Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

Janeiro/2011

Polinômios - Soluções

1.

O polinômio $q(x)$ tem que ter grau 2 e podemos escrever $q(x) = x^2 + ax + b$, com a e b números reais a serem determinados. Temos

$$q(x)^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$$

Para que $p(x) = q(x)^2$, temos que ter

$$2a = -10, \qquad a^2 + 2b = 37, \qquad 2ab = -60, \qquad b^2 = 36$$

donde

$$a = -5, \qquad b = 6$$

2. O resto de P(x) por $(x-a)(x-b)$ é um polinômio R(x) de grau menor ou igual a 1 tal que, para algum polinômio Q(x), tenhamos $P(x) \equiv Q(x)(x-a)(x-b) + R(x)$ ou, equivalentemente, $R(x) \equiv P(x) - Q(x)(x-a)(x-b)$. O lado direito da identidade, nos pontos x = a e x = b, vale, respectivamente P(a) e P(b). Como o mesmo ocorre com o polinômio $\frac{P(b)}{b-a}(x-a) + \frac{P(a)}{a-b}(x-b)$, concluímos que ele é o resto desejado.

3.

a) $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{5}{2}$

b) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2) = 4^2 - 2\times 5 = 6$