Universidade Federal de Goiás

Instituto de Matemática e Estatística

Olimpíada Interna de Cálculo do IME

## Caderno de Questões

Data: ........................ Nível: .................... Telefone: ....................

Nome: ..................................................................................................

..........................................................................................................

Curso: ..................................................................................

---

*A comissão organizadora da olimpíada interna de cálculo do Instituto de Matemática e Estatística agradece sua participação e conta com sua ajuda em contagiar outros com o entusiasmo pela matemática. Divirta-se!*

---

**Instruções:**

i) A prova terá inicio às 14h, após autorização do fiscal, e terá duração máxima de 3 horas.

ii) Só será permitida a saída do local de provas após as 15h. A folha de questões DEVERÁ SER DEVOLVIDA junto com o caderno de respostas.

iii) A prova pode ser feita a lápis e/ou caneta. É proibido o uso de calculadora e de aparelhos eletrônicos, que devem permanecer desligados.

iv) As páginas deste caderno de respostas já vem marcadas com o número da questão que deve ser resolvida em cada uma das páginas. Por gentileza, confira. Cada uma das **cinco** questões da prova deve ser resolvida em sua página específica.

v) Todas as respostas **devem ser justificadas** por argumentos matemáticos adequados. Um resultado final, mesmo correto, não receberá pontuação se não estiver acompanhado dos cálculos e argumentos matemáticos que permitam compreender como foi obtido.

**Problema 1:** Calcule o valor do limite, caso seja possível. Se não for possível, justificar a resposta do porquê.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(3x)}-\sqrt{1-\operatorname{sen}(3x)}}{x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right]$.

Nota: Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.

**Problema 2:** Em modelagem estatística é muito comum o interesse em descrever o crescimento de um determinado elemento ao longo do tempo, por exemplo, o crescimento de árvores, o crescimento de indivíduos ou o crescimento de colônias de bactérias. Para atingir tal objetivo, o uso de modelos não lineares é corrente e com resultados satisfatórios, sobretudo por acomodarem informações sobre o processo de crescimento, o que os diferencia dos modelos polinomais. Dentre os modelos disponíveis na literatura, tem-se o modelo de Gompertz, cuja a curva tem a forma de uma sigmóide (forma de S) e que pode ser parametrizado por,

$$y = \alpha_1 \exp\left\{ - \exp\left\{ -\alpha_3 \left( x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \right\},$$

em que $y \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$ são constantes reais e positivas a serem determinadas durante o processo de análise estatística. Considere, agora, que o modelo apresentado anteriormente seja utilizado para descrever o crescimento do volume sólido com casca (em $m^3/ha$) de árvores de eucalipto - variável $y$ - em função da idade (em anos) destas árvores - variável $x$. Utilizando a teoria de Cálculo Diferencial de função real de uma variável real, pede-se:

1. Determine o maior valor que o volume com casca, das árvores de eucalipto, se aproxima.(apresente todos os cálculos e interprete);

2. Determine o instante em que o crescimento do volume com casca das árvores de eucalipto deixa de ser acelerado e torna-se mais lento. (apresente todos os cálculos e interprete).

Nota: $\exp(x) = e^x$. Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.

**Problema 3:** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - x - \dfrac{3}{2}$. Responda aos itens a seguir justificando os argumentos.

(a) Determine os pontos críticos de $f$.

(b) Determine os intervalos onde $f$ é estritamente crescente e estritamente decrescente.

(c) Determine quantas soluções reais possui a equação $e^x = x + \dfrac{3}{2}$.

Nota:Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.

**Problema 4:** Calcule a integral dada

(a) $\displaystyle\int \frac{1-3x}{3+2x}dx;$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\left(1+x\right)^2}dx.$

Nota:Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta.

**Problema 5:** Obtenha o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno da reta $x = 1$ de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Nota:Toda a solução deve conter os cálculos intermediários para se obter a resposta.