LISTA MONITORIA - Limites e Continuidade

Verifique se os limites existem:

1. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}$
4. $\lim_{x\to 1^-} \ln(x)$
5. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$
7. $\lim_{x\to 0^-} (x+2)\cdot\frac{|x|}{x}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$
9. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$
10. $\lim_{x\to 0}(1+2x+3x^2)^{1/x}$
11. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$
13. $\lim_{x\to 0^-} \ln(-x)$
14. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
15. $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \ge 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$
16. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $p = 0$

LEMBRE: para o limite existir, os limites laterais sejam iguais).

DICA: Ler e compreender (tente fazer) as exemplificações do livro ajuda muito a sanar dúvidas. Exemplos:

Sobre limites

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUÇÃO O Teorema 7 nos diz que a função $y = \operatorname{sen} x$ é contínua. A função no denominador, $y = 2 + \cos x$, é a soma de duas funções contínuas e, portanto, é contínua. Observe que esta função nunca é 0, pois $\cos x \geqslant -1$ para todo x e assim $2 + \cos x > 0$ em toda parte. Logo, a razão

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

é sempre contínua. Portanto, pela definição de função contínua,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$

Outra forma de combinar as funções contínuas f e g para obter novas funções contínuas é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma consequência do seguinte teorema.

Sobre limites

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUÇÃO Se deixarmos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Assim, por $\boxed{6}$,

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^{t} = 0$$

(Veja o Exercício 75.)

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Quando x cresce, os valores de $\operatorname{sen} x$ oscilam entre 1 e -1 um número infinito de vezes; logo, eles não tendem a qualquer número definido. Portanto, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ não existe.

Sobre limites laterais (stewart)

2 Definição Escrevemos

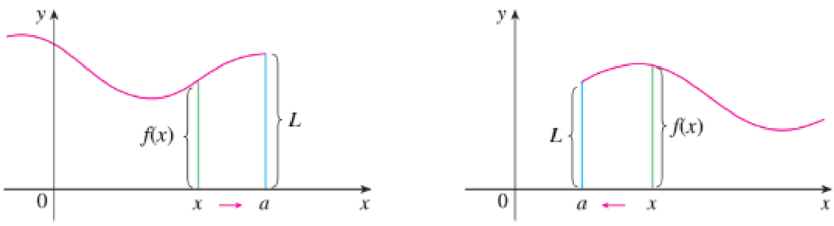
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de **$f(x)$ quando x tende a a** [ou o **limite d e$f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Perceba que a Definição 2 difere da Definição 1 somente por necessitarmos que x seja menor que a. De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a, obtemos "o **limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a** é igual a L" e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

(guidorizzi)

EXEMPLO 1. Calcule $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, sendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Solução

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2 \text{ e } \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

EXEMPLO 2. Calcule $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

Solução

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

EXEMPLO 3. $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existe? Por quê?

Solução

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

Como $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^-}$, segue que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Favor, entrar em contato com a professora MARINA TUYAKO MIZUKOSHI (tuyako@ufg.br) para tirar dúvidas sobre a monitoria.