Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio

Matrizes - Soluções

1. Se a matriz é simétrica, temos o trinômio
$det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda - b^2$, cujo discriminante é $\Delta = (a+c)^2 + b^2$ portanto $\Delta \geq 0$ e a equação correspondente tem raízes reais.

2. Representando os lados do triângulo pelos vetores $u, v, u-v$, os comprimentos dos seus lados são $a = |u|, b = |v|$ e $c = |u-v|$. Sua área A cumpre
$A^2 = \frac{\lambda}{4} det \begin{bmatrix} |u|^2 & < u, v > \\ < u, v > & |v|^2 \end{bmatrix}$
Levando em conta que $|u-v|^2 = |u|^2 + |U|^2 - 2 < u, U >$ e portanto $< u, v >= \frac{1}{2}(|u|^2 + |U|^2 - |u-V|)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$, temos
$4A^2 = det \begin{bmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) & b^2 \end{bmatrix} = a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2$
Logo
$A = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2}$.

3. Uma matriz simétrica 3×3 tem a forma $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$, logo seu determinante, pelo desenvolvimento de Laplace via primeira coluna é igual a $abc - bac = 0$. Para matrizes 2×2, o resultado não vale pois $det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$.

4. As matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ têm respectivamente postos 0, 1, 2 e 3.

   O posto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ é 2 pois suas duas primeiras linhas são independentes mas a terceira é combunação linear das duas primeiras. Mais explicitamente, se chamarmos essas linhas de L_1 L_2 e L_3, teremos $L_3 = 2L_2 - L_1$.