

LISTA MONITORIA - derivadas

(Veja fim da lista para exemplos e conceitos.)

1. Calcule $f'(x)$ usando derivada por definição.

a. $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$, $a \neq 1$

b. $f(x) = (x + 3)^2$

2. Calcule as derivadas laterais das seguintes funções e verifique se são deriváveis no ponto dado:

a. $f(x) = |x - 2|$, $x = 2$.

b. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x = 1$.

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq -1 \\ 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$, $x = -1$.

d. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$, $x = 1$.

3. Usando regras de derivação, calcule $f'(x)$ para:

a. $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4 - \ln x$

b. $f(x) = \sin(x)^{\cos(x)}$

c. $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

d. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

4. Calcule, por regra de derivação, $f'(x)$ para:

a. $f(x) = 5x^4 + bx^3 + cx^2 + k$
sendo b, c e k constantes

b. $f(x) = x \cot(x)$

c. $f(x) = 3 \cos(x) + 5 \sec(x)$

5. Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

Determine se f é derivável em $x = 0$.

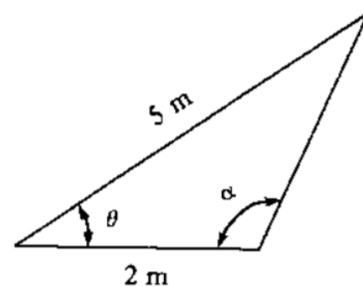
6. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Verifique se f é derivável em $x = 1$. Esboce o gráfico da função f .

7. VEJA: Exercícios de aplicações (Guidorizzi Vol.1 5ª Edição pág 210):

- (a) O raio r e a altura h de um cilindro circular reto estão variando de modo a manter constante o volume V . Num determinado instante $h = 3$ cm e $r = 1$ cm, e, neste instante, a altura está variando a uma taxa de 0,2 cm/s. A que taxa estará variando o raio neste instante?
- (b) Num determinado instante $\theta = \frac{\pi}{3}$ e está variando, neste instante, a uma taxa de 0,01 rad/s (veja figura). A que taxa estará variando o ângulo α neste instante?



2 Definição Escrevemos

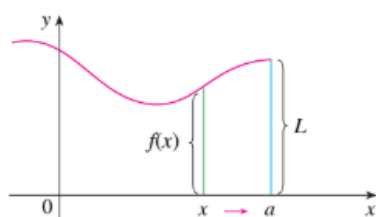
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ **quando x tende a a** [ou o **limite d ef (x) quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , para x suficientemente próximo de a e x menor que a .

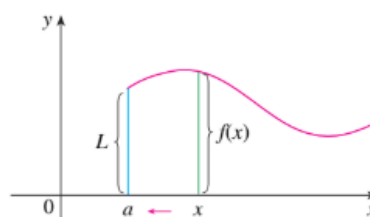
Perceba que a Definição 2 difere da Definição 1 somente por necessitarmos que x seja menor que a . De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a , obtemos “o **limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a** é igual a L ” e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo “ $x \rightarrow a^+$ ” indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.



(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

1

Conceito de derivadas laterais:

A derivada lateral à direita de f no ponto a é definida por

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A derivada lateral à esquerda de f no ponto a é definida por

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A função f é derivável em a se, e somente se, as derivadas laterais existem e são iguais, isto é,

$$f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a).$$

EXEMPLO 2. Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto

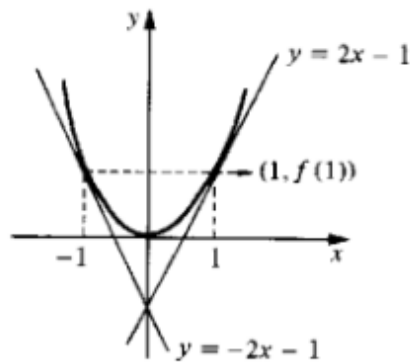
a) $(1, f(1))$.

Solução

a) A equação da reta tangente em $(1, f(1))$ é

$$\textcircled{1} \quad y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 = 1 \\ f'(p) = 2p \text{ (Exemplo 1, item b)} \Rightarrow f'(1) = 2 \end{cases}$$



substituindo em $\textcircled{1}$ vem

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1.$$

Assim $y = 2x - 1$ é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$, no ponto $(1, f(1))$.

EXEMPLO 4. O raio r de uma esfera está variando, com o tempo, a uma taxa constante de 5 (m/s). Com que taxa estará variando o volume da esfera no instante em que $r = 2$ (m)?

Solução

Seja t_0 o instante em que $r = 2$. Queremos calcular $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=t_0}$. Sabemos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
Pela regra da cadeia

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}.$$

Como $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ e $\frac{dr}{dt} = 5$, resulta

$$\frac{dV}{dt} = 20\pi r^2.$$

Para $t = t_0$, $r = 2$; logo, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=t_0} = 80\pi$ (m³/s). No instante em que $r = 2$, o volume estará variando a uma taxa de 80π (m³/s). ■

EXEMPLO 7. Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$.

Solução

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

daí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe, ou seja, f não é derivável em 0. Como $f'(0)$ não existe, o gráfico de $f(x) = |x|$ não admite reta tangente em $(0, f(0))$.

Favor, entrar em contato com a professora MARINA TUYAKO MIZUKOSHI (tuyako@ufg.br) para tirar dúvidas sobre a monitoria.