Universidade Federal de Goiás

Instituto de Matemática e Estatística

Goiânia, 20 de janeiro de 2020.

Disciplina: Introdução à Análise Funcional
Prof$^{\mathrm{o}}$ Otávio Marçal Leandro Gomide

Lista de Exercícios 1

1) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Verifique que a aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma função distância e portanto (X, d) é um espaço métrico.

2) Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas equivalentes no espaço vetorial X. Mostre que as duas normas geram a mesma topologia em X e que os espaços normados $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ possuem as mesmas sequências de Cauchy.

3) Denote por $C^k[a, b]$ o conjunto das funções de classe C^k, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, com a norma

$$\|f\|_{C^k} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| + \cdots + \sup_{t\in[a,b]} |f^{(k)}(t)|.$$

Mostre que $(C^k[a, b], \|\cdot\|_{C^k})$ é um espaço de Banach.

4) Mostre que a norma p, $\|\cdot\|_p$, é uma norma em ℓ_p.

5) Dados $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le q < \infty$ e $x \in \mathbb{F}^n$, mostre que:

   i) $\|x\|_q \le \|x\|_p$;
   ii) $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$;
   iii) $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

6) Seja $(a_{j,k})_{j,k=1}^{\infty}$ uma matriz infinita tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{j,k}|^2 < \infty.$$

Se a sequência $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ pertence a ℓ_2, então mostre que a sequência $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ dada por

$$y_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}x_k,$$

também pertence a ℓ_2.

7) Mostre que:

   i) $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach;

   ii) c e c_0 são subespaços fechados de $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, e portanto espaços de Banach com respeito a norma $\|\cdot\|_\infty$;

   iii) $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço normado que não é completo.

8) Seja $\xi_n = (\xi_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} = (1/n, 1/n, \cdots, 1/n, 0, 0, \cdots)$ a sequência onde as n primeiras entradas são $1/n$. Mostre que:

   i) $\xi_n \in \ell_1$;

   ii) $\xi_n \to 0$ uniformemente, i.e., dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $|\xi_{n,j} - 0| < \varepsilon$, para cada $n, j \geq N_0$;

   iii) ξ_n não converge em ℓ_1.

9) Mostre que a norma p, $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p$ para funções mensuráveis é uma semi-norma em $\mathcal{L}_p$. O que faz com que $\|\cdot\|_p$ não seja uma norma em $\mathcal{L}_p$?

10) Mostre que $(L_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço normado. **Dica:** Faça separadamente os casos $1 \leq p < \infty$ e $p = \infty$.

11) Prove que $B(X)$ é um espaço de Banach, onde X é um conjunto não-vazio. Além disso, mostre que o conjunto $C[a, b]$ formado pelas funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é um subespaço fechado de $B([a, b])$, e portanto é um espaço de Banach.

12) Mostre que um espaço métrico isométrico a um espaço métrico completo também é completo.

13) Mostre que

   (a) $\|\cdot\|_p$ é uma norma em c_{00}, para todo $1 \leq p \leq \infty$;

   (b) $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ não é completo, para todo $1 \leq p \leq \infty$;

   (c) Se $1 \leq p < \infty$, o completamento de $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ é isométrico a ℓ_p. **Dica:** Mostre que $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ é denso em ℓ_p.

   (d) o completamento de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ é isométrico a c_0. **Dica:** Mostre que c_{00} é denso em c_0.

14) Seja $P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios da forma $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{F}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

   (a) $\|P\| = \sum_{j=1}^{n} |a_j|$ é uma norma em $P(\mathbb{R})$;

   (b) $(P(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ não é completo;

   (c) $(P(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, com essa norma, é isométrico a $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$;

   (d) Prove que o completamento de $P(\mathbb{R})$ é isométrico a ℓ_1. **Dica:** Use o exercício anterior.

15) Seja $P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios da forma $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{F}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

(a) $\|P\| = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$ é uma norma em $P(\mathbb{R})$;

(b) $P(\mathbb{R})$ com essa norma não é completo;

(c) $P(\mathbb{R})$, com essa norma, é isométrico a $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$;

(d) Prove que o completamento de $P(\mathbb{R})$ é isométrico a c_0.

16) Seja $P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios da forma $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{F}$ e $n \in \mathbb{N}$. Dados $a < b$ em $\mathbb{R}$, mostre que

(a) $\|P\| = \sup\{|P(x)|; a \leq x \leq b\}$ é uma norma em $P(\mathbb{R})$;

(b) $P(\mathbb{R})$ com essa norma não é completo;

(c) o completamento de $P(\mathbb{R})$ com essa norma é isométrico a $C[a, b]$. **Dica:** Use o Teorema de Stone-Weierstrass.

17) Mostre que o espaço $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ tem dimensão infinita. **Dica:** Use o exercício 8.

18) Mostre que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$ e que não é um espaço separável para $p = \infty$.

19) Mostre que c_{00} e c_0 são espaços separáveis. **Dica:** Encontre uma base de Schauder para esses espaços.

20) Seja X um espaço normado e $E \subset X$. Mostre que E é separável, se e somente se, $\operatorname{span}\{E\} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n;\ \alpha_n \in \mathbb{F}, x_n \in E,\ n \in \mathbb{N}\}$ é separável. **Obs.:** A métrica considerada em E e em $\operatorname{span}\{E\}$ é a métrica induzida pela norma de X.

21) Seja X um espaço normado. Mostre que:

(a) Se $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de operadores em $\mathcal{B}(X)$ tal que $T_n \to T$ em $\mathcal{B}(X)$, e $x_n \to x$ em X, então $T_n x_n \to Tx$ em X;

(b) Se X é um espaço de Banach, dados $T \in \mathcal{B}(X)$ e $t \in \mathbb{F}$, então o operador e^{tT} definido pela série

$$e^{tT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n T^n}{n!},$$

está bem definido e $e^{tT} \in \mathcal{B}(X)$. Além disso $\|e^{tT}\| \leq e^{|t|\|T\|}$;

(c) Se X é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{B}(X)$ é tal que $\|T\| < 1$, então o operador $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ é um elemento de $\mathcal{B}(X)$ e $S = (1 - T)^{-1}$.

22) Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach. Mostre que, se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, então existe uma única extensão $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(\widetilde{X}, Y)$, onde $\widetilde{X}$ é o completamento de X e $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

23) Mostre que o operador $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ dado por

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

é um operador linear limitado.

24) Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere o funcional $f_a : C[-1,1] \to \mathbb{F}$ dado por

$$f_a(g) = \int_{-1}^{1} g(t)dt + ag(0).$$

Mostre que $f_a \in C[-1,1]^*$ e que $\|f_a\| = 2 + a$.

25) O dual algébrico de um espaço normado X é o conjunto de todos os funcionais lineares $f : X \to \mathbb{F}$, e é denotado por X_A^*. Mostre que, se $\dim X < \infty$, então o espaço dual $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{F})$ coincide com o dual algébrico X_A^*.

26) Mostre que $f : c_{00} \to \mathbb{F}$ definida por

$$f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n$$

é um funcional linear não-limitado. No exercício (25), é possível eliminar a hipótese de que $\dim X < \infty$ para concluir que $X^* = X_A^*$?. **Obs.:** Note que $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é uma soma finita pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$.