



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Olimpíada Interna de Cálculo do IME



Caderno de Questões

Data: Nível: Telefone:

Nome:

Curso:

A comissão organizadora da olimpíada interna de cálculo do Instituto de Matemática e Estatística agradece sua participação e conta com sua ajuda em contagiar outros com o entusiasmo pela matemática. Divirta-se!

Instruções:

- i) A prova terá início às 14h, após autorização do fiscal, e terá duração máxima de 3 horas.
- ii) Só será permitida a saída do local de provas após as 15h. A folha de questões DEVERÁ SER DEVOLVIDA junto com o caderno de respostas.
- iii) A prova pode ser feita a lápis e/ou caneta. É proibido o uso de calculadora e de aparelhos eletrônicos, que devem permanecer desligados.
- iv) As páginas deste caderno de respostas já vem marcadas com o número da questão que deve ser resolvida em cada uma das páginas. Por gentileza, confira. Cada uma das **quatro** questões da prova deve ser resolvida em sua página específica.
- v) Todas as respostas **devem ser justificadas** por argumentos matemáticos adequados. Um resultado final, mesmo correto, não receberá pontuação se não estiver acompanhado dos cálculos e argumentos matemáticos que permitam compreender como foi obtido.

Problema 1: Calcule o valor do limite, caso seja possível. Se não for possível, justificar a resposta do porquê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(3x)} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}(3x)}}{x}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right]$.

Nota: Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.

Problema 2: Considere a função $y = y(x)$ dada implicitamente pela equação

$$x^2 + y^2 + e^{xy} = 5.$$

- a) Calcule $\frac{dy}{dx}$.
- b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y = y(x)$ no ponto $(2, 0)$.
- c) Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ em $(2, 0)$ e classifique o tipo de concavidade do gráfico de $y = y(x)$ neste ponto.

Nota: Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.

Problema 3: Em modelagem estatística é muito comum o interesse em descrever o crescimento de um determinado elemento ao longo do tempo, por exemplo, o crescimento de árvores, o crescimento de indivíduos ou o crescimento de colônias de bactérias. Para atingir tal objetivo, o uso de modelos não lineares é corrente e com resultados satisfatórios, sobretudo por acomodarem informações sobre o processo de crescimento, o que os diferencia dos modelos polinomiais. Dentre os modelos disponíveis na literatura, tem-se o modelo de Gompertz, cuja a curva tem a forma de uma sigmóide (forma de S) e que pode ser parametrizado por,

$$y = \alpha_1 \exp \left\{ - \exp \left\{ -\alpha_3 \left(x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \right\},$$

em que $y \in \mathbb{R}^+$ e α_1 , α_2 e α_3 são constantes reais e positivas a serem determinadas durante o processo de análise estatística. Considere, agora, que o modelo apresentado anteriormente seja utilizado para descrever o crescimento do volume sólido com casca (em m^3/ha) de árvores de eucalipto - variável y - em função da idade (em anos) destas árvores - variável x . Utilizando a teoria de Cálculo Diferencial de função real de uma variável real, pede-se:

1. Determine o maior valor que o volume com casca, das árvores de eucalipto, se aproxima. (apresente todos os cálculos e interprete);
2. Determine o instante em que o crescimento do volume com casca das árvores de eucalipto deixa de ser acelerado e torna-se mais lento. (apresente todos os cálculos e interprete).

Nota: $\exp(x) = e^x$. Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.

Problema 4: Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - x - \frac{3}{2}$. Responda aos itens a seguir justificando os argumentos.

- (a) Determine os pontos críticos de f .
- (b) Determine os intervalos onde f é estritamente crescente e estritamente decrescente.
- (c) Determine quantas soluções reais possui a equação $e^x = x + \frac{3}{2}$.

Nota: Todas as soluções devem conter os cálculos intermediários para se obter a resposta e caso algum resultado seja utilizado é obrigatório dizer qual e verificar as hipóteses do mesmo.