



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

IDEIA DE SOLUÇÃO PARA AS QUESTÕES DA PROVA DA OLIMPIÁDA

Goiânia, 03 de Outubro de 2025

Problema 1 - Nível 1 e Nível 2

Ideia da Solução:

- a) Nesse item basta simplificar a expressão e depois aplicar em $x = 1$. O Resultado é $\frac{1}{4}$.
- b) Basta multiplicar e dividir por $\sqrt{1 + \sin(3x)} + \sqrt{1 + \sin(3x)}$ e depois aplicar o primeiro limite fundamental. O Resultado é 3.
- c) Se $f(x) = x \ln(x) - x + 1$ e $g(x) = (x - 1) \ln(x)$, então verifique que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = 0.$$

E desde que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ existe e definido.}$$

Então aplique a regra de L'Hospital e o resultado é $\frac{1}{2}$. os limites de f , f' , g e g' em $x \rightarrow 1$

Problema 2 - Nível 1

Ideia da Solução:

- (a) Derivada implícita.

$$\frac{d}{dx} [x^2 + y^2 + e^{xy}] = 2x + 2y y' + e^{xy}(x y' + y) = 0.$$

isole y'

$$(2y + x e^{xy}) y' + (2x + y e^{xy}) = 0 \implies y' = -\frac{2x + y e^{xy}}{2y + x e^{xy}}, \quad 2y + x e^{xy} \neq 0.$$

- (b) Reta tangente em $(2, 0)$. Avalie y' em $(2, 0)$ usando o item (a). Note que $e^{xy}|_{(2,0)} = e^0 = 1$,

$$y'(2, 0) = -\frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 2 \cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Logo a equação da reta tangente é dada por

$$y - 0 = -2(x - 2) \implies y = -2x + 4.$$

- (c) Segunda derivada e concavidade. Derive novamente a igualdade do item (a) $2x + 2y y' + e^{xy}(x y' + y) = 0$ e agrupe os termos em y'' .

$$0 = 2 + 2((y')^2 + y y'') + e^{xy}(x y' + y)^2 + e^{xy}(2y' + x y'').$$

Substitua $(x, y) = (2, 0)$ e $y'(2, 0) = -2$,

$$y''(2, 0) = -\frac{2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot (2 \cdot -2)}{2} = -\frac{22}{2} = -11.$$

Conclusão: $y''(2, 0) < 0$, portanto o gráfico é **côncavo para baixo** nesse ponto.

Problema 3 - Nível 1; Problema 2 - Nível 2

Ideia da Solução:

- (a) Considerando o modelo de Gompertz descrito anteriormente, com domínio R^+ , tem-se que,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha_1 \exp \left\{ -\exp \left\{ -\alpha_3 \left(x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \right\} \right) = \alpha_1.$$

Assim, observa-se que o modelo de Gompertz apresenta assíntota horizontal, a reta $y = \alpha_1$. Deste modo, pode-se concluir que o crescimento máximo esperado do volume com casca das árvores de eucalipto corresponde ao valor assumido por α_1 , a ser determinado na análise estatística.

- (a) Retornando ao modelo de Gompertz, a primeira derivada da função é dada por,

$$y' = \alpha_1 \alpha_3 \exp \left\{ -\alpha_3 \left(x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \exp \left\{ -\exp \left\{ -\alpha_3 \left(x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \right\}$$

que pode ser simplificada para,

$$y' = \alpha_1 \alpha_3 \exp \{ -\alpha_3 x + \alpha_2 - \exp \{ -\alpha_3 x + \alpha_2 \} \}.$$

E assim, pode-se verificar que se a derivada é positiva $\forall x \in R^+$, o modelo de Gompertz define uma função crescente. A derivada de segunda ordem do modelo de Gompertz é dada por,

$$y'' = -\alpha_1 \alpha_3^2 \exp \left\{ -\alpha_3 \left(x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \exp \left\{ -\exp \left\{ -\alpha_3 \left(x - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \right\} +$$

$$+\alpha_1\alpha_3^2\left(\exp\left\{-\alpha_3\left(x-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)\right\}\right)^2\exp\left\{-\exp\left\{-\alpha_3\left(x-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)\right\}\right\}$$

que pode ser simplificada para,

$$y'' = -\alpha_1\alpha_3^2(\exp\{-\alpha_3x + \alpha_2 - \exp\{-\alpha_3x + \alpha_2\}\} - \exp\{-2\alpha_3x + 2\alpha_2 - \exp\{-\alpha_3x + \alpha_2\}\}).$$

Assim, igualando a segunda derivada à zero, tem-se,

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}.$$

Desta forma, o ponto de inflexão do modelo de Gompertz é expresso por $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, o que implica que o crescimento é rápido até o valor de x atingir $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ e depois existe uma mudança no crescimento, ele se torna menos veloz.

Problema 4 - Nível 1; Problema 3 - Nível 2

Ideia da Solução:

1. Para encontrar os pontos críticos, devemos calcular a primeira derivada da função, $f'(x)$, e igualá-la a zero para encontrar o(s) valor(es) de x que anulam a derivada.
2. Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento, é necessário analisar o sinal da primeira derivada, $f'(x)$. Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, a função é crescente. Se $f'(x) < 0$, a função é decrescente.
3. A equação pode ser reescrita na forma $f(x) = 0$. Para encontrar o número de soluções, podemos usar a análise de crescimento do item anterior. O ponto crítico nos dará um valor de mínimo ou máximo. Avalie a função nesse ponto e nos limites ao infinito ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) para entender o comportamento da função e determinar quantas vezes ela cruza o eixo x .

Problema 4 - Nível 2

Ideia da Solução:

$$(a) \int \frac{1-3x}{3+2x} dx$$

Fazendo, $u = 3 + 2x$, obtem-se $x = \frac{u-3}{2}$ e $\frac{du}{2} = dx$. Logo substituindo na integral obtem resposta

$$\int \frac{1-3x}{3+2x} dx = -32x + 114 \ln |3+2x| + C$$

$$(b) \int \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx.$$

- A integral apresentada deve ser resolvida em duas etapas principais. A primeira etapa é usar a integração por partes.
- A fórmula de integração por partes é $\int u dv = uv - \int v du$. Escolha $u = \ln(x)$ e $dv = \frac{1}{(1+x)^2} dx$.
- Calcule du e v e aplique a fórmula. Isso resultará em uma nova integral.
- A nova integral será da forma $\int \frac{1}{x(1+x)} dx$. Para resolvê-la, utilize o método de frações parciais para decompor o integrando em duas frações mais simples.
- Após resolver ambas as partes da integral, combine os resultados para obter a solução final.

Problema 5 - Nível 2

Ideia da Solução:

Seja R a região delimitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. Primeiro, encontre as interseções: $x^2 = \sqrt{x} \iff x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$ (logo $y = 0$ ou $y = 1$).

Raios em relação a $x = 1$:

$$R(y) = 1 - y^2$$

$$r(x) = 1 - \sqrt{y}$$

$$V = \pi \int_0^1 (R(y) - r(y)) dy.$$