

Processo Seletivo, Monitoria

Data:	21/03/2014
Unidade Acadêmica:	Instituto de Matemática e Estatística
Curso:	Matemática
Disciplina:	Equações Diferenciais Ordinárias

1. 2 pts. Para funções, $p(t)$ e $q(t)$, contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, considere a equação diferencial de 1ª ordem:

$$(*) : \frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t), \quad t \in I,$$

Denote com $P(t)$ a primitiva: $P(t) = \int p(t)dt$.

- (a) Demostre que $(*)$ é equivalente à:

$$x(t) = e^{-P(t)} \left[\int e^{P(t)} q(t) dt + c \right], \quad t \in I,$$

Sugestão: Multiplique $(*)$ por $e^{P(t)}$.

- (b) Resolva a equação diferencial:

$$t \frac{dx}{dt} - 2x = t^5, \quad t > 0$$

2. 2 pts. Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

- (a)

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = e^{-t} \cos t,$$

- (b)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. 2 pts. Defina, desenhe e discorde sobre:

- (a) Existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

- (b) Existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad \left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Em ambos os casos a função f e todas suas derivadas parciais são contínuas no conjunto aberto, Ω .

4. 2 pts. Para funções, p_1 e p_0 , contínuas num intervalo, $I \subset \mathbb{R}$, consideramos a equação diferencial homogênea:

$$(0) : \frac{d^2 x}{dt^2} + p_1(t) \frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0, \quad t \in I.$$

Vale o seguinte resultado: Se $\varphi_1(t)$ é uma solução da equação homogênea, uma solução da equação homogênea linearmente independente com $\varphi_1(t)$, é dado por:

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-\int p_1(t) dt} dt$$

- (a) Encontre uma solução da forma $\varphi_1(t) = at + b$, para a equação diferencial:

$$(1 + t^2) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} - 2x = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

(b) Demostre, que uma solução linearmente independente com $\varphi_1(t)$ é dado por:

$$\varphi_2(t) = -1 - t \arctan t,$$

5. 2 pts. Com as denotações usadas no item anterior, considere-se a equação inhomogênea¹:

$$(I) : \frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t) \frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t), t \in I,$$

Vale o resultado: se $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são soluções da equação homogênea, (0), uma solução particular da equação (I), é dado por:

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t) \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)} dt - \varphi_1(t) \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)} dt,$$

aqui, $W(t)$ é o Wronskiano:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

(a) Demonstrar que $\varphi_1(t) = e^t$ é solução da equação homogênea:

$$t \frac{d^2x}{dt^2} - 2(t+1) \frac{dx}{dt} + (t+2)x = 0,$$

e encontrar uma solução, $\varphi_2(t)$, linearmente independente com $\varphi_1(t)$.

(b) Demostre, que uma solução particular da (I) é dado por:

$$\varphi_0(t) = (t^2 - 2t + 2)e^{2t},$$

e encontrar a solução completa da (I).

¹ não homogênea