\varphi]$ é um isomorfismo.

Proposição 2.10. Sejam

$$\begin{aligned}G &= G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} (= G') \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G^j \trianglerighteq \dots, \\ 1 &= \xi_0(G) \trianglelefteq \xi_1(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \xi_j(G) \trianglelefteq \dots, \\ &\quad e \\ G &= \gamma_1(G) \trianglerighteq \gamma_2(G) \trianglerighteq \dots \trianglerighteq \gamma_j(G) \trianglerighteq \dots,\end{aligned}$$

respectivamente, a série derivada, a série central superior e a série central inferior de G . Então

1. $[\xi_j(G), (G^{(j+1)})^\varphi] = 1$, para todo $j \geq 0$;
2. $[\xi_{j+1}(G), \gamma_j(G^\varphi)] \cdot [\gamma_j(G), \xi_{j+1}(G^\varphi)]$ é central em Υ , para todo $j \geq 1$;
3. $[\xi_j(G), \gamma_j(G^\varphi)]$ é central em \mathcal{V} , para todo $j \geq 1$.

Os Resultados Principais

Lema 2.11.

$$\mathcal{V} = (\Upsilon \rtimes G) \rtimes G^\varphi.$$

Teorema 2.12. Para $i \geq 2$ o i -ésimo termo da série central inferior de \mathcal{V} é dado por

$$\gamma_i(\mathcal{V}) = \gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)[\gamma_{i-1}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i-1}(G^\varphi)],$$

onde $\gamma_i(G)$ denota o i -ésimo termo da série central inferior do grupo G .

Em particular, se G é nilpotente de classe c , então \mathcal{V} é nilpotente de classe no máximo $c + 1$.

Teorema 2.13. *Para $i \geq 2$, o i -ésimo termo da série derivada de \mathcal{V} é dado por*

$$\mathcal{V}^{(i)} = G^{(i)}(G^\varphi)^{(i)}[G^{(i-1)}, (G^\varphi)^{(i-1)}],$$

onde $G^{(i)}$ denota o i -ésimo termo da série derivada de G .

Em particular, se G é um grupo solúvel de comprimento derivado l , então \mathcal{V} é solúvel de comprimento derivado no máximo $l + 1$.

Mudando agora o foco para p -grupos finitos, Rocco [1], obteve os seguintes resultados, referentes a um limitante para a ordem dos grupos \mathcal{V} e Υ e, consequentemente, também para $G \otimes G$.

Lema 2.14. *Seja G um p -grupo finito e $c \in Z(G) \cap G'$ um elemento de ordem p . Se Φ denota o subgrupo de Frattini de G , então*

$$|\mathcal{V}| \text{ divide } p^2 \left| \frac{G}{\Phi} \right| \cdot \left| \left(\frac{G}{\langle c \rangle} \right) \right|.$$

Proposição 2.15. *Seja G um p -grupo finito de classe (de nilpotência) 2. Então $|\Upsilon|$ divide*

$$\left| G' \otimes_Z \frac{G}{G'} \right| \cdot \left| \Upsilon \left(\frac{G}{G'} \right) \right|.$$

Corolário 2.16. *Seja G um p -grupo de classe menor do que, ou igual a 2, com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então $|\Upsilon|$ divide $p^{n(n-m)}$.*

Por fim, Rocco apresentou um limitante para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano de um p -grupo finito G .

Teorema 2.17. *Seja G um p -grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m$. Então $|\mathcal{V}|$ divide $p^{n^2+2n-nm}$.*

Através deste teorema que o limitante para a ordem do quadrado tensorial não-abeliano foi estipulada, mediante o seguinte corolário:

Corolário 2.18. *Seja $|G| = p^n$, $|G'| = p^m$ e $d = d(G)$ o número minimal de geradores de G . Então*

$$p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}.$$

Conclusões

Os principais fatos observados (e demonstrados) no artigo proposto pelo professor Rocco são:

- G finito $\implies \mathcal{V}$ finito;
- G π -grupo finito $\implies \mathcal{V}$ π - grupo finito;
- G nilpotente finito $\implies \mathcal{V}$ nilpotente finito , com $cl(\mathcal{V}) = cl(G)$ ou $cl(\mathcal{V}) = cl(G) + 1$;
- G solúvel $\implies \mathcal{V}$ solúvel, com $dl(\mathcal{V}) = dl(G)$ ou $dl(\mathcal{V}) = dl(G) + 1$;
- $\Upsilon = [G, G^\varphi] \cong G \otimes G$;
- G um p -grupo finito com $|G| = p^n$ e $|G'| = p^m \implies p^{d^2} \leq |G \otimes G| \leq p^{n(n-m)}$.

Referências

- [1] NORAÍ, R., *On a Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Group*, Bol. Soc. Bras. Mat., 1991.
- [2] JOHNSON, D. L., *Presentation of groups*, Cambridge University Press, 2. edição, 1997.
- [3] BROWN, R. and LODAY, J. L. Lyndon., *Van Kampen Theoremas for Diagrams of Spaces*, J. Topology, 1987.
- [4] MAGNUS, W., KARRAS, A., SOLITAR, D., *Presentation of groups in terms of generators and relations*, Interscience, 1966.
- [5] ROBINSON, D. J. S., *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, 2. edição, 1995.
- [6] ROTMAN, J. J., *The introduction to the theory of groups*, Springer-Verlag, 4. edição, 1994.
- [7] The GAP Group, *GAP- Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.4.12,(2008). (<http://www.gap-system.org>).

P8 - Estudo da Série dos Custos da Cesta Básica de Goiânia*Karollyna Barbosa Bie (UFG) & Marcel Dantas de Quintela (UFS)***Resumo**

Tendo a pesquisa da Cesta Básica Nacional, uma das principais formas de medir o custo de vida do trabalhador brasileiro previstos no Decreto de Lei nº 399 de 30/04/1938, o presente trabalho aborda no âmbito da capital goiana a série representativa do custo mensal da cesta básica no período de janeiro de 2003 a junho de 2011. Foi realizado o inflacionamento da série pelo IPCA (06/2010=1), desta forma trazendo ao cenário econômico atual dos custos reais de compra. Apoiados pelo software estatístico R-Project 2.12.1 foi aplicada à decomposição da cesta básica observou-se o comportamento de cada item, suas participações e variações, aplicando o exercício de modelar uma regressão múltipla, compostas pelos custos individuais de seus itens, desta forma subsidiar um modelo que permita predizer num momento futuro.

Introdução

A análise de regressão é uma ferramenta estatística muito poderosa aplicável a situações em que se desejam explicar valores de uma variável dependente em função de valores conhecidos de variáveis independentes. A utilização dessa ferramenta de análise em recursos computacionais potencializa o poder da estatística, e movidos pelo instinto investigativo intrínseco do ser humano motivaram o exercício da análise da série de custos da Cesta Básica da cidade de Goiânia.

Objetivo

Este estudo tem como objetivo explorar a Série de Custos da Cesta Básica de Goiânia, de forma descritiva e sob a aplicação de técnicas dos Modelos de Regressão Linear, propostas

em (GURJARATI, 2005), aplicado aos custos totais da cesta e aos custos individuais dos itens que a compõe, utilizando o software de análise estatística R-Project.

Materiais e Métodos

O termo regressão foi criado por Francis Galton (Galton, Francis. “Family Likeness in Stature”. Londres: Proceedings of Royal Society. vol. 40, 1886, p. 42-72.), que verificou em um de seus artigos, que embora existisse uma tendência de que pais altos tivessem filhos altos e os pais baixos, filhos baixos, a estatura média das crianças nascidas de pais com dada altura tendiam a mover-se ou regredir à altura média da população. Em outras palavras, a altura de crianças filhas de pais mais altos ou mais baixos que o comum tende a mover-se no sentido da altura média da população.

Em termos modernos, pode-se dizer que:

A análise de regressão se ocupa da dependência de uma variável, a variável dependente, em relação a uma ou mais variáveis, as variáveis explanatórias, com vistas a estimar e/ou prever o valor médio (da população) da primeira em termos dos valores conhecidos ou fixados (em amostragens repetidas) das segundas. (GUJARATI, 2005, p.13)

Em termos práticos, suponhamos dispor de uma amostra com n unidades, e, ainda, que para cada unidade, temos um par de valores das variáveis X e Y (Custo total da Cesta Básica e os custos individuais de seus itens, por exemplo). Buscando estabelecer uma possível relação matemática entre as duas variáveis e, se a relação for boa, usá-la para fazer previsões. No exemplo, o interesse será estabelecer uma relação matemática (linear) entre os valores individuais dos itens (X) e o custo total da Cesta Básica (Y), e dessa maneira prever valores o Custo Total da Cesta Básica em função dos valores individuais de seus itens.

O Modelo de Regressão Linear pode ser representado como:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_{i+1} + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon_i$$

- **Y** – Variável Dependente ou Resposta;

- **X** – Variável Independente ou Preditora;
- β_0 – Intercepto ou coeficiente linear da reta;
- ε_i – erro aleatório de Y para a observação i;
- **i** – 1,2,...,n
- β_0 e β_i , também são conhecidos como parâmetros ou coeficientes da regressão.

Para se determinar a “equação” de regressão linear simples devem-se encontrar os coeficientes:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_i X_i + \hat{\beta}_{i+1} X_{i+1} + \dots + \hat{\beta}_n X_n$$

- \hat{Y}_i – valor da previsão de Y para uma observação de X_i ;
- X_i – valor de X para a observação i;
- $\hat{\beta}_0$ – estimador de β_0
- $\hat{\beta}_i$ – estimadores de β_i

A pesquisa da Cesta Básica Nacional, realizada pelo DIEESE - Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos, em dezesseis capitais do Brasil, acompanha mensalmente a evolução de preços de treze produtos de alimentação, assim como o gasto mensal que um trabalhador teria para comprá-los. A metodologia utilizada para a pesquisa da Cesta Básica Nacional é estabelecida com base no Decreto Lei nº. 399 de 30/04/1938, que regulamenta o salário mínimo no Brasil. A Cesta Básica Nacional, segundo esse decreto, seria suficiente para o sustento e o bem estar de um trabalhador em idade adulta, contendo quantidades balanceadas de proteínas, calorias, ferro, cálcio e fósforo.

Os produtos da Cesta Básica, da Região 1 (Região 1: SP, MG, ES, RJ, GO, DF) , e suas respectivas quantidades mensais: Carne - 6,0 kg; Leite - 7,5 l; Feijão - 4,5 kg; Arroz - 3,0 kg; Farinha - 1,5 kg; Tomate - 6,0 kg; Batata - 9,0 kg; Pão - 6,0 kg; Café - 600 g; Banana - 90 unid.; Açúcar - 3,0 kg; Óleo - 750 ml; e Manteiga - 750 g.

O *Índice de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA*, trabalhado pelo IBGE, foi utilizado como indexador da inflação. Através dele se verifica as variações dos custos com os gastos das pessoas que ganham de um a quarenta salários mínimos nas regiões metropolitanas de Belém, Belo Horizonte, Brasília, Curitiba, Fortaleza, Porto Alegre, Recife, Rio de Janeiro, Salvador, São Paulo e município de Goiânia. Coletado no dia 27 de julho de 2011 às 17:25, em:

http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/lista_tema.aspx?op=0&no=11

Resultados e Conclusões

Para iniciar qualquer estudo preliminar, foi necessário aplicar o inflacionamento da série de custo da cesta básica da cidade de Goiânia, compreendida entre janeiro de 2003 e dezembro de 2010, para o período final da série (*Dez.2010 = 1*).

Com o intuito de analisar os itens que compõe a cesta básica, foram exploradas inicialmente suas estatísticas descritivas, incluídas do percentual dos custos individuais dos itens em relação ao custo total, baseados pelas médias de preços da série.

	Máximo	Minimo	Media	Varianca	DesPadrao	CV	Percent
Custo Total	241.00	169.32	201.30	347.11	18.63	9.26	100.00
Carne	89.36	50.99	61.95	81.20	9.01	14.55	30.77
Leite	16.72	10.66	12.61	2.17	1.47	11.69	6.26
Feijao	33.26	9.87	15.45	26.29	5.13	33.19	7.68
Arroz	8.41	4.96	6.05	1.04	1.02	16.86	3.00
Farinha	4.31	2.42	3.08	0.21	0.46	14.82	1.53
Batata	17.18	4.50	9.39	6.43	2.54	27.00	4.67
Tomate	30.12	7.50	16.69	21.67	4.65	27.90	8.29
Pao	43.64	34.20	38.01	5.38	2.32	6.11	18.88
Café	7.15	5.69	6.46	0.14	0.37	5.70	3.21
Banana	19.14	9.96	12.67	4.78	2.19	17.25	6.29
Acucar	5.76	2.31	3.66	0.90	0.95	25.97	1.82
Oleo	3.58	2.05	2.66	0.22	0.47	17.65	1.32
Manteiga	16.25	11.31	12.62	1.00	1.00	7.92	6.27

Quadro 1: Estatísticas Descritivas Custos da Cesta Básica Goiânia

Movidos pelo objetivo de exploração do conhecimento estatístico na prática do estudo econômico aplicado à execução das técnicas de modelagem de regressões lineares, não se utilizou a equação total do custo da cesta básica, visando o exercício da determinação de seu padrão de custo pelas tendências de preços de seus itens de maior custo.

Sendo os itens: Carne, Pão, Tomate e Feijão os de maior participação percentual no preço médio da cesta básica da cidade de Goiânia, decidiu-se pela utilização desses para a composição do modelo da equação de regressão. A observação da série de preços desses quatro itens associados às suas estatísticas descritivas, remete além desses item serem os proporcionalmente mais participativos eles são os de maior Desvio Padrão, mostrando-se itens de grande variabilidade e sensibilidade de seus preço. Essas situações reforçam a ideia de maior influência deles no custo total.

Se observa que todos os itens tem o mesmo padrão de crescimento em relação

ao custo total da cesta básica, porém, o feijão e, sobretudo a carne mostram-se com maior linearidade que o pão e o tomate. Esses diagramas mostram que quanto maior os custos individuais de seus itens, maior será o seu custo total, isso principalmente nos itens em que a dispersão se mostra com padrão de linearidade mais definido, como no caso do item carne.

No Quadro 2, abaixo, apresenta outra forma de escolha das variáveis independentes dentro do universo delas. A matriz de correlação testa a colinearidade entre as variáveis dependentes, isso significa que variáveis preditoras com ausência de colinearidade não podem ser escritas como combinação linear das demais. Em termos práticos, variáveis altamente correlacionadas podem ter pouco poder de contribuição para o modelo, caso as duas compuserem o modelo seu poder de determinação será praticamente o mesmo assim para o estatístico, é mais parcimonioso o uso de somente uma variável com poder de previsão. Essa matriz traz as correlações de Pearson, que nos mostra que todas as variáveis se correlacionam.

	Carne	Pao	Tomate	Feijao
Carne	1.000	0.696	0.058	0.400
Pao	0.696	1.000	0.031	0.056
Tomate	0.058	0.031	1.000	0.130
Feijao	0.400	0.056	0.130	1.000

Quadro 2: Matriz de Correlações entre as Variáveis Independentes

O problema da colinearidade traz como consequência a diminuição do poder de predição do modelo de regressão. Contudo para os objetivos desse trabalho essa situação não será determinante para considerar que isso seja um empecilho. Baseados nos critérios já mencionados anteriormente, e após o métodos computacionais executados no R-Project, chegamos ao modelo para o Custo Total da Cesta Básica da cidade de Goiânia:

$$CustoTotal_i = 46,75 + 1,42 Carne_i + 0,78 Pao_i + 1,36 Tomate_i + 0,94 Feijao_i$$

De acordo com o valor dos parâmetros, temos que para cada aumento de R\$ 1,00 no preço da Carne, mantida das demais variáveis do modelo, haverá um acréscimo de R\$

1,42 no custo total da Cesta Básica de Goiânia. Da mesma forma, mantidas as condições acima, temos que a cada real de acréscimo no custo do Pão, do Tomate ou do Feijão, o custo total aumentará em R\$ 0,78; R\$ 1,36; e R\$ 0,94, respectivamente. Segundo o modelo, de acordo com a série de custos o valor mínimo da cesta básica que não contenham os itens do modelo (Carne, Pão, Tomate e Feijão) teria o custo de R\$ 46,75.

Call: lm(formula = CestaGyn_N\$Cesta ~ CestaGyn_N\$Carne + CestaGyn_N\$Pao + CestaGyn_N\$Tomate + CestaGyn_N\$Feijao)

Residuals:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	46.75164	8.23715	5.676	1.63e-07 ***
CestaGyn_N\$Carne	1.41702	0.07843	18.068	< 2e-16 ***
CestaGyn_N\$Pao	0.77910	0.27959	2.787	0.00648 **
CestaGyn_N\$Tomate	1.35842	0.09491	14.313	< 2e-16 ***
CestaGyn_N\$Feijao	0.93767	0.09976	9.399	4.61e-15 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.267 on 91 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9497, Adjusted R-squared: 0.9475

F-statistic: 429.9 on 4 and 91 DF, p-value: < 2.2e-16

Quadro 3: Resumo do Modelo de Regressão*

O coeficiente de determinação - R^2 e Adjusted R^2 (ajustado à quantidade de variáveis contida no modelo), mede a qualidade do ajustamento linear da regressão ao conjunto de dados observados, assim ele mede a proporção percentual total da variável dependente(Y), é explicada pelas variações das variáveis independentes (X). No estudo em questão 95% dos custos totais da cesta básica é explicado pelos custos da Carne, Pão, Tomate e Feijão, deixando os 10% restantes para possíveis variáveis que foram omitidas no estudo ou para flutuações do acaso.

*Resumo obtido por meio da função summary() do R-Project

O erro padrão refere-se ao erro total da estimativa. Assim, como exercício de previsão, se em determinado período i seus custos fossem seus respectivos custos médios da série de jan.2004 a dez.2010 (Carne - R\$ 61,95; Pão - R\$ 38,01; Tomate - R\$ 16,69; Feijão - R\$ 26,29), teríamos:

$$CustoTotal = 46,75 + 1,42 \times 61,95 + 0,78 \times 38,01 + 1,36 \times 16,69 + 0,94 \times 26,29$$

$$CustoTotal = 211,78$$

Levando em consideração a previsão de custo total calculada por meio da equação de regressão, a cesta básica de Goiânia sairia por R\$ 211,78, previsão compreendida no intervalo de confiança entre $211,78 \pm 8,48^*$, um valor muito preciso tendo em vista a baixa variabilidade do modelo.

Analysis of Variance Table

Response: CestaGyn_N\$Cesta

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
CestaGyn_N\$Carne	1	25301.8	25301.8	1389.3535	< 2.2e-16 ***
CestaGyn_N\$Pao	1	7.4	7.4	0.4083	0.5244
CestaGyn_N\$Tomate	1	4400.6	4400.6	241.6442	< 2.2e-16 ***
CestaGyn_N\$Feijao	1	1608.8	1608.8	88.3428	4.614e-15 ***
Residuals	91	1657.2	18.2		

Quadro

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

4: ANOVA(ANOVA - Análise de Variância) do Modelo de Regressão

Analizando os resíduos da regressão, podemos observar a validade dos pressupostos (Normalidade, Independência, Variância constante - homogeneidade) através de técnicas de observação dos gráficos, essa análise é feita com base na experiência do pesquisador, devendo ser complementada pelos testes de hipóteses paramétricos ou não paramétricos para se comprovar os pressupostos.

IC = [Valor \pm T(sig,gl) Erro Padrão]

Observamos uma leve tendência quadrática na distribuição dos resíduos, no entanto a distribuição desses parece ser simétrica em torno da linha média. Segundo o Q-Q plot é notória a normalidade dos resíduos, nele observa-se os pontos distribuídos de modo aproximadamente linear, sugerindo que eles sigam uma distribuição normal. O terceiro gráfico mostra a distribuição da raiz do modulo dos resíduos em comparação aos valores preditos, este nos permite observar a tendência a heteroscedasticidade em que a magnitude da variação dos resíduos está relacionada com os valores preditos. Na ocasião não se observa padrão de correlacionamento entre os módulos dos desvios e os valores preditos.

P9 - Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Caike Damke (UFG)

Resumo

Nosso trabalho busca estudar a existência e multiplicidade de soluções positivas para o seguinte problema de Dirichlet assintoticamente linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega. \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, para $N \geq 3$, é um aberto limitado com fronteira regular e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(H1) $f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$; $f(x, 0) = 0$, $\forall x \in \Omega$; $f(x, t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $x \in \Omega$ e

$f(x, t) \equiv 0$,

$\forall t \leq 0$, $x \in \Omega$;

(H2) $\frac{f(x, t)}{t}$ é não-decrescente com respeito a $t \geq 0$, $\forall x \in \Omega$;

(H3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = \mu$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} = l$ uniformemente $\forall x \in \Omega$, onde $\mu \in [0, +\infty)$, $l \in (0, +\infty]$ são constantes e $\mu < \lambda_1 \leq l$ e λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Para garantir a existência e multiplicidade de soluções necessitamos verificar que o funcional energia relacionado ao problema

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (2.2)$$

onde $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$, satisfaz a condição de Palais-Smale, a ser descrita abaixo. Além disso, devemos garantir que (2.2) possua a geometria do Passo da Montanha e obtendo a existência de solução do problema (2.1).

Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Primeiramente, começaremos com algumas definições básicas.

Definição 2.19. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma derivada fraca de u , se

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx \quad (2.3)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Neste caso, denotamos $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas fracas de primeira ordem de u definem funções em $L^1_{loc}(\Omega)$ e vale (2.3).

Considere o seguinte espaço de funções

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}$$

chamado de espaço de Sobolev. Definimos também $W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \cap W^{1,2}(\Omega)$.

Agora, temos suporte para definir o que vem a ser solução fraca do problema (2.1).

Obter uma solução fraca do problema (2.1) é equivalente a encontrar um ponto crítico não-nulo do funcional J que é de classe C^1 . Este resultado pode ser obtido em [1], capítulo 5.

Necessitamos, agora, introduzir o Teorema do Passo da Montanha, mas para isto definiremos sequência de Palais-Smale e de Cerami e quando um funcional satisfaz a condição de Palais-Smale e de Cerami.

Seja \mathbf{H} um espaço de Hilbert. Então definimos:

Definição 2.20. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em \mathbf{H} . Dizemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Palais-Smale, ou simplesmente (PS), em \mathbf{H} se $\{J(u_n)\}$ é limitado e $J'(u_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Se $J(u_n) \rightarrow c$, então a (PS)-sequência é denominada por (PS) $_c$ -sequência. Analogamente, dizemos que uma sequência $\{u_n\}$ em \mathbf{H} é uma sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ se

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Considere $J : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 .

Definição 2.21. Diz-se que o funcional J satisfaz a condição (PS) , respectivamente $(PS)_c$, em \mathbf{H} , se para toda (PS) -sequência, respectivamente $(PS)_c$ -sequência, possui uma subsequência convergente na norma. E dizemos que J satisfaz a condição de Cerami se para toda sequência de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ possui uma subsequência convergente na norma.

O Teorema do Passo da Montanha necessita que o funcional (2.2) satisfaça duas condições descritas a seguir.

(PM-1) $J \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$, $J(0) = 0$ e $\exists r, \rho > 0$ tais que

$$J(u) \geq \rho, \quad \forall u \in S_r = \{u \in \mathcal{H} : \|u\| = r\}$$

(PM-2) $\exists e \in \mathcal{H}$ com $\|e\| > r$ tal que $J(e) \leq 0$.

Dizemos que quando um funcional satisfaz (PM-1) e (PM-2) ele possui a geometria do Passo da Montanha. Além disso, denote por Γ o conjunto de todos os caminhos que ligam $u = 0$ e $u = e$, isto é,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], \mathcal{H}) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Claramente $\Gamma \neq \emptyset$, pois $\gamma(t) = te$ é tal que $\gamma \in \Gamma$. Considere,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max\{J(\gamma(t)) : t \in [0, 1]\} \geq \rho > 0. \quad (2.4)$$

onde ρ é obtido da condição (PM-1).

O resultado a seguir nos garante que o valor c , dado por (2.4), é um valor crítico para o funcional em questão.

Teorema 2.22. [Passo da Montanha] Suponha que J satisfaça as condições (PM-1) e (PM-2) e que J satisfaz $(PS)_c$, onde c é dado por (2.4). Então c é um valor crítico para J , ou seja, existe $z \in \mathcal{H}$, não-nulo, tal que $J(z) = c$ e $J'(z) = 0$.

Demonstração: Veja [1], capítulo 5, página 118.

Enunciaremos uma condição imposta ao nosso funcional, chamada de Condição de Cerami. Para maiores detalhes veja [7].

Proposição 2.23. [Existência de uma sequência de Cerami] Suponha que J dado por (2.2) satisfaça

$$\max\{J(0), J(e)\} \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\|u\|=r} J(u)$$

para algum $\alpha < \beta$, $r > 0$ e $e \in \mathcal{H}$ com $\|e\| > r$. Seja $c \geq \beta$ dado por (2.4). Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ tal que

$$J(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \geq \beta \quad e \quad (1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\|_{\mathbf{H}_0^{-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Introduziremos dois lemas técnicos, que juntamente com a Proposição 2.23, nos ajudam na demonstração do nosso resultado principal.

Lema 2.24. Seja $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada ao autovalor λ_1 do problema $(-\Delta, \mathcal{H})$ normalizada e suponha que vale (H1), (H2) e (H3). Então o funcional J satisfaz a geometria do Passo da Montanha da seguinte maneira:

1. Existem $r, \beta > 0$ tais que $J(u) \geq \beta$, $\forall u \in \mathcal{H}$ com $\|u\| = r$
2. $J(t\varphi_1) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$ se $t \in (\lambda_1, +\infty]$, onde t é obtido em (H3).

Lema 2.25. Seja J dado por (2.2) tal que

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Então existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ao qual denotaremos igualmente por $\{u_n\}$, tal que

$$J(tu_n) \leq \frac{(1+t^2)}{2n} + J(u_n), \quad \forall t > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente enunciaremos o resultado principal do nosso trabalho que nos fornece em quais condições o problema (2.1) possui solução.

Teorema 2.26. Se as condições (H1), (H2) e (H3) são satisfeitas, então

1. O problema (2.1) não possui solução se $l < \lambda_1$;
2. Se $\lambda_1 < l < +\infty$, então o problema (2.1) possui uma solução positiva;
3. Suponha que $l = \lambda_1$ (neste caso, dizemos que o problema (2.1) é ressonante). O problema (2.1) possui uma solução positiva $u \in \mathcal{H}$ se, e só se, existe algum $a > 0$ tal que $u(x) = a\varphi_1$ e $f(x, u) = \lambda_1 u(x)$.

Demonstrações dos Lemas 2.24, 2.25 e do Teorema 2.26 são obtidas no artigo [7].

Conclusões

Concluímos que o resultado acima, Teorema 2.26, nos fornece condições boas para obtenção de uma solução positiva para o problema de Dirichlet assintoticamente linear (2.1), pois não precisamos impor na função f a seguinte condição:

(A-R) para algum $\theta > 2$ e $M > 0$, então $0 < \theta F(x, s) \leq f(x, s)s$, q.t.p. $x \in \Omega$ e $|s| \geq M$. conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Esta condição implica facilmente a condição (PS) (veja [1], capítulo 5). Entretanto, para problemas assintoticamente lineares a condição **(A-R)** não é aplicável. Neste caso, vemos que **(H1)**, **(H2)** e **(H3)** são cruciais para obtermos a condição de Cerami, obtida na Proposição 2.23.

P10 - Exemplos de Trajetória Central em Programação Semidefinida*Mayk dos Santos & Orizon Pereira Ferreira (UFG)***Resumo**

Apresentaremos um exemplo de exemplo de trajetória central primal e dual na ausência de estrita complementaridade com a propriedade que a medida em que a dimensão do problema associado cresce as velocidades de convergência da trajetória central primal diminui e da trajetória dual permanece constante igual a $1/2$.

Caracterização do Problema

Seja S^n o espaço das matrizes simétricas de ordem n com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por $\langle U, V \rangle = \text{traço}(UV)$, S_+^n o cone das matrizes simétricas positivas semi-definidas e S_{++}^n seu interior. Dados $A_1, \dots, A_m \in S^n$, defina o operador linear $\mathcal{A} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\mathcal{A}X = (\langle A_1, X \rangle, \dots, \langle A_m, X \rangle)^T$, e seja $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n$ o operador adjunto de \mathcal{A} o qual é dado por $\mathcal{A}^*v = \sum_{i=1}^m v_i A_i$.

Dadas as funções $f : (0, +\infty) \rightarrow S^n$ e $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, escrevemos $f(\mu) = \mathcal{O}(g(\mu))$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$, se para alguma constante $M > 0$ temos $\|f(\mu)\| \leq M g(\mu)$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$. Além disso, escrevemos $f(\mu) = \Theta(g(\mu))$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$ se $f(\mu) = \mathcal{O}(g(\mu))$ e $g(\mu) = \mathcal{O}(\|f(\mu)\|)$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$, i.e., existe uma constante $M > 0$, $g(\mu) \leq M \|f(\mu)\|$ para todo $\mu \in (0, +\infty)$.

Os problemas de programação semi-definida na forma primal e dual são definidos, respectivamente, por

$$(P) \begin{cases} \min_X \langle C, X \rangle, \\ s.t. \quad \mathcal{A}X = b, \\ \quad X \in S_+^n, \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max_y b^T y, \\ s.t. \quad \mathcal{A}^*y + S = C, \\ \quad S \in S_+^n, \end{cases}$$

onde $C \in S^n$, $b \in I\!\!R^m$, $A_1, \dots, A_m \in S^n$ são dados e $X \in S_{++}^n$, $y \in I\!\!R^m$ e $S \in S_{++}^n$ são as variáveis. As condições de otimalidade destes problemas é dada pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \mathcal{A}X = b, & X \in S_{++}^n, \\ \mathcal{A}^*y + S = C, & S \in S_{++}^n, \\ XS = 0. \end{cases}$$

A trajetória central primal $\{X(\mu) : \mu > 0\}$ associada ao problema primal (P) e a trajetória central dual $\{S(\mu) : \mu > 0\}$ associada ao problema dual (D) com respeito a barreira $f(X) = -\ln \det \left(\begin{pmatrix} X \end{pmatrix} \right)$ são definidas, respectivamente, por

$$X(\mu) = \arg\min_X \{ \langle C, X \rangle + \mu f(X) : \mathcal{A}X = b, \mu \in I\!\!R_+ \},$$

ou equivalentemente, pelo sistema de equações primal-dual,

$$(PD) \begin{cases} \mathcal{A}X = b, & X \in S_{++}^n, \\ \mathcal{A}^*y + S = C, & S \in S_{++}^n, \\ XS = \mu I, & \mu \in I\!\!R_+. \end{cases}$$

É bem conhecido que, se $A_1, \dots, A_m \in S^n$ são linearmente independentes, os seguintes conjuntos $F^o(P) = \{X \in S^n : \mathcal{A}X = b, X \in S_{++}^n\}$ e $F^o(D) = \{(y, S) \in I\!\!R^m \times S^n : \mathcal{A}^*y + S = C, S \in S_{++}^n\}$ são não vazios. Então os problemas (P) e (D) tem conjuntos soluções compactos e não vazios e as trajetórias centrais estão bem definidas, veja Todd [11].

Por exemplo: Na presença de estrita complementaridade temos a seguinte decomposição

$$X = \begin{pmatrix} X_B & X_{BN} \\ X_{BN}^t & X_N \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_B & S_{BN} \\ S_{BN}^t & S_N \end{pmatrix},$$

para mais detalhes veja [8]. Foi mostrado em [8] que a ordem de convergência dos blocos ao longo da trajetória central, quando μ tende a zero, são iguais à

$$X_B(\mu) = \Theta(1), \quad X_{BN}(\mu) = \Theta(\sqrt{\mu}), \quad X_N(\mu) = \Theta(\mu),$$

$$S_B(\mu) = \Theta(\mu), \quad S_{BN}(\mu) = \Theta(\sqrt{\mu}), \quad S_N(\mu) = \Theta(1).$$

Na ausência de estrita complementaridade temos na decomposição acima o surgimento de mais um bloco, a saber, o bloco T onde a estrita complementaridade falha. Resultando assim a seguinte decomposição

$$X = \begin{pmatrix} X_B & X_{BT} & X_{BN} \\ X_{BT}^t & X_T & X_{TN} \\ X_{BN}^t & X_{TN}^t & X_N \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} S_B & S_{BT} & S_{BN} \\ S_{BT}^t & S_T & S_{TN} \\ S_{BN}^t & S_{TN}^t & S_N \end{pmatrix},$$

para mais detalhes veja [1], [2] e [4]. Neste caso, quando a complementaridade estrita falha, não se sabe a ordem exata de convergência ao longo da trajetória central, dos blocos $X_T, X_{BT}, X_{TN}, S_T, S_{BT}$ e S_{TN} . Mais especificamente, alguns problemas que se colocam são obter os seguintes resultados:

1. A velocidade de convergência dos blocos onde a estrita complementaridade falha, e
2. o comportamento limite da derivada das trajetórias primal e dual.

As respostas para estes problemas são importantes, por exemplo, para obtenção de algoritmos de convergência superlinear para programação semidefinida. Com o objetivo de entender o comportamento da trajetória central. No trabalho apresentaremos um exemplo de trajetória central, na ausência da estrita complementaridade, com dimensão arbitrária, com a propriedade que a medida que a dimensão do problema associado cresce a velocidade de convergência da trajetória central primal diminui e a velocidade da trajetória dual permanece constante igual a $1/2$.

Referências

- [1] CRUZ NETO, J. X. DA; FERREIRA, O. P.; MONTEIRO, R. D. C., *Asymptotic behavior of the central path for a special class of degenerate SDP problems*, Mathematical Programming, 103, no. 3, 487-514 (2005).
- [2] GOLDFARB, D.; SCHEINBERG, K., *Interior point trajectories in semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 8 (1998), pp. 871–886.

- [3] DRUMMOND, L .M. GRAÑA; PETERZIL, H. Y., *The central path in smooth convex semidefinite programs*, Optimization, 51 (2002), pp. 207–233.
- [4] HALICKÁ, M.; KLERK, DE E.; ROOS, C., *Limiting Behavior of the Central Path in Semidefinite Optimization*, Optimization Methods Software, Vol.20, No.1, pp.99-113, 2005.
- [5] HALICKÁ, M.; KLERK, DE E.; ROOS, C., *On the convergence of the central path in semidefinite optimization*, SIAM Journal on Optimization, 12 (2002), pp. 1090–1099.
- [6] KLERK E. DE, *Aspects of semidefinite programming: interior point algorithms and selected applications*. Applied Optimization Series 65. Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 2002.
- [7] KOJIMA,M.; SHINDOH, S.; HARA, S., *Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices*, SIAM Journal on Optimization, 7 (1997), pp. 86–125.
- [8] LUO, Z. Q.; STURM, J. F.; ZHANG, S., *Superlinear convergence of a symmetric primal-dual path-following algorithm for semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 8 (1998), pp. 59–81.
- [9] MONTEIRO, R.; TODD, M. J., *Path-following methods for semidefinite programming*, in *Handbook of Semidefinite Programming*, R. Saigal, L. Vandenberghe, and H. Wolkowicz, eds., Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2000.
- [10] SPORRE, G.; FORSGREN, A., *Characterization of the limit point of the central path in semidefinite programming*, Technical Report TRITA-MAT-2002-OS12, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, SE-100 44 Stockholm, Sweden, June 2002.
- [11] TODD, M.J., *Semidefinite optimization* in *Acta Numerica* 10 (2001), pp. 515–560.

P11 - Grupos em que cada Elemento Comuta com suas Imagens Endomórficas

Sérgio Fernandes, Ticianne Bueno & Shirlei Serconeck (UFG)

Resumo

Introdução

Seja G um grupo finito em que cada elemento comuta com sua imagem endomórfica (E -grupo). Vamos dar um contra exemplo-exemplo à conjectura que G é abeliano.

Para g e h em G , g e $g^{-1}(h^{-1}gh)$ comutam. Então g comuta com seu conjugado e G satisfaz a identidade $[x, y, x] = 1$. Portanto G satisfaz as relações $[x, y, z, w] = 1$ e $[x, y, z]^3 = 1$ (veja [4, p. 322]). Logo G é nilpotente de classe menor ou igual a 3 e se G é um p -grupo para um primo $p \neq 3$, G é nilpotente de classe menor ou igual a 2. Vamos exibir para um primo qualquer p um p -grupo nilpotente de classe 2 em que cada elemento comuta com todas as suas imagens endomórficas.

Seja

$$G = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 : a_i^{p^2} = 1, [a_i, a_j, a_k] = 1, (1 \leq i, j, k \leq 4) \rangle$$

$$\text{e } (1) \ [a_1, a_2] = a_1^p, (2) \ [a_1, a_3] = a_3^p, (3) \ [a_1, a_4] = a_4^p,$$

$$(4) \ [a_2, a_3] = a_2^p, (5) \ [a_2, a_4] = 1, (6) \ [a_3, a_4] = a_1^p \rangle.$$

Sejam $End(G)$ e $Aut(G)$ o endomorfismo e o automorfismo de G respectivamente. Denotaremos por $End_c(G) = \{\theta \in End(G) | \theta(G) \leq Z(G)\}$ e por $Aut_c(G) = \{\theta \in Aut(G) | \theta(g)g^{-1} \in Z(G) \text{ para todo } g \in G\}$, o automorfismo central de G .

O grupo G é um grupo não abeliano de expoente p^2 , objetivo do trabalho é mostrar que,

1. $G^p = U(G) = G' = Z(G)$, onde $U(G) = \{g \in G \mid o(g) \mid p\}$.
2. cada endomorfismo estrito (i.e. um endomorfismo que não é um automorfismo) de G tem sua imagem em $Z(G)$, e
3. cada automorfismo é central.

Que consiste em provar o Teorema 1.1, que nos dá um E -grupo não abeliano.

Resultados e Discussão

Nosso objetivo consiste em mostrar o seguinte teorema.

Teorema 1.1 $End(G) = End_c(G) \cup Aut_c(G)$.

Corolário 1.1 Cada elemento em G comuta com sua imagem endomórfica.

Lema 1.1 Ordem de G é p^8 .

Prova: Das relações definidoras de G , temos $|G| \leq p^8$. Vamos construir um grupo de ordem p^8 que satisfaz as relações definidoras de G .

Sejam

$$K = \langle k_i, 1 \leq i \leq 4 : k_1^p = k_3^p = 1, k_2^{p^2} = k_4^{p^2} = 1 \rangle$$

$$\text{e } [k_i, k_j] = 1, 1 \leq i, j \leq 4 \rangle$$

$$\text{e } H = \langle h_1, h_3 : h_1^{p^2} = h_3^{p^2} \text{ e } [h_1, h_3] = h_3^p \rangle.$$

K é um grupo abeliano de ordem p^6 e H é um grupo nilpotente de classe 2 de ordem p^4 . Sejam σ_1 e σ_3 os automorfismos de K determinados por, $\sigma_1(k_1) = k_1, \sigma_1(k_3) = k_3, \sigma_1(k_2) = k_1^{-1}k_2$ e $\sigma_1(k_4) = k_4^{-p}k_4$, $\sigma_3(k_1) = k_1, \sigma_3(k_3) = k_3, \sigma_3(k_2) = k_2^p k_2$ e $\sigma_3(k_4) =$

$k_3^{-1}k_4$. O subgrupo de $Aut(K)$ gerado por σ_1 e σ_3 é um grupo abeliano de expoente p de ordem p^2 . Seja θ um homomorfismo de H em $Aut(K)$, definido por

$$\begin{aligned}\theta : H &\longrightarrow Aut(K) \\ h_1 &\longmapsto \sigma_1 \\ h_3 &\longmapsto \sigma_3\end{aligned}$$

Seja $S = K \rtimes_{\theta} H = \{kh, h \in H \text{ e } k \in K\}$ o produto semidireto de K por H determinado por θ . Assim $hk = (\theta(h^{-1})(k))h$. S é um grupo de ordem p^{10} e os elementos $k_1^{-1}h_1^p$ e $k_3^{-1}h_3^p$ geram um subgrupo R de ordem p^2 em $Z(G)$. Seja $T = S/R$, $t_1 = h_1 \cdot R$, $t_2 = k_2 \cdot R$, $t_3 = h_3 \cdot R$ e $t_4 = k_4 \cdot R$. O grupo T de ordem p^8 é gerado por $\{t_i : 1 \leq i \leq 4\}$ e os t_i satisfazem as relações definidoras de G .

Lema 1.2 $Z(G) = G' = G^p = U(G)$ onde $U(G)$ é o conjunto de todos os elementos cuja ordem divide p .

Prova: Temos que $G' = \langle a_i^p, 1 \leq i \leq 4 \rangle = G^p$. Como G é nilpotente de classe 2 $\gamma_2(G) \leq Z(G)$, que implica $G' \subseteq Z(G)$ e $G' \subseteq U(G)$. Uma vez que $|G| = p^8$, $|G'| = p^4$. Se $|Z(G)| \geq p^5$, então $[G : Z(G)] \leq p^3$, mas $G/Z(G)$ é gerado por $\{a_1Z(G), a_2Z(G), a_3Z(G), a_4Z(G)\}$. Assim, dois geradores de G são congruentes mod $Z(G)$ e $G/Z(G)$ é gerado por, no máximo, três elementos. Assim $|G'| \leq p^3$, uma contradição. Logo $Z(G) = G'$. Da mesma forma se $|U_p(G)| \geq p^5$, então $[G : U(G)] \leq p^3$ então $|G^p| \leq p^3$, que é uma contradição. Donde concluímos que $Z(G) = G' = G^p = U(G)$.

Para um $g \in G$ fixado, seja

$$\begin{aligned}\theta_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow [h, g]\end{aligned}$$

Como G é Nilpotente de classe 2, θ_g é um homomorfismo. $Ker \theta_g = C_G(\langle g \rangle)$ e $[G : C_G(\langle g \rangle)] = |\theta_g(G)|$.

Lema 1.3

- (i) $C_G(\langle a_1 \rangle) = G' \cdot \langle a_1 \rangle$,
- (ii) $C_G(\langle a_2 \rangle) = C_G(\langle a_4 \rangle) = G' \cdot \langle a_2, a_4 \rangle$,
- (iii) $C_G(\langle a_3 \rangle) = G' \cdot \langle a_3, a_1 a_4 \rangle$.

Prova: É fácil ver que o lado direito está contido no lado esquerdo. $\theta_{a_1}(G) = \langle a_1^p, a_3^p, a_4^p \rangle$. Assim $[G : C_G(\langle a_1 \rangle)] = p^3$, que dá a primeira igualdade. Da mesma forma, $|\theta_{a_i}| = p^2$ e $[G : C_G(\langle a_i \rangle)] = p^2$ ($2 \leq i \leq 4$).

Lema 1.4 Seja n_i ($1 \leq i \leq 4$) inteiros. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} n_2 & 0 & n_3 & n_4 \\ -n_1 & n_3 & 0 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_4 - n_1 & 0 \\ 0 & 0 & -n_3 & -n_1 \end{pmatrix}$$

considerada sobre o corpo primo de característica p tem posto 0, 2, ou 3.

Prova: O posto de $A \neq 4$ uma vez que $\det A = 0$. Pode-se verificar se todas as submatrizes de ordem 2 tem determinante 0 ($\text{mod } p$), então $n_i \equiv 0 \pmod{p}$, ($1 \leq i \leq 4$). Logo posto de $A \neq 2$.

Lema 1.5 Se $\theta \notin \text{Aut}(G)$ e $\theta \in \text{End}(G)$ então $\theta \in \text{End}_c(G)$.

Prova: Seja $\theta \notin \text{Aut}(G)$ não trivial. Então deve existir um elemento h de ordem maior que p tal que $\theta(h)$ tem ordem p . Agora, o Lema 1.2 diz que G' é o conjunto de todos os elementos cujas ordens dividem p . Assim se $\theta \notin \text{Aut}(G)$ implica que para algum $h \notin G'$ temos $\theta(h)$ é um elemento de G' . Daí $h = \prod_{i=1}^4 a_i^{n_i}$ com $n_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ para pelo menos um i . Temos que $\theta([a_i, h])[\theta(a_i), \theta(h)] = 1$, ($1 \leq i \leq 4$), uma vez que G é nilpotente de classe menor ou igual a dois, logo

$$\langle [a_i, h], 1 \leq i \leq 4 \rangle \subseteq \text{Ker } \theta. \quad (2.5)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
 [a_1, h] &= a_1^{pn_2} a_3^{pn_3} a_4^{pn_4}, \\
 (*) \quad [a_2, h] &= a_1^{-pn_1} a_2^{pn_3}, \\
 [a_3, h] &= a_2^{-pn_2} a_4^{p(n_4-n_1)}, \\
 [a_4, h] &= a_3^{-pn_3} a_4^{-pn_1}.
 \end{aligned}$$

Observe que as linhas da matriz A são justamente os expoentes em a_i^p nas equações do lado direito de (*). A partir da sentença 2.5, vemos que os quatro elementos de (*) estão no $\text{Ker } \theta$. Obviamente, elas também são comutadores e, portanto estão na intersecção de $\text{Ker } \theta$ e G' . Pelo Lema 1.2 cada de (*) tem ordem 1 ou p , logo cada um destes quatro elementos está no $Z(G)$. Assim as equações do lado direito de (*) são produtos de potências de elementos em $Z(G)$. Mas como posto $(A) \leq 2$, A tem pelo menos 2 linhas L.I. (Linearmente Independentes). Assim há entre os quatro elementos de (*) pelo menos dois elementos de ordem p tal que um não é potência do outro. Mas uma que estes elementos são de ordem p e estão em $Z(G)$, eles geram um subgrupo de ordem p^2 . Logo $|\text{ker } \theta \cup G'| \geq p^2$.

Como $G^P = U(G)$. Assim, cada elemento de ordem p é uma p -ésima potência de algum elemento de ordem p^2 . Assim, da intersecção de $\text{Ker } \theta$ e G' resulta que existem h_1 e h_2 , cada um de ordem p^2 , tal que $\theta(h_1^p)$ e $\theta(h_2^p)$ são comutadores que estão no $\text{Ker } \theta$. Como G tem ordem p^8 e expoente p^2 , devem existir dois elementos adicionais de ordem p^2 , h_3 e h_4 , de tal forma que $G = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$. Uma vez que h_1^p e h_2^p estão no $\text{Ker } \theta$, $\theta(h_1^p) = \theta(h_2^p) = 1$. Agora $(\theta(G))' = \langle \theta(h_1), \theta(h_2), \theta(h_3), \theta(h_4) \rangle'$. Mas $\theta(h_1)$ e $\theta(h_2)$ estão em $G' = Z(G)$ e por isso não podem gerar comutadores não-trivial. Daí, $(\theta(G))' = \langle \theta(h_3), \theta(h_4) \rangle'$. Considere o comutador gerado por $\theta(h_3)$ e $\theta(h_4)$, tem ordem no máximo p . Assim, $(\theta(G))'$ tem ordem $\leq p$. Temos pelo teorema do Núcleo e da Imagem que $|\text{Ker } \theta \cup G'| \leq p^3$.

Desta forma podemos assumir que $\theta(h_3) \in G'$ e $\theta(h_3^p) = 1$. Mas então $\theta(h_1), \theta(h_2)$ e $\theta(h_3) \in G' = Z(G)$. Então $\theta(h_1), \theta(h_2), \theta(h_3)$ e $\theta(h_4)$ comutam entre si e $\theta(G)$ é abeliano. Assim $G' \subset \text{Ker } \theta$. Uma vez que $G' = U(G)$ todos os elementos de G que tem ordem p estão em $\text{Ker } \theta$. Seja x um elemento de ordem p^2 em G , então $\theta(x)$ tem ordem no máximo p . Como $U(G) = Z(G)$ resulta que $\theta(G) \subset Z(G)$.

Seja

$$R = \{g \in G \mid [G : C_G(\langle g \rangle)] = p^2\}$$

$$R_1 = \{g \in G \mid g \notin G' \text{ e } g = a_2^r\}$$

$$R_2 = \{g \in G \mid g \notin G' \text{ e } g = a_1^r a_3^s a_4^r\}$$

Pelo menos um dos números inteiros r ou s não é divisível por p uma vez que $g \notin G'$.

Lema 1.6 $R = R_1 \cup R_2$.

Prova: Seja $h = \prod_{i=1}^4 a_i^{n_i}$. $h \in R$ se, e somente se, $|\theta_h(G)| = p^2$. O argumento no Lema 1.5 nos dá que $|\theta_h(G)| = p^2$ se, e somente se, posto de $A = 2$. Por inspeção podemos observar que posto de $A = 2$ se $h \in R_1 \cup R_2$. Portanto $R = R_1 \cup R_2$.

Seja d_{ij} denota o determinante (i, j) -menor de A . Se posto de $A = 2$ então $d_{ij} \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq i, j \leq 4$. Em particular

$$\begin{aligned} -n_1^2 n_2 &\equiv d_{13} \equiv 0 \pmod{p}, \\ -n_1^2(n_1 - n_4) &\equiv d_{12} \equiv 0 \pmod{p}, \\ -n_3^2 n_2 &\equiv d_{34} \equiv 0 \pmod{p}, \\ -n_3 n_4(n_1 - n_4) &\equiv d_{41} \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

As equações 2.6 implicam que cada um $n_1 \equiv n_3 \equiv 0 \pmod{p}$ ou $n_2 \equiv n_1 - n_4 \equiv 0 \pmod{p}$.

Lema 1.7 $\text{Aut}(G) = \text{Aut}_c(G)$.

Prova: Temos que $C_G(\langle h \rangle) = G' \cdot \langle a_2, a_4 \rangle$ se $h \in R_1$ e $C_G(\langle h \rangle) = G' \cdot \langle a_3, a_1 a_4 \rangle$ se $h \in R_2$. Seja $\theta \in \text{Aut}(G)$. Ou i) $\theta(a_2), \theta(a_4) \in R_1$ e $\theta(a_3) \in R_2$ ou ii) $\theta(a_2), \theta(a_4) \in R_2$ e

$\theta(a_3) \in R_1$. Das relações 2 e 3 de G implica $[\theta(a_1), h_i] = h_i^p$ para algum $h_i \in R_i$, $i = 1, 2$.

Seja

$$\begin{aligned} h_1 &= a_2^r a_4^s \\ h_2 &= a_1^t a_3^u a_4^t \\ \theta(a_1) &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4} \end{aligned}$$

Portanto, temos, entre outras igualdades, as seguintes:

$$r\alpha_1 \equiv r(\alpha_3 + 1) \equiv s(\alpha_1 - 1) \equiv (\alpha_1 - \alpha_4 - 1)u \equiv (\alpha_1 - \alpha_4 - 1)t \equiv 0 \pmod{p}.$$

As únicas soluções são $\alpha_1 - 1 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4 \pmod{p}$.

Considere o caso *ii*). Assim

$$\begin{aligned} \theta(a_1) &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_1-1} a_4^{\alpha_1-1}, & \theta(a_2) &= a_1^{\beta_1} a_3^{\beta_3} a_4^{\beta_1}, \\ \theta(a_3) &= a_2^{\gamma_2} a_4^{\gamma_4}, & \theta(a_4) &= a_1^{\delta_1} a_3^{\delta_3} a_4^{\delta_1}. \end{aligned}$$

Das relações 1, 4 e 6 de G , implica que $[\theta(a_i), \theta(a_2)] = \theta(a_i)^p$ temos, entre outras igualdades, as seguintes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2\beta_1 &\equiv \alpha_1 - \beta_1 - 1 \equiv \beta_1(\gamma_2 - 1) \equiv \beta_1(\gamma_4 - 1) \\ &\equiv \beta_3(\gamma_4 - 1) \equiv \delta_3\gamma_4 \equiv (\delta_3 - 1)\gamma_2 \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ou $\beta_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ou $\beta_3 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Logo $\gamma_4 - 1 \equiv \delta_3 \equiv \gamma_2 \equiv \beta_1 \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_1 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, uma contradição.

Considere o caso *i*). Assim

$$\begin{aligned} \theta(a_1) &= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_1-1} a_4^{\alpha_1-1}, & \theta(a_2) &= a_2^{\beta_2} a_4^{\beta_4}, \\ \theta(a_3) &= a_1^{\gamma_1} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_1}, & \theta(a_4) &= a_2^{\delta_2} a_4^{\delta_4}. \end{aligned}$$

Das relações 1, 4 e 6 de G , implica que $[\theta(a_i), \theta(a_2)] = \theta(a_i)^p$ temos, entre outras igualdades, as seguintes:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\beta_2 - 1) &\equiv (\alpha_1 - 1)\beta_2 + \alpha_2 \equiv \alpha_1(\beta_4 - 1) + 1 \equiv \beta_2\gamma_1 \equiv \beta_2(\gamma_3 - 1) \\ &\equiv \beta_2\gamma_3 \equiv \beta_4(\gamma_1 + 1) \equiv \delta_2(\gamma_1 - 1) \equiv (\delta_4 - 1)\gamma_3 \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Se $\beta_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$, então $\gamma_3 \equiv \gamma_1 + 1 \equiv \beta_2 \equiv \alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Assim $1 \equiv 0 \pmod{p}$, uma contradição. Se $\beta_4 \equiv 0 \pmod{p}$, então $\beta_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$ e

$$\gamma_1 \equiv \gamma_3 - 1 \equiv \delta_2 \equiv \alpha_1 - 1 \equiv \alpha_2 \equiv \beta_2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Logo $\theta \in Aut_c(G)$.

Conclusões

Concluímos que G é um grupo não abeliano de expoente p^2 e ordem p^8 que tem a propriedade de que todo elemento comuta com sua imagem endomórfica. E posteriormente iremos estudar o artigo [6] Malone que mostra, para $p = 2$, o exemplo de Fraudree não tem a propriedade citada no título. E estudaremos o artigo principal Abdollahi, Faghili, Linton e O'Brien que nos dá um exemplo de um 3-grupo de classe 3 que comuta com sua imagem automórfica.

Temos então a partir deste estudo o enriquecimento das pesquisas e desenvolvimento do estudo na área de álgebra e principalmente da teoria de grupos.

Referências

- [1] ABDOLLAHI, A., FAGHIHI, A., LINTON, S.A., AND O'BRIEN, E.A. - *Finite 3-Groups of Class 3 Whose Elements Commute with their Automorphic Images*, Arch. Math, 95, 1-7 (2010).
- [2] FAUDREE, R. - *Groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. Amer. Math. Soc., 27, 236-240 (1968).
- [3] GAP - *The GAP Group-Groups, Algorithms and Programming*, www.gap-system.org.
- [4] HALL, MARSHALL JR. - *The theory of groups* , The Macmillan Company, New York, 1973.
- [5] HOLT, D., EICK, B. AND O'BRIEN, E. A. - *Handbook of computational group theory* , Chapman and Hall/CRC, London, 2005.

[6] MALONE, J.J. - *More on groups in which each element commutes with its endomorphic images*, Proc. Amer. Math. Soc., 65, 209-214 (1977).

[7] ROBINSON, D.J.S. - *A course in the theory of groups*, Second Edition, Springer, New York, 1995.

P12 - Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos*Silvio Macedo (IFG-Luziânia) & Ricardo Nunes de Oliveira (UFG)***Resumo**

The weak commutativity group by bijection $G(H, K, \sigma) = \langle H, K | [h, h^\sigma] = 1, \forall h \in H \rangle$ is defined as being the quotient of the free product $H * K$ by normal closure of $\{[h, h^\sigma] : \forall h \in H\}$ in $H * K$. In this paper, is a resume of the Macedo [MAC], that studied the results obtained in 2009 by Oliveira and Sidki [OS] that support the following conjecture:

If $H, K \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_l$, then $G(H, K, \sigma)$ is p -group.

Keys words: Free groups, presentations of groups, weak commutativity, nilpotency class, double cosets.

Resultados e Discussão

Em 1980, Sidki [SIDKI] introduziu o grupo de comutatividade fraca

$$\chi(H) = \langle H, H^\varphi | [h, h^\varphi] = 1, \forall h \in H \rangle,$$

definindo-o como o quociente do produto livre $H * H^\varphi$ ($\varphi : H \longrightarrow H^\varphi$ um isomorfismo) pelo fecho normal de $\{[h, h^\varphi] : \forall h \in H\}$ em $H * H^\varphi$, (h^φ denota $\varphi(h)$). Nesse artigo, Sidki fez um estudo detalhado do grupo $\chi(H)$ e obteve, dentre outros resultados, o seguinte

Teorema 2.27. *Seja \mathcal{P} qualquer uma das seguintes propriedades de grupos: finitude, p -grupo, nilpotente, solúvel; então*

$$H \text{ é um } \mathcal{P}\text{-grupo} \implies \chi(H) \text{ é um } \mathcal{P}\text{-grupo.}$$

Em 1981, Rocco [ROCCO2] considerou o caso onde H é um p -grupo finito de ordem p^n , p ímpar e classe de nilpotência c e provou que $\chi(H)$ é um p -grupo de ordem

divisor de $p^{2n}p^{\binom{n}{2}}$ com classe de nilpotência no máximo $2c$. Posteriormente, Gupta, Rocco e Sidki [GRS], obtiveram um refinamento para esse resultado, mostrando que a classe de nilpotência é no máximo $2 + c$.

Seguindo outra direção, em 2009, Oliveira e Sidki [OS] consideraram um caso mais geral do grupo de comutatividade fraca $\chi(H)$, a saber, quando $\sigma : H \rightarrow K$ é uma bijeção entre grupos finitos com σ fixando a identidade, o grupo

$$G(H, K, \sigma) = \langle H, K | [h, h^\sigma] = 1, \forall h \in H \rangle$$

foi definido como sendo o quociente do produto livre $H * K$ pelo fecho normal de $\{[h, h^\sigma] : \forall h \in H\}$ em $H * K$. Assim, quando $H \cong K$ e σ for um isomorfismo, os grupos $\chi(H)$ e $G(H, K, \sigma)$ coincidem. Surge então, a seguinte pergunta:

Quais resultados obtidos para $\chi(H)$ continuam válidos para $G(H, K, \sigma)$?

Oliveira e Sidki [OS] proporaram então a seguinte:

Conjectura 2.28. *Se H e K são grupos nilpotentes finitos e $\sigma : H \rightarrow K$ é uma bijeção fixando a identidade, então $G(H, K, \sigma)$ é nilpotente.*

Mas devido a dificuldade do problema, eles se concentraram no caso mais particular em que os grupos H e K da conjectura acima são isomorfos a $\mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, p primo. Assim o problema básico tratado nesse artigo foi o seguinte:

Conjectura 2.29. *Se $H, K \cong \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, então $G = G(H, K, \sigma)$ é um p -grupo.*

Neste caso, o estudo do grupo G é facilitado pelas seguintes propriedades do grupo $H = \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$:

- (i) H pode ser visto como um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p ;
- (ii) Todo elemento de H possui ordem p .

Este artigo é um resumo da dissertação de Macedo [MAC], que fez um estudo dos resultados obtidos por Oliveira e Sidki [OS].

A finitude do grupo $G(H, K, \sigma)$

Definição 2.30. (Sidki[?]) Sejam H e K grupos finitos e $\gamma : H \longrightarrow K$ uma função. Então a tripla (H, K, γ) é dita especial se γ satisfaz

$$(i) \ 1^\gamma = 1 \text{ e } 1^{\gamma^{-1}} = 1,$$

$$(ii) \ |(S^{\gamma^{-1}} h)^\gamma| \geq |S|,$$

para todo subconjunto S de K tal que $1 \in S$ e para todo $h \in H$.

O critério de finitude a seguir é dado para um grupo mais geral do que $G(H, K, \sigma)$.

Teorema 2.31. (Sidki [SIDKI]) Seja (H, K, γ) uma tripla especial, onde H e K são grupos finitos de ordens m e n , respectivamente, tal que $1 < n \leq m$. Sejam $\delta : H \longrightarrow K$ e $\epsilon : H \longrightarrow H$ funções. Então o grupo definido por

$$G(H, K, \gamma, \delta, \epsilon) = \langle H, K | hh^\gamma(h^\epsilon)^{-1}(h^\delta)^{-1} = 1, \forall h \in H \rangle$$

é finito de ordem no máximo $(m - 1)e^m$, onde e é o número de Euler.

O grupo de comutatividade fraca $G(H, K, \sigma)$ é um caso particular do grupo definido acima e nesse caso, Sidki [SIDKI] mostrou, como um corolário do Teorema acima, que $G(H, K, \sigma)$ possui ordem limitada por ne^{n-1} . Quando $H, K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, utilizando o GAP [GAP], vemos que para algumas permutações σ , $|G(H, K, \sigma)| = 2^{19} = 16 \cdot 2^{16-1}$. Quando $H \cong K$ escreveremos simplesmente $G(H, \sigma)$.

O grupo $G(H, \sigma)$ com H cíclico de ordem n .

Sejam $H = \langle X | R \rangle$ e $K = \langle Y | S \rangle$. Então $H \times K = \langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle$. A partir disso, vemos que $\frac{G(H, K, \sigma)}{[H, K]} \cong H \times K$. Segue então que se $G = G(H, K, \sigma)$ for abeliano, então $G \cong H \times K$.

Teorema 2.32. Se H é um grupo cíclico de ordem n , então $G = G(H, \sigma)$ é abeliano. Logo $G \cong H \times H$.

Cálculo de alguns grupos $G(H, \sigma)$ com o GAP

O cálculo direto dos $(|H| - 1)!$ grupos $G(H, \sigma)$ torna-se inviável muito rapidamente por causa do crescimento fatorial. O teorema abaixo nos permite fazer uma melhoria no cálculo dos grupos $G(H, \sigma)$ via GAP, pois ele afirma que a maioria desses grupos são isomorfos.

Teorema 2.33. (*Oliveira e Sidki [OS]*) Sejam H, K grupos e $\sigma : H \rightarrow K$ uma bijeção fixando a identidade. Se $\alpha \in \text{Aut}(H)$ e $\beta \in \text{Aut}(K)$, então $G(H, K, \sigma) \cong G(H, K, \alpha\sigma\beta)$.

Seja $H = \{1, h_2, \dots, h_n\}$, podemos identificar $\text{Aut}(H)$ com um subgrupo de $S_{|H|-1}$ simplesmente observando que um automorfismo α de H induz uma permutação σ nos índices dos elementos de H , isto é $i^\sigma = j \iff h_i^\alpha = h_j$. Fazendo as mesmas considerações para $K \cong H$, podemos escrever

$$A = \text{Aut}(H) = \text{Aut}(K) \leq S_{n-1}.$$

Agora podemos calcular as classes duplas $A \setminus S_{n-1} / A = \{AsA : s \in S_{n-1}\}$ no GAP, utilizando a função

`DoubleCosetRepsAndSizes(G, U, V)`

que retorna uma lista com os representantes das classes duplas $U \setminus G / U$ junto com a respectiva ordem de cada classe. Nas tabelas abaixo, c é a classe de nilpotência e d é o comprimento derivado do grupo $G(H, \sigma)$.

(i) $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

σ	$ G(H, \sigma) $	c	d
$()$	2^5	2	2

(ii) $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

σ	$ G(H, \sigma) $	c	d
$()$	2^{10}	3	2
$(6, 7)$	2^{10}	3	2
$(5, 6, 7)$	2^8	2	2
$(4, 5, 6, 7)$	2^8	2	2

(iii) $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Para este caso, listamos apenas os grupos de ordem máxima.

σ	$ G(H, \sigma) $	c
($)$	2^{19}	4
(14, 15)	2^{19}	5
(10, 13)(14, 15)	2^{19}	5
(8, 11)(9, 12)(10, 13)	2^{19}	4
(8, 11)(9, 12)(10, 14, 13, 15)	2^{19}	5

(iv) $H = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

σ	$ G(H, \sigma) $	c	d
($)$	3^5	2	2
(6, 7)	3^5	2	2
(4, 6, 8, 7)	3^5	2	2
(7, 8)	3^4	1	1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(3, 4, 7, 5, 6, 8)	3^4	1	1

Observação 2.34. Em sua tese de doutorado, Oliveira [OL] deu provas diretas para todos esses casos apresentados.

O grupo $G(H, \sigma)$ com $H = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$

Adaptando alguns resultados em Oliveira e Sidki [OS], pudemos mostrar em Macedo [MAC] que:

Teorema 2.35. Seja $H, K \cong A_{p,2}$ com $H = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $K = \langle b_1, b_2 \rangle$. Então $G = G(H, \sigma)$ é um p -grupo com classe de nilpotência no máximo 2.

Permutando os subgrupos cíclicos

Nesta seção vamos denotar $H = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ (k cópias) por $H = A_{k,p}$ e olhar para H como um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p . Consideraremos também $H, K \cong A_{k,p}$ e escreveremos

$G(H, \sigma)$ ao invés de $G(H, K, \sigma)$.

Proposição 2.36. (Oliveira e Sidki [OS]) Sejam $H, K \cong A_{p,k}$ com $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ e $K = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$. Então para toda bijeção $\sigma : H \rightarrow K$, fixando a identidade, podemos obter uma bijeção $\tilde{\sigma} : H \rightarrow K$, fixando a identidade, tal que $a_i^{\tilde{\sigma}} = b_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ e $G(H, \sigma) \cong G(H, \tilde{\sigma})$.

Teorema 2.37. (Oliveira e Sidki [OS]) Seja σ uma permutação de $H = A_{k,p}$, fixando a identidade, e considere a relação $R \subseteq H \times H$ definida por

$$R = \{(a^i, b^j) | 1 \leq i, j \leq p-1 : a^\sigma = b\}.$$

Então existe pelo menos $p-1$ permutações $\hat{\sigma}$ de H fixando a identidade tal que $(a^i)^{\hat{\sigma}} = (a^{\hat{\sigma}})^i$ para todo $1 \leq i \leq p-1$, cujo gráfico $\{(a, a^{\hat{\sigma}}) : h \in H\}$ está contido em R .

Corolário 2.38. Para toda permutação σ de H fixando a identidade, existem uma permutação $\hat{\sigma}$ de H e um epimorfismo de $G(H, \hat{\sigma})$ em $G(H, \sigma)$.

O teorema abaixo é um refinamento do método das classes duplas.

Teorema 2.39. Se $\alpha, \beta \in PGL(k, p)$, então $G(H, \hat{\sigma}) \cong G(H, \alpha \hat{\sigma} \beta)$.

Exemplo 2.40. Para o grupo $A_{3,3}$ temos 13 geradores de subgrupos cíclicos e 252 classes duplas em $PGL(3, 3)S_{13}PGL(3, 3)$. As ordens dos grupos com as respectivas quantidades são:

$$\{3^6, 235\}, \{3^7, 11\}, \{3^8, 5\}, \{3^9, 1\}.$$

Obtemos ainda as seguintes informações:

- (i) Todos os grupos de ordem 3^6 possuem classes de nilpotência iguais a 1, isto é, são abelianos e portanto isomorfos a $A_{3,3} \times A_{3,3}$. Os demais grupos são todos nilpotentes de classe 2.
- (ii) Para o único grupo de ordem 3^9 , o representante de classe dupla é $\sigma = id$, logo este grupo de ordem máxima é isomorfo a $\chi(A_{3,3})$.

O grupo $G(\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{\sigma})$, \tilde{H} e \tilde{K} extensões de H e K

Sejam \tilde{H} e \tilde{K} grupos possuindo subgrupos normais M e N , respectivamente. Seja H um transversal de M em \tilde{H} com $1 \in H$ e K um transversal de N em \tilde{K} com $1 \in K$. Deste modo podemos fazer a seguinte identificação

$$H = \frac{\tilde{H}}{M}, \quad K = \frac{\tilde{K}}{N}.$$

Considerando $|\tilde{H}| = |\tilde{K}|$ e $|M| = |N|$, tomemos bijeções $\sigma : H \rightarrow K$ e $\alpha : M \rightarrow N$, ambas fixando a identidade. Seja ainda γ uma bijeção entre M e N (não necessariamente fixando a identidade). Observe que $\tilde{H} = \{mh : m \in M, h \in H\}$ e $\tilde{K} = \{nk : n \in N, k \in K\}$. Obtemos assim uma bijeção $\tilde{\sigma} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{K}$ definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &: m \rightarrow m^\alpha & (2.1) \\ \tilde{\sigma} &: mh \rightarrow m^\gamma h^\sigma \quad \text{se } h \neq 1, \end{aligned}$$

Lema 2.41. *O grupo $G(H, K, \sigma)$ é isomorfo ao quociente de $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{\sigma})$ pelo fecho normal de $\langle M, N \rangle$ em \tilde{G} .*

Teorema 2.42. *Mantendo a notação prévia, suponha M, N centrais em \tilde{H}, \tilde{K} , respectivamente e que $G(M, N, \alpha)$ seja abeliano. Então $V = \langle M, N \rangle^{\tilde{G}}$ é abeliano.*

Corolário 2.43. *Suponha nas hipóteses do teorema acima que $M = \langle m \rangle$ e $N = \langle n \rangle$ são cílicos, cada um deles com ordem igual a um primo p . Então $V = \langle M, N \rangle^{\tilde{G}}$ é um p -grupo abeliano elementar de posto no máximo $|H| + 1$.*

Mais alguns casos particulares de $G(H, \sigma)$

Teorema 2.44. *Sejam H, K grupos abelianos finitos de ordem n e $G = G(H, K, \sigma)$. Então o grupo G/G'' é nilpotente de classe no máximo n .*

Teorema 2.45. *Seja $H = A_{k,p}$, p ímpar e $\sigma : H \rightarrow \dot{H}$ uma transposição. Então $G(H, \sigma)$ é um p -grupo com classe de nilpotência no máximo 3.*

Observação 2.46. *Para $p = 2$ o teorema acima pode não ser verdadeiro. De fato, o grupo $G(A_{2,4}, (14, 15))$ calculado na Seção 2.3 possue classe de nilpotência igual a 5.*

Referências

- [GRS] Gupta, N.; Rocco, N.; Sidki. S., *Diagonal embeddings of nilpotent groups*, Illinois J. of Math, 30, 1986.
- [MAC] Macedo, S.S.A., *Comutatividade Fraca por Bijeção entre Grupos Abelianos*, Dissertação de Mestrado. UFG, 2010.
- [OL] Oliveira, R. N., *Comutatividade Fraca entre Grupos Isomorfos*, Tese de Doutorado. UNB, 2007.
- [OS] Oliveira, R. N.; Sidki, S. N., *On commutativity and finiteness in groups*, Bull. of the Braz. Math. Soc., 40(2): 149-180, 2009.
- [ROCCO2] Rocco, N. R., *On weak commutativity between finite p -groups*, p odd. Journal of Algebra, 76, 1982.
- [SIDKI] Sidki, S. N., *On weak permutability between groups*. Journal of Algebra, 63: 186-225, 1980.
- [GAP] The GAP Groups, GAP-Groups, *Algorithms and Programming*, Version 4.4.12. (<http://www.gap-system.org>), 2008.

CAPÍTULO 3

RESUMOS SIMPLES

3.1 Conferências

C2 - Observações sob o Delta de Dirac

Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)

C3 - Cotas nas Universidades: Quantas? Para Quem?

Dani Gamerman (UFRJ)

C4 - Regularity Results for Semimonotone Operators: an Extension of Minty's Theorem

Rolando Gárciga Otero (IMPA)

C5 - Um Teorema de Lagrange, a Exponencial Complexa e o Plano Euclidiano

como um Parabolóide no Cone de Luz

Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior (UFSCar)

C6 - Caminhos Ñtimos para Veículos Autônomos

Nancy Lopes Garcia (UNICAMP)

C7 - Teoria de Ramsey

Irene Naomi Nakaoka (UEM)

C8 - Soluções Estacionárias de Fluídos Incompressíveis com uma Lei de Potência

para a Viscosidade, em Domínios com Fronteiras Ilimitadas

Marcelo Martins dos Santos (UNICAMP)

C2 - Observações sob o Delta de Dirac

Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFJF)

Resumo

Será introduzido o delta de Dirac, e motivando o estudo das Distribuições de Schwartz. Faz-se algumas observações históricas das personagens da época tais como: Dirac, Schwartz, Hadamard etc. Finalmente conclui-se que delta de Dirac trata-se de uma distribuição. Serão apresentados algumas aplicações.

C3 - Cotas nas Universidades: Quantas? Para Quem?

Dani Gamerman (UFRJ)

Resumo

A crescente utilização do ENEM como meio de avaliação de entrada nas universidades trouxe a atenção da sociedade brasileira para o uso da Teoria de Resposta ao Ítem (TRI). Mais recentemente, tem ganho força a idéia que correções precisam ser feitas na avaliação baseada apenas no ENEM, para acomodar grupos desprivilegiados. São as chamadas cotas e propostas com vários matizes e motivações tem sido formuladas com os mais variados níveis de sustentação científica. Essa palestra se propõe a mostrar em uma linguagem simples como esse problema deve ser abordado do ponto de vista científico. Inicialmente serão apresentados os conceitos básicos da TRI. Posteriormente serão discutidas algumas de suas extensões. Através de uma generalização da TRI que é rotineiramente utilizada, pode se entender que modificações precisam ser incorporadas e de que forma se dá o efeito dessas mudanças.

C4 - Regularity Results for Semimonotone Operators: an Extension of Minty's Theorem*Rolando Gárciga Otero (IMPA)*

Resumo

We introduce the concept of ρ -semimonotone point-to-set operators in Hilbert spaces. This notion is symmetrical with respect to the graph of T , as is the case for monotonicity, but not for other related notions, like e.g. hypomonotonicity, of which our new class is a relaxation. We give a necessary condition for ρ -semimonotonicity of T in terms of Lipschitz continuity of $[T + \rho^{-1}I]^{-1}$ and a sufficient condition related to expansivity of T . We also establish surjectivity results for maximal ρ -semimonotone operators. This is a work joint Alfredo Iusem.

**C5 - Um Teorema de Lagrange, a Exponencial Complexa e o Plano Euclidiano
como um Parabolóide no Cone de Luz**

Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior (UFSCar)

Resumo

Em 1779 (!), Lagrange resolveu o problema de determinar todos os mapas conformes da Terra com a propriedade de que os meridianos (ou paralelos) sejam representados por círculos ou retas. Um passo importante na solução é caracterizar os pares de famílias de círculos ou retas tais que cada elemento de uma delas é ortogonal a todos os elementos da outra. Nesta palestra, usaremos o teorema de Lagrange como uma motivação para discutir aplicações conformes, veremos como a exponencial complexa aparece naturalmente em sua solução e introduziremos o modelo do plano Euclidiano como um parabolóide no cone de luz do espaço de Lorentz, com o qual obteremos de uma maneira simples a caracterização de famílias ortogonais de círculos ou retas necessária à demonstração do Teorema de Lagrange.

C6 - Caminhos Ótimos para Veículos Autônomos

Nancy Lopes Garcia (UNICAMP)

Resumo

Nosso objetivo é encontrar automaticamente o menor caminho entre dois pontos A e B quando a estrada é povoada de obstáculos. Um método não paramétrico penalizado é utilizado tanto quando os obstáculos são vistos perfeitamente como quando estão sujeitos a erros de medição.

C7 - Teoria de Ramsey

Irene Naomi Nakaoka (UEM)

Resumo

A teoria de Ramsey é, atualmente, um dos ramos mais importantes da combinatoria e teve seu início em 1930 com o trabalho On a problem in formal logic do matemático, filósofo e economista Frank P. Ramsey. Ela investiga questões do tipo:

Dado um conjunto S que tem uma propriedade P , é verdade que sempre que S é particionado em um número finito de subconjuntos, um dos subconjuntos deve também ter a propriedade P ?

O resultado mais simples da teoria de Ramsey é o princípio da casa dos pombos (PCP), também conhecido como princípio das gavetas de Dirichlet, o qual estabelece que

Se mais que n pombos são colocados em n gaiolas, então pelo menos uma gaiola deve conter pelo menos dois pombos.

Nesta palestra, serão apresentadas algumas aplicações do PCP e introduzida a teoria de Ramsey, bem como algumas de suas aplicações.

Referências

- [1] R. Brusamarello, E. L. Monte Carmelo, Paul Erdős: o mago húngaro, Matemática Universitária, v. 43, p. 74-81, 2009.
- [2] P. J. Cameron, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, Cambridge University Press, 1994.
- [3] S. Jukna, Extremal Combinatorics, Springer, 2001.

[4] B. M. Landman, A. Robertson, Ramsey Theory on the Integers, AMS, 2004.

[5] J. P. O. Santos, Introdução à Teoria dos Números, IMPA, 1998.

C8 - Soluções Estacionárias de Fluídos Incompressíveis com uma Lei de Potência

para a Viscosidade, em Domínios com Fronteiras Ilimitadas

Marcelo Martins dos Santos (UNICAMP)

Resumo

Falaremos sobre o modelo estacionário para fluidos incompressíveis com a viscosidade μ dada pela lei de Ostwald-De Waele, ou seja, $\mu = |D(u)|^{p-2}$, onde $|D(u)|^{p-2}$ é a taxa de cisalhamento. Discutiremos a solução de Amick para o problema conhecido como “problema de Leray”, para fluidos newtonianos, isto é, $p = 2$, e a versão modificada do problema de Leray devido a Ladyzhenskaya e Solonikov. Em seguida, nos restringiremos ao caso $p > 2$ (“shear thickening fluids”) e apresentaremos um resultado nosso, em colaboração com Gilberlândio J. Dias (UNIFAP, Universidade Federal do Amapá e IMECC-UNICAMP), o qual generaliza o teorema Ladyzhenskaya-Solonikov’s para $p \geq 2$.

3.2 Minicursos

MC3 - Teoria das Ciências e Pensamento Livre

Ole Peter Smith (UFG)

MC3 - Teoria das Ciências e Pensamento Livre

Ole Peter Smith (UFG)

Resumo

Abordamos os conceitos, raciocínios e métodos básicas comum de todas as ciências, expondo exemplos de várias áreas de conhecimento. Introduzindo Pensamento Livre, tentamos definir o conceito liberdade em suas várias formas: individual e social, levando-nos a uma observação sobre as sociedades humanas.

3.3 Sessões Técnicas

ST5 - Método de ponto proximal para otimização convexa

Ilton Ferreira de Menezes (UFG)

ST7 - Método de ponto Proximal para uma classe de funções que satisfazem a desigualdade
de Lojasiewicz

José Henrique Amaral (UFG)

ST5 - Método de ponto proximal para otimização convexa

Ilton Ferreira de Menezes (UFG)

Resumo

Neste trabalho é apresentado o método de ponto proximal aplicado à minimização irrestrita de funções convexas não necessariamente diferenciáveis. A boa definição da sequência gerada pelo método de ponto proximal é garantida. Além disso é provado a convergência total da sequência a um minimizador global do problema em questão.

ST7 - Método de ponto Proximal para uma classe de funções que satisfazem a desigualdade de Lojasiewicz

José Henrique Amaral (UFG)

Resumo

Neste trabalho é apresentado o método de ponto proximal aplicado à minimização irrestrita de funções não necessariamente diferenciáveis que satisfazem a desigualdade de Lojasiewicz. Além disso, seguindo a ideia original de Lojasiewicz, é apresentado a convergência total da sequência gerada pelo método de ponto proximal (quando esta é limitada) a algum ponto crítico generalizado.