

# XIII Encontro Nacional de PET's da Matemática

Anais



**De 20 a 22 de Outubro de 2022**  
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



**ANAIS**  
XIII Encontro Nacional de PET's da matemática  
(XIII ENAPETMAT)

**REALIZAÇÃO:**  
**Programa de Educação Tutorial da Licenciatura em Matemática da Universidade**  
**Federal de Goiás**  
**(PETMAT - UFG)**

**Goiânia**  
**2022**



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO.....</b>	<b>5</b>
<b>ORGANIZAÇÃO.....</b>	<b>6</b>
<b>PROGRAMAÇÃO GERAL DO EVENTO.....</b>	<b>7</b>
<b>TRABALHOS APRESENTADOS.....</b>	<b>9</b>
<b>Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem.....</b>	<b>10</b>
<b>Jogos Matemáticos – Torre de Hanoi.....</b>	<b>17</b>
<b>Simetria na Música.....</b>	<b>20</b>
<b>PETCast Matemática.....</b>	<b>22</b>
<b>Gauss Pré-vestibular.....</b>	<b>27</b>
<b>PET Matemática UFSM: Relatando Experiências Extensionistas no Âmbito do Ensino no Retorno Presencial.....</b>	<b>31</b>



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Encontro Nacional de PET's da Matemática (13. :  
2022 : Goiânia, GO)  
Anais XIII ENAPETMAT [livro eletrônico] /  
organização Deuzivan Alves de Macedo Silva,  
Gabriel Afonso de Oliveira, Wellington Lima  
Cedro. -- 1. ed. -- Goiânia, GO : Ed. dos Autores,  
2022.

PDF.

Vários autores.

Bibliografia.

ISBN 978-65-00-57663-4

1. Educação 2. Matemática - Estudo e ensino  
I. Silva, Deuzivan Alves de Macedo. II. Oliveira,  
Gabriel Afonso de. III. Cedro, Wellington Lima.  
IV. Título.

22-137234

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

**Anais organizado por:**

Deuzivan Alves de Macedo Silva – PETMAT/UFG

Gabriel Afonso de Oliveira - PETMAT/UFG

Wellington Lima Cedro – IME/UFG



## APRESENTAÇÃO

A organização de um evento científico é marcada quase sempre por uma mistura de emoções e sentimentos, ao mesmo tempo que existe toda a ansiedade relacionada a concretização exitosa do planejamento do evento, também temos o prazer em planejar as melhores atividades para brindar os participantes com um evento significativo.

Envoltos nesse amalgama de sentimento o grupo PETMAT (PET da licenciatura em matemática) da UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG) se propôs a sediar a décima terceira edição do Encontro Nacional de PETs Matemática, o XIII ENAPETMAT.

Para dar mais um pouco de tempero neste caldeirão de emoções no ano de 2022, o PETMAT/UFG está completando 15 anos de existência. Assim foi na esteira da comemoração desta importante data para o grupo que organizamos este evento científico.

Recordamos que o ENAPETMAT surgiu em 2009, quando o PETMAT UFOP propôs organizar o encontro com o objetivo de reunir os PETMAT existentes e promover a integração dos grupos, a divulgação dos trabalhos desenvolvidos e a troca de experiências entre os graduandos e pesquisadores que atuam junto aos grupos PET de Matemática, promovendo a reflexão acerca dos projetos desenvolvidos pelos diversos PETMATs.

Assim, desde o primeiro encontro, que ocorreu nos dias 20 e 21 de novembro de 2009 e contou com a participação de 5 grupos e 1 palestrante convidado, já ocorreram outras doze edições do evento que foram organizadas por grupos PET's sediados em diversas instituições de ensino superior espalhadas pelo país.

O XIII ENAPETMAT foi um evento remoto e contou 156 inscritos. A programação abrangeu palestras, mesa-redonda, rodas de conversa, diversas oficinas e a apresentação de trabalhos científicos.

Nesse volume dos anais do evento você terá acesso aos trabalhos completos apresentados no evento.

Esperamos que a produção aqui apresentada possa avivar a memória do que se viu, promover discussões e o aprofundamento teórico e prático àqueles que se dedicam ao PET's, pois somente com o compromisso coletivo podemos garantir a permanência deste programa vital.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## **ORGANIZAÇÃO DO EVENTO**

### **Coordenação geral do evento:**

Dr. Wellington Lima Cedro – IME/UFG

### **Comissão organizadora:**

Ana Clara Emanuele Rezende – PETMAT/UFG

Deuzivan Alves de Macedo Silva – PETMAT/UFG

Gabriel Afonso de Oliveira – PETMAT/UFG

Gabriella Rosa Pereira – PETMAT/UFG

Giovanna Chaves dos Santos – PETMAT/UFG

Giovanna Lima Amancio Moraes – PETMAT/UFG

Heloisa Yadein Rodrigues – PETMAT/UFG

João Pedro Borges de Souza – PETMAT/UFG

João Pedro Caldas Peixoto – PETMAT/UFG

Marcos Henrique Alves Chaves – PETMAT/UFG

Maria Eduarda Viana Batista Camargo – PETMAT/UFG

Rafael Almeida Cândido – PETMAT/UFG

### **Apoio:**

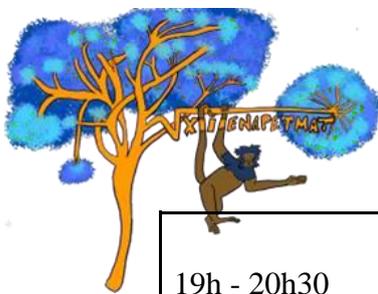
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
GOIÁS



## PROGRAMAÇÃO GERAL DO EVENTO

### Quinta 20/10

HORÁRIO	ATIVIDADE	Palestrantes/Organizadores
09h30 - 10h	Abertura	Prof. Dr. Wellington de Lima Cedro (UFG) e Marcos Henrique Alves Chaves (PETMAT - UFG)
10h - 12h	Mesa Redonda: Mulheres na Matemática: Insurgências necessárias	Profa. Dra. Janice Pereira Lopes (UFG) Profa. Dra. Ana Paula Chaves (UFG) Profa. Dra. Eliade Ferreira Lima (UNIPAMPA) Profa. Dra. Maria Cristina Elyote (UNEB)
13h30 - 17h30	Apresentação de trabalhos assíncronos: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem.</li> <li>• GAUSS PRÉ-VESTIBULAR</li> <li>• Jogos Matemáticos - Torre de Hanói.</li> <li>• PET Matemática UFSM: relatando experiências extensionistas no âmbito do ensino no retorno presencial.</li> <li>• PETcast Matemática.</li> <li>• Simetria na Música.</li> </ul>	
19h - 20h30	Roda de Conversa 1 - Evasão nos cursos de matemática	Heloisa Yaden Rodrigues (PETMAT- UFG), Gabriel Afonso de Oliveira (PETMAT-UFG), Giovanna Lima Amancio Moraes PETMAT-UFG) Rafael Almeida Cândido (PETMAT-UFG)
19h - 20h30	Roda de Conversa 2 - Saúde Mental dos Estudantes	Marcos Henrique Alves Chaves (PETMAT-UFG), Ana Clara Emanuele Rezende (PETMAT- UFG) João Pedro Borges de Sousa (PETMAT- UFG) Giovanna Chaves dos Santos (PETMAT- UFG)



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



19h - 20h30	Roda de Conversa 3 – Perspectivas Formativas no PETMAT	Gabriella Rosa Pereira (PETMAT-UFG), Deuzivan Alves de Macedo Silva (PETMAT-UFG) Maria Eduarda Viana Batista Camargo (PETMAT-UFG) João Pedro Caldas Peixoto (PETMAT- UFG)
19h - 20h30	Roda de Conversa 4 - Encontro com Tutores	Prof. Dr. Wellington de Lima Cedro (UFG)
20h30 -22h	Gincana	João Pedro Borges de Sousa (PETMAT- UFG)

**Sexta 21/10**

<b>HORÁRIO</b>	<b>ATIVIDADE</b>	<b>RESPONSÁVEL</b>
09h - 12h	Oficinas - Cont. de Est.	Grupo Faz de Conto
09h - 12h	Oficinas - Geogebra	Profa. Dra. Rosane Gomes (UFG)
09h - 12h	Oficinas - Trello	PET Engenharia de Alimentos (UFG)
13h30h -17h30	Oficinas - Criptografia	Prof. Dr. Mario Jose (UFG)
13h30h -17h30	Oficinas - RPG	Prof. Bruno Diniz Faria Rezende (UFG)
13h30h -17h30	Oficinas - Cubo Magico	PETMAT IBILCE (UNESP)

**Sábado 22/10**

<b>HORÁRIO</b>	<b>ATIVIDADE</b>	<b>RESPONSÁVEL</b>
09h00 - 10h15	Palestra 1 - O movimento lógico-histórico na formação de professores de Matemática da Educação Básica	Profa. Dra. Maria do Carmo Sousa (UFSCAR)
10h30 - 11h45	Palestra 2 - Um convite à teoria de curvas algébricas sobre corpos finitos	Prof. Dr. Gregory Duran Cunha (UFG)
11h45 - 12h	Encerramento	Marcos Henrique Alves Chaves (PETMAT-UFG)



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## **TRABALHOS APRESENTADOS**



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Ana Júlia A. Andrade Germano<sup>1</sup>

Dr. Geraldo Cesar G. Ferreira<sup>2</sup>.

Dr. Eder Marinho Martins<sup>3</sup>

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas - Universidade Federal de Ouro Preto.

ana.germano@aluno.ufop.edu.br. geraldocesar@ufop.edu.br.

eder@ufop.edu.br

Trabalho de iniciação científica - PET Matemática

**Palavras-chaves:** Sistemas Homogêneos, Equações Lineares, Comportamento Gráfico.

### Introdução

O trabalho "Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem" se encaixa no eixo: Matemática Pura: trabalhos desenvolvidos nas grandes áreas de conhecimento". De forma mais abrangente, os sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma delas sendo função da mesma variável independente única. Contudo, o objetivo geral foi o estudo de Sistemas Lineares Homogêneos e, posteriormente, o foco se manteve aos Sistemas Planares. E, neste trabalho, a diferenciação em relação a  $t$  será denotada por  $\frac{dx}{dt}$  ou  $x'$ . Por fim, foi construído, em conjunto, um significado aprofundado acerca da forma algébrica destes sistemas e seus comportamentos em gráficos, que chamamos de **Retrato de Fase**.

No entanto, é válida uma observação: a construção dos Planos de Fase não serão apresentadas nesta produção textual. Mas, é claro, será mantida a ideia e/ou intenção de fazê-la, bem como serão mostrados os passos que a precedem.

---

<sup>1</sup>Petiana.

<sup>2</sup>Orientador.

<sup>3</sup>Co-orientador.



## Metodologia

O livro referência para este trabalho tem como título "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.", dos autores William E. Boyce e Richard C. DiPrima. Ao longo do estudo, foram feitos encontros semanais, cujo foco era nas dúvidas acerca da teoria e na correção de exercícios-exemplos retirados do livro.

## Discussões matemáticas

Para introduzir o assunto, tem-se uma situação-problema que, na verdade, se configura como motivação matemática.

**Motivação:** O movimento de determinado sistema mola-massa é descrito pela equação diferencial de segunda ordem:

$$u'' + \frac{1}{8}u' + u = 0$$

Escreva esta equação como um sistema de equações de primeira ordem.

**Solução:** Fazemos uma mudança de variável do tipo:

$$\begin{aligned}x_1 &= u \\x_2 &= u'\end{aligned}$$

Dessa mudança, obtemos:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\u'' &= x_2'\end{aligned}$$

Então, substituindo  $u$ ,  $u'$  e  $u''$  na equação dada no exercício.

$$x_2' + \frac{1}{8}x_2 + x_1 = 0$$

Dessa forma, concluímos que  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -\frac{1}{8}x_2 - x_1\end{aligned}$$

Foram usados dois conceitos importantes para continuar o trabalho:

**Linearidade:** Se cada uma das funções nas equações do sistema for uma função linear das variáveis dependentes  $x_1, \dots, x_n$ , então o sistema de equações é dito linear; caso contrário, é não linear.

E a "cara" deste sistema é:



$$\begin{aligned}x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\x'_2 &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\&\vdots \\x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t)\end{aligned}$$

**Homogeneidade:** Se todas as funções  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  forem identicamente nulas no intervalo  $I$ , então o sistema anterior é dito homogêneo; caso contrário, ele é não homogêneo.

**Teorema 7.1.2:** Se as funções  $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$  forem contínuas em um intervalo aberto  $I: \alpha < t < \beta$ , então existirá uma única solução  $x_1 = \vartheta_1(t), \dots, x_n = \vartheta_n(t)$  do sistema linear que também satisfaz as condições iniciais  $x_i(t_0) = x_i^0$ , em que  $t_0$  é qualquer ponto em  $I$  e são números dados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo  $I$ .

Paralelo ao Teorema acima, temos os dois Teoremas seguintes, sendo o segundo uma expansão do primeiro.

**Teorema 7.4.1: Princípio da Superposição:** Se as funções vetoriais  $x_1$  e  $x_2$  forem soluções do sistema anterior, então a combinação linear  $c_1x_1 + c_2x_2$  também será solução, quaisquer que sejam as constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

**Teorema 7.4.2:** Se as funções vetoriais  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  forem soluções linearmente independentes do sistema em cada ponto do intervalo  $\alpha < t < \beta$ , então cada solução  $x = x(t)$  poderá ser expressa como uma combinação linear de  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ :

$$x(t) = c_1x_{(1)} + \dots + c_nx_{(n)}$$

Dessa forma, é possível estabelecer o que é um **Conjunto Fundamental de Soluções**, que é qualquer conjunto de soluções  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  de

$$x' = P(t)x$$

que seja linearmente independente em cada ponto daquele mesmo intervalo  $I: \alpha < t < \beta$ .

Seguindo a ideia deste conjunto, temos um dos teoremas mais interessantes para o trabalho.

**Teorema 7.4.3: Teorema de Abel:** Se existe, no intervalo  $I$ , o conjunto de soluções  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  para



$$x' = P(t)x,$$

então  $W[x_{(1)}, \dots, x_{(n)}]$  ou é *identicamente nulo* ou *nunca se anula* neste intervalo. E por que isso é importante? Com este Teorema, não é necessário analisar o Wronskiano em cada ponto de um dado intervalo, apenas em um que seja mais conveniente.

Tendo estes teoremas, agora é possível focar em um tipo de Sistemas Lineares Homogêneos que são aqueles cuja matriz possui coeficientes constantes. E, assim, usaremos a seguinte notação para o nosso sistema

$$x' = Ax,$$

em que, novamente,  $A$  é a matriz constante  $n \times n$ .

Observação: se  $n = 1$ , então o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$x' = ax$$

E a solução é dada por  $x(t) = ce^{at}$ .

Portanto, ao analisarmos o valor e/ou sinal de  $a$ , percebemos que:

- se  $a \neq 0$ , então  $x = 0$  é o único ponto crítico;
- se  $a < 0$ , então todas as soluções não triviais se *aproximam de*  $x(t) = 0$  quando  $t$  aumenta, então  $x(t) = 0$  é uma *solução de equilíbrio assintoticamente estável*;
- se  $a > 0$ , então todas as soluções - com exceção da própria solução de equilíbrio  $x(t) = 0$  - se *afastam dela* quando  $t$  aumenta, então  $x(t) = 0$  é uma *solução de equilíbrio assintoticamente instável*.

### Soluções.

Então, olhando agora para aqueles sistemas de  $n$  equações, podemos olhar para as Soluções de Equilíbrio e para o Conjunto Fundamental.

Para as soluções de equilíbrio, deve ser feito  $Ax = 0$  e supõe-se que  $\det A \neq 0$ , de modo que a única solução de equilíbrio é  $x = 0$ . Pois, com isso, é obtido o *Retrato de Fase*, que são gráficos que contém uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado, no qual aparecem todas as informações sobre as soluções deste sistema. Uma observação interessante acerca destes gráficos é que, para o caso em que  $n = 2$ , é chamado de *Plano de Fase*. Já para a busca das soluções fundamentais, é feito um resgate de conceitos vistos em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), em que as soluções envolviam o produto de uma exponencial do tipo  $e^{rt}$  com um vetor. Isto é,



$$x = \xi \cdot e^{rt}$$

em que  $\xi$  é o autovetor e  $r$  é o autovalor associado a ele, uma vez que, fazendo as devidas substituições no sistema, encontramos que

$$\begin{aligned} r \cdot \xi \cdot e^{rt} &= A \cdot \xi \cdot e^{rt} \\ r \cdot \xi &= A \cdot \xi. \end{aligned}$$

Para prosseguir com a ideia de "produzir" um Plano de Fase, analisamos ainda os Autovalores, no que diz respeito ao conjunto ao qual pertence, ao seu valor e seu sinal.

### Autovalores.

Os Autovalores ( $r$ ), que geram distintos Autovetores ( $\xi$ ), podem ser Reais ou Complexos.

Para os *Autovalores Reais* temos as seguintes situações:

- eles são diferentes, com sinais iguais (todos positivos, todos negativos);
- eles são diferentes, um positivo e outro negativo.
- eles são iguais e não nulos.

## Exemplos

Para facilitar a visualização dos passos prévios ao desenho do comportamento dos sistemas, têm-se os seguintes exemplos:

### Exemplo 1:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x$$

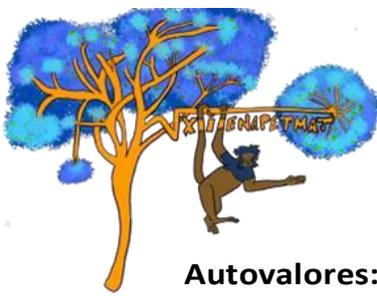
*Autovalores:*  $r_1 = 3$  e  $r_2 = -1$ .

Respectivamente, os *Autovetores:*  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Solução Geral:**  $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$  E assim é feito com o segundo exemplo também.

### Exemplo 2.

$$x' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x$$



**Autovalores:**  $r_1 = -1$  e  $r_2 = -4$ .

Respectivamente, os **Autovetores:**  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  e  $\xi_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Solução geral:**  $x = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{1} \\ 2 \end{pmatrix} e^{-4t}$

Quando os autovalores resultam em valores complexos, é importante salientar que eles sempre vêm em pares conjugados. Por isso, para este caso específico, usaremos o teorema 7.4.5.

**Teorema 7.4.5:** Seja um sistema  $x' = P(t)x$  em que cada elemento de  $P$  é uma função contínua que assume valores reais. Se  $x = u(t) + iv(t)$  for uma solução complexa de

$$x' = P(t)x,$$

então sua parte real  $u(t)$  e sua parte imaginária  $v(t)$  também serão soluções desta equação.

**Exemplo 3.**

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x$$

**Autovalores:**  $r_1 = -\frac{1}{2} + i$  e  $r_2 = -\frac{1}{2} - i$ .

Respectivamente, os **Autovetores:**  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  e  $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ .

**Solução geral:**  $x = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}$

Para finalizar a análise acerca dos autovalores, há ainda o caso em que existe um autovalor real gerando apenas um autovetor L.I, então, o outro autovetor é aquele que chamamos de *Autovetor Generalizado* ( $\eta$ ), que é obtido a partir da relação

$$(A - 2I)\eta = \xi$$

Então, a solução é obtida neste estilo:

$$x = \xi t e^{rt} + \eta e^{rt}$$

**Exemplo 4.**

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_3$$

**Autovalores:**  $r_1 = r_2 = 2$ .

**Solução geral:**  $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

A estes quatro exemplos é possível associar um Plano de Fase, observando as soluções e a direção dos vetores no Plano.



## Conclusão

A partir dos resultados supracitados e focando nos Sistemas Planares, isto é,  $n = 2$ , Lineares e Homogêneos, percebe-se que é possível transformar em uma equação diferencial matricial do tipo  $x' = Ax(t)$ , uma vez que  $g(t) = 0$  (homogêneo). Com essa forma de enxergar o sistema, busca-se o seu comportamento a partir da construção de um Plano de Fase. E, para isso, é necessário analisar os autovalores, no que tange ao conjunto ao qual cada um pertence, seus valores e seus sinais. Ou seja, eles podem ser Reais ou Complexos. Aqueles que são Reais e que geram autovetores distintos podem ser: distintos e de mesmo sinal; distintos e de sinais diferentes; não nulos e iguais. Aqueles que são Reais e que geram autovetores iguais chamamos de: repetidos. Já para os autovetores Complexos, é imprescindível destacar que eles sempre vêm em pares conjugados. Desta maneira, aplicando nas soluções do tipo

$$x(t) = c_1x_{(1)} + \dots + c_nx_{(n)}$$

e com as devidas alterações para os autovalores repetidos e complexos, finalmente, pode-se observar o comportamento destes sistemas a partir da montagem do Plano de Fase.

## Referências

[1] BOYCE, William E. DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9<sup>a</sup> ed. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2010.

[2] DEVANEY, Robert L. HIRSCH, Morris W. SMALE, Stephen. **Differential Equations, Dynamical Systems And An Introduction to Chaos**. 2<sup>a</sup> ed. Editora Elsevier. Califórnia, EUA, 2004.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022

## JOGOS MATEMÁTICOS – TORRE DE HANÓI

Breno Oliveira Souza, Fabio E. B. Martínez

Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais

breno55@ufmg.br, fbrocher@mat.ufmg.br

### INTRODUÇÃO

A Torre de Hanói foi criada em 1883 pelo matemático francês Édouard Lucas e desde então é um dos jogos mais famosos do mundo. Apesar das diversas variações, a versão original desse jogo é composta por 3 *pinos* e  $n$  *discos* de tamanhos distintos, cujo objetivo é transferir os discos de um pino para outro, considerando que em um único movimento é permitido transferir apenas um disco do topo de um pino para o topo de outro. O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre o problema, a fim de estabelecer uma solução ótima para a generalização da Torre de Hanói, para 3 pinos e  $n$  discos o  $X_n$ , número de movimentos mínimos necessários para solucionar o problema, é obtido de forma indutiva através de  $X_{n+1} = 2X_n + 1$ , tal que  $X_n = 2^n - 1$ .

### Generalização e Solução Ótima

Determinar uma solução ótima para a generalização da torre de Hanói em relação a quantidade de pinos é um dos maiores desafios desse jogo. Em 1941, duas soluções foram apresentadas para qualquer número de pinos pelo Frame e pelo Stewart. Apesar destas soluções terem sido encontradas independentemente por estes dois matemáticos, ambas possuem um algoritmo de resolução similar e equivalente, pois, retornam o mesmo número de passos, o que faz conjecturar que essas elas são soluções ótimas para a generalização da Torre de Hanói.

A solução de Frame usa da divisão dos  $n - 1$  discos menores em  $p - 2$  grupos e com isso é possível fazer a transição dos discos requerida, dado pela função  $F(n, p)$  que cumpre a seguinte relação recursiva:

$$F(n, p) = \min\{2F(n_1, p) + 2F(n_2, p - 1) + \dots + 2F(n_{p-2}, 3) + 1\}$$

Onde os  $n_i$  satisfazem que:  $n_1 + \dots + n_{p-2} + 1 = n$ .

A solução do Stewart usa da divisão dos discos em um grupo com os  $m_1$  discos menores e o  $m_2$  com os demais discos, dado a partir da função  $S(n, p)$  que satisfaz:



$$S(n, p) = \min\{2S(m_1, p) + S(m_2, p - 1) \mid m_1 + m_2 = n\}$$

Em ambos os casos,  $n \geq 4$  e  $n \geq p$ .

### Conjectura e Teorema

A partir de dados experimentais de nosso trabalho e alguns argumentos empíricos chegamos a seguinte conjectura:

**Conjectura:** O número mínimo de movimentos se obtém em uma sequência com  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \dots \geq n_k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular, se a conjectura é verdadeira, provamos que para 4 pinos a sequência é essencialmente uma sequência aritmética, salvo o último termo,  $n_k$ .

**Teorema:** Para a torre de Hanói com  $p = 4$  pinos, para qualquer número  $n$  de discos,  $m_1 = n - \lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$ ,  $m_2 = \lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$ , é uma partição ótima para a solução do Stewart.



## CONCLUSÃO

A partir de um estudo bibliográfico extenso não foi encontrado um método recursivo similar para encontrar uma solução ótima no caso geral da Torre de Hanói, dessa forma, este problema continua até o momento em aberto.

## REFERÊNCIAS

- KLAVŽAR, S. et al. On the Frame–Stewart algorithm for the multi-peg Tower of Hanoi problem. **Discrete Applied Mathematics**, vol.120, p. 141-157, 2002.
- IWAMA, K. e PETERSON, M., Bounded Hanoi. **The American Mathematical Monthly**, vol 129, p. 303-319, 2021.
- STOCKMEYER, P. K. The Tower of Hanoi for Humans. *In*: BEINEKE, J. e ROSENHOUSE, J. **The Mathematics of Various Entertaining Subjects**. Princeton University Press, 2017, p. 52-70.
- Max A. e BERGER, T. B., Solving the Tower of Hanoi with random moves. *In*: BEINEKE, J. e ROSENHOUSE, J. **The Mathematics of Various Entertaining Subjects**. Princeton University Press, vol.1, 2016, p. 65- 97.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## SIMETRIA NA MÚSICA

Pedro Rabelo Rosa Machado, Aniura Milanes Barrientos

Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais

pedrorm@ufmg.br, aniura@ufmg.br

### INTRODUÇÃO

A Matemática e a Música possuem notáveis correlações. Na Antiguidade, os pitagóricos foram os primeiros a estudar esta conexão e analisaram a correspondência entre diferentes frequências e os respectivos sons consonantes.

A pesquisa teve como propósito aprofundar em conteúdos da matemática superior além da grade do curso de Licenciatura, abarcando então, a Álgebra Abstrata, em particular, a Teoria de Grupos. Objetivando identificar o espectro matemático em algumas obras musicais, sua importância é evidenciada como importante contraexemplo à ilusória afirmação de que a matemática é uma ciência abstrata sem aplicações.

#### Modelo de Alturas nos Inteiros

Trata de um modelo matemático que identifica as doze notas da escala cromática (escala musical de doze notas com intervalos de semitons entre elas) como elementos do grupo dos inteiros módulo doze, isto é,  $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ . Assim, partimos com a nota Dó (C) como o número 0, C# = Db = 1, D = 2 e segue até a nota Si (B) = 11.

Neste modelo, importante ressaltar que todas as notas que se diferenciam em uma oitava são identificadas, portanto, C1 = C2 = C3 = ..., abarcando todas as oitavas de Dó.

#### Transposição e Inversão

Define-se a Transposição musical a partir da seguinte função:  $T_n: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ ,  $T_n(x) := x + n \pmod{12}$ . A Inversão musical, por sua vez, pode ser representada pela seguinte lei de função:  $I_n: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ ,  $I_n(x) := -x + n \pmod{12}$ .

Dessa forma, partindo do Modelo de Alturas nos Inteiros, é possível definir um dodecágono regular em que os vértices são as notas da escala cromática. Logo, nota-se que as transposições e inversões agindo sobre as notas musicais correspondem, respectivamente, às rotações e reflexões sobre esse polígono. Assim, obtemos o grupo dihedral de ordem 24 que, por sua vez, age no conjunto das tríades consonantes.

#### Fuga 6 em Ré menor – J.S.Bach



Fuga em música, é um estilo de composição polifônica e imitativa de um tema principal, o qual denotaremos por  $P$ . Na Fuga 6 em Ré menor do Livro 1 da Clave Bem Temperada de J.S.Bach, no primeiro compasso as dozes seguintes notas definem o tema  $P = \langle D, E, F, G, E, F, D, C\#, D, Bb, G, A \rangle = \langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9 \rangle$ .

Ao analisarmos o compasso 3, percebemos um trecho com a seguinte composição:  $\langle A, B, C, D, B, C, A, G\#, A, F, D, E \rangle = \langle 9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4 \rangle$ . Comparando as duas partes, percebe-se que a segunda é a transposição de um fator 7 do tema principal, isto é,  $T_7P$ .

## CONCLUSÃO

É conhecido que alguns grupos podem ser visualizados, por exemplo, através de movimentos de simetria em polígonos regulares. A iniciação científica nos permitiu entender que é possível, também, “ouvir” esses grupos nas composições musicais.

## REFERÊNCIAS

D. Benson, Mathematics and Music, disponível em <ftp://byrd.math.uga.edu/pub/html/index.html>, 2000.

A. S. Crans, T. M. Fiore, and R. Satyendra Musical actions of Dihedral Groups. The American Mathematical Monthly, vol. 116, no. 6, June 2009, pp. 479-495.

T. M. Fiore, Music and Mathematics, The University of Chicago, 2009.

J. Gallian, Contemporary Abstract Algebra, 2013.

K. Smith, Math 412. Group Actions. Group Actions and Orbits, Notas de aula da disciplina Math 412, 2018.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática –  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## PETcast Matemática

Larissa Soilo<sup>1</sup>, Eduardo da Fonseca Martins<sup>2</sup>, Eduardo Scabora<sup>3</sup>,  
Gabriela Fernanda de Assis<sup>4</sup>, Guilherme Leandro Martin<sup>5</sup>,  
Guilherme Zahra Cundari<sup>6</sup>, Isabela Pereira<sup>7</sup>, Juliana Marques<sup>8</sup>, Larissa Pereira dos Santos<sup>9</sup>,  
Rafael Lima de Araújo<sup>10</sup>,  
Maiara de Oliveira Martins<sup>11</sup>, Monize Bianca Prieto<sup>12</sup>, Thaynara Convento Bomfim<sup>13</sup>  
Orientador: João Carlos Ferreira Costa<sup>14</sup>

## Resumo

O PETcast Matemática é um projeto desenvolvido pelo grupo PET Matemática do IBILCE-UNESP de São José do Rio Preto, que teve início em 2021, durante a pandemia, com a finalidade de comunicar, informar e disseminar conhecimento matemático por meio de mídias digitais, sendo elas o Spotify e o Anchor. Essas plataformas permitem a criação e o desenvolvimento de podcasts disponibilizados para todos aqueles que as usam. O objetivo geral do PETcast Matemática é tratar de assuntos diversos, referentes à matemática, ou seja, não há um enfoque apenas em assuntos relacionados com as modalidades Licenciatura e Bacharelado (com ênfase em Pura e em Aplicada) do curso de matemática. Por mais que tenhamos desenvolvido episódios que abordam temáticas voltadas para esse público, o propósito é falar a respeito de assuntos matemáticos diversos, de maneira menos conceitual, mais clara e objetiva, permitindo aos ouvintes, independentemente de seu nível de conhecimento matemático, a possibilidade de acompanhar o que está sendo discutido. Esse projeto foi idealizado pelos petianos Gabriela Fernanda de Assis e Guilherme Zahra Cundari durante o processo seletivo de 2021, momento no qual eles eram candidatos às vagas e não integrantes. Após o ingresso de ambos ao grupo, discutimos sobre a efetivação desse projeto e, a partir disso, iniciamos as gravações e publicações.

**Palavras-chave:** *Comunicar, conhecimento matemático, plataformas, podcasts.*

## Introdução

Diante da necessidade de desenvolver novas atividades, não presenciais, devido às limitações causadas pela pandemia da COVID-19, o PETcast Matemática foi uma das atividades pensadas para atender tal necessidade. Ele consiste de episódios falando sobre Matemática de uma maneira descontraída, dinâmica e curiosa, incentivando os ouvintes a pesquisarem mais sobre os assuntos apresentados, informando e propagando conhecimento. Além disso, possibilita aos petianos desenvolver novas habilidades relacionadas à comunicação, à didática, à argumentação,<sup>1</sup> dentre outras.

---

<sup>1</sup> [l.soilo@unesp.br](mailto:l.soilo@unesp.br)



Iniciamos as publicações com o episódio zero, intitulado “Uma breve introdução ao PETcast”, publicado em 21 de maio de 2021, onde foi apresentado o Programa de Educação Tutorial e suas diretrizes, bem como o funcionamento do projeto PETcast Matemática. Enumeramos como zero, por se tratar de um episódio piloto, de caráter informativo, em que não foram tratados assuntos matemáticos. Nesse episódio houve a participação apenas dos petianos e do tutor, com a apresentação de todos e um bate papo descontraído sobre o PET e sobre o funcionamento do PETcast, como citado anteriormente.

Nos primeiros episódios intitulados “Problemas não resolvidos da matemática” e “A matemática no cotidiano”, tiveram a participação de alguns petianos. Foram abordadas questões não solucionadas na matemática, dentre as quais a Hipótese de Riemann, a Conjectura de Poincaré, dentre outros problemas de diversas áreas. E além disso, foi citada a importância da matemática e sua constante presença no dia a dia das pessoas, mesmo que isso não seja notado, com o propósito de problematizar essas questões e despertar em nossos ouvintes um olhar crítico sobre o qual pode ser estimulado o pensamento matemático.

Ainda na primeira temporada, iniciamos a elaboração de uma série de episódios intitulada “Ênfases dos cursos de Matemática”. Nestes episódios foram tratados assuntos acerca da Licenciatura, do Bacharelado em Aplicada e em Pura a fim de expor suas respectivas estruturas, diferentes e áreas de atuação. Este episódio contou com a participação da professora Dra. Ana Paula dos Santos Malheiros do Departamento de Educação do IBILCE-UNESP e da professora do Ensino Fundamental II, petiana egressa, Danytelle Gregui Vieira Rodrigues, convidadas para falarem sobre diferentes perspectivas a respeito do curso, da atuação docente e dos problemas/desafios enfrentados nesse período pandêmico. Este episódio foi conduzido sob o olhar das petianas Sofia Rocha Christiano e Maryanna Conceição Silva a respeito do curso de Licenciatura, com o intuito de trazer diferentes concepções, tanto sob a visão discente, quanto sob a visão das convidadas que já atuam como profissionais em diferentes frentes.

Seguindo com a série tivemos o episódio “Bacharelado em Matemática Pura”, com a participação de Prof. Dr. Fernando Nera Lenarduzzi e Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa, e os petianos Pedro Henrique Arruda Moraes e Tiago Suzuki Tokuda. E finalizando com “Bacharelado em Matemática Aplicada”, com participação da Prof. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel e outras convidadas. Onde foi discutido sobre o bacharelado de diversos pontos de vista, desde aluno de graduação até professor universitário e pesquisador.

Finalizamos a primeira temporada com episódios focados em paradoxos matemáticos e Data Science. Para o episódio “Paradoxos” convidamos a Julia Jaccoud do canal “A Matemaniaca” e o professor Régis Varão do canal “Fantástico Mundo Matemático”, onde discutimos o assunto. E no episódio “Data Science (Ciência de Dados)” com os convidados Prof. Dr. Rodrigo Capobianco Guido e o Prof. Dr. Wallace Correa de Oliveira Casaca, dialogamos sobre machine learning e assuntos relacionados.

Na segunda temporada, realizamos uma série intitulada “Áreas da Matemática”



com o intuito de ouvir os docentes da nossa instituição sobre seus respectivos campos de pesquisa. Foram lançados os seguintes episódios: “Geometria”, “Análise”, “Ensino de Matemática”, “Áreas: Matemática Aplicada”, “Álgebra” e “Educação Matemática”.

### Metodologia

Os assuntos discutidos no PETcast Matemática são decididos em conjunto com o grupo, durante as nossas reuniões semanais. A elaboração desse projeto é feita integralmente pelos petianos e pelo tutor Dr. João Carlos Ferreira Costa, professor do Departamento de Matemática do IBILCE-UNESP.

Todo o processo de desenvolvimento dos episódios é iniciado a partir da escolha dos temas. São sugeridos alguns assuntos e, após muito diálogo e reflexões, é decidido qual deles será escolhido para o próximo episódio. Contudo, isso não significa que os assuntos não selecionados serão descartados, uma vez que esses conteúdos poderão ser reaproveitados em outras ocasiões.

Após a escolha do tema, há uma discussão acerca de quais questões podem ser levantadas a respeito deste determinado assunto. Como todo esse processo é realizado por meio do diálogo, pode haver opiniões contrárias, porém, quando isso ocorre, procuramos trazer novas alternativas com o objetivo de chegar a um consenso.

Em seguida, convidamos pessoas capacitadas que irão agregar na discussão sobre o assunto proposto. Tendo a confirmação dos convidados, são escolhidos os integrantes do grupo que irão participar da gravação, que ocorrerá no aplicativo de comunicação Discord. Esses petianos elaboram um roteiro a fim de que haja uma orientação sobre o andamento da conversa e para que não haja repetição de falas. Vale ressaltar que, para cada episódio, os petianos são escolhidos de modo que não pertençam todos a um determinado ano do curso de Matemática ou a um determinado tempo de permanência no Programa de Educação Tutorial (PET), isso acontece para que haja uma diversidade de pontos de vista sobre cada tema.

Como dito antes usamos o Discord para realizar as gravações, e no momento da gravação, as pessoas que estão na sala de bate-papo são apenas os petianos que irão participar e os convidados. Dentre os petianos, um é escolhido como mediador e ele fica responsável por organizar a ordem das falas, por iniciar e finalizar as gravações. Após a gravação, a comissão responsável pela edição do podcast faz os devidos cortes e adequações e, posteriormente, realiza-se às postagens nas plataformas Spotify e Anchor.

Em ambas as plataformas, realizando a busca por “PETcast Matemática” serão encontradas as playlists e todas as publicações feitas. O motivo pelo qual essas plataformas foram utilizadas é porque são mais populares, o que favorece a difusão dos conteúdos que são lançados nesses programas.

Os links para acesso aos episódios no Spotify e Anchor, respectivamente, são:

Spotify: <https://open.spotify.com/show/0UawB5GOrbM7qIYcOipUvb?si=Pug28nlkS-CEhr9fdriVug>

Anchor: <https://anchor.fm/petcast-matematica>

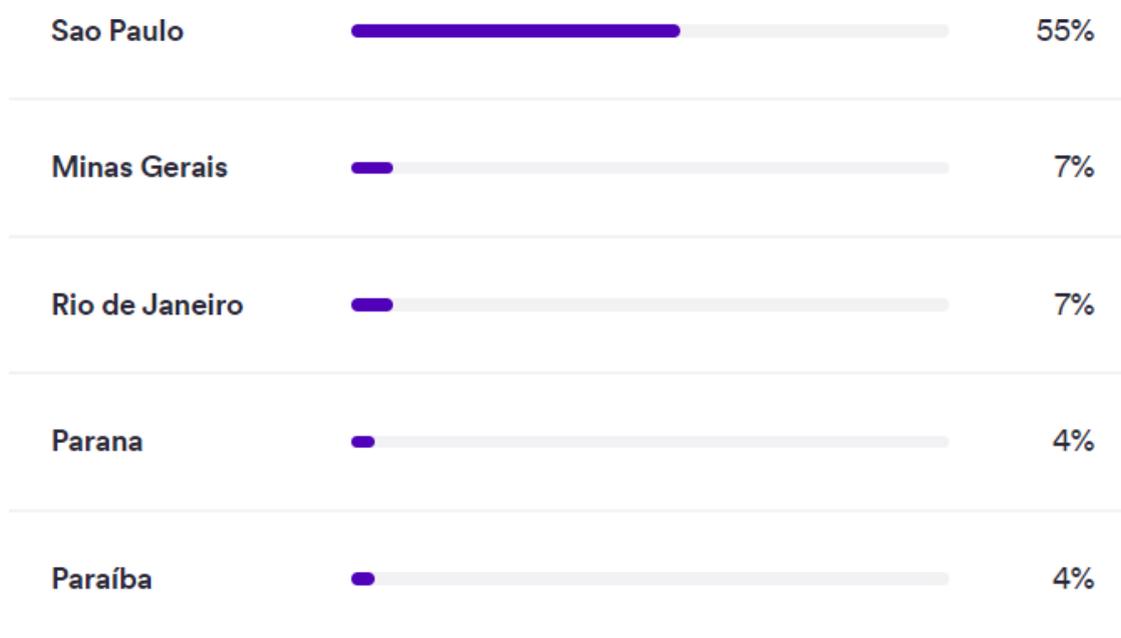


### Resultados/discussões:

A criação de um projeto em que se usa plataformas do meio virtual tem maior possibilidade de alcance. O PETcast Matemática nos proporcionou resultados positivos tendo audiência de ouvintes de diversas faixas etárias, países e regiões do Brasil, o que confirma a grande potencialidade das mídias e das plataformas nesse sentido. Pode-se observar esses índices nos seguintes resultados, apresentados abaixo, gerados pelo Spotify.

Figura 1.

*Localização Geográfica no Brasil*



Vale ressaltar que, o processo de desenvolvimento da atividade gerou grande discussão entre os integrantes do grupo e, além disso, aqueles que participaram da gravação acabaram estudando novos assuntos e puderam adquirir mais conhecimento.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



**Conclusão:**

As atividades realizadas no PETcast Matemática foram desenvolvidas com finalidade de divulgar, tanto o PET Matemática do IBILCE-UNESP, como os mais diversos assuntos que cercam a área da matemática. Esta divulgação, feita através de uma plataforma digital, disponível para todos, permite a disseminação de saberes acadêmicos que, muitas vezes, pessoas da comunidade externa à universidade não têm acesso. Além disso, tal atividade possibilita aos petianos a aquisição de novos saberes, como por exemplo, a prática em comunicação, o uso das ferramentas do meio virtual e o conhecimento a respeito do próprio tema a ser discutido em cada episódio.

**Referências:**

<sup>1</sup>Freire, P. (1997). Professor Sim, Tia Não. Cartas a quem ousa ensinar. São Paulo: Editora Olho d'Água

<sup>2</sup>Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC. Disponível em:

<[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 30 de setembro de 2022.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## GAUSS PRÉ-VESTIBULAR

Samuel Baldini Mendes<sup>1</sup>, Alcía Pacheco Dias<sup>1</sup>, Arthur Holtrup Bianchini<sup>1</sup>, Augusto Pacheco da Rocha<sup>1</sup>, Samanta Bornia<sup>1</sup>, Samara Ortiz<sup>1</sup>, Saulo Minatti Andrade<sup>1</sup> e Tiago Natã Kinhirin Sanson<sup>1</sup>; Alda Dayana Mattos Mortari<sup>2</sup>. Centro de Ciências Físicas e Matemática - Universidade Federal de Santa Catarina -  
samuel.baldini.mendes@gmail.com, alda.dayana@ufsc.br

## INTRODUÇÃO

O Gauss Pré-Vestibular é uma atividade de extensão que é gerenciado, secretariado e pedagogicamente coordenado pelo PET Matemática. Este projeto tem como principal objetivo oferecer aos alunos em situação de vulnerabilidade socioeconômica oriundos de escolas públicas próximas à UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina) do campus Trindade um curso pré-vestibular gratuito e de qualidade, oportunizando assim ao aluno mais um espaço de estudo para que este possa aprimorar os seus conhecimentos e se preparar para a prova do vestibular. Concomitante, disponibilizamos aos acadêmicos de todos os cursos de graduação e pós-graduação da UFSC um espaço para que possam experimentar a prática da docência, sendo o nosso corpo docente formado por graduandos das mais diversas áreas que - além de estarem formando-se como professores - estão também prestando um trabalho voluntário e auxiliando cotidianamente no desenvolvimento deste projeto de extensão.

Além de professores, o Gauss Pré-Vestibular conta também com estagiários do curso de Psicologia da UFSC para a realização de atividades extracurriculares, melhoria dos processos seletivos e realização de acolhimentos com os alunos, o que auxilia na permanência do estudante no projeto.

**Palavras-Chave:** curso pré-vestibular; iniciação à docência; ensino;

## Metodologia

A organização do Gauss se divide em três frentes quanto ao desenvolvimento de suas atividades, são elas: a Administração, Atendimento ao Professor e Atendimento ao Aluno. Abaixo apresentar-se-á a explicação de cada frente.

A Administração executa tarefas como a divulgação do curso, manutenção de equipamentos, controle de materiais e organização de datas. Os bolsistas selecionados para desempenhar tais funções necessitam, ao início do ano, estar atentos às datas dos

<sup>1</sup>: Bolsista do PET Matemática UFSC.

<sup>2</sup>: Tutora do PET Matemática UFSC.



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



vestibulares UFSC/IFSC e UDESC, e também o ENEM, tornando assim possível montar um cronograma para as aulas. Também é lido o programa de cada um dos vestibulares citados para que uma ementa para cada disciplina seja montada a fim de atender os conteúdos que serão cobrados. Após a organização das ementas e das aulas faz-se o planejamento e execução de simulados das provas destes vestibulares do ENEM, além de aulões temáticos abertos ao público geral. Outras atividades que envolvem a Administração são o atendimento ao público geral via e-mail e telefone; planejamento de atividades extracurriculares como visitas a laboratórios da universidade e palestras e, por fim, a manutenção da página do Moodle do curso.

Os bolsistas designados ao Atendimento aos Professores são responsáveis pelas atividades que envolvem os docentes que lecionam no Gauss. Estas tarefas são: o processo seletivo de professores, este visa dar a oportunidade da docência para os estudantes da universidade, mas também pode-se vincular professores mais experientes, todos os professores vinculados são voluntários; a segunda atividade é o registro dos docentes que contém a data de entrada e saída de cada um, além da documentação do mesmo; a terceira atividade é a criação da grade de horários das aulas. Após a realização desses trabalhos cabe aos bolsistas a manutenção das aulas caso algum professor não compareça à classe ou precise trocar de horários. Eventualmente os bolsistas podem convocar os professores para uma reunião a fim de discutir ou implementar medidas para o bom andamento do curso.

Por fim, os bolsistas designados para o Atendimento aos Alunos são responsáveis pelo processo seletivo de alunos. Como o curso é de caráter popular o escopo está em alunos de escola pública em estado de vulnerabilidade socioeconômica. Este procedimento também é pensado de maneira a ter ações afirmativas para populações minoritárias na universidade; a outra tarefa é, após o vínculo dos alunos ao curso, a garantia da permanência destes no curso. O que é feito via conversas periódicas com os alunos e, quando necessário, os bolsistas indicam o estagiário da Psicologia aos alunos. Também é feito um controle de assiduidade dos alunos via chamadas, isto possibilita ter controle de entrada e saída dos alunos bem como saber os dias em que estão faltando.



## Resultados e Discussões

O curso pré-vestibular tem trazido diversos aspectos positivos tanto para os alunos quanto para a comunidade acadêmica. Aos alunos proporciona um ensino de qualidade gratuito, além de conhecer a universidade por dentro, visto que ele ocorre nas dependências da instituição. Nos últimos anos o Gauss tem aprovado alunos nos mais diversos cursos da UFSC e UDESC e, neste ano, foi possível dar aos estudantes a isenção ao passe do Restaurante Universitário, assim eles conseguem almoçar e jantar na universidade. No início deste ano haviam 60 alunos matriculados no curso em duas turmas distintas, porém devido a razões de infraestrutura, neste segundo semestre acabamos tendo apenas uma sala à nossa disposição, com isto reduziu-se o número de alunos para 36.

Aos professores voluntários o curso oferece, além do certificado de participação em projeto de extensão, a oportunidade de lecionar pela primeira vez ou de reinserir-se na sala de aula depois de muito tempo, além de construir suas aulas com base no material didático fornecido pelo Curso. Atualmente, participam do projeto como professores 27 pessoas em diversos níveis acadêmicos. Tanto estudantes da UFSC como de outras instituições participaram como professores no Gauss.

Este projeto traz também a possibilidade de que outros departamentos da universidade possam participar do dia-a-dia da sala de aula. Como é o caso dos profissionais de Psicologia que puderam ter contato com diversas situações e elaborar projetos para auxiliar os alunos.

Por último, o projeto proporciona aos bolsistas do PET um ambiente de contato com a educação de jovens e adultos, nas quais encontram-se muitas problemáticas que podem ser discutidas e pensadas, desenvolvendo o senso de organização, trabalho coletivo, entre outros.

## CONCLUSÃO

Este projeto, que é executado de forma contínua desde 2004, auxilia a entrada de vulneráveis em Instituições de Ensino Superior. Desta forma, desempenha um importantíssimo papel ao levar o conhecimento que é produzido na Universidade ao público geral, especialmente a grupos com dificuldades socioeconômicas. A inserção



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



destes no ensino superior pode ser uma mudança no paradigma de vida ao fornecer um plano de carreira e o aprimoramento pessoal e cultural dos mesmos. Além disso, o projeto possibilita também a iniciação a docência de muitos profissionais e para os bolsistas do PET propicia uma primeira experiência em gestão escolar.

### REFERÊNCIAS

[1] COPERVE (Santa Catarina). Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Disciplinas 2023. 2022. Disponível em:

<https://vestibular2023.paginas.ufsc.br/files/2021/04/programa-disciplinas-2023.pdf>.

Acesso em: 07 set. 2022.

[2] COVEST (Santa Catarina). Universidade do Estado de Santa Catarina (org.).

Vestibular de Inverno 2022/2: processo seletivo especial. Processo Seletivo Especial.2022.

Disponível em:

[https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id\\_cpmenu/14111/EDITAL\\_DO\\_VESTIBULAR\\_DE\\_INVERNO\\_2022\\_2\\_16522287367463\\_14111.pdf](https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/14111/EDITAL_DO_VESTIBULAR_DE_INVERNO_2022_2_16522287367463_14111.pdf). Acesso em: 07 set. 2022



XIII Encontro Nacional dos grupos PET de Matemática -  
20, 21 e 22 de Outubro de 2022



## **PET Matemática UFSM: relatando experiências extensionistas no âmbito do ensino no retorno presencial**

Matheus Brum de Campos, Felipe Roos da Silva, Andressa de Oliveira Eckhardt, Manuela Engelmann dos Santos, Maurício Atlez Santos, Eduarda Naysinger Ebling, Caroline de Oliveira Carnellosso<sup>1</sup>, Inês Farias Ferreira<sup>2</sup>.

Departamento de Matemática -Universidade Federal de Santa Maria.  
matheusbrum36@gmail.com, ines.ferreira@ufsm.br.

### **Resumo**

O Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) desenvolve, no presente ano, dois projetos de extensão denominados “PET na Escola” e “Atividade Docente Voluntária no Pré-Universitário Popular Alternativa”, os quais têm diretamente um caráter de ensino. As atividades desenvolvidas nesses projetos visam oportunizar aos petianos participantes um contato direto com experiências relacionadas à docência em sala de aula. Nesse sentido, serão relatados aspectos relevantes vivenciados pelos envolvidos, que são acadêmicos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, atualmente envolvendo do 3º ao 8º semestre do curso. A inserção em ambiente escolar tem propiciado explorarem aspectos significativos que contribuem para o seu desenvolvimento profissional.

**Palavras-chave:** Programa de Educação Tutorial; Ensino de Matemática; Escola.

## **INTRODUÇÃO**

O Programa de Educação Tutorial (PET) tem em seu escopo geral promover a formação ampla e de qualidade acadêmica junto aos discentes envolvidos direta ou indiretamente ao programa, bem como estimular valores que reforcem a consciência social e de cidadania. (BRASIL, 2006). Com esse viés, as atividades que compõem o planejamento anual do grupo abarcam a tríade ensino, pesquisa e extensão em um contexto de indissociabilidade. Nessa perspectiva, esse trabalho busca relatar algumas atividades desenvolvidas pelo grupo PET Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), que têm caráter extensionista associadas diretamente ao ensino. A ênfase será dada nas contribuições que atividades dessa natureza trazem no desenvolvimento profissional dos petianos envolvidos. O projeto pedagógico dos cursos de Licenciatura em Matemática - Diurno e Noturno, prevê, desde a última reformulação que ocorreu em 2019, quatro estágios supervisionados, sendo que a primeira disciplina de estágio supervisionado ocorre ao longo do 5º semestre na turma do diurno e no

<sup>1</sup> Bolsistas do PET/MEC/FNDE.

<sup>2</sup> Tutora.



8º semestre no curso noturno. Em particular, essa disciplina tem como objetivo a inserção do acadêmico no contexto escolar, para conhecimento da organização e funcionamento desse ambiente (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA, 2022). Já os acadêmicos do curso de bacharelado não têm em seu currículo disciplinas de estágios supervisionados. Assim, por terem um perfil profissional diferente do curso de licenciatura não experienciam atividades de ensino dentro do rol de disciplinas do curso.

Nessa perspectiva, as atividades aqui relatadas estão oportunizando, aos petianos envolvidos, um contato mais cedo com a realidade escolar, pois a maioria desses ainda não cursou disciplinas de estágio supervisionado ou não terá em sua formação inicial. Uma das atividades que está sendo desenvolvida, denominada PET na Escola, visa a inserção de petianos no ambiente escolar em instituições da rede pública de ensino. Esta proposta foi retomada a partir do retorno do grupo às atividades acadêmicas presenciais nesse primeiro semestre de 2022. Uma segunda atividade é referente a participação no curso Pré-Universitário Popular Alternativa (PUPA), este criado no ano 2000 por meio da iniciativa de universitários do Centro de Ciências Rurais da UFSM. O curso tem como objetivo preparar candidatos para ingressarem no Ensino Superior por meio do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e que, por motivos econômicos, não possuem acesso a cursos pré-vestibulares pagos. Dessa forma, proporciona que acadêmicos de cursos de licenciatura e bacharelado de diferentes áreas atuem como educadores.

## **METODOLOGIA**

O projeto que compõem as atividades que envolvem o PET na Escola existe desde 2018. Sendo que foi retomado em junho de 2022, a partir do retorno às atividades presenciais na instituição que ocorreu em abril de 2022. A maioria dos petianos envolvidos ingressaram nos seus cursos de graduação durante o período da pandemia,



havendo a necessidade de inicialmente se adaptarem ao ensino superior no formato presencial. A partir desse período de adaptação, buscou-se inicialmente uma instituição de ensino pública que pudesse acolher a proposta. Assim, foi feito contato com uma escola localizada próxima ao campus sede da instituição a fim de explicar os objetivos da atividade a ser desenvolvida. A equipe diretiva foi receptiva à proposta de atuação dos participantes no horário regular de turmas do ensino fundamental final, junto ao professor regente. Realizado o acordo, os petianos participantes foram divididos em duplas para atuarem semanalmente junto às turmas do Ensino Fundamental II, mais especificamente, do 6º ao 8º ano.

Em um primeiro momento foram feitas observações com o objetivo de identificar as metodologias de ensino utilizadas pelo professor e também os aspectos do cotidiano escolar. Posteriormente, começaram a ser realizadas intervenções de apoio aos alunos e ao professor, por parte dos participantes envolvidos, no sentido de interagir com os alunos através dos exercícios propostos pelo docente, de modo a tirar dúvidas e auxiliar no conteúdo em questão.

Já no projeto envolvendo o curso Pré-Universitário Popular Alternativa, os alunos atendidos foram divididos em três turmas presenciais e uma turma on-line. A petiana participante, juntamente com mais dois educadores de Matemática, ficou responsável pela turma 3, no formato presencial. Durante aproximadamente três meses, desenvolveu apenas atividades de observação e sanando eventuais dúvidas dos alunos durante as aulas. Após esse período, ela começou também a ministrar aulas desenvolvendo conteúdo específico da disciplina de matemática. Até o momento, a petiana ministrou aulas abordando conteúdos de funções: exponenciais e logarítmicas e também tópicos de matemática financeira. As estratégias de ensino utilizadas envolvem a abordagem de vários exemplos e a realização de exercícios com os alunos, buscando dessa forma, explorar o conteúdo matemático por meio de atividades práticas para que os alunos possam compreender a teoria relacionada e se familiarizar com questões de matemática contidas em provas do ENEM.



## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em relação ao projeto PET na Escola, há uma integrante do curso de Matemática Bacharelado e quatro integrantes dos cursos de Matemática Licenciatura - Diurno e Noturno, os quais estão cursando do 3º ao 6º semestre. Dentre eles, há uma participante que já teve a oportunidade de vivenciar experiências dentro do cotidiano escolar por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e outra participante que está cursando disciplinas curriculares obrigatórias de estágio supervisionado.

Em geral, com o desenvolvimento do projeto, os participantes observaram e vivenciaram consequências da pandemia da Covid-19 na Educação, pois os alunos têm apresentado muitas dificuldades em conteúdos básicos do ensino fundamental, em especial operações envolvendo: adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como, o estudo de frações, além de complicações na interpretação de problemas envolvendo os tópicos citados anteriormente. Nesse aspecto, o planejamento do professor e o desenvolvimento das aulas é adaptado e construído de acordo com o desempenho de cada turma, pois alguns alunos conseguem acompanhar o desenvolver da disciplina, mas outros possuem dificuldades e precisam de auxílio. Para esses alunos com maiores dificuldades, os petianos têm contribuído com reforço, auxiliando na resolução de exercícios deixados como tarefas e outros propostos em horários de sala de aula.

Ademais, cabe pontuar que o professor, em geral, constrói a definição dos conteúdos juntamente com os alunos, utilizando palavras usuais do cotidiano dos mesmos, buscando fazer com que estes consigam internalizar melhor as definições do respectivo conteúdo. Nesse âmbito, ao acompanhar as aulas, foi perceptível como os alunos gostam de interagir e, apesar da dificuldade que muitos apresentam, estão frequentemente tirando suas dúvidas e até mesmo ajudando uns aos outros. O professor demonstra domínio do conteúdo, além de um bom método de ensino. Como, por exemplo, em uma aula, ao iniciar o conteúdo de multiplicação de frações, primeiro propôs um problema no quadro e pediu que os alunos tentassem resolvê-lo, incentivando a interpretação de texto e a criatividade destes. Ainda, em uma aula de uma das turmas do 6º ano, houve um determinado momento em que o professor propôs exercícios de



multiplicação de frações e sugeriu que os participantes envolvidos explicassem as questões no quadro ou tirassem dúvidas com os alunos nas classes, sendo a segunda opção escolhida por eles. Com essa experiência, foi possível notar uma grande diferença entre os níveis dos alunos, pois alguns realizaram as atividades de forma extremamente rápida, enquanto outros tiveram bastante dificuldade em simplificar as frações. Outro momento interessante foi quando um aluno, que estuda pela metodologia Kumon, método que visa incentivar o aluno a ser mais autodidata nos estudos, fez um exercício com uma lógica diferente da que foi ensinada em aula e o professor o chamou no quadro para explicar aos colegas, em que um deles notou que havia uma forma ainda mais coerente de seguir essa lógica.

Nessa perspectiva, os petianos têm procurado interagir com as turmas de acordo com a metodologia do professor. Além disso, está sendo possível identificar a realidade que as escolas públicas vêm enfrentando nesse período, sejam elas relacionadas às dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, como de estrutura física para comportar turmas com um número elevado de alunos. A partir de conversas com o professor das turmas, ficou nítido que a dinâmica das aulas muda a todo instante, visto que o planejamento precisa ser constantemente readequado. Em um dado momento, por exemplo, o professor precisou alterar a ordenação dos conteúdos de uma turma do 8º ano a pedido de um outro professor que solicitou a elaboração de um projeto interdisciplinar envolvendo origamis e tópicos de Geometria Plana.

Em relação ao projeto Alternativa, a participante está cursando o 8º semestre do curso de Matemática Bacharelado. Salienta-se que a turma apresenta dificuldades com operações básicas da matemática, sendo necessário, algumas vezes, retomar conteúdos básicos, como a divisão com números decimais ou relembrar propriedades algébricas, por exemplo. Apesar disso, como a turma é pequena, há aproximadamente 10 alunos frequentando as aulas, quando eles têm alguma dúvida, não se intimidam em perguntar. Por ser do bacharelado, a participante, inicialmente, teve dificuldade para preparar as aulas, visto que essa estava sendo a sua primeira experiência com a docência. Porém, com o *feedback* da turma e dos outros educadores, foi possível melhorar alguns aspectos pedagógicos relacionados ao processo de ensinar.



## CONCLUSÃO

Os dois projetos de extensão que envolvem atividades de ensino do grupo e que foram relatados neste trabalho têm propiciado um primeiro contato com a docência para os participantes envolvidos, de modo que estes estão adquirindo mais confiança, segurança e compreensão da realidade escolar e social, bem como as diferenças entre os alunos, a relação aluno-professor e outros fatores que influenciam os processos de ensino, aprendizagem e avaliação.

Em especial, aos acadêmicos do curso de Bacharelado, nota-se uma grande relevância no desenvolvimento de tais atividades em relação ao seu desenvolvimento profissional, visto que possuem a oportunidade de incrementar suas formações e currículos com o objetivo de ter uma melhor preparação para exercer, posteriormente, a docência no ensino superior. Além disso, para os futuros licenciandos, a inserção voluntária em sala de aula não só amplia as suas visões a respeito do cotidiano escolar e aspectos de educação, pois faz com que os mesmos se familiarizem com o ambiente escolar e sua rotina, como também os tornam mais capacitados para, futuramente, cursarem disciplinas obrigatórias de estágios supervisionados e pedagógicas relacionadas à educação.

Conforme citado anteriormente, os petianos envolvidos nessas atividades encontram-se no início ou metade do curso e, portanto, os projetos desenvolvidos são vistos como uma antecipação de experiências de ensino que ocorreriam mais adiante no curso. Uma vez que está sendo oportunizado momentos em sala de aula relacionados a orientações individuais, exposição de conteúdo e explicações para a turma. Além de terem, por meio do acompanhamento do professor regente, contato direto com aspectos pedagógicos relacionados ao processo de ensino, tais como: planejamento de aulas, formas de exposição, estratégias de ensino e posicionamento frente à turma em situações de sala de aula.

*Trabalho apoiado pelo programa PET - MEC/FNDE.*



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação/MEC. *Manual de Orientações - PET*. Brasília.

Disponível em:

[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=338-manualorientabasicas&category\\_slug=pet-programa-de-educacao-tutorial&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=338-manualorientabasicas&category_slug=pet-programa-de-educacao-tutorial&Itemid=30192). Acesso em: 26 set. 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. *Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática*. Santa Maria, 2019. Disponível em:

<https://www.ufsm.br/cursos/graduacao/santa-maria/matematica/projeto-pedagogico>. Acesso em: 26 set. 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. *Projeto Pedagógico do Curso de Bacharelado em Matemática*. Santa Maria, 2019. Disponível em:

<https://www.ufsm.br/cursos/graduacao/santa-maria/matematica/projeto-pedagogico>. Acesso em: 26 set. 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. *Histórico - Alternativa*. Santa Maria, 2022. Disponível em: <https://www.ufsm.br/projetos/extensao/alternativa/historico/>.

Acesso em: 27 set. de 2022





**Realização:**



**IME**  
INSTITUTO DE  
MATEMÁTICA E  
ESTATÍSTICA

