Ministério da Educação
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova Escrita - ÁLGEBRA - 2018

Aluno:

1) Seja G um grupo finito, tal que $|G| = mn$, com $mdc(m, n) = 1$. Suponha que existe um subgrupo H de G, tal que $|H| = n$. Prove que H é o único subgrupo de G de ordem n se, e somente se, $H \lhd G$.

2) Mostre que se um grupo de ordem p^n, com p primo, contém exatamente um subgrupo com ordens $p, p^2, \ldots, p^{n-1}$, então ele é cíclico.

3) Seja F um corpo e $f(X) \in F[X]$, onde $f(X)$ possui grau n. O polinômio $g(X) := X^n f(1/X)$ é dito o *polinômio reverso* de $f(X)$. Prove que f é irredutível se, e somente se, g é irredutível.

4) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes para qualquer anel R.

(a) P é um ideal primo de R.
(b) Para todo $a, b \in R$, $aRb \subseteq P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$.
(c) Para todos os ideais à direita A, B de R, $AB \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.
(d) Para todos os ideais à esquerda A, B de R, $AB \subseteq P$ implica $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.

Além disso, mostre que se P é um ideal primo de R, então (0) é um ideal primo de R/P.

5) Encontre os grupos de Galois do polinômio $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Z}_5$ e $\mathbb{Z}_{11}$.

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Exame de Qualificação do Doutorado - Análise Funcional - 10/01/2018

Questão 1. Seja X um espaço vetorial e $T : X \to X$ uma tranformação linear. Dizemos que um subespaço vetorial $V \subset X$ é invariante por T se $T(V) \subset V$. Dê exemplo de uma tranformação linear T, **definida em um espaço vetorial** X **de dimensão infinita**, cujos subespaços invariantes são apenas X e $\{0\}$.

Questão 2. Seja $L^\infty([0,1])^*$ o dual topológico de $L^\infty([0,1])$.

a) Identifique, **através de uma transformação linear isométrica**, o espaço $L^1([0,1])$ com um subespaço de $L^\infty([0,1])^*$.

b) Mostre que $L^\infty([0,1])^* \setminus L^1([0,1]) \neq \emptyset$.

Questão 3. Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{K}(X)$ o espaço dos operadores compactos $T : X \to X$.

a) Prove que se $T \in \mathcal{K}(X)$ e $P : X \to X$ é uma transformação linear contínua, então $T \circ P \in \mathcal{K}(X)$.

b) Dê exemplo de uma transformação linear contínua, **não compacta** $T : X \to X$ tal que $T \circ T$ é compacta.

Sugestão: Considere $X = \ell^2$**.**

Questão 4. a) Dê exemplo de um espaço de Banach X e uma sequência $x_n \in X$, com $n \in \mathbb{N}$, tal que x_n converge fraco a $x \in X$, mas x_n não converge forte a x.

b) Classifique os espaços de Banach X, para os quais a topologia forte coincide com a topologia fraca.

c) É verdade que em todo espaço de Banach de dimensão infinita existem sequências convergindo fraco mas não forte? Justifique e relacione com o item **b**).

Questão 5. Seja X um espaço de Banach.

a) Mostre que para todo $x \in X$, existe $T \in X^*$ tal que $\|T\| = \|x\|$ e $T(x) = \|x\|^2$.

b) Seja $\mathcal{P}(X^*)$ o conjunto das partes de X^* e defina o operador dualidade $J : X \to \mathcal{P}(X^*)$ por $J(x) = \{T \in X^* : \ \|T\| = \|x\|, \ T(x) = \|x\|^2\}$. Prove que $J(x) = \{T \in X^* : \ \|T\| \leq \|x\|, \ T(x) = \|x\|^2\}$ e conclua que para todo $x \in X$, o conjunto $J(x)$ é não-vazio, fechado e convexo.

c) Construa um exemplo onde $J(x)$ não é unitário para algum $x \in X$.

d) Demonstre que se X^* é estritamente convexo então, $J(x)$ contém um único elemento, e portanto, podemos escrever $J : X \to X^*$.

e) Nas mesmas condições do item **d**) prove que $J(x) = -J(-x)$.

f) Seja $p \in [1, \infty)$ e J_p o operador dualidade $J_p : L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$, onde $1/p + 1/q = 1$ e Ω é um conjunto aberto. Descreva $J_p(f)$ como um elemtento de $L^q(\Omega)$.

Exame de Qualificação do Mestrado - Análise no $\mathbb{R}^N$ - 08/01/2018

Questão 1. Sejam $a, b, c, n \geq 0$. Suponha que $a + b + c > n$. Prove que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^a y^b z^c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}} = 0.$$

Questão 2. Sejam $N = 2, 3, \cdots$ e $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função da forma $J(x) = f(x) - g(x)$, onde f, g são funções positivas **(a menos da origem)** de classe C^1, e positivamente homogêneas de grau p e γ respectivamente, com $1 < p < \gamma$. Para cada $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, considere a função $\varphi_x : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_x(t) = J(tx)$. Defina

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : \ \varphi_x'(1) = 0\}.$$

Suponha que a única solução do sistema $pf(x) - \gamma g(x) = p^2 f(x) - \gamma^2 g(x) = 0$ **seja** $x = 0$.

a) Prove que $\mathcal{N}$ é uma superfície de classe C^1 difeomorfa a esfera de dimensão $N - 1$.

b) Mostre que existe $c > 0$ tal que $\|x\| \geq c$ para todo $x \in \mathcal{N}$.

c) Demonstre que se $\hat{J} \equiv \inf_{x\in\mathcal{N}} J(x)$, então $\hat{J} > 0$ e existe $x_0 \in \mathcal{N}$ satisfazendo $J(x_0) = \hat{J}$.

d) Prove que o ponto x_0 encontrado no item **c**) é um ponto crítico para a função J.

e) Prove que x_0 é um ponto crítico do tipo sela.

f) Sejam $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $J(y) < 0$ e $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1] : \mathbb{R}^N) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = y\}$. Defina

$$M = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)).$$

Prove que $\hat{J} = M$.

Questão 3.

a) Prove que cada $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pode ser escrito de maneira única como $x = r\omega$, onde $r > 0$ e $\omega \in S = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \|x\| = 1\}$.

b) Seja $f : A_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}$ uma função integrável, onde $0 < \alpha < \beta \leq 1$ e $A_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N, \ \alpha \leq \|x\| \leq \beta\}$. Mostre que

$$\int_{A_{\alpha,\beta}} f(x)dx = \int_S \int_\alpha^\beta f(r\omega) r^{N-1} dr d\omega.$$

c) Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a integral imprópria $\displaystyle\int_B \frac{1}{\|x\|^k} dx$ converge, onde $B = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \|x\| \leq 1\}$.

Questão 4. Seja K um conjunto compacto com interior não vazio e $f : K \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Defina a oscilação de f em um ponto $x \in K$ por

$$\omega(f, x) = \lim_{r\to 0} \Big(\sup\{|f(u) - f(v)| : \ u, v \in K \cap B(x, r)\} \Big),$$

onde $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N : \ \|y - x\| \leq r\}$.

a) Prove que

$$\sup\{|f(u) - f(v)| : \ u, v \in K \cap B(x, r)\} = \sup f(K \cap B(x, r)) - \inf f(K \cap B(x, r)).$$

b) Prove que $\omega(f, x)$ é uma função semicontínua superiormente na variável $x \in K$.

c) Relacione a função oscilação com a integrabilidade de f.

Prova de Geometria Diferencial

Fazer 7 questões. Justifique cada paso de sua resposta, resultados diretos não são considerados. !boa prova!

1. Mostre que se $\alpha(I)$ p.c.a esta contida em uma esfera de centro C e raio r, então

$$r^2 = \frac{1}{k^2(s)} + \left(\frac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\right)^2$$

2. Prove que, se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciavel e $a \in f(U)$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma superficie regular em $\mathbb{R}^3$.

3. Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva p.c.a. em $\mathbb{R}^3$ com $t(u), n(u), b(u)$ seu referencial de Frenet, $k(u), \tau(u)$ suas funções curvatura e torção e

$$X(u, v) = \alpha(u) + vn(u).$$

i) Qual é a condição de regularidade de X
ii) Calcule a curvatura media e Gaussiana de X
iii) Encontre uma curva α para que X seja minima.

4. Considere a superficie de rotação $X(u, v) = (f(u)cov, f(u)senv, g(u)$, onde $f, g : I \to \mathbb{R}$, $f(u) > 0$.
a) Prove que todos os pontos da superficie são parabolicos se, e só se, a superficie descreve um cilindro circular ou um cone.
b) Determine as superficies de rotação que tem curvatura Gaussiana constante.

5. Seja X uma superficie em que todos os pontos são hiperbolicos. Prove que, se as linhas assintoticas são ortogonais, então X é uma superficie minima.

6. Considere a superficie $X(u, v) = (u, v, uv)$, verifique que:
a) As curvas coordenadas de X são linhas assintoticas.
b) As linhas de curvatura de X podem ser representadas por

$$arcsenhv \pm arcsenhu = c$$

onde c é uma constante
c) A curva determinada por $u = v$ é uma geodesica de X

7. Seja superficie da forma $X(u, v) = (u, v, e^u senv)$.
a) Calcule a aplicação normal de Gauss $N = (N_1, N_2, N_3)$.
b) Calcule a curvatura Media H e Gaussiana K.
c) Verifique que a função $N_3\frac{H}{K}$ é uma função harmonica, (lembramos que uma função $f(u, v)$ é harmonica se $f_{uu} + f_{vv} = 0$)

8.a) Mostre que não existe superficie $X(u, v)$ tal que $E = G = 1, F = 0$, $e = 1, g = -1, f = 0$.
b) Existe uma superficie $X(u, v)$ tal que $E = 1, F = 0, G = cos^2u$, $e = cos^2u, f = 0, g = 1$.?

Prova de Geometria Riemanniana

Fazer 7 questões. Justifique cada passo de sua resposta.

1. Prove que as isometrias de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a metrica induzida são as restrições a S^n das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. No espaçõ Euclideano, o transporte paralelo de um vetor entre dois pontos não depende da curva que liga estes dois pontos. Mostre, por um exemplo, que isto não é verdade numa variedade Riemanniana qualquer.

3. Prove que, se M é uma variedade diferenciavel com uma conexão simetrica e $s : A \to M$ é uma superficie parametrizada então:

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}$$

4. Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimencional do espaço tangente T_pM e sejam os vetores $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$

5. Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva. Prove que, para todo p, o lugar geometrico dos pontos conjugados $C(p)$ é vazio.

6. Prove que a curvatura seccional da variedade Riemannniana $S^2 \times S^2$ com a metrica produto, onde S^2 é a esfera unitaria em $\mathbb{R}^3$, é não negativa. Ache um toro plano, totalmente geodesico, T^2, mergulhado em $S^2 \times S^2$.

7. Prove que o semi-plano superior H^2_+ com a metrica de lobatchevski:

$$g_{11} = g_{11} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = 0$$

é completo.

8. Mostre com um exemplo a existencia de um difeomorfismo entre duas variedades Riemannianas que preserva curvatura, mais que não é uma isometria.

9. Seja $c : [o, a] \to M$ uma curva e sejam $L(c) = \int_0^a |\frac{dc}{dt}|dt$, $E(c) = \int_0^a |\frac{dc}{dt}|^2 dt$, prove que
a). $L(c)^2 \leq aE(c)$.
b). Sejam $p, q \in M$ e $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodesica minimizante ligando p a q. Então para toda curva ligando p a q,

$$E(\gamma) \leq E(c)$$

e vale a igualdade se e somente se c é uma geodesica minimizante.

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
Caixa Postal 131 - Campus Samambaia - 74001-970 - Goiânia
http://www.mat.ufg.br - (62) 3521 1208

Exame Qualificação Doutorado

Questão 1. Sejam $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ são funções continuamente diferenciáveis. Considere o seguinte problema de programação não linear

$$(P) \begin{cases} \min \ f(x) \\ \text{sujeito a } \ h(x) = 0, \ g(x) \leq 0. \end{cases}$$

i) Fale sobre as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem para o problema (P).

ii) Assuma que $f, g_i, i = 1, \cdots k$, são convexas, e $h(x) = Ax + b$, onde A é uma aplicação linear e $b \in \mathbb{R}^m$. Mostre que se $\bar{x}$ satisfaz as condições de otimalidade de Karush-Kun-Tucker então $\bar{x}$ é um minimizador global do problema (P).

Questão 2. Seja $f : S^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável. Considere o problema de otimização convexa

$$(P) \begin{cases} \min \ f(X) \\ \text{sujeito a } \ X \in S^n_+. \end{cases}$$

Mostre que X^* é uma solução de (P) se, e somente se,

$$X^* \in S^n_+, \qquad \nabla f(X^*) \in S^n_+, \qquad \text{tr}\,(\nabla f(X^*) X^*) = 0.$$

Notação: O espaço das matrizes simétricas de ordem $n \times n$ é denotado por S^n e $S^n_+ := \{A \in S^n \ : \ u^T A u \geq 0, \forall u \in I\!R^n\}$. Denote por $\text{tr}(X)$ o traço da matriz X.

Questão 3. Sejam $b \in \mathbb{R}^n$, Q uma matriz simétrica e positiva definida de ordem $n \times n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - x^T b. \tag{0.1}$$

Seja também x^* o único ponto de mínimo de f. Considere o método do gradiente, com busca linear exata: dado $x_0 \in R^n$, defina

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k) \qquad k = 0, 1, 2 \ldots, \tag{0.2}$$

onde $t_k := \text{argmin}\{f(x^k - tA\, f(x^k)) : t > 0\}$.

i) Mostre que a iteração do método do gradiente em (0.2) pode ser escrita da seguinte forma

$$x^{k+1} = x^k - \left(\frac{\nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)}{\nabla f(x^k)^T Q \nabla f(x^k)} \right) \nabla f(x^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(ii) Defina em $\mathbb{R}^n$ a seguinte norma de vetores $\|x\|_Q := x^T Q x$, para $x \in \mathbb{R}^n$. Denote por λ_{min} e λ_{max} o menor e o maior autovalor de Q, respectivamente. Mostre a seguinte desigualdade

$$\|x^{k+1} - x^*\|_Q \leq \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \|x^k - x^*\|_Q, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(iii) Conclua que $\{x^k\}$ converge para x^* com taxa linear na norma $\|\cdot\|_Q$.

Sugestão: Para mostrar o ítem (ii) use o seguinte resultado:

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T Q x)(x^T Q^{-1} x)} \geq \frac{4 \lambda_{max} \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Questão 4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjuto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável. Tome A e B matrizes de ordem $n \times n$ não-singulares e defina a aplicação $G : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ como

$$G(u) = AF(Bu),$$

onde $\bar{\Omega} = B^{-1}(\Omega)$. Suponha que as sequências $\{x_k\}$ e $\{u_k\}$, geradas pelo método de Newton para resolver as equações $F(x) = 0$ e $G(u) = 0$ com ponto inicial $u_0 \in \bar{\Omega}$ e $x^0 = Bu^0$, respectivamente, estejam bem definidas. Assuma que $\{x^k\}$ converge para x^*.

i) Mostre que a sequência $\{u^k\}$ é convergente e calcule o seu limite;

ii) Mostre que se $\{x^k\}$ converge com taxa Q-quadrática então $\{u^k\}$ também converge com esta mesma taxa.

Questão 5. Sejam $A_1, ..., A_m \in S^n$ linearmente independentes, $b \in \mathbb{R}^m$ e $C \in S^n$. Defina a aplicação linear $\mathcal{A} : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$\mathcal{A}X := (\text{tr}\,(A_1X)\,, ..., \text{tr}\,(A_mX))\,,$$

Defina também a aplicação linear $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \to S^n$ como $\mathcal{A}^*y = \sum_{k=1}^m y_iA_i$. Considere os seguintes problemas:

$$(P) := \begin{cases} \min \text{tr}\,(CX) \\ \quad \mathcal{A}X = b, \\ \qquad X \in S^n_+. \end{cases} \qquad\qquad (D) := \begin{cases} \max b^Ty \\ \quad \mathcal{A}^*y + S = C, \\ \qquad S \in S^n_+. \end{cases} \tag{0.3}$$

Mostre que se (P) e (D) tem conjuntos *viáveis* não vazios então tr $(CX) \geq b^Ty$, para X viável para (P) e (y, S) viável para (D).

Notação: O espaço das matrizes simétricas de ordem $n \times n$ é denotado por S^n e $S^n_+ := \{A \in S^n \ : \ u^TAu \geq 0, \forall u \in I\!R^n\}$. Denote por tr$(X)$ o traço da matriz X.

Observação: A prova vale 10 pontos. A clareza das idéias e argumentação lógica, precisas e organizada na solução das questões serão fortemente consideradas na correção da prova.

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS
IME/UFG, 12 JAN. 2018

PROVA ELABORADA POR R. GARCIA

1) i) Mostre que todo campo de vetores de classe C^1 na esfera $\mathbb{S}^2$ possui um ponto singular.
ii) Dê exemplo de um campo de vetores C^1 por partes na esfera $\mathbb{S}^2$ que possui uma curva regular de descontinuidade mas que não possui nenhum ponto singular. Esboce o retrato de fase do exemplo construído.
iii) Construa um campo de linhas no toro $\mathbb{T}^2$ sem pontos singulares e que não seja definido por campo de vetores. **Obs:** Não é necessário explicitar equações.

2) Considere o campo de vetores $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$X(x, y, z) = (-y + \frac{1}{2}xz, x + \frac{1}{2}yz, -[2q(x^2 - y^2) + a](x^2 + y^2 - 1) + z^2).$$

i) Calcule os pontos de equilibrio de X e analise a natureza dos mesmos.
ii) Mostre que o círculo unitário $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ é uma órbita periódica de X (verifique se a parametrização está correta).
iii) Calcule a derivada da transformção de Poincaré associada a γ.

3) Seja $X = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 possuindo uma conexão de sela γ entre os pontos singulares hiperbólicos p_1 e p_2.
i) Mostre que o comprimento $L(\gamma)$ é finito.
ii) Dado $L > 0$, mostre que existe um campo de vetores de classe C^r, $r \geq 1$, no plano possuindo uma conexão de sela $\gamma \subset B(0, 1) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| < 1\}$ tal que $L(\gamma) > L$. Faça figuras para ilustrar o contexto.
iii) No item ii) é possivel construir X polinomial? Justifique.

4) i) Defina a classe dos campos Kupka-Smale e enuncie o Teorema de Kupka-Smale para campos de vetores em variedades compactas (cap 3, livro Palis-Melo).
ii) Faça um esboço detalhado (roteiro) dos principais ingredientes da prova do Teorema de Kupka-Smale.
iii) Dê exemplos de campos Kupka-Smale nas esferas $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^3$.

5) i) Enuncie o Teorema de Peixoto para campos de vetores Morse-Smale em superfícies compactas orientadas (cap 4, livro Palis-Melo).
ii) Faça um esboço detalhado (roteiro) dos principais ingredientes da prova do Teorema de Peixoto para os sistemas Morse-Smale.
iii) Dê exemplos de campos Morse-Smale na esfera $\mathbb{S}^2$ e no toro $\mathbb{T}^2$.

6) i) Elabore um problema (se possível original) que reflita a sua maturidade matemática adquirida na disciplina de Sistemas Dinâmicos e indique (resenhe) os passos principais para a sua solução.
ii) Cite um problema em aberto que você tem conhecimento sobre os sistemas Morse-Smale. Justifique sua escolha.

OBS: Resolver/comentar todos os problemas propostos. Caso não conseguir resolver algum item comente a dificuldade encontrada e não suplantada.