



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DANILO DE SOUSA PRADO

UM ESTUDO SOBRE CURVAS E SUAS PARALELAS: PROPOSTA DE ENSINO DE
GEOMETRIA DIFERENCIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA UTILIZANDO A FERRAMENTA
TikZ/L^AT_EX

GOIÂNIA

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Danilo de Sousa Prado

3. Título do trabalho

Um Estudo sobre Curvas e suas Paralelas: proposta de ensino de Geometria Diferencial na educação básica utilizando a ferramenta TikZ/LaTeX

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **DANILO DE SOUSA PRADO, Discente**, em 31/05/2021, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith, Professor do Magistério Superior**, em 08/06/2021, às 13:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2102979** e o código CRC **E68478DE**.

DANILO DE SOUSA PRADO

UM ESTUDO SOBRE CURVAS E SUAS PARALELAS: PROPOSTA DE ENSINO DE
GEOMETRIA DIFERENCIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA UTILIZANDO A FERRAMENTA
TikZ/L^AT_EX

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Goiás, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith

GOIÂNIA

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Prado, Danilo de Sousa

Um Estudo sobre Curvas e suas Paralelas [manuscrito] : proposta de ensino de Geometria Diferencial na educação básica utilizando a ferramenta TikZ/LaTeX / Danilo de Sousa Prado. - 2021.

128 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2021.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui símbolos, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Geometria diferencial. 2. Curvas planas parametrizadas. 3. Curvas paralelas. 4. TikZ. I. Smith, Ole Peter, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 26 da sessão de Defesa de Dissertação de **Danilo de Sousa Prado**, que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de concentração em Matemática do Ensino Básico**.

Ao vigésimo nono dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte um, a partir das dez horas e zero minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL: UM ESTUDO SOBRE CURVAS PARALELAS NO PLANO”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Ole Peter Smith - IME/UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Dr. Marcelo Almeida de Souza - IME/UFG membro titular interno e o Professor Doutor Gregório Manoel da Silva Neto - PPIM/UFAL membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **fizeram sugestão de alteração do título do trabalho**, conforme explicitado abaixo. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado com louvor** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ole Peter Smith - IME/UFG, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo nono dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Um Estudo sobre Curvas e suas Paralelas: proposta de ensino de Geometria Diferencial na educação básica utilizando a ferramenta TikZ/LaTeX



Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith, Professor do Magistério Superior**, em 31/05/2021, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Almeida De Souza, Professor do Magistério Superior**, em 31/05/2021, às 15:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **GREGORIO MANOEL DA SILVA NETO, Usuário Externo**, em 01/06/2021, às 08:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador

2046761 e o código CRC **50374DCB**.

Referência: Processo nº 23070.022693/2021-04

SEI nº 2046761

À memória do meu amigo e parceiro de graduação, Gustavo Caires Filié.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Maria Dalva Araújo de Sousa Prado e Jesus Mariano do Prado, e ao meu irmão, Daniel, pelo suporte familiar.

Ao meu orientador, professor Ole Peter Smith, pela acessibilidade de sempre, pelo irrestrito auxílio no trabalho e pelas conversas.

Aos professores do curso, Geci José Pereira da Silva, Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, José Hilário da Cruz, Jhone Caldeira Silva, Lidiane dos Santos Monteiro Lima, Kélem Gomes Lourenço e Ole Peter Smith, pelos ensinamentos.

Aos professores que fizeram parte da banca, Marcelo Almeida de Souza e Gregório Manoel da Silva Neto, por terem aceitado o convite e pelas contribuições.

Ao meu amigo Samuel, pela parceria durante todo o curso, bem como à Jessyca, à Celismar, ao Kennedy e à Maria, pelo acolhimento em sua casa, no almoço às sextas-feiras.

À querida Lidiane, pelo incentivo desde a realização do exame de acesso ao curso.

Aos meus amigos Pedro Bonfim e Fábio Sodré, pelo apoio em determinada fase de elaboração do trabalho.

Aos colegas do curso, em especial ao Américo e ao Andrei, pela consideração de sempre.

Ao grupo “Documentos Modernos com \LaTeX ”, do WhatsApp, pelo auxílio com dúvidas relacionadas ao \LaTeX .

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela coordenação do PROFMAT.

A todos que, de alguma forma, contribuíram nesses dois anos de curso.

“Existe um paralelismo fiel entre o progresso social e a atividade matemática, os países socialmente atrasados são aqueles em que a atividade matemática é nula ou quase nula.”

(Jacques Chapellon)

RESUMO

Quando se estuda as geometrias plana e analítica, é comum se deparar com os termos “retas paralelas” e “circunferências concêntricas”, porém, não é corriqueiro se falar em parábolas, ou outra curva qualquer, paralelas. A pesquisa traz elementos da geometria diferencial, visando o estudo de uma classe especial de curvas planas: as paralelas a uma curva dada. Para isso, foram recordados os conceitos de vetor e de curva parametrizada – as curvas estudadas estão nessa forma –, ambos da geometria analítica; e também é introduzido o conceito de derivada, apresentando as regras de derivação de alguns tipos de funções reais e vetoriais. São apresentadas as parametrizações de algumas curvas, dentre as quais a elipse, a cicloide e a hipocicloide, que, junto com a parábola, foram os exemplos principais no estudo das paralelas. No âmbito da geometria diferencial, são exibidas as propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas, destacando o sistema de Frenet, a curvatura e a evoluta (curva que contém os centros de curvatura de uma curva dada). As curvas paralelas, também conhecidas como *offsets* ou *wavefronts*, tiveram seus primeiros estudos com Leibniz, por volta de 1692 (FAROUKI; NEFF, 1990). Nesse contexto histórico, são mostradas algumas de suas aplicações, e então propõe-se um estudo analítico e geométrico de suas propriedades. Ao final, é proposta uma sequência didática destinada à aplicação do conteúdo aqui tratado em uma turma do 3º ano do ensino médio. O recurso metodológico consiste de um conjunto de atividades a ser trabalhado, exclusivamente, no laboratório de informática, que tem como objetivo a inclusão de uma ferramenta computacional (TikZ) que auxilie no processo de ensino e aprendizagem das curvas paralelas, e que propicie aos estudantes o desenvolvimento da habilidade de produção de algoritmos durante a elaboração das figuras. A execução de tal proposta se baseia na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), onde enfatiza-se a necessidade do desenvolvimento do pensamento computacional nos estudantes; e também em Ávila (1991), que considera a importância do ensino da disciplina de Cálculo no ensino secundário.

Palavras-chave: Geometria diferencial. Curvas planas parametrizadas. Curvas paralelas. TikZ.

ABSTRACT

Studying the planar and analytical geometry, it is common to come across terms like *parallel lines* and *concentric circles*. More rarely, however, one encounters terms like parallels of a parabola – or of any other curve, for that matter. This thesis treats elements from differential geometry of parameterized planar curves: the parallels of a given curve. We start by establishing the concepts of vectors and parameterized curves, and the concept of derivative is also introduced, presenting the derivation rules of some types of real and vector functions. We present parametrizations of a number of curves, including ellipse, cycloid as well as hypercycloids, which along with the parabola, represents the main examples presented. Within the concepts of differential geometry, we introduce geometrical properties of parameterized planar curves, such as Frenet system, curvature and evolute (the curve of traced by the center of curvatures of a given curve). Parallel curves, also known as offsets or wavefronts, was first studied by Leibniz, around 1692 (FAROUKI; NEFF, 1990). Within this historical context, we present a few applications, based on which we proceed with a more detailed analytical and geometrical study of their properties. At the end, a didactic sequence is proposed for the application of the content treated here in a class of the 3rd year of high school. The methodological resource consists of a set of activities to be worked, exclusively, in the computer lab, which aims to include a computational tool (TikZ) that helps in the process of teaching and learning the parallel curves, and that provides students with the development of the ability to produce algorithms during the elaboration of the figures. The implementation of such a proposal is based on the National Common Curricular Base (BNCC), where it emphasizes the need for the development of computational thinking in students; and also in Ávila (1991), which considers the importance of teaching the subject of Calculus in secondary education.

Keywords: Differential geometry. Parameterized plane curves. Parallel curves. TikZ.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Segmentos orientados com sentidos opostos	23
Figura 1.2 – Representantes de \underline{v}	24
Figura 1.3 – Vetor representante de \overrightarrow{AB}	24
Figura 1.4 – Vetores representantes de \overrightarrow{AB}	25
Figura 1.5 – Representação da adição dos vetores \underline{u} e \underline{v}	25
Figura 1.6 – Regra do paralelogramo	26
Figura 1.7 – Representação do produto de um vetor por um escalar	26
Figura 1.8 – Ângulo entre os vetores \underline{u} e \underline{v}	28
Figura 1.9 – Reta tangente ao gráfico de f	30
Figura 1.10–Retas tangentes à parábola	32
Figura 2.1 – Trajetória de uma partícula p	37
Figura 2.2 – Representação da parametrização de uma curva	38
Figura 2.3 – Catenária	39
Figura 2.4 – Traço de $\underline{r}(t)$	39
Figura 2.5 – Círculo de centro na origem e raio r	40
Figura 2.6 – Círculo de centro (x_0, y_0) e raio r	41
Figura 2.7 – Elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	42
Figura 2.8 – Hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$	44
Figura 2.9 – Gráficos das funções $\sinh t$ e $\cosh t$	44
Figura 2.10–Traço de \mathcal{H}	45
Figura 2.11–Construção da curva de Agnesi	46
Figura 2.12–Curva de Agnesi	48
Figura 2.13–Cicloide	48
Figura 2.14–Animação da cicloide	49
Figura 2.15–Posição inicial de \mathcal{C}_2	50
Figura 2.16– \mathcal{C}_2 rolando por dentro de \mathcal{C}_1 , no sentido horário	50
Figura 2.17–Determinando as coordenadas de P em função de t	51
Figura 2.18–Exemplos de hipotrocoides e hipocicloide	52
Figura 2.19–Posição inicial de \mathcal{C}_2	53
Figura 2.20– \mathcal{C}_2 rolando por fora de \mathcal{C}_1 , no sentido anti-horário	53
Figura 2.21–Determinando as coordenadas de P em função de t	54

Figura 2.22–Exemplos de epitrocoides e epicicloide	55
Figura 2.23–Curvas fechadas e periódicas	56
Figura 2.24– <i>Curva oito</i>	56
Figura 2.25– <i>Espiral de Arquimedes, $a = 1$</i>	57
Figura 3.1 – Vetores tangente e normal à curva em $\underline{\mathbf{r}}(t)$	58
Figura 3.2 – Exemplos de curvas regulares e singulares	59
Figura 3.3 – Reta tangente à curva em $(1, 1)$	61
Figura 3.4 – Tractriz	61
Figura 3.5 – Sistema de Frenet ao longo da curva	63
Figura 3.6 – Ângulo natural, θ	63
Figura 3.7 – Círculos osculadores em $\underline{\mathbf{r}}(t_1)$ e $\underline{\mathbf{r}}(t_2)$	67
Figura 3.8 – Parábola e sua evoluta	69
Figura 3.9 – Elipse e sua evoluta	69
Figura 3.10– Hipérbole e sua evoluta	70
Figura 3.11– Cicloide e sua evoluta	70
Figura 3.12– Hipocicloide e sua evoluta	71
Figura 4.1 – Caminho do centro da ferramenta de corte cilíndrica ao longo da paralela , a uma distância d da curva original	73
Figura 4.2 – Representação de acessibilidade na robótica	73
Figura 4.3 – Curvas paralelas a uma curva dada	74
Figura 4.4 – Paralela a uma curva dada , $d < 0$	74
Figura 4.5 – Parábola e paralelas	76
Figura 4.6 – Elipse e paralelas	77
Figura 4.7 – Cicloide e paralelas	78
Figura 4.8 – Hipocicloide e paralelas	79
Figura 4.9 – Gráfico de $\kappa(t)$	80
Figura 4.10–Gráfico de $\kappa(t)$	81
Figura 4.11– Parábola , paralelas (limitadora) e evoluta	82
Figura 4.12– Elipse , paralelas (limitadoras) e evoluta	83
Figura 4.13–Gráfico de $\kappa(t)$	84
Figura 4.14– Cicloide , paralelas (limitadoras) e evoluta	85
Figura 4.15–Gráfico de $\kappa(t)$	86

Figura 4.16–Hipocicloide, paralelas (limitadoras) e evoluta	87
Figura 4.17–Pontos de descontinuidade nas paralelas	88
Figura 5.1 – Interseção de círculos	103
Figura 5.2 – Soma de Riemann	103
Figura 5.3 – Coração	105
Figura 5.4 – Área de trabalho do TeXmaker	106
Figura 5.5 – Compilação sem erro(s)	109
Figura 5.6 – Compilação com um erro	110
Figura C.1 – Página inicial do gnuplot	144
Figura C.2 – Idioma para a instalação	144
Figura C.3 – Acordo de licença	145
Figura C.4 – Informação	145
Figura C.5 – Pasta de destino	146
Figura C.6 – Componentes	146
Figura C.7 – Atalho	147
Figura C.8 – Tarefas adicionais	147
Figura C.9 – Instalação	148
Figura C.10 – Configuração	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades geométricas das curvas paralelas	91
Tabela 2 – Propriedades geométricas das curvas paramétricas	129
Tabela 3 – Propriedades geométricas de um círculo	130
Tabela 4 – Propriedades geométricas de uma parábola	131
Tabela 5 – Propriedades geométricas de uma elipse	132
Tabela 6 – Propriedades geométricas de uma hipérbole	133
Tabela 7 – Propriedades geométricas de uma cicloide	134
Tabela 8 – Propriedades geométricas da hipotrocoide	135
Tabela 9 – Propriedades geométricas da epitrocoide	135

LISTA DE CÓDIGOS-FONTE

Código-fonte 1 – Coração	105
Código-fonte 2 – Catenária (Figura 2.3)	136
Código-fonte 3 – Cicloide (Figura 2.13)	137
Código-fonte 4 – Hipotrocoide (Figura 2.18)	140
Código-fonte 5 – Elipse, paralelas e evoluta (Figura 4.12)	141
Código-fonte 6 – Hipocicloide, paralelas e evoluta (Figura 4.16)	142

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^2	Conjunto dos pares ordenados de pontos do plano
$P(a, b)$	Ponto P , de coordenadas a e b
$d(A, B)$	Distância entre os pontos A e B
$a \in A$	O elemento a pertence ao conjunto A
$A \subset B$	A é um subconjunto de B
$\underline{\mathbf{v}}$	Vetor \mathbf{v}
AB	Segmento de reta que une A a B
\overrightarrow{AB}	Segmento de reta orientado de A a B
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	Determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}$	Produto escalar entre $\underline{\mathbf{u}}$ e $\underline{\mathbf{v}}$
$ \underline{\mathbf{v}} $	Módulo de $\underline{\mathbf{v}}$
$Proj_{\underline{\mathbf{v}}} \underline{\mathbf{u}}$	Projeção ortogonal do vetor $\underline{\mathbf{u}}$ na direção do vetor $\underline{\mathbf{v}}$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Limite da função $f(x)$ quando x tende a x_0
$f'(x)$	Derivada de 1ª ordem da função f , na variável x
$f''(x)$	Derivada de 2ª ordem da função f , na variável x
$f : A \rightarrow B$	Função f , com domínio A e contradomínio B
ABC	Triângulo de vértices A, B e C
xOy	Sistema de coordenadas ortogonal do plano, formado pelos eixos x e y , com centro na origem O
$\forall x \in A$	Para todo elemento x do conjunto A
\overline{AB}	Comprimento de AB
\widehat{AOB}	Ângulo formado entre as semirretas OA e OB , com origem em O
$AB \parallel CD$	Segmentos AB e CD paralelos
\widehat{AB}	Arco de circunferência formado pelos pontos A e B
$\widehat{\underline{\mathbf{v}}}$	$\underline{\mathbf{v}}$ rotacionado 90° no sentido anti-horário

$x \rightarrow x_0$	O ponto x tende ao ponto x_0
$A \setminus \{a\}$	Conjunto A com exceção do elemento a
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais positivos
\mathcal{C}^2	Classe das funções com segunda derivada contínua
$a \notin A$	O elemento a não pertence ao conjunto A
\mathbb{Z}_+	Conjunto dos números inteiros positivos

SUMÁRIO

	Introdução	21
1	CONCEITOS PRELIMINARES	23
1.1	Vetores no plano	23
1.2	Derivada e limite	29
1.2.1	Regras de derivação de funções reais	34
1.2.2	Funções Vetoriais e suas derivadas	36
2	CURVAS PLANAS PARAMETRIZADAS	37
2.1	Conceito, definição e exemplos	37
2.2	Parametrização de algumas curvas	40
2.2.1	Círculo	40
2.2.2	Elipse	42
2.2.3	Hipérbole	43
2.2.4	Curva de Agnesi	46
2.2.5	Cicloide	48
2.2.6	Hipocicloide e hipotrocoide	49
2.2.7	Epicloide e epitrocoide	53
2.3	Tipos de curvas	55
3	GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS	58
3.1	Vetores tangente e normal à curva; velocidade escalar e vetor aceleração	58
3.2	Pontos regulares e singulares	59
3.3	Retas tangente e normal à curva	60
3.4	Cúspides	61
3.5	Vetores tangente e normal unitários e sistema de Frenet	62
3.6	Ângulo natural; velocidade e frequência angulares e equações de Frenet-Serret	63
3.7	Determinante	64
3.8	Curvatura	65
3.8.1	Definição	65
3.8.2	Círculo osculador; raio e centro de curvatura	66
3.9	Evoluta	67

3.9.1	Alguns resultados	67
3.9.2	Exemplos	68
4	CURVAS PARALELAS	73
4.1	Contexto histórico e aplicações	73
4.2	Definição e exemplos	73
4.3	Propriedades geométricas da paralela	88
5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O 3º DO ENSINO MÉDIO	92
5.1	Base Nacional Comum Curricular: Caracterização, competências e a matemática do ensino médio	93
5.2	Considerações sobre o ensino de derivada e vetor na educação básica brasileira	96
5.3	Desenhando em <i>TikZ</i> com o <i>TeXmaker</i>	102
5.3.1	Sobre o <i>TikZ</i>	102
5.3.2	Sobre o <i>TeXmaker</i>	106
5.4	A sequência didática	111
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	125
	REFERÊNCIAS	126
	APÊNDICES	129
	APÊNDICE A – Propriedades geométricas das curvas paramétricas . .	129
	APÊNDICE B – Códigos <i>TikZ</i> de algumas figuras	136
	APÊNDICE C – Instalação do <i>gnuplot</i>	144

INTRODUÇÃO

No 2º ano do curso, foram ofertadas as disciplinas MA 22 – Fundamentos de Cálculo e MA 23 – Geometria Analítica. Na primeira, foi abordado o conceito de derivada de funções de uma variável, e, na segunda, os conteúdos de vetores no plano e curvas planas parametrizadas.

Assim, mesmo que a disciplina de Geometria Diferencial não tenha feito parte da matriz curricular, os referidos conceitos bastaram para a escrita deste trabalho, sendo os únicos pré-requisitos para um bom entendimento do tema aqui tratado, que é o estudo de uma classe especial de curvas planas: as paralelas a uma curva dada.


Além disso, como poderá ser observado, uma das propostas presente no trabalho é que os referidos conceitos sejam trabalhados na educação básica brasileira, tendo em vista que já fizeram parte do currículo de matemática dessa etapa educacional no país, e foram perdendo espaço ao longo do tempo.

Durante uma conversa com o orientador, onde se discutia possíveis assuntos para a pesquisa, o tema das paralelas surgiu. Causou surpresa, e então interesse, já que, até então, era um tópico desconhecido pelo autor. Aliado a isso, existia o desejo de se produzir um material que contivesse figuras elaboradas com a ferramenta TikZ¹, do T_EX²/L^AT_EX³, sendo conhecida por sua excelente qualidade gráfica.

Inicialmente, foi feito um levantamento bibliográfico onde constatou-se que, em quase sua totalidade, os referenciais que tratam da temática das curvas paralelas estão escritos em língua estrangeira, com exceção de Alencar, Santos e Neto (2020).

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, são apresentadas a definição, as operações e as propriedades dos vetores, sendo definidos, também, combinação linear, vetores linearmente dependentes/independentes, base e produto escalar. Em seguida, é introduzido o conceito de derivada, abordando o problema da reta tangente, apresentando as regras de derivação para funções reais e vetoriais.

Após, no Capítulo 2, são definidos curva plana parametrizada e traço de uma curva. A

¹ Desenvolvida por Till Tantau, é, basicamente, uma ferramenta utilizada para desenhar figuras, por meio de comandos T_EX. Por exemplo, o comando `\tikz \fill[red] (lex,lex) circle (lex);` gera . O nome é um acrônimo do alemão “TikZ ist *kein* Zeichenprogramm”, que pode ser traduzido como “TikZ não é um programa de desenho” (TANTAU, 2020, p. 27).

² Criado por Donald Knuth, por volta do final da década de 70, é um sistema tipográfico que foi pensado inicialmente para a produção de livros, em especial os matemáticos, por meio de comandos.

³ Desenvolvido por Leslie Lamport, também é um sistema tipográfico para a produção de conteúdo matemático. Com ele, é possível escrever artigos científicos, livros, elaborar pôsteres e apresentações, etc. Informalmente, seria uma aprimoração do T_EX. Assim, quando se fala em L^AT_EX, é devido dar os créditos ao T_EX.

seguir, são mostradas algumas parametrizações, com destaque para a inserção de uma animação da cicloide; e são definidos os tipos de curvas, apresentando alguns exemplos.

Posteriormente, no Capítulo 3, são introduzidas as propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas, como vetores tangente e normal à curva, pontos regulares e singulares, sistema de Frenet, curvatura e evoluta, sendo apresentados dois resultados.

No Capítulo 4, inicialmente é apresentado um breve contexto histórico do estudo das curvas paralelas, mostrando algumas de suas aplicações. Após, é definida, algebricamente, curva paralela, sendo feita uma representação geométrica dessa definição. Em seguida, são apresentados alguns exemplos desse tipo de curva, onde, em cada caso, é feita uma análise algébrica de suas propriedades geométricas.

Por fim, no Capítulo 5, é proposta uma aplicação dos conceitos até então tratados no ensino médio, mais especificamente em uma turma do 3º ano do ensino médio. A princípio, são apontados trechos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que discutem competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, algumas das quais são possíveis de serem alcançadas por meio da referida proposta. Após, é apresentado um breve histórico do ensino da disciplina de Cálculo no Brasil, citando algumas das reformas educacionais que ocorreram no país e os motivos pelos quais a matéria perdeu espaço no currículo. Em seguida, é exibida parte dos programas de matemática de alguns dos países melhores colocados no último Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), nos quais estão presentes o Cálculo. Um dos objetivos da proposta pedagógica é que os estudantes elaborem algoritmos para a construção de figuras na linguagem TikZ, que auxiliarão no entendimento dos conceitos trabalhados. Assim, são exibidos “tutoriais” de utilização da ferramenta e também de um editor $\text{T}_\text{E}\text{X}/\text{L}^{\text{A}}\text{T}_\text{E}\text{X}$: o TeXmaker. Finalmente, é apresentada uma sequência de atividades que fazem parte da proposta.

O Apêndice A traz um resumo, em forma de tabela, das propriedades geométricas das principais curvas utilizadas como exemplo ao longo do texto.

No Apêndice B, são disponibilizados os códigos-fonte, em TikZ, de algumas figuras constantes no trabalho, de modo que o leitor possa copiá-los, reproduzi-los ou mesmo modificá-los.

O Apêndice C exhibe um guia de instalação do `gnuplot`, ferramenta que deverá ser habilitada para o desenho de gráficos e curvas no TeXmaker.

1 CONCEITOS PRELIMINARES

1.1 Vetores no plano

Denota-se por \mathbb{R}^2 o espaço euclidiano bidimensional, ou seja, o conjunto de pares ordenados, (x, y) , de pontos do plano.

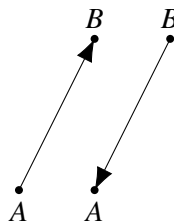
Definição 1.1.1. *Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pontos do plano. A **distância euclidiana** entre esses dois pontos é dada por*

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ou seja, $d(P, Q) = \overline{PQ}$ é definido como o comprimento do segmento PQ .

Denota-se por \overrightarrow{AB} um **segmento orientado** que possui origem no ponto A e extremidade no ponto B . Estabelece-se, assim, uma orientação de A para B no segmento AB . Dessa forma, \overrightarrow{BA} está orientado no sentido oposto ao de \overrightarrow{AB} , conforme representado na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Segmentos orientados com sentidos opostos

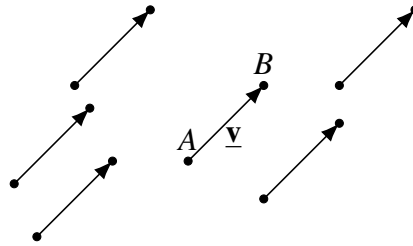


Fonte: O autor (2021)

Definição 1.1.2. *Diz-se que os segmentos orientados AB e CD são **equipolentes**, e escreve-se $AB \equiv CD$, se satisfazem às seguintes propriedades:*

- a) *têm o mesmo comprimento;*
- b) *são paralelos ou colineares;*
- c) *têm o mesmo sentido.*

Definição 1.1.3. *Sejam A e B pontos no plano. O **vetor** $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB . Cada segmento equipolente a AB é um **representante** do vetor \overrightarrow{AB} (Figura 1.2).*

Figura 1.2 – Representantes de \underline{v} 

Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

Assim, têm-se as seguintes propriedades dos vetores:

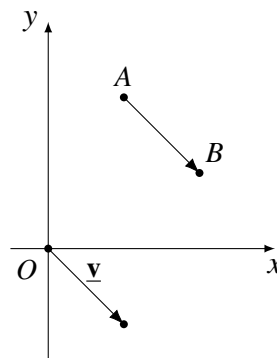
- a) Os segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, representam o mesmo vetor, ou seja,

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

- b) Seja um ponto A qualquer no plano. O vetor $\underline{0} = \overrightarrow{AA}$ é chamado de **vetor nulo**.
 c) Dado um vetor \underline{v} e um ponto A qualquer, existe um único ponto B tal que $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$.
 Ou seja, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante de \underline{v} .

Definição 1.1.4. Dados dois pontos distintos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, os números reais $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$ são chamados de **coordenadas do vetor** $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$, e escreve-se $\underline{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Exemplo 1.1.1. Representante de \overrightarrow{AB} . Seja o segmento orientado \overrightarrow{AB} , com $A(1, 2)$ e $B(2, 1)$. O vetor $\underline{v} = (2 - 1, 1 - 2) = (1, -1)$ é o único representante de \overrightarrow{AB} que possui origem no ponto $O(0, 0)$ (Figura 1.3).

Figura 1.3 – Vetor representante de \overrightarrow{AB} 

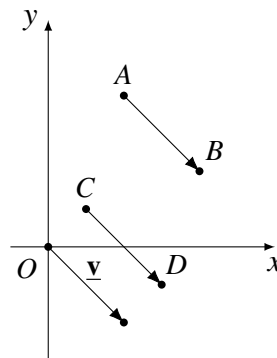
Fonte: O autor (2021)

A partir do exemplo anterior, para encontrar um outro representante de \vec{AB} , com origem em $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, por exemplo, basta determinar as coordenadas do ponto $D(x, y)$, tal que $\underline{v} = \vec{CD}$. Assim,

$$(1, -1) = \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

A Figura 1.4 representa essa situação:

Figura 1.4 – Vetores representantes de \vec{AB}



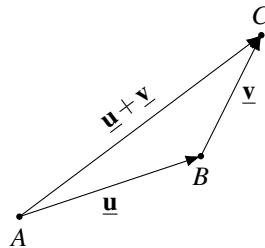
Fonte: O autor (2021)

São definidas duas operações no conjunto dos vetores: **adição** e **multiplicação por escalar**. Têm-se o seguinte:

- Adição: Sejam os vetores $\underline{u} = \vec{AB} = (x_1, y_1)$, $\underline{v} = \vec{BC} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\underline{u} + \underline{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \vec{AC}$$

Figura 1.5 – Representação da adição dos vetores \underline{u} e \underline{v}

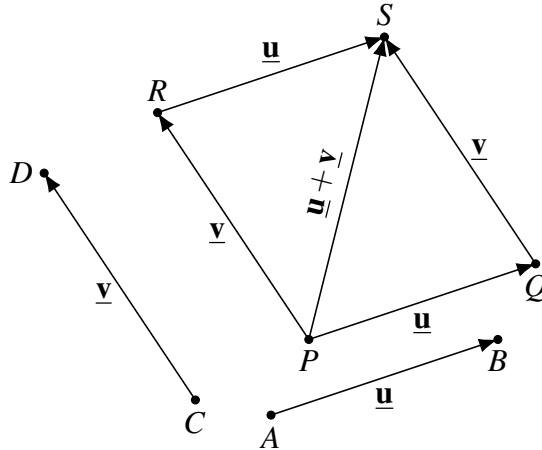


Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

Uma outra maneira de se representar geometricamente a adição de dois vetores é da seguinte forma: sejam $\underline{u} = \vec{AB}$ e $\underline{v} = \vec{CD}$ vetores não paralelos, P um ponto escolhido no plano, e Q e R tais que $\underline{u} = \vec{PQ}$ e $\underline{v} = \vec{PR}$. Tem-se, no paralelogramo $PQSR$, que o vetor adição $\underline{u} + \underline{v}$

é igual ao vetor \overrightarrow{PS} , onde PS é a diagonal do paralelogramo (Figura 1.6). Essa maneira de se adicionar dois vetores é conhecida como **Regra do Paralelogramo**.

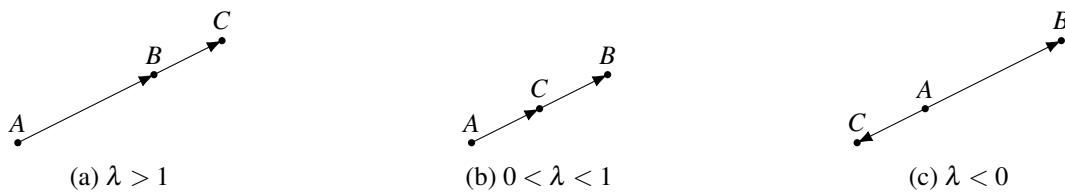
Figura 1.6 – Regra do paralelogramo



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

- Produto por escalar: o produto de $\lambda \in \mathbb{R}$ por $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $\lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, representado por \overrightarrow{AC} em três situações, conforme a Figura 1.7:

Figura 1.7 – Representação do produto de um vetor por um escalar



Fonte: O autor (2021)

Nas situações acima, têm-se o seguinte:

- A, B e C são colineares;
- $d(A, C) = |\lambda|d(A, B)$;
- $B = C$ se $\lambda = 0$;
- Os segmentos orientados AC e AB têm mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

As operações de adição e de multiplicação por escalar possuem as seguintes propriedades:

- Adição: sejam $\underline{u}, \underline{v}$ e $\underline{w} \in \mathbb{R}^2$. Têm-se o seguinte:
 - a) **Comutatividade:** $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$;

- b) **Associatividade:** $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$;
- c) **Elemento neutro:** existe o vetor nulo, $\underline{0}$, tal que $\underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$;
- d) **Inverso:** para todo vetor \underline{u} , existe um único vetor $-\underline{u}$, chamado de *simétrico aditivo*, tal que $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$.
- Multiplicação por escalar: sejam $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:
 - a) **Associatividade:** $\lambda(\alpha\underline{u}) = (\lambda\alpha)\underline{u}$;
 - b) **Elemento neutro:** existe o número $1 \in \mathbb{R}$, chamado de *elemento neutro multiplicativo*, tal que $1\underline{u} = \underline{u}$;
 - c) **Distributividade:** $\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda\underline{u} + \lambda\underline{v}$ e $(\lambda + \alpha)\underline{u} = \lambda\underline{u} + \alpha\underline{u}$.

Definição 1.1.5. O vetor \underline{u} é *múltiplo* do vetor \underline{v} se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\underline{u} = \lambda\underline{v}$.

Proposição 1.1.1. Sejam os vetores $\underline{u} = (x_1, y_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Se $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, ou seja, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$, os vetores \underline{u} e \underline{v} serão múltiplos um do outro. Caso a igualdade não ocorra, os vetores \underline{u} e \underline{v} não serão múltiplos um do outro.

Definição 1.1.6. O vetor \underline{v} é uma **combinação linear** dos vetores $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ se existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$\underline{v} = \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \dots + \lambda_n\underline{v}_n.$$

Definição 1.1.7. Considerando o plano, diz-se que o conjunto $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ é **linearmente independente** (LI), ou que os vetores \underline{u} e \underline{v} são LI, se a equação

$$\lambda_1\underline{u} + \lambda_2\underline{v} = \underline{0}$$

implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Caso a igualdade ocorra para λ_1 e λ_2 não ambos nulos, diz-se que $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ é **linearmente dependente** (LD), ou que os vetores \underline{u} e \underline{v} são LD.

Definição 1.1.8. Um conjunto $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ de vetores do \mathbb{R}^2 será uma **base** do \mathbb{R}^2 se for LI. Sendo LI, qualquer outro vetor \underline{w} poderá ser escrito, de forma única, como combinação linear de \underline{u} e \underline{v} , ou seja, $\underline{w} = \lambda_1\underline{u} + \lambda_2\underline{v}$, para algum λ_1 e algum λ_2 .

Definição 1.1.9. Dados os vetores $\underline{u} = (x_1, y_1)$ e $\underline{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. O **produto escalar** entre esses vetores é o número real dado por

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Sejam os vetores $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O produto escalar possui as seguintes propriedades:

- $\underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0$. A igualdade ocorre se, e somente se, $\underline{u} = \underline{0}$;
- $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ (simetria);
- $\underline{u} \cdot (\alpha \underline{v}) = \alpha(\underline{u} \cdot \underline{v})$ (associatividade);
- $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ (distributividade em relação à soma).

Dois vetores \underline{u} e \underline{v} são **ortogonais** quando $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

Definição 1.1.10. O comprimento do vetor $\underline{v} = (x, y)$ é dado por

$$|\underline{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}.$$

Dados os vetores $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$, têm-se as seguintes propriedades:

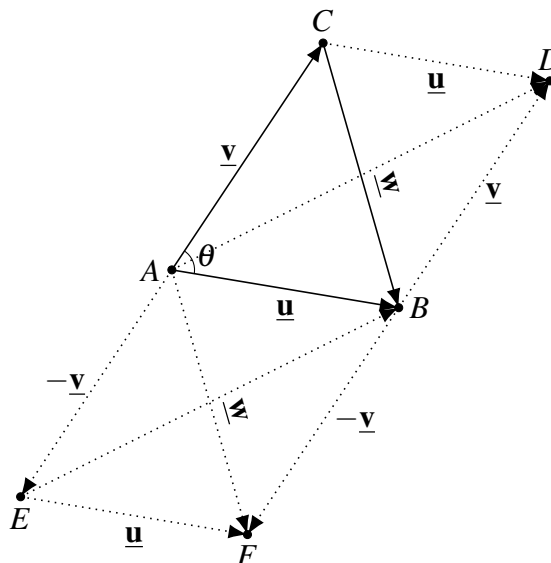
- $|\underline{u}| = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{0}$;
- $|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}| |\underline{v}|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);
- $|\underline{u} + \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$ (Desigualdade triangular).

Considere agora os vetores \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} , onde

$$\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}.$$

Ou seja, \underline{w} é igual à soma de \underline{u} com o simétrico de \underline{v} . O objetivo é encontrar o ângulo θ , formado entre os vetores \underline{u} e \underline{v} (Figura 1.8).

Figura 1.8 – Ângulo entre os vetores \underline{u} e \underline{v}



Os vetores \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} representam os lados do triângulo ABC . Da Lei dos Cossenos, tem-se:

$$\begin{aligned} |\underline{u} - \underline{v}|^2 &= |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta \\ \Leftrightarrow |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2 &= |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Assim, considerando que θ é o *menor* dos ângulos formados entre \underline{u} e \underline{v} , isto é, $0 \leq \theta \leq \pi$, têm-se o seguinte:

- a) $\cos\theta > 0 \Leftrightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} > 0$. Logo, θ será agudo.
- b) $\cos\theta < 0 \Leftrightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} < 0$. Logo, θ será obtuso.
- c) $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. Logo, θ será reto.

Os vetores $\underline{v} = (x, y)$, para os quais $|\underline{v}| = 1$, são chamados de **unitários**. Para *normalizar* um vetor qualquer, isto é, torná-lo unitário, basta dividir cada uma de suas coordenadas pelo seu comprimento.

Uma base $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ do \mathbb{R}^2 é **ortogonal** quando \underline{u} e \underline{v} são ortogonais.

Quando uma base $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ é ortogonal, e, além disso, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 1$, diz-se que a base é **ortonormal**.

Como exemplo de base do plano ortonormal, tem-se a base canônica, formada pelos vetores $\underline{i} = (1, 0)$ e $\underline{j} = (0, 1)$.

Definição 1.1.11. A *projeção ortogonal* do vetor \underline{u} na direção do vetor \underline{v} , não nulo, é dada por

$$Proj_{\underline{v}} \underline{u} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \underline{v}.$$

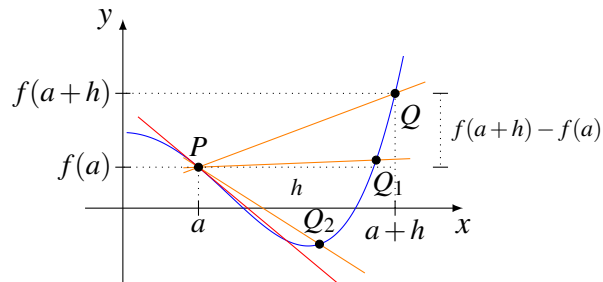
Observação 1.1.1. Por vezes, será utilizada a notação $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para indicar um vetor.

1.2 Derivada e limite

Nesta seção, serão introduzidos os conceitos de **derivada** e, de forma breve, **limite**, da disciplina de Cálculo. O primeiro conceito será abordado por meio da ideia de reta tangente a uma curva, e o segundo, dessa forma, surgirá naturalmente. O conteúdo que se segue é embasado em Ávila (2013).

Suponha que a curva seja o gráfico de uma função f . Sejam os pontos $P(a, f(a))$, pelo qual passa a reta tangente, e $Q(a+h, f(a+h))$, ambos pertencentes ao gráfico de f , conforme a Figura 1.9.

Figura 1.9 – Reta tangente ao gráfico de f



Fonte: O autor (2021)

A inclinação da reta secante que passa pelos pontos P e Q , dada por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0,$$

é chamada **razão incremental**. Esse nome se explica pelo fato de h ser o incremento que se dá à abscissa de P , para obter a abscissa de Q . Dessa forma, a ordenada $f(a+h)$, de Q , é obtida de $f(a)$, ordenada de P , pelo incremento $f(a+h) - f(a)$, ou seja, $f(a+h) = f(a) + [f(a+h) - f(a)]$.

Olhando para a Figura 1.9, imagine que o ponto Q percorra a curva passando por Q_1, Q_2 e se aproximando de P , que está fixo. Aproxima-se Q de P , dessa forma, fazendo o número h se aproximar de zero na razão incremental, e escreve-se $h \rightarrow 0$ (lê-se “ h tende a zero”). À medida que os pontos se aproximam, a razão incremental se aproxima de um valor real m . Assim, define-se a **reta tangente** à curva, no ponto P , como sendo a reta que passa por esse ponto e que possui inclinação (*coeficiente angular* ou *declive*) igual a m .

Observação 1.2.1. No caso da Figura 1.9, Q se aproxima de P pela direita, sendo h um número real positivo. Caso h assumisse valores negativos próximos de zero, o ponto Q se aproximaria de P pela esquerda.

Observação 1.2.2. A reta tangente pode tocar a curva em mais de um ponto, como ocorre na Figura 1.9.

Ao fazer $h \rightarrow 0$, e a razão incremental se aproximar de um valor m , finito, diz-se que m é o **limite** da razão incremental, com h tendendo a zero, e escreve-se

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (1.2)$$

Definição 1.2.1. Conhecidos um ponto $P(x_0, y_0)$ e a inclinação m da reta, sua equação é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Exemplo 1.2.1. Retas tangentes a uma parábola. Encontrar as retas tangentes à parábola $f(x) = x^2 - 2$ em $x = \frac{3}{2}$ e em $x = a$ qualquer.

- $x = \frac{3}{2}$: Têm-se que

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}, \quad \text{e}$$

$$f\left(\frac{3}{2} + h\right) = \left(\frac{3}{2} + h\right)^2 - 2 = h^2 + 3h + \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$\frac{f\left(\frac{3}{2} + h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = \frac{h(h+3)}{h} \stackrel{h \neq 0}{=} h + 3.$$

A expressão $h + 3$ se aproxima de 3 quando $h \rightarrow 0$, e pode-se escrever

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{3}{2} + h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{h} = 3.$$

Portanto, a equação da reta tangente à parábola no ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, que tem inclinação $m = 3$, é dada por

$$y - \frac{1}{4} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = 3x - \frac{17}{4}.$$

- $x = a$:

$$f(a) = a^2 - 2, \quad \text{e}$$

$$f(a+h) = (a+h)^2 - 2 = a^2 + 2ah + h^2 - 2.$$

Logo,

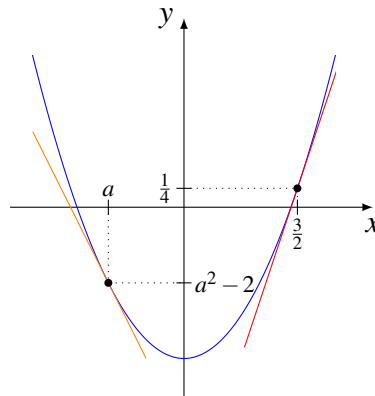
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} \stackrel{h \neq 0}{=} h + 2a.$$

O limite da expressão $h + 2a$, com $h \rightarrow 0$, é $2a$. Portanto, a reta tangente à parábola, em $(a, a^2 - 2)$, é da forma

$$y - a^2 + 2 = 2a(x - a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2 - 2.$$

Na Figura 1.10, estão representadas as retas tangentes à parábola nos pontos $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $(a, a^2 - 2)$, sendo $a < 0$.

Figura 1.10 – Retas tangentes à parábola



Fonte: O autor (2021)

□

Observação 1.2.3. Caso a razão incremental tenda a $\pm\infty$, quando $h \rightarrow 0$, define-se a reta tangente ao gráfico de $f(x)$, no ponto $P(a, f(a))$, como sendo a reta $x = a$, paralela ao eixo y .

Observação 1.2.4. Fazendo uma mudança de variável da forma $h = x - a$, $x \neq a$, quando $h \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$, pode-se escrever

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1.3)$$

Exemplo 1.2.2. *Inclinação da curva.* Encontrar a inclinação da curva $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, no ponto $x = 1$, utilizando a nova notação. Tem-se

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}.$$

Na função

$$g(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1},$$

não se pode fazer $x = 1$, já que chegaria à indeterminação $\frac{0}{0}$. Porém, sendo $x \neq 1$, $g(x)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$g(x) = \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \frac{-x-1}{x-1} = -\frac{1}{x}.$$

Assim,

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x} = -1.$$

□

Observação 1.2.5. No exemplo anterior, não é necessário fazer $x = 1$ para encontrar o limite -1 . Basta verificar que, para valores de x próximos de 1, o quociente tende a -1 . As funções

$$g(x) = \frac{1-x}{x-1} \quad e \quad h(x) = -\frac{1}{x}$$

são iguais para $x \neq 1$. A segunda delas, inclusive, está definida em $x = 1$, e seu limite, com $x \rightarrow 1$, coincide com seu valor no ponto, isto é

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1).$$

A Observação 1.2.5 nos leva à seguinte definição:

Definição 1.2.2. Diz-se que uma função f é **contínua** num ponto x_0 quando as seguintes condições são satisfeitas:

- a) f está definida em x_0 ; e
- b) $f(x)$ tem limite com $x \rightarrow x_0$, e esse limite é igual a $f(x_0)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Uma função f é contínua em um domínio D (conjunto de todos os pontos onde é definida) se for contínua em cada ponto desse domínio.

De acordo com Stewart (2013b, p. 133), os limites do tipo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

aparecem quando calcula-se uma taxa de variação nas áreas da Ciência ou da Engenharia, como a taxa de uma reação química ou o custo marginal, em Economia.

Definição 1.2.3. A **derivada** de uma função f , em um número a , denotada por $f'(a)$ (lê-se: “ f linha de a ”), é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (1.4)$$

se o limite existir.

Como $x = a$ é um valor genérico, pode ser substituído por qualquer outro símbolo, em particular, pelo próprio x . Assim, a expressão (1.4) pode ser reescrita como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.5)$$

Portanto, f' pode ser considerada como uma nova função, chamada **derivada de f** . Como foi visto, o valor de $f'(x)$ representa, geometricamente, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Diz-se, também, que f' é a *derivada de 1ª ordem* de f . Assim, a derivada de f' é chamada de *derivada de 2ª ordem* de f , e denota-se por $f''(x)$ ou por $f^{(2)}$. Da mesma forma, define-se as derivadas de ordens superiores a dois, de f , caso existam.

A derivada, vista dessa forma, foi objeto de estudo de Leibniz (1646 - 1716). Por outro lado, Newton (1643 - 1727), tendo em vista seus estudos em Mecânica, introduziu a derivada para caracterizar a velocidade instantânea de um móvel. Os dois desenvolveram os conceitos relacionados ao Cálculo trabalhando de forma independente (ÁVILA, 2013, p. 79).

1.2.1 Regras de derivação de funções reais

Aqui, são apresentadas as derivadas e as regras de derivação de alguns tipos de funções, que serão estudadas no decorrer do trabalho. São regras que auxiliam a encontrar as derivadas de algumas funções sem ter que recorrer à definição por limite.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função na variável x , então $f'(x)$ será a derivada de $f(x)$.

Têm-se, para cada tipo de função:

1. **Função constante:** seja $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$f'(x) = 0.$$

Ex.: A derivada de $f(x) = -2$ é $f'(x) = 0$.

2. **Funções potências:** seja $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{R}$. Então,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Ex.: Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$.

3. **Função seno:** seja $f(x) = \text{sen } x$. Então,

$$f'(x) = \text{cos } x.$$

4. **Função cosseno:** seja $f(x) = \text{cos } x$. Então,

$$f'(x) = -\text{sen } x.$$

5. **Função seno hiperbólico:** seja $f(x) = \text{senh } x$. Então,

$$f'(x) = \text{cosh } x.$$

6. **Função cosseno hiperbólico:** seja $f(x) = \cosh x$. Então,

$$f'(x) = \sinh x.$$

7. **Função tangente hiperbólica:** seja $f(x) = \tanh x$. Então,

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2 x.$$

8. **Função secante hiperbólica:** seja $f(x) = \operatorname{sech} x$. Então,

$$f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

- **Regra da multiplicação por uma constante:** seja $f(x)$ uma função derivável e $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

Ex.: Se $f(x) = 3 \cdot \cos x$, então $f'(x) = -3 \cdot \sin x$.

- **Regra da soma:** sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis. Então,

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Ex.: Seja $h(x) = 2x^3 + \sinh x$. Assim, $h'(x) = 6x^2 + \cosh x$.

- **Regra do produto:** sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis. Então,

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ex.: Sendo $h(x) = x^2 \cdot \cos x$, então

$$h'(x) = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x.$$

- **Regra do quociente:** sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis, com $g(x) \neq 0$. Então,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ex.: Seja $h(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. Então,

$$h'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x} - (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x^3} - \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{x}.$$

- **Regra da cadeia:** sejam g derivável em x e f derivável em $g(x)$. Então, a derivada da função composta $f(g(x))$ é dada por

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

Ex.: Se $h(x) = \cos(x^4)$, então $h'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3 = -4x^3 \cdot \sin(x^4)$.

1.2.2 Funções Vetoriais e suas derivadas

As funções vistas até aqui assumem valores reais. A partir do próximo capítulo, serão estudadas as do tipo vetorial, isto é, são funções que possuem domínio real e imagem contida no conjunto de vetores do plano. Essas funções são necessárias para descrever curvas, no caso, planas.

Definição 1.2.4. Denotando por $\underline{\mathbf{r}}(t)$ a função vetorial, $f(t)$ e $g(t)$ serão suas componentes, ou seja, as coordenadas do vetor $\underline{\mathbf{r}}$ são funções reais na variável real t (funções coordenadas), e escreve-se

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = (f(t), g(t)).$$

Exemplo 1.2.2.1. *Função vetorial e domínio.* Seja a função vetorial $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t^2 + 1, \sqrt{t})$. Então, as funções coordenadas são $f(t) = t^2 + 1$ e $g(t) = \sqrt{t}$. O domínio de $\underline{\mathbf{r}}$ é o conjunto de valores de t para os quais a expressão $\underline{\mathbf{r}}(t)$ está definida. Têm-se que as expressões $t^2 + 1$ e \sqrt{t} são definidas para todo valor de t e para $t \geq 0$, respectivamente. Assim, o domínio de $\underline{\mathbf{r}}$ é igual ao intervalo $[0, +\infty)$.

□

Derivar uma função vetorial consiste, simplesmente, em derivar cada uma de suas funções coordenadas, na variável t . Seja $\underline{\mathbf{r}}(t) = (f(t), g(t))$, com $f(t)$ e $g(t)$ deriváveis. Então, a derivada de $\underline{\mathbf{r}}(t)$ é dada por

$$\underline{\mathbf{r}}'(t) = (f'(t), g'(t)).$$

Exemplo 1.2.2.2. *Função vetorial e derivada.* A derivada da função dada no Exemplo 1.2.2.1 é $\underline{\mathbf{r}}'(t) = \left(2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$.

□

De acordo com Stewart (2013a, p. 765), as regras de derivação de funções reais possuem equivalentes para as vetoriais. Sendo $\underline{\mathbf{u}}$ e $\underline{\mathbf{v}}$ funções vetoriais diferenciáveis, $c \in \mathbb{R}$ e f uma função real, têm-se:

- **Regra da soma:** $[\underline{\mathbf{u}}(t) + \underline{\mathbf{v}}(t)]' = \underline{\mathbf{u}}'(t) + \underline{\mathbf{v}}'(t)$.
- **Regra da multiplicação por uma constante:** $[c\underline{\mathbf{u}}(t)]' = c\underline{\mathbf{u}}'(t)$.
- **Regra do produto de função real por função vetorial:** $[f(t)\underline{\mathbf{u}}(t)]' = f'(t)\underline{\mathbf{u}}(t) + f(t)\underline{\mathbf{u}}'(t)$.
- **Regra do produto escalar:** $[\underline{\mathbf{u}}(t) \cdot \underline{\mathbf{v}}(t)]' = \underline{\mathbf{u}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{v}}(t) + \underline{\mathbf{u}}(t) \cdot \underline{\mathbf{v}}'(t)$.
- **Regra da cadeia:** $[\underline{\mathbf{u}}(f(t))] = \underline{\mathbf{u}}'(f(t))f'(t)$.

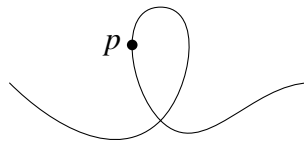
2 CURVAS PLANAS PARAMETRIZADAS

2.1 Conceito, definição e exemplos

Em geral, quando se estuda curvas, são apresentadas funções onde ou y depende de x ($y = f(x)$) ou x depende de y ($x = g(y)$), ou ainda uma relação entre x e y que define y implicitamente em função de x ($f(x, y) = 0$). Como exemplos, têm-se uma reta da forma $y = x + 1$ – sim, as retas são exemplos de curvas –, uma parábola do tipo $x = 3y^2 - y + 1$, e uma hipérbole de equação $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Todas essas curvas são descritas por meio de suas equações cartesianas.

Uma ideia intuitiva que se tem de uma curva plana, que se torna útil em determinadas situações, é o caminho traçado por um ponto, ou uma partícula móvel, p , no tempo. Pode-se imaginar uma curva, também, como um traço único feito por um lápis, sem que este seja retirado do papel ao longo do desenho.

Figura 2.1 – Trajetória de uma partícula p



Fonte: O autor (2020)

Na Figura 2.1, analisando a curva traçada por p , verifica-se que não seria possível modelá-la em uma função da forma $f(x) = y$, pois não passaria no Teste da Reta Vertical⁴.

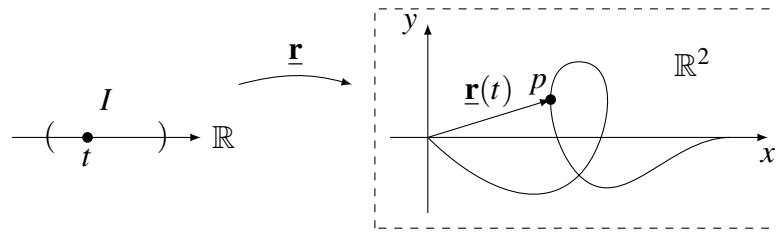
Assim, torna-se conveniente escrever x e y em função de uma terceira variável, originando a seguinte definição:

Definição 2.1.1. Uma **curva contínua** no plano é uma aplicação contínua $\underline{\mathbf{r}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação $\underline{\mathbf{r}}$, dada por $\underline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t))$, é contínua se cada função coordenada, $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função contínua. A variável t é chamada de **parâmetro** de $\underline{\mathbf{r}}$.

Dessa forma, conforme a Figura 2.2, para cada parâmetro t é associado um ponto $\underline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t))$ no plano, ou seja, em cada instante t , $\underline{\mathbf{r}}(t)$ representa a posição em que a partícula móvel se encontra; e mais, é possível determinar o sentido do seu percurso.

⁴ Recurso visual para determinar quando uma curva é, ou não, gráfico de uma função. Caso a reta intersecte a curva em mais de um ponto, não será o gráfico de uma função, pois contrariaria a definição.

Figura 2.2 – Representação da parametrização de uma curva



Fonte: O autor (2020)

O conjunto imagem \mathcal{C} , da aplicação \underline{r} , definido por $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$ é chamado de **traço** de \underline{r} .

Uma curva parametrizada \underline{r} , cuja imagem está contida em \mathcal{C} , é chamada de uma **parametrização** de \mathcal{C} .

Observação 2.1.1. *Existe uma diferença entre a curva \underline{r} e seu traço. Por exemplo, as curvas definidas por $x(t) = 0, y(t) = t$ e $x(t) = 0, y(t) = 3t$ são aplicações diferentes, porém, seus traços são iguais: o eixo y .*

Exemplo 2.1.1. *Parametrização de uma reta.* Uma parametrização da reta $x - 3y + 5 = 0$ é da seguinte forma: faça $y = t$, assim, $x = 3t - 5$. Dessa forma, uma parametrização da reta, dada na forma cartesiana, é

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - 5 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Note que, no exemplo anterior, se fizesse $y = -t$, a partícula se moveria no sentido contrário.

Exemplo 2.1.2. *Parametrização da função logarítmica.* Seja a curva dada por $y = \ln x$, $x > 0$. Fazendo $y = t$, tem-se

$$\ln x = t \Leftrightarrow e^t = x.$$

Assim, uma parametrização de $y = \ln x$ é da forma

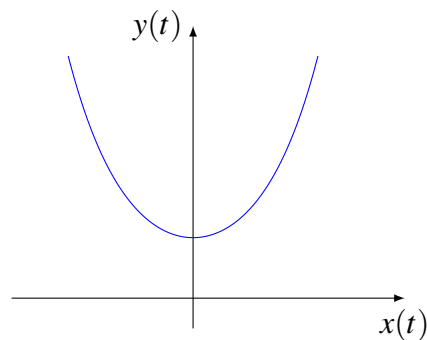
$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave qualquer. O gráfico de f é definido como o conjunto de todos os pontos $(t, f(t))$, $t \in I$, o mesmo que o traço da curva $\underline{\mathbf{r}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t, f(t))$.

Exemplo 2.1.3. Catenária. A curva representada pelo gráfico da função $f(x) = \cosh x$, para a qual é associada a aplicação $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$, é conhecida como **catenária**⁵, e seu traço está representado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Catenária

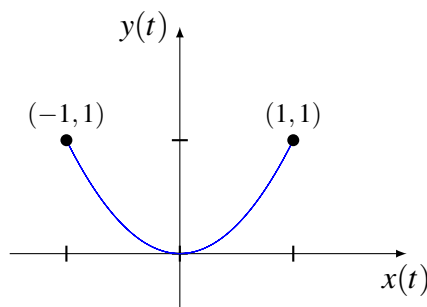


Fonte: O autor (2021)

□

Exemplo 2.1.4. Parametrização com restrição. Dada a curva $\underline{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \cos^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$, tem-se que sua imagem está contida no gráfico da função $y = x^2$. No entanto, verifica-se que nem todo ponto da parábola é da forma como foi definida $\underline{\mathbf{r}}(t)$. Por exemplo, $(2, 4)$ não pertence ao traço de $\underline{\mathbf{r}}(t)$, já que $-1 \leq \cos t \leq 1$. Assim, o traço de $\underline{\mathbf{r}}(t)$ é da seguinte forma:

Figura 2.4 – Traço de $\underline{\mathbf{r}}(t)$



Fonte: O autor (2021)

⁵ Essa curva representa uma corrente de densidade uniforme, onde são fixadas as suas duas extremidades, sujeita à força do seu peso. Foi estudada inicialmente por Galileu, que a confundiu com a parábola, e, após, por Jacques Bernoulli (GIBSON, 2001, p. 16, tradução nossa).

Assim, com t percorrendo os números reais, a partícula se moverá ao longo da curva, indo do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(1, 1)$, e voltando, indefinidamente.

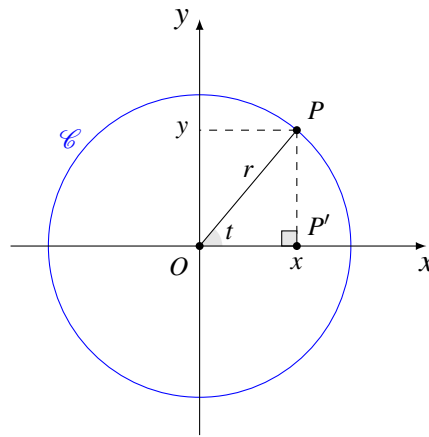
□

2.2 Parametrização de algumas curvas

2.2.1 Círculo

Seja o círculo \mathcal{C} , centrado na origem O e raio r , de equação $x^2 + y^2 = r^2$:

Figura 2.5 – Círculo de centro na origem e raio r



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

Tome um ponto qualquer do círculo, no caso $P(x, y)$. Tem-se que o triângulo $OP'P$ é retângulo em P' . Assim, uma forma de descrever as coordenadas de P , em função do ângulo t , é fazê-lo percorrer o círculo no sentido anti-horário, com $t \in [0, 2\pi)$. Dessa forma, obtém-se uma parametrização para o círculo acima da seguinte maneira:

$$\mathcal{C} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Caso não se restrinja o intervalo ao qual pertença t , ou seja, faça $t \in \mathbb{R}$, o ponto se moverá sobre o círculo infinitamente.

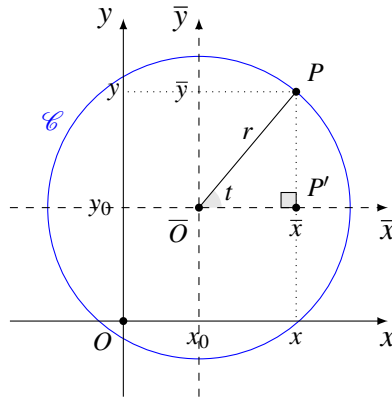
Uma outra parametrização para um círculo centrado na origem e de raio r seria

$$\mathcal{C} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Neste caso, o ponto se locomoveria no sentido horário.

Agora, seja o círculo \mathcal{C} , de centro (x_0, y_0) e raio r , de equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Figura 2.6 – Círculo de centro (x_0, y_0) e raio r



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

Fazendo uma translação do sistema xOy , obtém-se um novo sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, com centro $\bar{O}(x_0, y_0)$. Nesse novo sistema, \mathcal{C} possui equação da forma $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$.

Pela parametrização do círculo de centro na origem e raio r , têm-se que $\bar{x} = r \cos t$ e $\bar{y} = r \sin t$.

Por outro lado, as coordenadas de P no sistema xOy são dadas por $x = x_0 + \bar{x}$ e $y = y_0 + \bar{y}$.

Assim, uma parametrização do círculo de centro (x_0, y_0) e raio r é da seguinte forma:

$$\mathcal{C} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \bar{x} \\ y_0 + \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Exemplo 2.2.1.1. Parametrização de um círculo. Mostre que a curva $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y = -4$ descreve um círculo e encontre uma parametrização.

Inicialmente, deve-se colocar sua equação na forma canônica, completando quadrados:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = -4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 - 9 = -4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Assim, \mathcal{C} possui centro em $(-2, 3)$ e raio $r = 3$. Uma parametrização do círculo é dada por:

$$\mathcal{C} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 \cos t \\ 3(1 + \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

□

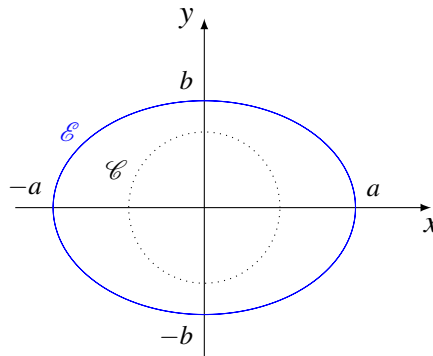
2.2.2 Elipse

Seja

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

uma elipse de centro na origem e reta focal sobre o eixo das abscissas, ou seja, $a > b$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Figura 2.7 – Elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Fonte: O autor (2021)

Fazendo $x' = \frac{x}{a}$ e $y' = \frac{y}{b}$, tem-se que $x'^2 + y'^2 = 1$ é um círculo, \mathcal{C} , de centro na origem e raio igual a 1. Dessa forma, $(x, y) \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $(x', y') \in \mathcal{C}$.

Como foi visto, duas parametrizações para esse círculo são:

$$\mathcal{C} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{e} \quad \mathcal{C} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Portanto, conclui-se que duas possíveis parametrizações da elipse são:

$$\mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Seja agora a elipse

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

de centro (x_0, y_0) e retas focais paralelas aos eixos coordenados.

Novamente, fazendo uma translação do sistema de coordenadas xOy , obtém-se um sistema de eixos $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, tendo a elipse centro $\bar{O}(x_0, y_0)$. Nesse novo sistema, a equação de \mathcal{E} se transforma em $\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$, que possui as seguintes parametrizações:

$$\mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{e} \quad \mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

No sistema xOy , têm-se que $x = x_0 + \bar{x}$ e $y = y_0 + \bar{y}$. Assim, obtêm-se as seguintes parametrizações para a elipse de centro (x_0, y_0) :

$$\mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Exemplo 2.2.2.1. *Parametrização de uma elipse.* Mostre que a curva $\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ descreve uma elipse e encontre uma parametrização.

O primeiro passo é colocar a equação na forma canônica, completando quadrados:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1 \end{aligned}$$

Dessa forma, \mathcal{E} possui centro em $(-2, 1)$ e reta focal paralela ao eixo x . Portanto, uma parametrização da elipse é:

$$\mathcal{E} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-1 + \cos t) \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

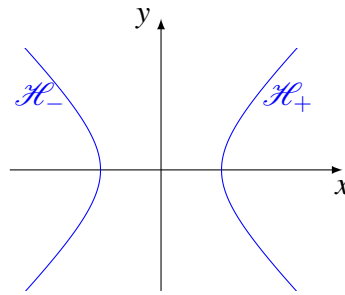
□

2.2.3 Hipérbole

Considere a hipérbole

$$\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1,$$

de centro na origem e reta focal sobre o eixo x .

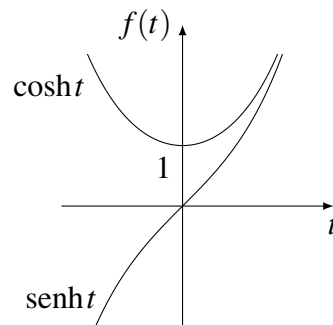
Figura 2.8 – Hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$ 

Fonte: O autor (2021)

Sejam as funções seno e cosseno hiperbólicos:

$$\begin{cases} \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \operatorname{cosh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

cujos gráficos, no mesmo plano cartesiano, são explicitados na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Gráficos das funções $\operatorname{senh} t$ e $\operatorname{cosh} t$ 

Fonte: O autor (2021)

Tem-se que os pontos $(\operatorname{cosh} t, \operatorname{senh} t)$ e $(-\operatorname{cosh} t, \operatorname{senh} t)$ pertencem à hipérbole \mathcal{H} , já que

$$(\pm \operatorname{cosh} t)^2 - (\operatorname{senh} t)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Conforme a Figura 2.9, a imagem da função cosseno hiperbólico é $[1, +\infty)$. Assim, fazendo $x = \operatorname{cosh} t$, $t \in \mathbb{R}$, então $x \in [1, +\infty)$; e $x = -\operatorname{cosh} t$, $t \in \mathbb{R}$, logo, $x \in (-\infty, -1]$. Por outro lado, a imagem da função seno hiperbólico é igual ao conjunto dos números reais. Dessa forma, fazendo $y = \operatorname{senh} t$, $t \in \mathbb{R}$, então $y \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cosh} t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do ramo \mathcal{H}_+ , de \mathcal{H} , cujo traço está contido no 1° e no 4° quadrantes; e

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

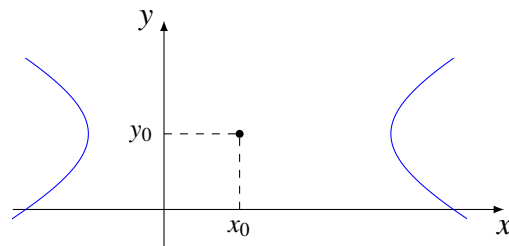
é uma parametrização do ramo \mathcal{H}_- , cuja imagem está contida no 2° e no 3° quadrantes, conforme a Figura 2.9.

Agora, seja a hipérbole

$$\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo das abscissas, conforme a Figura 2.10.

Figura 2.10 – Traço de \mathcal{H}



Fonte: O autor (2021)

Fazendo $x' = \frac{x-x_0}{a}$ e $y' = \frac{y-y_0}{b}$, tem-se que $x'^2 - y'^2 = 1$ é uma hipérbole, \mathcal{H}_0 , de centro na origem e reta focal sobre o eixo x .

Assim, como $(x, y) \in \mathcal{H}$ se, e somente se, $(x', y') \in \mathcal{H}_0$, e

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de \mathcal{H}_0 , tem-se que

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de \mathcal{H} .

De modo análogo, verifica-se que

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \sinh t \\ \pm a \cosh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização da hipérbole

$$\mathcal{H} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1,$$

de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo y .

Exemplo 2.2.3.1. *Parametrização de uma hipérbole.* Mostre que a curva $\mathcal{H} : -4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$ descreve uma hipérbole e encontre uma parametrização.

Colocando a equação na forma canônica:

$$\begin{aligned} -4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 4 = 0 &\Leftrightarrow -4(x^2 + 2x + 1) + 4 + (y + 2)^2 - 4 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{(y + 2)^2}{2^2} - \frac{(x + 1)^2}{1^2} = 1. \end{aligned}$$

Logo, \mathcal{H} tem centro em $(-1, -2)$ e reta focal $y = -2$.

Portanto, uma parametrização da hipérbole é

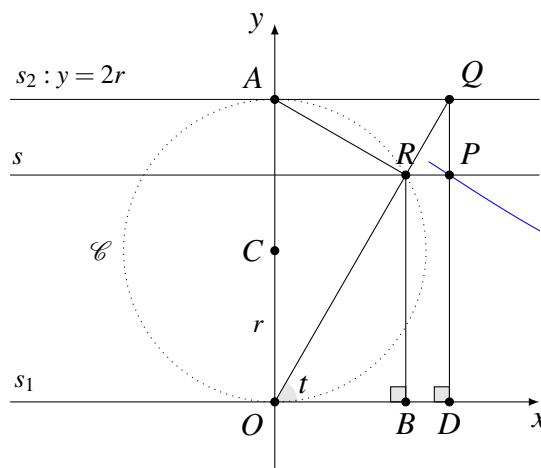
$$\mathcal{H} : \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{senh} t - 1 \\ 2(\pm \operatorname{cosh} t - 1) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

2.2.4 Curva de Agnesi

Seja \mathcal{C} um círculo de centro C e raio r , tangente às retas paralelas s_1 e s_2 nos pontos O e A , respectivamente, conforme a Figura 2.11.

Figura 2.11 – Construção da curva de Agnesi



Fonte: Adaptado de Delgado, Frensel e Crissaff (2017)

A partir da origem O , é traçada uma semirreta na direção de s_2 , que intersecta o círculo em R e a reta s_2 em Q .

Pelos pontos R e Q , são traçadas duas semirretas perpendiculares à reta s_1 , sendo $B, D \in s_1$ os pontos de interseção, respectivamente.

Seja a reta s , paralela à reta s_1 e que passa por R . E seja P o ponto de interseção de s com o segmento QD .

O conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ assim obtidos, por meio das interseções de todas as retas que partem de O com o círculo \mathcal{C} , descreve a chamada *curva de Agnesi* (Figura 2.12). O objetivo agora é parametrizar essa curva.

No triângulo retângulo ODQ , tem-se que

$$\cos t = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OQ}|} \Leftrightarrow x = |\overline{OQ}| \cos t. \quad (2.1)$$

Por outro lado, no triângulo retângulo OBR , tem-se

$$\sin t = \frac{|\overline{RB}|}{|\overline{OR}|} \Leftrightarrow y = |\overline{OR}| \sin t. \quad (2.2)$$

Note que o triângulo ORA , inscrito em \mathcal{C} , é retângulo em R , pois OA é um diâmetro do círculo.

Seja $\alpha = \widehat{OAR}$. Assim, $\alpha + t = 90^\circ$. Dessa forma, conclui-se que $\widehat{OAR} = t$. Portanto, no triângulo ORA , tem-se que

$$\sin t = \frac{|\overline{OR}|}{|\overline{OA}|} \Leftrightarrow |\overline{OR}| = 2r \sin t. \quad (2.3)$$

De (2.2) e (2.3), conclui-se que $y = 2r \sin^2 t$.

No triângulo ODQ , tem-se

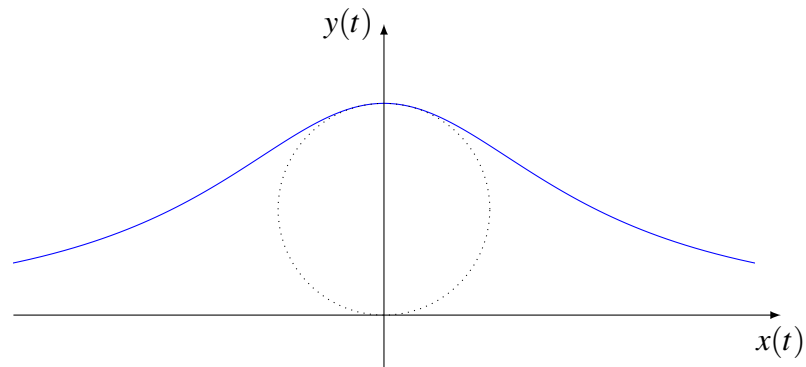
$$\sin t = \frac{|\overline{QD}|}{|\overline{OQ}|} \Leftrightarrow |\overline{OQ}| = \frac{2r}{\sin t}. \quad (2.4)$$

De (2.1) e (2.4), conclui-se que $x = \frac{2r}{\sin t} \cos t = 2r \cot t$.

Portanto, a curva de Agnesi é dada pelas seguintes equações paramétricas:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} \cot t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad t \in (0, \pi).$$

Figura 2.12 – Curva de Agnesi

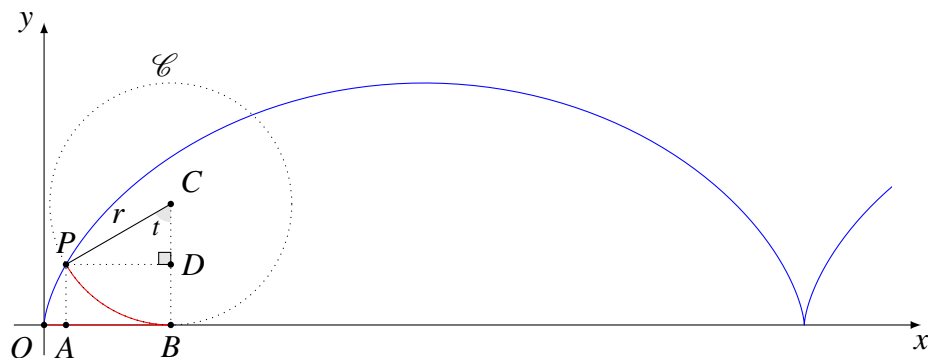


Fonte: O autor (2021)

2.2.5 Cicloide

Seja \mathcal{C} um círculo de raio r e $P(x,y)$ um ponto de \mathcal{C} . Chama-se *cicloide* a curva descrita pelo ponto P quando o círculo rola sobre uma reta – no caso, o eixo x – sem deslizar.

Figura 2.13 – Cicloide



Fonte: O autor (2021)

Inicialmente, note que a cicloide atinge seu valor máximo nos pontos da forma $(\pi(r+2k), 2r)$, e o mínimo nos da forma $(2\pi(r+k), 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Agora, o objetivo é encontrar as coordenadas de P em função do raio r e do ângulo t .

Sejam C o centro do círculo, A e B as projeções ortogonais de P e de C , respectivamente, no eixo x , e $D \in BC$, tal que $AB \parallel PD$. Têm-se, no triângulo retângulo CDP ,

$$\begin{cases} \overline{PD} = r \operatorname{sent} \\ \overline{CD} = r \operatorname{cost} \end{cases}.$$

Por outro lado,

$$\begin{cases} x = \overline{OB} - \overline{AB} \\ = \widehat{PB} - \overline{PD} \\ = rt - r \operatorname{sen} t = r(t - \operatorname{sen} t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = \overline{BC} - \overline{CD} \\ = r - r \operatorname{cos} t \\ = r(1 - \operatorname{cos} t) \end{cases} .$$

Portanto, uma parametrização da cicloide é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} t - \operatorname{sen} t \\ 1 - \operatorname{cos} t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Na Figura 2.14, é apresentada uma animação da cicloide. Ressalta-se que não são todos os visualizadores de *Portable Document Format* (PDF) que conseguem reproduzi-la. Um dos que reproduzem é o *Adobe Acrobat Reader DC*, no sistema operacional *Windows*.

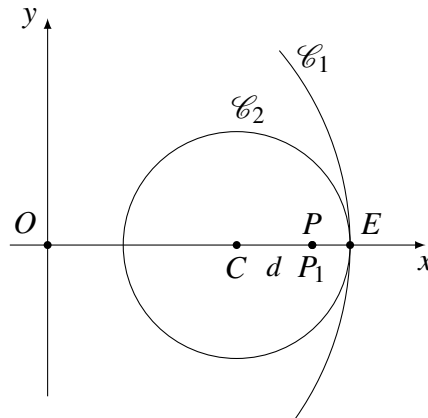
Figura 2.14 – Animação da cicloide

Fonte: Adaptado de Drawing... (2018)

2.2.6 Hipocicloide e hipotrocoide

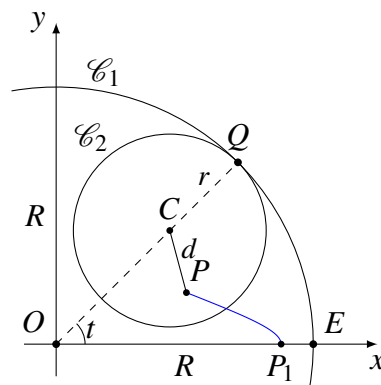
Seja \mathcal{C}_2 uma circunferência de raio $r > 0$ e centro C , que gira, tangencialmente e sem deslizar, por dentro de uma outra circunferência fixa \mathcal{C}_1 , de raio R e centro O . Seja P um ponto fixado no interior, sobre ou exterior à circunferência \mathcal{C}_2 . A curva descrita por P , ao girar \mathcal{C}_2 , é chamada de *hipotrocoide* se P é interior ou exterior, e de *hipocicloide* se P pertence à circunferência.

Suponha que, inicialmente, \mathcal{C}_2 tenha centro no ponto $C(R - r, 0)$, P com posição inicial em $P_1(R - r + d, 0)$ e \mathcal{C}_2 tangencie \mathcal{C}_1 no ponto E , conforme a Figura 2.15.

Figura 2.15 – Posição inicial de \mathcal{C}_2 

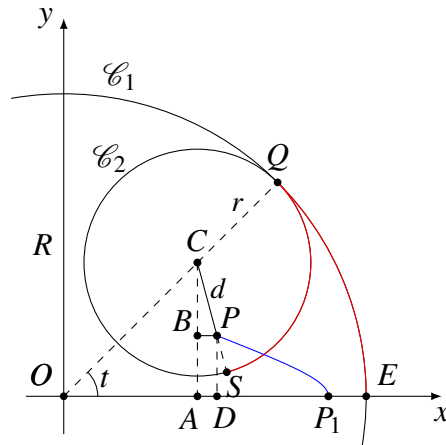
Fonte: Adaptado de Gonçalves (2019, p. 30)

O objetivo é determinar as coordenadas do ponto $P(x,y)$ em função de um parâmetro, ao fazer \mathcal{C}_2 rolar por dentro de \mathcal{C}_1 , sem deslizar, no sentido negativo (horário), formando o ângulo $E\hat{O}Q = t$, de acordo com a Figura 2.16.

Figura 2.16 – \mathcal{C}_2 rolando por dentro de \mathcal{C}_1 , no sentido horário

Fonte: Adaptado de Gonçalves (2019, p. 31)

Considere o segmento CS , raio de \mathcal{C}_2 , que contém P . Sejam os pontos A e D as projeções ortogonais de C e P , respectivamente, no eixo x . E seja o ponto $B \in AC$, tal que $AD \parallel BP$, conforme a Figura 2.17.

Figura 2.17 – Determinando as coordenadas de P em função de t 

Fonte: Adaptado de Gonçalves (2019, p. 31)

Dessa forma, têm-se:

$$\begin{cases} x = \overline{OA} + \overline{AD} \\ y = \overline{DP} = \overline{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{OA} + \overline{BP} \\ y = \overline{AC} - \overline{BC} \end{cases}. \quad (2.5)$$

Do raio OQ , de \mathcal{C}_1 , obtém-se $\overline{OQ} = \overline{OC} + \overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{OC} = R - r$.

Note que o triângulo OAC é reto em A . Assim, têm-se as seguintes relações:

$$\overline{AC} = \overline{OC} \operatorname{sent} = (R - r) \operatorname{sent} \quad \text{e} \quad \overline{OA} = \overline{OC} \operatorname{cost} = (R - r) \operatorname{cost}.$$

Tem-se, também, que o triângulo CBP é reto em B . Seja $\widehat{BCP} = \alpha$. Daí, obtêm-se:

$$\overline{BP} = d \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \overline{BC} = d \operatorname{cos} \alpha.$$

Substituindo as relações acima em (2.5), têm-se

$$\begin{cases} x = (R - r) \operatorname{cost} + d \operatorname{sen} \alpha \\ y = (R - r) \operatorname{sent} - d \operatorname{cos} \alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

Ao \mathcal{C}_2 rolar e tangenciar \mathcal{C}_1 no ponto Q , implica que $\widehat{QE} = tR = \widehat{QS}$. Dessa forma, $\widehat{QCS} = \frac{\widehat{QS}}{r} = \frac{tR}{r}$.

No triângulo OAC , tem-se $\widehat{OCA} = \frac{\pi}{2} - t$. Assim,

$$\widehat{QCO} = \widehat{QCS} + \alpha + \widehat{OCA} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right)t.$$

Substituindo α em (2.6), e utilizando algumas propriedades das funções seno e cosseno, obtém-se uma parametrização da hipotrocoide da seguinte forma:

$$\mathbf{r}(t) = (R - r) \begin{pmatrix} \operatorname{cost} \\ \operatorname{sent} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \left(\frac{R-r}{r} t \right) \\ -\operatorname{sen} \left(\frac{R-r}{r} t \right) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.2.1. A partir daqui, serão considerados os seguintes vetores unitários auxiliares, que servirão para simplificar alguns cálculos e expressões:

$$\underline{\mathbf{e}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{\mathbf{f}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

que possuem derivadas dadas por

$$\underline{\mathbf{e}}'(t) = \underline{\mathbf{f}}(t) = \widehat{\underline{\mathbf{e}}}(t); \quad \underline{\mathbf{f}}'(t) = -\underline{\mathbf{e}}(t) = \widehat{\underline{\mathbf{f}}}(t);$$

e

$$\underline{\mathbf{g}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{\mathbf{h}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},$$

cujas derivadas são

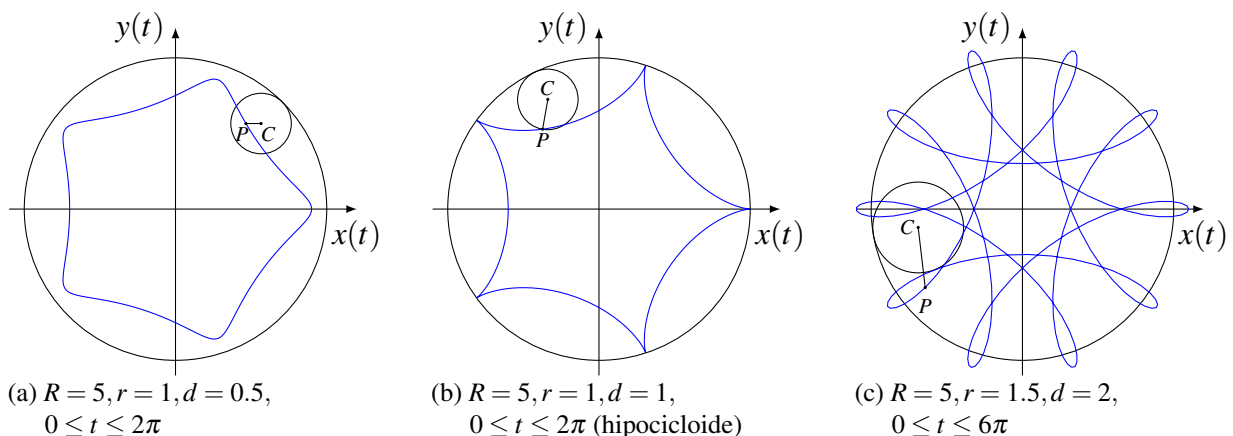
$$\underline{\mathbf{g}}'(t) = -\widehat{\underline{\mathbf{g}}}(t) = -\underline{\mathbf{h}}(t); \quad \underline{\mathbf{h}}'(t) = -\widehat{\underline{\mathbf{h}}}(t) = \underline{\mathbf{g}}(t).$$

Sejam as quantidades adimensionais $\delta = \frac{R-r}{r}$ e $\lambda = \frac{d}{r}$. Assim, a hipotrocoide pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = (R-r) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{e}}(t)} + d \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ -\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{pmatrix}}_{-\underline{\mathbf{g}}\left(\frac{R-r}{r}t\right)} = r\{\delta\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A seguir, têm-se dois exemplos de hipotrocoides (Figuras 2.18a e 2.18c) e de uma hipocicloide (Figura 2.18b):

Figura 2.18 – Exemplos de hipotrocoides e hipocicloide



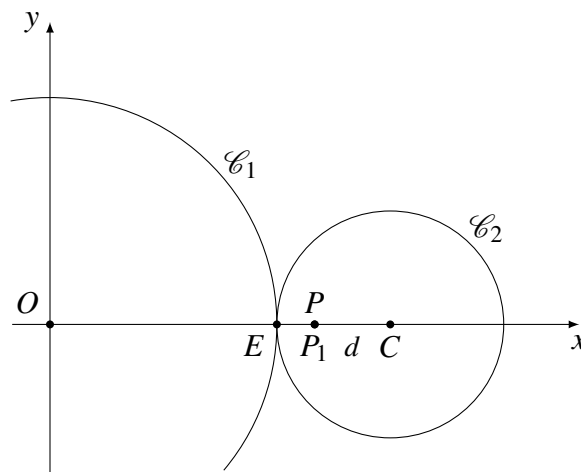
Fonte: O autor (2021)

2.2.7 Epicicloide e epitrocoide

Seja \mathcal{C}_2 uma circunferência de raio $r > 0$ e centro C , que gira, tangencialmente e sem deslizar, por fora de uma outra circunferência fixa \mathcal{C}_1 , de raio R e centro O . Seja P um ponto fixado no interior, sobre ou exterior à circunferência \mathcal{C}_2 . A curva descrita por P , ao girar \mathcal{C}_2 , é chamada de *epitrocoide* se P é interior ou exterior, e de *epicicloide* se P pertence à circunferência.

Suponha que, inicialmente, \mathcal{C}_2 tenha centro no ponto $C(R+r, 0)$, P com posição inicial em $P_1(R+r-d, 0)$ e \mathcal{C}_2 tangencie \mathcal{C}_1 no ponto E , conforme a Figura 2.19.

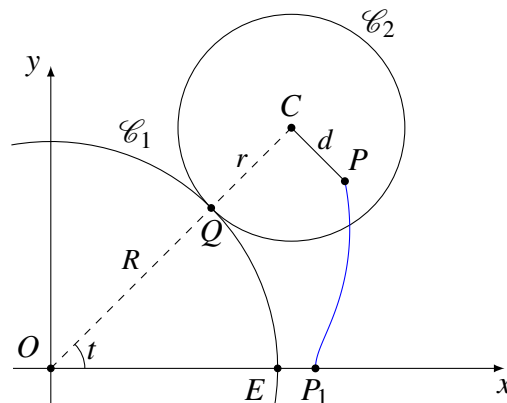
Figura 2.19 – Posição inicial de \mathcal{C}_2



Fonte: Adaptado de Gonçalves (2019, p. 34)

O objetivo é determinar as coordenadas do ponto $P(x, y)$ em função de um parâmetro, ao fazer \mathcal{C}_2 rolar por fora de \mathcal{C}_1 , sem deslizar, no sentido positivo (anti-horário), formando o ângulo $\widehat{EOQ} = t$, de acordo com a Figura 2.20.

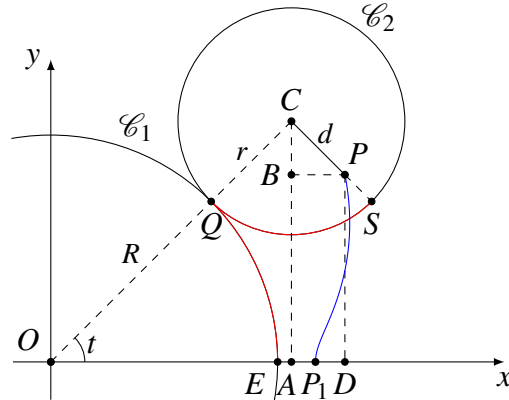
Figura 2.20 – \mathcal{C}_2 rolando por fora de \mathcal{C}_1 , no sentido anti-horário



Fonte: Adaptado de Gonçalves (2019, p. 34)

Considere o segmento CS , raio de \mathcal{C}_2 , que contém P . Sejam os pontos A e D as projeções ortogonais de C e P , respectivamente, no eixo x . E seja o ponto $B \in AC$, tal que $AD \parallel BP$, conforme a Figura 2.21.

Figura 2.21 – Determinando as coordenadas de P em função de t



Fonte: Adaptado de Gonçalves (2019, p. 35)

Dessa forma, têm-se:

$$\begin{cases} x = \overline{OA} + \overline{AD} \\ y = \overline{DP} = \overline{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{OA} + \overline{BP} \\ y = \overline{AC} - \overline{BC} \end{cases} \quad (2.7)$$

Note que $\overline{OC} = \overline{OQ} + \overline{QC} = R + r$.

O triângulo OAC é reto em A . Assim, têm-se as seguintes relações:

$$\overline{AC} = \overline{OC} \operatorname{sent} = (R + r) \operatorname{sent} \quad \text{e} \quad \overline{OA} = \overline{OC} \operatorname{cost} = (R + r) \operatorname{cost}.$$

Tem-se, também, que o triângulo CBP é reto em B . Seja $\widehat{BCP} = \alpha$. Daí, obtêm-se:

$$\overline{BP} = d \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad \overline{BC} = d \operatorname{cos} \alpha.$$

Substituindo as relações acima em (2.7), têm-se

$$\begin{cases} x = (R + r) \operatorname{cost} + d \operatorname{sen} \alpha \\ y = (R + r) \operatorname{sent} - d \operatorname{cos} \alpha \end{cases} \quad (2.8)$$

Ao \mathcal{C}_2 rolar e tangenciar \mathcal{C}_1 no ponto Q , implica que $\widehat{QE} = tR = \widehat{QS}$. Dessa forma, $\widehat{QCS} = \frac{\widehat{QS}}{r} = \frac{tR}{r}$.

No triângulo OAC , tem-se $\widehat{OCA} = \frac{\pi}{2} - t$. Assim,

$$\widehat{BCP} = \widehat{QCS} - \widehat{OCA} \Leftrightarrow \alpha = \frac{tR}{r} - \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \left(\frac{R}{r} + 1 \right) t - \frac{\pi}{2}.$$

Substituindo α em (2.8), e utilizando algumas propriedades das funções seno e cosseno, obtém-se uma parametrização da epitrocoide, da seguinte forma:

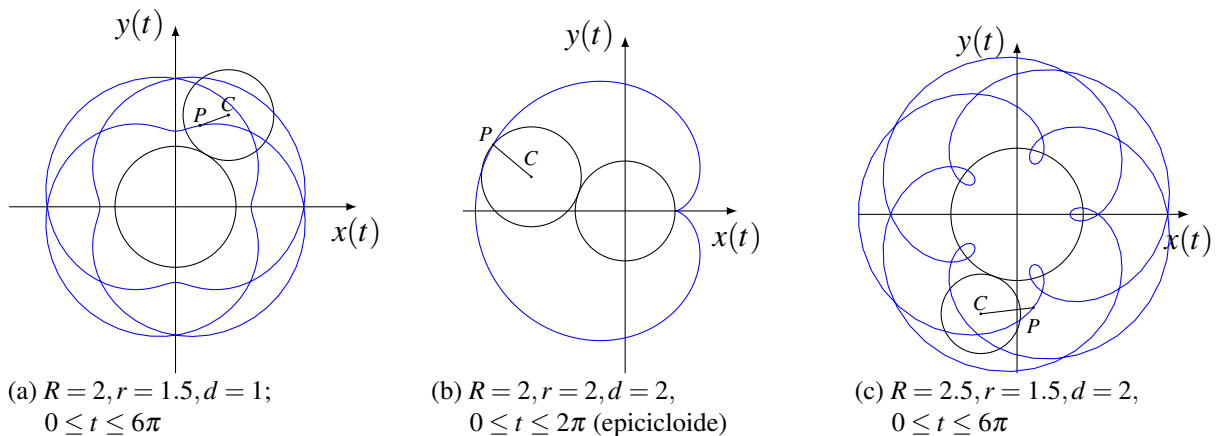
$$\underline{\mathbf{r}}(t) = (R+r) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - d \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sejam as quantidades adimensionais $\delta = \frac{R+r}{r}$ e $\lambda = \frac{d}{r}$. Então, a epitrocoide pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = (R+r) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{e}}(t)} - d \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{e}}\left(\frac{R+r}{r}t\right)} = r\{\delta\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{e}}(\delta t)\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Abaixo, têm-se dois exemplos de epitrocoides (Figuras 2.22a e 2.22c) e de uma epicloide (Figura 2.22b):

Figura 2.22 – Exemplos de epitrocoides e epicloide



Fonte: O autor (2021)

A curva representada na Figura 2.22b é conhecida como *cardioide*.

2.3 Tipos de curvas

Definição 2.3.1. Se a aplicação $\underline{\mathbf{r}}$ está definida em um intervalo $I = [a, b]$, tal que $\underline{\mathbf{r}}(a) = \underline{\mathbf{r}}(b)$, então $\underline{\mathbf{r}}$ é dita *fechada*.

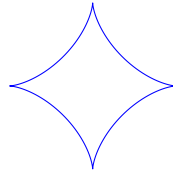
Definição 2.3.2. Uma curva $\underline{\mathbf{r}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é *periódica* se existe um número real $p > 0$, tal que

$$\underline{\mathbf{r}}(t+p) = \underline{\mathbf{r}}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

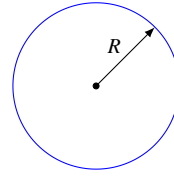
Ao menor valor de p , para o qual a igualdade se verifica, dá-se o nome de *período*.

Exemplo 2.3.1. *Curvas fechadas e periódicas.* A asteroide $\underline{\mathbf{r}}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi)$, e o círculo $\underline{\mathbf{r}}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, centrado na origem e raio R , cujos traços estão representados abaixo, são curvas fechadas e periódicas, de mesmo período ($p = 2\pi$).

Figura 2.23 – Curvas fechadas e periódicas



(a) Asteroide



(b) Círculo de raio R

Fonte: O autor (2020)

□

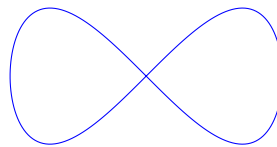
As hipotrocoides/hipocicloide e as epitrocoides/epicicloide, representadas nas Figuras 2.18 e 2.22, respectivamente, são exemplos de curvas fechadas e periódicas.

Definição 2.3.3. *Uma curva $\underline{\mathbf{r}}$ é dita **simples** se a aplicação for injetiva.*

Definição 2.3.4. *Quando tem-se que $\underline{\mathbf{r}}(t_1) = \underline{\mathbf{r}}(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ e $p = t_2 - t_1$ não é um período, diz-se que $\underline{\mathbf{r}}$ possui um **ponto duplo** (autocruzamento ou múltiplo) em t_1 e t_2 .*

Exemplo 2.3.2. *Ponto duplo.* A **curva oito** (Figura 2.24), definida por $\underline{\mathbf{r}}(t) = (a \cos t, a \sin t \cos t)$, $a > 0$, com $t \in [0, 2\pi)$ e período $p = 2\pi$, possui ponto duplo na origem. Existem valores diferentes de t , nomeadamente $t_1 = \frac{\pi}{2}$ e $t_2 = \frac{3\pi}{2}$, para os quais $\underline{\mathbf{r}}(t_1) = \underline{\mathbf{r}}(t_2) = (0, 0)$, e $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \neq p$.

Figura 2.24 – Curva oito

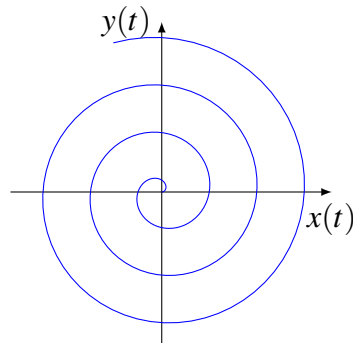


Fonte: O autor (2020)

□

Exemplo 2.3.3. *Curva não periódica.* Seja a **espiral de Arquimedes**, dada por $\underline{r}(t) = (at \cos t, at \sin t)$, com $a > 0$ e $t \in [0, +\infty)$, cujo traço está representado na Figura 2.25.

Figura 2.25 – *Espiral de Arquimedes, $a = 1$*



Fonte: O autor (2021)

Essa curva é simples, não fechada e não periódica.

□

Definição 2.3.5. *Uma curva \underline{r} fechada e simples é chamada de **curva de Jordan**.*

Dos exemplos acima, somente a astroide e o círculo são curvas de Jordan.

3 GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

3.1 Vetores tangente e normal à curva; velocidade escalar e vetor aceleração

Seja $\underline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada. Define-se o **vetor tangente** (ou vetor velocidade), em $\underline{\mathbf{r}}(t)$, como o vetor

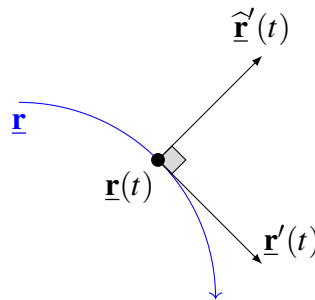
$$\underline{\mathbf{r}}'(t) = \underline{\mathbf{v}}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I;$$

e o **vetor normal** como

$$\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) = \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

obtido rotacionando $\underline{\mathbf{r}}'(t)$ 90° no sentido anti-horário.

Figura 3.1 – Vetores tangente e normal à curva em $\underline{\mathbf{r}}(t)$



Fonte: O autor (2020)

Uma representação do vetor tangente $\underline{\mathbf{r}}'$, em $\underline{\mathbf{r}}(t)$, é a direção instantânea de deslocamento do ponto móvel; e o vetor normal $\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'$ é ortogonal à direção instantânea de deslocamento, no parâmetro t .

A **velocidade escalar**, em $\underline{\mathbf{r}}(t)$, é dada pelo módulo do vetor velocidade, isto é,

$$v(t) = |\underline{\mathbf{r}}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Uma curva de velocidade unitária é aquela que, para todo parâmetro t , sua velocidade é constante e igual a 1. Por exemplo, o círculo de raio unitário, definido por $\underline{\mathbf{r}}(t) = (\cos t, \sin t)$, é de velocidade unitária.

Seja $\underline{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada. O **vetor aceleração**, em $\underline{\mathbf{r}}(t)$, é definido como a derivada do vetor velocidade, ou seja,

$$\underline{\mathbf{r}}''(t) = \underline{\mathbf{a}}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

3.2 Pontos regulares e singulares

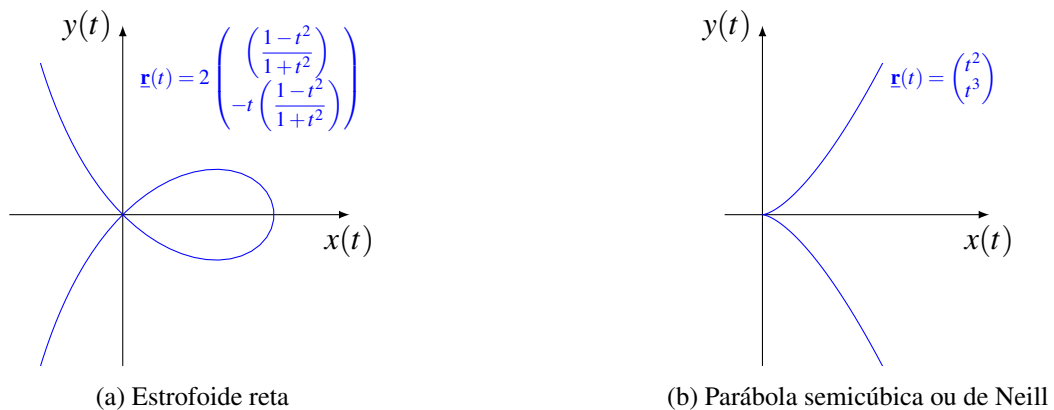
Definição 3.2.1. Uma curva parametrizada $\underline{\mathbf{r}}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é **regular** em $t_0 \in I$ se $\underline{\mathbf{r}}'(t_0) \neq (0, 0)$, ou, equivalentemente, se $v(t_0) \neq 0$. Se $v(t) > 0, \forall t \in I$, a curva é regular. Caso $v(t_0) = 0$, diz-se que a curva $\underline{\mathbf{r}}$ é **singular** em t_0 . Um ponto singular é dito **simples** se a sua segunda derivada não zera, isto é, se $\underline{\mathbf{r}}''(t_0) \neq (0, 0)$.

Exemplo 3.2.1. *Curvas regulares e singulares.* Sejam a estrofoide reta e a parábola semicúbica (também conhecida como parábola de Neill) definidas por

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = 2 \begin{pmatrix} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \\ -t \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

respectivamente, cujos traços estão representados na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Exemplos de curvas regulares e singulares



Fonte: O autor (2020)

Calculando suas primeiras derivadas, verifica-se, em 3.2a, que

$$\underline{\mathbf{r}}'(t) = 2 \begin{pmatrix} \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2} \right) \\ \left(\frac{t^4 + 4t^2 - 1}{(1+t^2)^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Assim, $\underline{\mathbf{r}}'(t) \neq (0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$, o que mostra que a curva é regular.

Com relação à curva representada pela Figura 3.2b, tem-se que $\underline{\mathbf{r}}'(t) = (2t, 3t^2)$, o que implica que, para $t = 0$, $\underline{\mathbf{r}}'(0) = (0, 0)$. Portanto, a curva é singular em $t_0 = 0$.

Tem-se, ainda quanto à parábola semicúbica, que $\underline{\mathbf{r}}''(t) = (2, 6t)$. Dessa forma, $\underline{\mathbf{r}}''(0) \neq (0, 0)$, sendo $\underline{\mathbf{r}}(0) = (0, 0)$ um ponto singular simples.

□

3.3 Retas tangente e normal à curva

Suponha $\underline{\mathbf{r}}(t_0)$ um ponto regular da curva $\underline{\mathbf{r}}$.

- A **reta tangente** à curva em $\underline{\mathbf{r}}(t_0)$ é a reta que passa por esse ponto e tem a mesma direção do vetor tangente, $\underline{\mathbf{r}}'(t_0)$. Sua equação é dada por

$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

- A **reta normal** à curva em $\underline{\mathbf{r}}(t_0)$ é a reta que passa por esse ponto e tem a mesma direção do vetor normal, $\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t_0)$. Sua equação é dada por

$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Observação 3.3.1. As retas tangente e normal não são definidas nos pontos singulares da curva.

Exemplo 3.3.1. *Reta tangente à curva.* Seja a parábola semicúbica definida no Exemplo 3.2.1.

Encontrar a reta tangente à curva no parâmetro $t = 1$.

Têm-se que

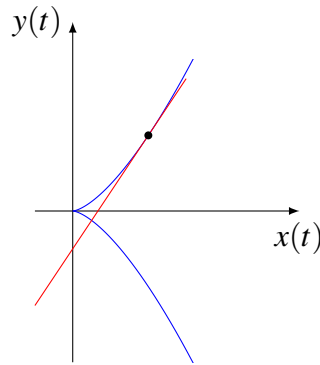
$$\begin{cases} \underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} & \Rightarrow \underline{\mathbf{r}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{r}}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} & \Rightarrow \underline{\mathbf{r}}'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Assim, a reta tangente à curva em $(1, 1)$ é dada por

$$-3 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3x - 1}{2}.$$

A Figura 3.3 representa essa situação.

Figura 3.3 – Reta tangente à curva em (1, 1)



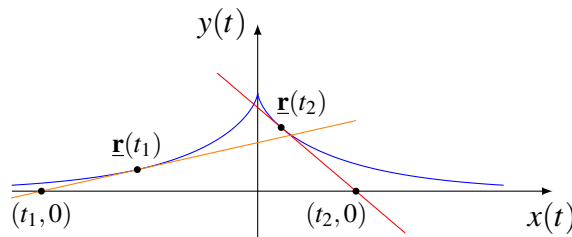
Fonte: O autor (2021)

□

Exemplo 3.3.2. *Retas tangentes à tractriz.* A curva tractriz, mostrada na Figura 3.4, definida pela aplicação $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \operatorname{sech} t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, que possui primeira derivada $\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \operatorname{sech}^2 t \\ -\tanh t \operatorname{sech} t \end{pmatrix}$, tem apenas um ponto singular: em $t = 0$. Para qualquer outro parâmetro, a curva é regular e possui reta tangente, em $\mathbf{r}(t)$, da forma $y = \frac{x-t}{\sinh t}$.

Essa curva tem a propriedade de que todo segmento de reta que une o ponto de tangência $\mathbf{r}(t_0)$ e o ponto $(t_0, 0)$ possui comprimento constante e igual a 1.

Figura 3.4 – Tractriz



Fonte: O autor (2021)

□

3.4 Cúspides

Define-se o **gradiente** de uma curva \mathbf{r} , em um parâmetro regular t , como a razão

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Em um parâmetro singular t_0 , diz-se que a curva tem um *gradiente limite* quando $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ tende à razão limite, com $t \rightarrow t_0$. Nesse caso, define-se a *reta tangente limite*, em t_0 , como

a reta que passa por $\underline{\mathbf{r}}(t_0)$ e que possui tal gradiente limite.

Exemplo 3.4.1. Reta tangente limite. Considere, novamente, a parábola semicúbica $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t^2, t^3)$, dada no Exemplo 3.2.1. Em parâmetros regulares, o gradiente é dado por $\frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$. O gradiente limite, no parâmetro singular $t = 0$, é igual a zero. Assim, a reta tangente limite em $(0, 0)$ é a reta que passa por esse ponto e tem gradiente igual a zero, ou seja, a reta $y = 0$.

□

O próximo resultado impõe uma condição para a existência da reta tangente limite em um ponto singular de uma curva.

Lema 3.4.1. *Sejam $\underline{\mathbf{r}}$ uma curva e t_0 um parâmetro singular, com a propriedade de que alguma derivada de $\underline{\mathbf{r}}'(t)$ não seja nula em t_0 . Então, todos os parâmetros $t \neq t_0$, suficientemente próximos de t_0 , são regulares, e o gradiente limite existe em t_0 . (GIBSON, 2001, p. 99).*

O caso mais simples, citado na Definição 3.2.1, é quando $\underline{\mathbf{r}}'(t_0) = (0, 0)$ e $\underline{\mathbf{r}}''(t_0) \neq (0, 0)$, isto é, quando a derivada de 2ª ordem de $\underline{\mathbf{r}}$, em t_0 , não se anula. Um parâmetro t_0 , para o qual a propriedade descrita no Lema 3.4.1 ocorre, é chamado de **cuspidal**, e o ponto $\underline{\mathbf{r}}(t_0)$, do traço de $\underline{\mathbf{r}}$, é denominado de **cúspide**.

Note que, se t é cuspidal, então os parâmetros suficientemente próximos de t são regulares.

3.5 Vetores tangente e normal unitários e sistema de Frenet

Nos pontos regulares de uma curva $\underline{\mathbf{r}}$, podemos obter o vetor **tangente unitário** normalizando o vetor velocidade:

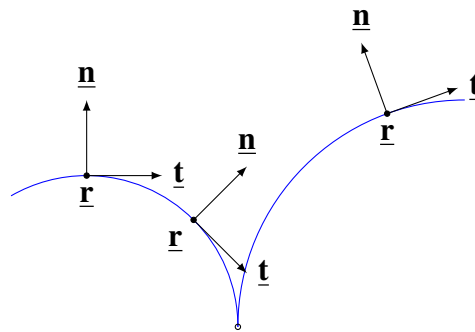
$$\underline{\mathbf{t}}(t) = \frac{\underline{\mathbf{r}}'(t)}{|\underline{\mathbf{r}}'(t)|}.$$

Da mesma forma, podemos obter o vetor **normal unitário**:

$$\underline{\mathbf{n}}(t) = \widehat{\underline{\mathbf{t}}}(t) = \frac{\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)}{|\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)|}.$$

Os vetores $\underline{\mathbf{t}}(t)$ e $\underline{\mathbf{n}}(t)$, juntamente com a origem $\underline{\mathbf{r}}(t)$, formam o **Sistema de Frenet** ao longo da curva.

Figura 3.5 – Sistema de Frenet ao longo da curva

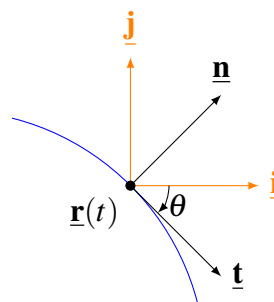


Fonte: O autor (2020)

Observação 3.5.1. No ponto singular destacado na Figura 3.5, o sistema de Frenet não é definido, tendo em vista não existir, ali, o vetor tangente.

3.6 Ângulo natural; velocidade e frequência angulares e equações de Frenet-Serret

Nos pontos regulares de uma curva \underline{r} , tem-se que o vetor tangente unitário é bem definido. Assim, é possível determinar seu **ângulo natural**, $\theta = \theta(t) \in (-\pi, \pi]$, como o ângulo formado entre a reta tangente à curva no ponto $\underline{r}(t)$ e o eixo das abscissas, ou seja, o ângulo formado entre os vetores \underline{t} e \underline{i} .

Figura 3.6 – Ângulo natural, θ 

Fonte: O autor (2020)

Assim, obtêm-se as coordenadas dos vetores \underline{t} e \underline{n} em função do ângulo natural:

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}; \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Da Física, tem-se que a velocidade angular de um objeto no movimento circular é dada pelo quociente da variação do ângulo pelo intervalo de tempo: $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.

Dessa forma, derivando $\theta(t)$ em relação a t , obtém-se a **velocidade angular** no parâmetro t , isto é:

$$\theta'(t) = \omega(t).$$

Com isso, obtém-se a **frequência angular**, que é igual ao recíproco da velocidade angular: $\varphi(t) = \frac{1}{\omega(t)}$, onde $\omega(t) \neq 0$.

De (3.1), tendo em vista os vetores auxiliares definidos na Observação 2.2.1, têm-se:

$$\begin{aligned} \bullet \underline{\mathbf{t}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}(\theta); \text{ e} \\ \bullet \underline{\mathbf{n}} &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}(\theta). \end{aligned}$$

Derivando os vetores com relação a t , obtêm-se:

$$\underline{\mathbf{t}}'(t) = \underline{\mathbf{f}}(\theta)\theta'(t) = \omega(t)\underline{\mathbf{n}}(t) \quad \text{e} \quad (3.2)$$

$$\underline{\mathbf{n}}'(t) = -\underline{\mathbf{e}}(\theta)\theta'(t) = -\omega(t)\underline{\mathbf{t}}(t). \quad (3.3)$$

As equações (3.2) e (3.3) são chamadas de **Equações de Serret-Frenet**, as quais só fazem sentido em pontos regulares da curva.

3.7 Determinante

Da normalização do vetor tangente, tem-se que $\underline{\mathbf{r}}'(t) = v(t)\underline{\mathbf{t}}(t)$. Derivando, usando a fórmula da derivação do produto, e tendo em vista o resultado obtido em (3.2), obtém-se

$$\underline{\mathbf{r}}''(t) = v'(t)\underline{\mathbf{t}}(t) + v(t)\underline{\mathbf{t}}'(t) = v'(t)\underline{\mathbf{t}}(t) + v(t)\omega(t)\underline{\mathbf{n}}(t).$$

Tomando o produto escalar com $\underline{\mathbf{n}}$, tem-se

$$\underline{\mathbf{r}}''(t) \cdot \underline{\mathbf{n}}(t) = v(t)\omega(t) \Leftrightarrow \omega(t) = \frac{\underline{\mathbf{r}}''(t) \cdot \underline{\mathbf{n}}(t)}{v(t)} = \frac{\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}''(t)}{v(t)^2}. \quad (3.4)$$

Assim, é obtida uma fórmula para $\omega(t)$ que depende apenas de termos intrínsecos à curva $\underline{\mathbf{r}}$. Dessa forma, obtém-se a seguinte relação:

$$\omega(t) = \frac{\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}''(t)}{v(t)^2} \Leftrightarrow \underbrace{\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}''(t)}_{D(t)} = \omega(t)v(t)^2.$$

Denotamos o escalar $\widehat{\mathbf{r}}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ como o **determinante**, $D(t)$, da curva. Em coordenadas,

$$D(t) = \widehat{\mathbf{r}}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} | & | \\ \mathbf{r}'(t) & \mathbf{r}''(t) \\ | & | \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$

que zera quando $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ são linearmente dependentes, ou quando $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ (nos pontos singulares) ou $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$.

3.8 Curvatura

3.8.1 Definição

A **curvatura** $\kappa = \kappa(t)$, da curva \mathbf{r} , em um ponto regular, é definida como

$$\kappa(t) = \frac{\omega(t)}{v(t)} = \frac{D(t)}{v(t)^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.5)$$

O valor de κ , para um dado t , nos diz o quanto uma curva curva naquele ponto.

Com essa definição, as equações (3.2) e (3.3), de Serret-Frenet, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{t}'(t) = \underbrace{\kappa(t)v(t)}_{\omega(t)} \mathbf{n}(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{n}'(t) = -\underbrace{\kappa(t)v(t)}_{\omega(t)} \mathbf{t}(t). \quad (3.6)$$

No caso das curvas com velocidade unitária, as equações simplificam-se em:

$$\mathbf{t}'(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{n}'(t) = -\kappa(t)\mathbf{t}(t). \quad (3.7)$$

Exemplo 3.8.1.1. *Curvatura de um segmento de reta.* Seja um segmento de reta definido por $\mathbf{r}(t) = (a + bt, c + dt)$, com coeficientes reais, b e d não ambos nulos, e t pertencente a um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Têm-se:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, por 3.5,

$$\kappa(t) = \frac{b \cdot 0 - 0 \cdot d}{(b^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

o que mostra que segmentos de reta têm curvatura constante igual a zero.

□

Exemplo 3.8.1.2. Curvatura de um arco de círculo. Considere um arco de círculo de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$, da forma $\underline{\mathbf{r}}(t) = (x_0, y_0) + r\underline{\mathbf{e}}(t)$, com $t \in I \subset \mathbb{R}$, sendo I um intervalo aberto. Têm-se:

$$\underline{\mathbf{r}}'(t) = r\underline{\mathbf{f}}(t) \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{r}}''(t) = -r\underline{\mathbf{e}}(t).$$

Dessa forma, $\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) = -r\underline{\mathbf{e}}(t)$ e $v(t)^3 = r^3$. Utilizando a fórmula da curvatura, obtém-se:

$$\kappa(t) = \frac{D(t)}{v(t)^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Portanto, arcos de círculos possuem curvatura constante não nula, igual a $\frac{1}{r}$.

□

Observação 3.8.1. Conforme a Tabela 3, que resume as propriedades geométricas de um círculo, $\omega(t) = 1, \forall t \in [0, 2\pi)$. Assim, conclui-se que a velocidade angular em um círculo é invariante com relação ao escalonamento.

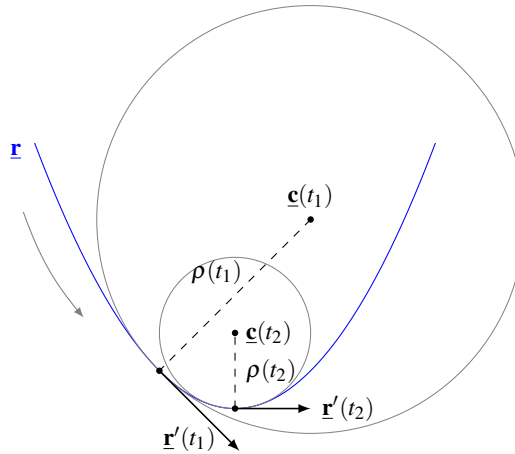
3.8.2 Círculo osculador; raio e centro de curvatura

Definição 3.8.1. Seja $\underline{\mathbf{r}}$ uma curva regular. Têm-se o seguinte:

- **Círculo osculador:** circunferência que tangencia a curva em um ponto $\underline{\mathbf{r}}(t)$ e que possui mesma tangente e mesma aceleração normal. A grosso modo, é a circunferência que melhor se aproxima da curva ao redor de $\underline{\mathbf{r}}(t)$. O círculo osculador está contido no mesmo semiplano onde se encontra o traço da curva, determinado pela reta tangente que passa por $\underline{\mathbf{r}}(t)$.
- **Raio de curvatura:** raio do círculo osculador que passa por $\underline{\mathbf{r}}(t)$. É calculado como o inverso multiplicativo do módulo da curvatura, ou seja, $\rho(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$, onde $\kappa(t) \neq 0$.
- **Centro de curvatura:** centro do círculo osculador. É o ponto que se situa à distância $\rho(t)$, pela normal, de $\underline{\mathbf{r}}(t)$. É calculado da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \rho(t)\underline{\mathbf{n}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \varphi(t)\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t). \quad (3.8)$$

Na Figura 3.7, estão representados esses conceitos.

Figura 3.7 – Círculos osculadores em $\underline{\mathbf{r}}(t_1)$ e $\underline{\mathbf{r}}(t_2)$ 

Fonte: O autor (2020)

Observando os círculos osculadores representados na Figura 3.7, nota-se que, em $\underline{\mathbf{r}}(t_1)$, ponto em que a curva curva menos, se comparado com $\underline{\mathbf{r}}(t_2)$, o raio de curvatura é maior. Isso não é algo novo, já que, pela fórmula, o raio de curvatura e a curvatura são grandezas inversamente proporcionais.

Pode-se escrever a equação do círculo osculador, em um parâmetro regular t_0 , da seguinte maneira:

$$|\underline{\mathbf{r}}(t) - \underline{\mathbf{c}}(t_0)|^2 = |\underline{\mathbf{r}}(t_0) - \underline{\mathbf{c}}(t_0)|^2.$$

3.9 Evoluta

Como foi visto em (3.8), uma expressão para o centro de curvatura é:

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \rho(t)\underline{\mathbf{n}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\underline{\mathbf{n}}(t).$$

Assim, pode-se definir uma curva que será importante no estudo das paralelas:

Definição 3.9.1. A *evoluta* é a curva traçada pelos centros de curvatura de uma curva $\underline{\mathbf{r}}$, nos parâmetros regulares t , tal que $\kappa(t) \neq 0, \forall t \in I$.

3.9.1 Alguns resultados

Teorema 3.9.1. Em um ponto singular simples t_0 , a curva e a sua evoluta coincidem, ou seja, $\underline{\mathbf{r}}(t_0) = \underline{\mathbf{c}}(t_0)$.

Demonstração. Uma expressão para a evoluta, de acordo com (3.8), é: $\underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \varphi(t)\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)$. No ponto singular simples t_0 , a evoluta é bem definida se a função $\varphi(t)$ o for. Assim, basta calcular o limite dessa função quando $t \rightarrow t_0$, utilizando a relação $\varphi(t) = \frac{\rho(t)}{v(t)}$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\rho(t)}{v(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{v(t)^3}{D(t)}}{v(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t)^2}{D(t)} \rightarrow 0$$

Utilizando a Regra de L'Hospital, conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{2v(t)v'(t)}{D'(t)}.$$

Como $D(t) = \widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}''(t)$, utilizando a regra de derivação do produto escalar, tem-se

$$D'(t) = \underbrace{\widehat{\underline{\mathbf{r}}}''(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}''(t)}_0 + \widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}'''(t) = \widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{r}}'''(t).$$

Dessa forma, no ponto singular simples t_0 , para o qual $\underline{\mathbf{r}}''(t_0) \not\parallel \underline{\mathbf{r}}'''(t_0)$, tem-se $D'(t) \neq 0$, o que implica em

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = 0.$$

Portanto, em t_0 , a curva e a sua evoluta coincidem, ou seja, $\underline{\mathbf{c}}(t_0) = \underline{\mathbf{r}}(t_0)$. □

Proposição 3.9.1. *Os pontos singulares de uma evoluta ocorrem quando $\kappa'(t) = 0$ ou, equivalentemente, $\rho'(t) = 0$, isto é, nos pontos críticos das funções curvatura e raio de curvatura, respectivamente.*

Demonstração. Tem-se que

$$\underline{\mathbf{c}}'(t) = \underline{\mathbf{r}}'(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} \underline{\mathbf{n}}(t) - \frac{1}{\kappa(t)} \omega(t) \underline{\mathbf{t}}(t).$$

Como $\underline{\mathbf{r}}'(t) = v(t)\underline{\mathbf{t}}(t)$ e $\omega(t) = \kappa(t)v(t)$, segue que

$$\underline{\mathbf{c}}'(t) = v(t)\underline{\mathbf{t}}(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} \underline{\mathbf{n}}(t) - \frac{1}{\kappa(t)} \kappa(t)v(t)\underline{\mathbf{t}}(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} \underline{\mathbf{n}}(t),$$

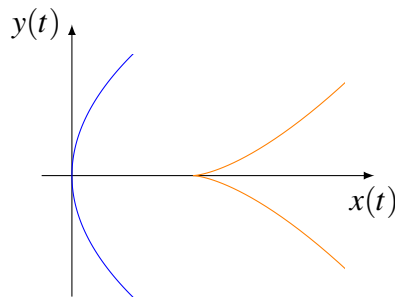
que zera se, e somente se, $\kappa'(t) = 0$. De modo análogo, demonstra-se para $\rho'(t)$. □

3.9.2 Exemplos

Exemplo 3.9.2.1. *Evoluta de uma parábola.* Seja a parábola definida por $\underline{\mathbf{r}}(t) = (at^2, 2at)$, com $a > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. De acordo com a Tabela 4, do Apêndice A, $\kappa(t) = \frac{-1}{2a\sqrt{(t^2+1)^3}}$. Derivando a função

curvatura, obtém-se $\kappa'(t) = \frac{3t}{2a\sqrt{(t^2+1)^5}}$. Assim, $\kappa'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Derivando novamente, chega-se a $\kappa''(t) = \frac{3(1-4t^2)}{2a\sqrt{(t^2+1)^7}}$, e $\kappa''(0) \neq 0$. Logo, a evoluta da parábola possui um ponto singular simples em $t = 0$. Da mesma tabela, verifica-se que $\underline{c}(t) = a \begin{pmatrix} 3t^2+2 \\ -2t^3 \end{pmatrix}$. Portanto, a evoluta possui um ponto singular simples em $\underline{c}(0) = (2a, 0)$, que corresponde ao vértice da parábola. Na Figura 3.8, são representadas a parábola e sua evoluta:

Figura 3.8 – Parábola e sua evoluta

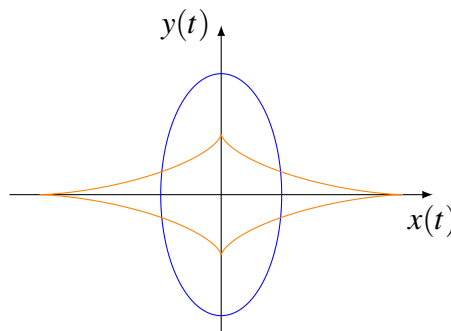


Fonte: O autor (2020)

□

Exemplo 3.9.2.2. Evoluta de uma elipse. Considere a elipse $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$, com $0 < a < b$ e $t \in [0, 2\pi)$. De acordo com a Tabela 5, sua evoluta é dada por $\underline{c}(t) = \frac{a^2 - b^2}{ab} \begin{pmatrix} b \cos^3 t \\ -a \sin^3 t \end{pmatrix}$. Na Figura 3.9, são mostrados os traços da elipse e de sua evoluta.

Figura 3.9 – Elipse e sua evoluta



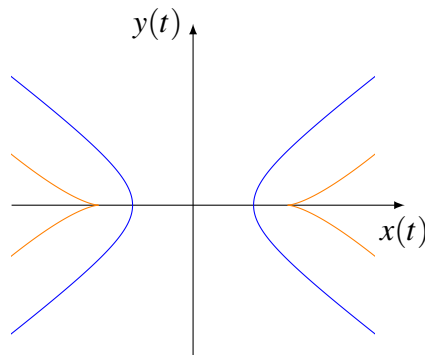
Fonte: O autor (2020)

Observe que os quatro pontos singulares da evoluta são originados pelos quatro vértices da parábola, quando $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

□

Exemplo 3.9.2.3. Evoluta de uma hipérbole. Seja a hipérbole dada por $\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$, com $0 < b < a$ e $t \in \mathbb{R}$. Conforme Tabela 6, sua evoluta é $\underline{\mathbf{c}}(t) = \frac{a^2 + b^2}{ab} \begin{pmatrix} \pm b \cosh^3 t \\ -a \sinh^3 t \end{pmatrix}$. Derivando a expressão da evoluta, obtém-se $\underline{\mathbf{c}}'(t) = 3 \frac{a^2 + b^2}{ab} \sinh t \cosh t \begin{pmatrix} \pm b \cosh t \\ -a \sinh t \end{pmatrix}$. Assim, $\underline{\mathbf{c}}'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow t = 0$. Portanto, os pontos singulares da evoluta são da forma $\left(\frac{a^2 + b^2}{a}, 0\right)$ e $\left(-\frac{a^2 + b^2}{a}, 0\right)$. A Figura 3.10 mostra a hipérbole e sua evoluta.

Figura 3.10 – Hipérbole e sua evoluta

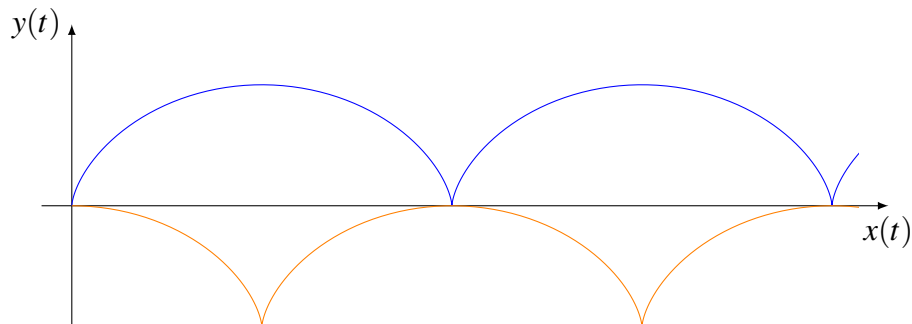


Fonte: O autor (2020)

□

Exemplo 3.9.2.4. Evoluta da cicloide. Considere a cicloide $\underline{\mathbf{r}}(t) = r \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ e sua evoluta $\underline{\mathbf{c}}(t) = r \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}_+$, dadas na Tabela 7. Seus traços são mostrados na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Cicloide e sua evoluta



Fonte: O autor (2020)

Analisando a figura, e em conformidade com o Teorema 3.9.1, verifica-se que nos pontos singulares t_s , da cicloide, $\underline{\mathbf{r}}(t_s) = \underline{\mathbf{c}}(t_s)$.

□

Proposição 3.9.2. *A evoluta da cicloide é, também, uma cicloide.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{r}}(t + \pi) &= r \begin{pmatrix} t + \pi + \text{sent } t \\ 1 + \text{cost } t \end{pmatrix} = r \left[\begin{pmatrix} t + \text{sent } t \\ \text{cost } t - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \underline{\mathbf{c}}(t) + r \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t + \pi) - r \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ou seja, a evoluta de uma cicloide é uma cicloide defasada de π , e transladada para baixo, com relação ao eixo x .

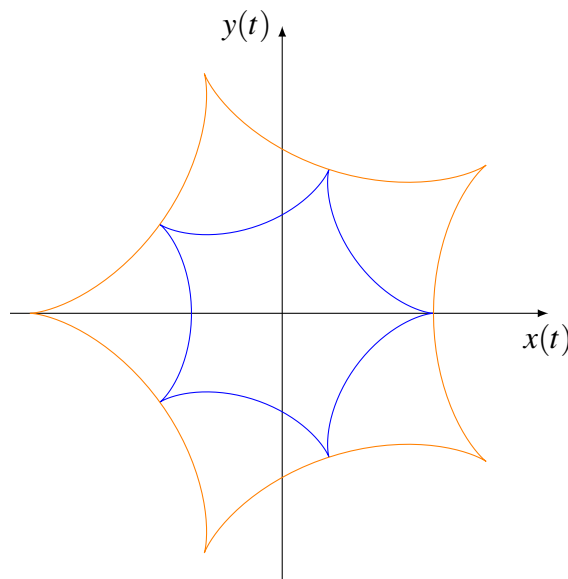
□

Exemplo 3.9.2.5. *Evoluta da hipocicloide.* Seja, de acordo com a Tabela 8, a hipocicloide ($\lambda = 1$) dada por $\underline{\mathbf{r}}(t) = r\{\delta \underline{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}$, $t \in [0, 2\pi)$, com $r > 0$ e $\delta = \frac{R-r}{r} > 0$, que possui evoluta da forma

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = r\{\delta(1 - \varphi(t))\underline{\mathbf{e}}(t) - (1 + \delta\varphi(t))\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}, \quad t \in [0, 2\pi). \quad (3.9)$$

Na Figura 3.12, estão representados os traços das duas curvas, sendo $r = 1$ e $\delta = 4$.

Figura 3.12 – Hipocicloide e sua evoluta



Fonte: O autor (2021)

Também, de acordo com o Teorema 3.9.1, os pontos singulares da hipocicloide pertencem à sua evoluta.

□

Proposição 3.9.3. *A evoluta de uma hipocicloide é, também, uma hipocicloide.*

Demonstração. Para provar o resultado, primeiro é necessário mostrar que $\varphi(t)$ é constante. Da Tabela 8, obtém-se a expressão da frequência angular:

$$\varphi(t) = \frac{2[1 - \cos((\delta + 1)t)]}{-(\delta - 1) + (\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)}, \quad t \in (0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{2k\pi}{\delta + 1} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \delta, \text{ e } \delta \neq 1.$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t) = \frac{2[1 - \cos((\delta + 1)t)]}{-(\delta - 1)[1 - \cos((\delta + 1)t)]} = \frac{2}{1 - \delta}.$$

Assim, substituindo $\varphi(t)$ na equação (3.9), obtém-se

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = \underbrace{r \left(\frac{-\delta - 1}{-\delta + 1} \right)}_{r^*} \{ \delta \underline{\mathbf{e}}(t) + \underline{\mathbf{g}}(\delta t) \} = r^* \{ \delta \underline{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{g}}(\delta t + \pi) \}.$$

Portanto, a evoluta de uma hipocicloide é uma hipocicloide defasada de π , com novos raios, r^* e R^* .

□

Proposição 3.9.4. *A evoluta de uma hipotrocoide não é uma hipotrocoide.*

Demonstração. Da Tabela 8, tem-se a seguinte expressão para a evoluta da hipotrocoide:

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = r \{ \delta(1 - \varphi(t)) \underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda(1 + \delta \varphi(t)) \underline{\mathbf{g}}(\delta t) \}.$$

Dessa forma, tem-se:

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = r \{ \delta \underline{\mathbf{e}}(t) - \delta \varphi(t) \underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda \underline{\mathbf{g}}(\delta t) - \lambda \delta \varphi(t) \underline{\mathbf{g}}(\delta t) \} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = \underbrace{r \{ \delta \underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda \underline{\mathbf{g}}(\delta t) \}}_{\underline{\mathbf{r}}(t)} - r \varphi(t) \{ \delta \underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda \delta \underline{\mathbf{g}}(\delta t) \}$$

Como $\lambda \neq 1$, então $\varphi(t)$ é uma função que depende de t . Portanto, a evoluta da hipotrocoide não é uma hipotrocoide.

□

4 CURVAS PARALELAS

4.1 Contexto histórico e aplicações

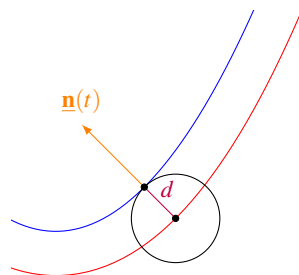
De acordo com Farouki e Neff (1990, p. 83), o termo “curvas paralelas”, aparentemente, foi introduzido por Leibniz em 1692.

Ainda de acordo com os autores, em textos elementares de geometria diferencial e em livros mais antigos de geometria algébrica, é mencionada uma família de curvas que são “paralelas” a uma curva dada, porém, sem uma análise mais detalhada de sua geometria (FAROUKI; NEFF, 1990, p. 83).

No campo do desenho geométrico auxiliado por computador (CAGD), as paralelas são mais conhecidas como curvas *offset* (FAROUKI; NEFF, 1990, p. 83). Em Giblin e Warder (2014, p. 884), a família de paralelas é chamada de *wavefronts*, que, segundo os autores, se parece com uma irradiação emanada da curva original.

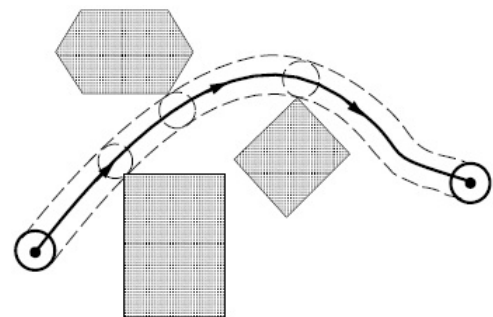
Segundo Patrikalakis e Maekawa (2002, p. 293), as curvas paralelas são úteis em várias aplicações da engenharia, como nas máquinas controladas numericamente – também em Marsh (2005, p. 107) (Figura 4.1) – e na acessibilidade de robôs (planejamento do caminho) (Figura 4.2). Farouki e Neff (1990, p. 83) citam aplicações na análise de tolerância e na ótica geométrica.

Figura 4.1 – Caminho do centro da ferramenta de corte cilíndrica ao longo da **paralela**, a uma distância d da curva original



Fonte: Adaptado de Marsh (2005, p. 108)

Figura 4.2 – Representação de acessibilidade na robótica



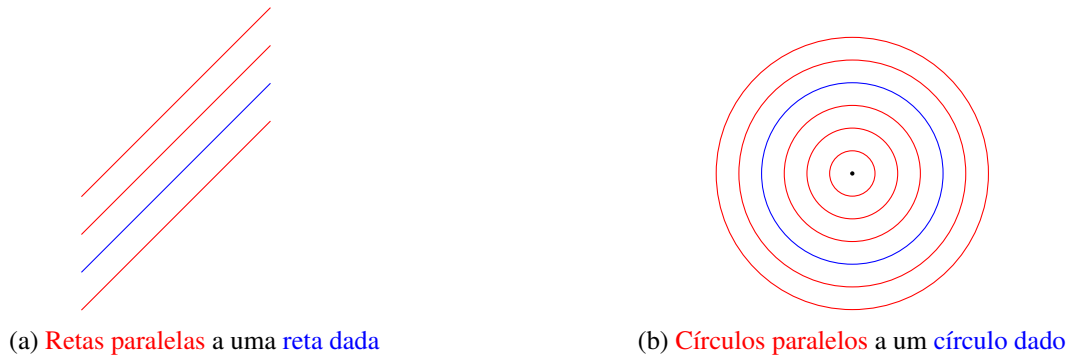
Fonte: Patrikalakis e Maekawa (2002, p. 295)

4.2 Definição e exemplos

A terminologia das curvas paralelas se baseia no fato que ocorre com retas paralelas e com círculos concêntricos, onde os pontos das curvas paralelas estão a uma distância constante

dos respectivos pontos da curva original.

Figura 4.3 – Curvas paralelas a uma curva dada



Fonte: O autor (2020)

Na Figura 4.3, têm-se dois exemplos onde as paralelas são semelhantes às curvas originais. Porém, como será visto, essa semelhança não acontece para as curvas em geral.

Definição 4.2.1. Seja \underline{r} uma curva regular, com normal unitária \underline{n} . Por *paralela* à \underline{r} , a uma distância d , definimos a curva $\underline{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

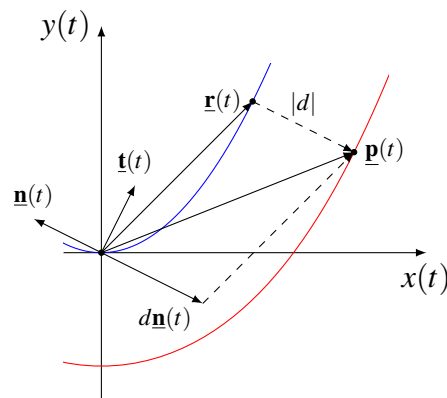
$$\underline{p}(t) = \underline{r}(t) + d\underline{n}(t), \quad d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ou seja, \underline{p} é o conjunto de pontos que estão a uma distância d de \underline{r} , ao longo das retas normais.

O sinal de d determina em qual lado da curva a paralela se encontra. A paralela é dita positiva (“exterior”) ou negativa (“interior”) se $d > 0$ ou $d < 0$, respectivamente.

A Figura 4.4 representa, geometricamente, a Definição 4.2.1, no caso em que $d < 0$.

Figura 4.4 – Paralela a uma curva dada, $d < 0$



Fonte: Adaptado de Alencar, Santos e Neto (2020, p. 60)

A curva $\underline{\mathbf{p}}$ é bem definida nos pontos regulares da curva original $\underline{\mathbf{r}}$. Caso seja desconsiderada a restrição de $\underline{\mathbf{r}}$ ser regular, pode acontecer de as paralelas, exteriores e interiores, terem locais de descontinuidade, pois o vetor normal unitário $\underline{\mathbf{n}}(t)$, da curva original, pode sofrer uma abrupta mudança de direção nos pontos singulares.

Nos exemplos que virão, poderá ser observado que, em geral, as curvas paralelas são diferentes da curva original.

Exemplo 4.2.1. Paralelas à parábola. Seja a parábola $\underline{\mathbf{r}}(t) = (at^2, 2at)$, com $a > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Tem-se que o vetor normal unitário é dado por $\underline{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. (Na Tabela 4, do Apêndice A, encontram-se as propriedades geométricas dessa parábola.)

Assim, a curva paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$, à distância d de $\underline{\mathbf{r}}(t)$, é dada por

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ 2at \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{t^2+1}} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ “corta” o eixo x quando $y_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = 2at + \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = 0$. Ou seja, quando $t = 0$ ou quando

$$2at = -\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \stackrel{t \neq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{d}{2a} = \sqrt{t^2+1}.$$

Se $t = 0$, o ponto de interseção é da forma $\underline{\mathbf{p}}(0) = (-d, 0)$.

Se $t \neq 0$, $\sqrt{t^2+1} > 1$. Então, da última relação, tem-se

$$-\frac{d}{2a} = \sqrt{t^2+1} > 1 \Rightarrow d < -2a.$$

Nesse último caso, obtém-se um segundo ponto de interseção da paralela com o eixo das abscissas.

Dessa forma, para $d > -2a$, a curva paralela se assemelha a uma parábola.

Derivando $\underline{\mathbf{p}}(t)$, obtém-se

$$\underline{\mathbf{p}}'(t) = 2a \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{(t^2+1)^3}} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\underline{\mathbf{p}}'(t) = (0, 0) \Leftrightarrow d = -2a$. Ou seja, para esse valor de d , $\underline{\mathbf{p}}(t)$ possui um ponto singular.

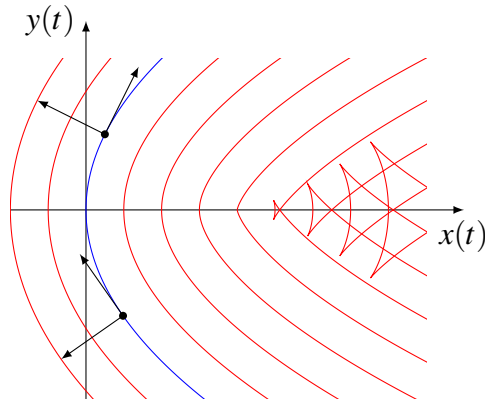
Derivando $\underline{\mathbf{p}}'(t)$, tem-se

$$\underline{\mathbf{p}}''(t) = 2a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{(t^2+1)^5}} \begin{pmatrix} 1-2t^2 \\ -3t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que nunca zera, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, para $d = -2a$, a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ possui um ponto singular simples.

Por fim, para $d < -2a$, a curva paralela apresenta uma nova configuração: um autocruza-mento no eixo x e dois pontos singulares.

Figura 4.5 – Parábola e paralelas



Fonte: O autor (2020)

□

Uma outra maneira de se analisar a regularidade/singularidade da paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ é observar que, conforme a Tabela 1, $v_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = v(t) - d\omega(t)$.

Da Tabela 4, têm-se que $v(t) = 2a\sqrt{t^2 + 1}$ e $\omega(t) = -\frac{1}{t^2 + 1}$. Assim,

$$v_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = 2a(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{t^2 + 1} = \frac{2a(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + d}{t^2 + 1}.$$

Como os pontos singulares da paralela ocorrem quando $v_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = 0$, tem-se

$$d = -2a(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = -\frac{d}{2a} \Leftrightarrow t^2 = \left(-\frac{d}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1.$$

Assim, têm-se três casos:

1. $-\frac{d}{2a} < 1 \Leftrightarrow d > -2a \implies$ a paralela será regular;
2. $-\frac{d}{2a} = 1 \Leftrightarrow d = -2a \implies$ a paralela terá um ponto singular simples, no parâmetro $t = 0$, da forma $\underline{\mathbf{p}}(0) = (2a, 0)$;
3. $-\frac{d}{2a} > 1 \Leftrightarrow d < -2a \implies$ a paralela terá dois pontos singulares simétricos, com relação

ao eixo x , nos parâmetros da forma $t = \pm \sqrt{\left(-\frac{d}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$.

Exemplo 4.2.2. Paralelas à elipse. Seja a elipse $\underline{\mathbf{r}}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, com $0 < a < b$ e centro na origem. Tem-se, conforme a Tabela 5, que o vetor normal unitário é dado por

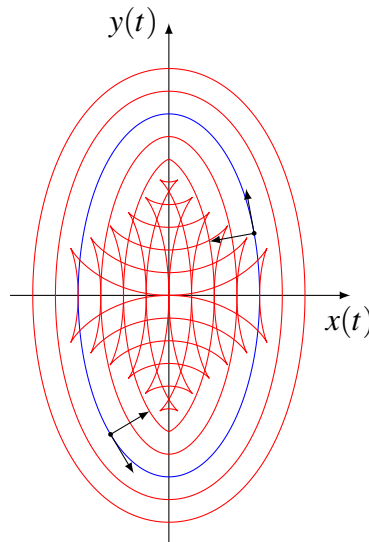
$$\underline{\mathbf{n}}(t) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}.$$

Assim, a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$, a uma distância d de $\underline{\mathbf{r}}(t)$, é dada por

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} - \frac{d}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Na Figura 4.6, têm-se os traços da elipse dada e de dez paralelas a ela (duas negativas e oito positivas), com uma distância de 0,5 entre uma curva e outra.

Figura 4.6 – Elipse e paralelas



Fonte: O autor (2020)

□

Nota-se que, assim como no exemplo anterior, a partir de um certo valor de d , as paralelas deixam de ser parecidas com a elipse – no sentido de formato da curva, já que, pela parametrização $\underline{\mathbf{p}}(t)$, a única paralela que é uma elipse ocorre quando $d = 0$, porém, esse valor da distância foi excluído na 4.2.1.

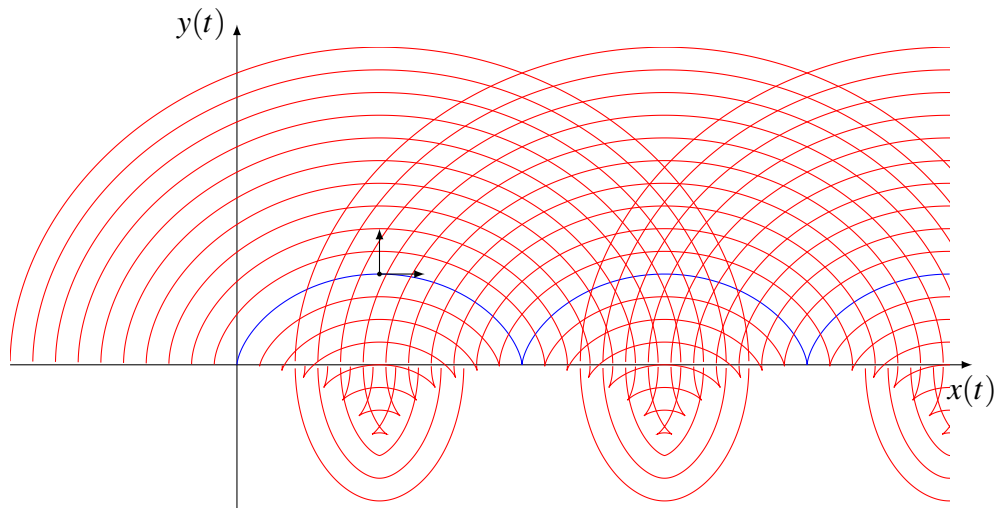
Verificar a regularidade/singularidade da paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ fazendo $v_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = 0$ nem sempre é simples. À frente, será apresentada uma relação existente entre a evoluta de uma curva e os pontos singulares de suas paralelas, que será útil para essa verificação.

Exemplo 4.2.3. Paralelas à cicloide. A cicloide, dada por $\underline{\mathbf{r}}(t) = r \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}_+$ tem normal unitária, conforme a Tabela 7, da forma $\underline{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos t)}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$. Logo, sua paralela é

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = r \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{2(1 - \cos t)}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}_+, t \neq 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

Abaixo, na Figura 4.7, são traçadas a cicloide e vinte paralelas a ela (dez positivas e dez negativas), distantes 0,5 entre uma curva e outra.

Figura 4.7 – Cicloide e paralelas



Fonte: O autor (2020)

Aqui, observa-se que as paralelas positivas se assemelham com a cicloide original. Porém, existem descontinuidades nos seus traços, nos pontos singulares de $\underline{\mathbf{r}}(t)$, isto é, nos parâmetros da forma $t = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$

À medida que d assume valores negativos, aparecem nas paralelas dois pontos singulares abaixo do eixo x . Para um certo d_0 , surge uma paralela com um ponto singular simples, e, para $d < d_0$, as paralelas negativas são regulares.

Observa-se, também, que a união das paralelas às distâncias d e $-d$ faz parecer com que exista uma continuidade no traço das curvas. No entanto, existem descontinuidades referentes aos parâmetros citados.

□

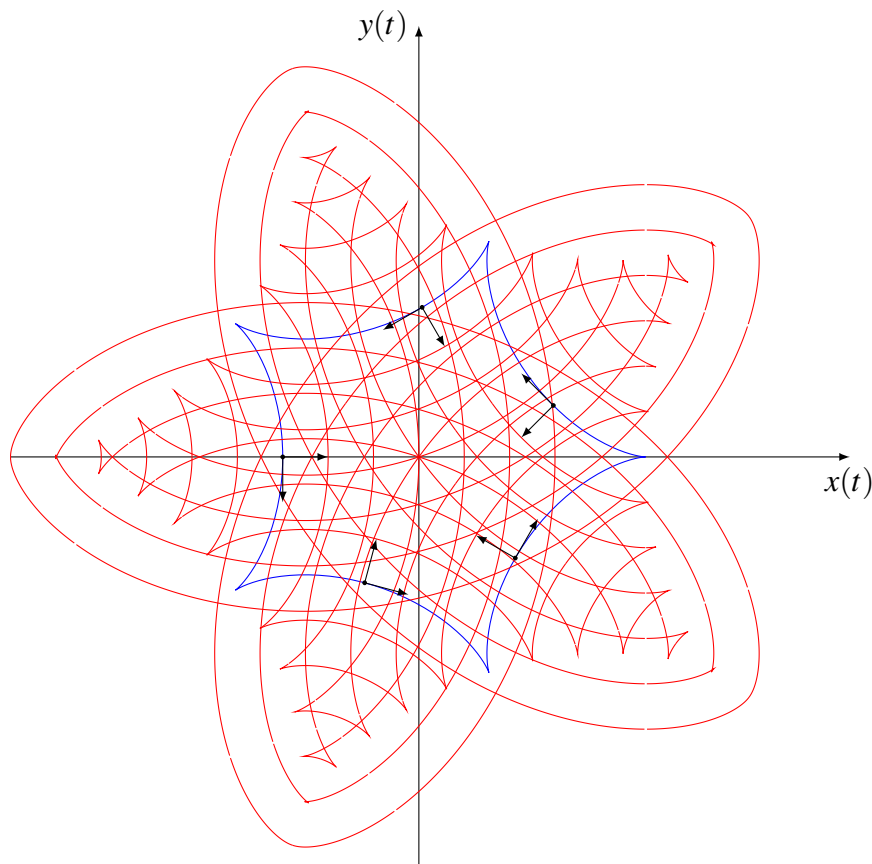
Exemplo 4.2.4. Paralelas à hipocicloide. Seja a hipocicloide representada na Figura 2.18b ($R = 5$, $r = 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$), dada por $\underline{\mathbf{r}}(t) = r\{\delta\underline{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}$, onde $\delta = \frac{R-r}{r}$. Sua normal unitária é

dada por $\underline{\mathbf{n}}(t) = -\frac{\underline{\mathbf{e}}(t) + \underline{\mathbf{g}}(\delta t)}{\sqrt{2[1 - \cos((\delta + 1)t)]}}$. Logo, a paralela é da seguinte forma:

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = r\{\delta \underline{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{g}}(\delta t)\} - \frac{d\{\underline{\mathbf{e}}(t) + \underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}}{\sqrt{2[1 - \cos((\delta + 1)t)]}}, \quad t \neq \frac{2k\pi}{\delta + 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Na Figura 4.8, estão representados os traços da hipocicloide, $t \in [0, 2\pi)$, e de doze paralelas (seis positivas e seis negativas), $t \in (0, 2\pi)$, $t \neq \frac{2k\pi}{5}$, $k = 1, 2, 3, 4$, distantes uma unidade entre uma curva e outra.

Figura 4.8 – Hipocicloide e paralelas



Fonte: O autor (2020)

Analisando a figura, uma tarefa não tão simples é identificar quais paralelas são positivas e quais são negativas.

Assim como acontece com as paralelas à cicloide, a união das paralelas à hipocicloide aparenta ser contínua. No entanto, existem descontinuidades nos parâmetros da forma $t = \frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, \dots, 4$, referentes aos pontos singulares da curva original.

□

A seguir, serão fornecidos dois resultados que auxiliarão no estudo das paralelas a uma curva dada.

Proposição 4.2.1. *Seja $\underline{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e de classe \mathcal{C}^2 . Então, a curva \underline{p} , paralela à \underline{r} , a uma distância $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é regular se, e somente se,*

$$\kappa(t) \neq \frac{1}{d}, \quad \forall t \in I,$$

onde $\kappa(t)$ é a curvatura de $\underline{r}(t)$.

Demonstração. Derivando $\underline{p}(t)$, tem-se $\underline{p}'(t) = \underline{r}'(t) + d\underline{n}'(t)$. Utilizando uma das equações de Frenet-Serret (3.3), e sabendo que $\omega(t) = v(t)\kappa(t)$ e $\underline{r}'(t) = v(t)\underline{t}(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} \underline{p}'(t) &= \underline{r}'(t) - d\omega(t)\underline{t}(t) \\ &= \underline{r}'(t) - dv(t)\kappa(t)\underline{t}(t) \\ &= \underline{r}'(t) - d\underline{r}'(t)\kappa(t) \\ &= \underline{r}'(t)(1 - d\kappa(t)), \end{aligned}$$

onde $\underline{r}'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$, já que, por hipótese, $\underline{r}(t)$ é regular. Logo, $\underline{p}(t)$ é regular se, e somente se,

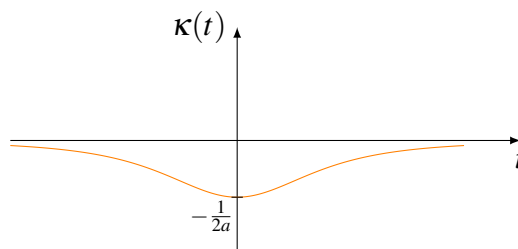
$$\begin{aligned} 1 - d\kappa(t) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow \kappa(t) &\neq \frac{1}{d}, \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

□

Definição 4.2.2. *Uma curva paralela $\underline{p} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita não degenerada quando for regular para todo $t \in I$.*

Exemplo 4.2.5. *Curvatura de uma parábola.* Seja a parábola do Exemplo 4.2.1. Sua função curvatura é dada por $\kappa(t) = \frac{-1}{2a\sqrt{(t^2+1)^3}}$, $t \in \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado na Figura 4.9.

Figura 4.9 – Gráfico de $\kappa(t)$



Fonte: O autor (2021)

Como $-\frac{1}{2a} \leq \kappa(t) < 0$, pela Proposição 4.2.1, tem-se que $\underline{\mathbf{p}}(t)$ será regular se, e somente se,

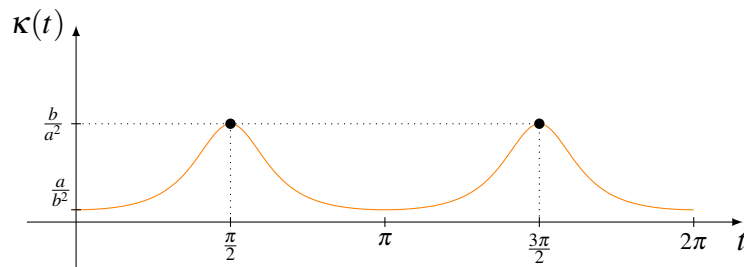
$$\frac{1}{d} \notin \left[-\frac{1}{2a}, 0\right),$$

ou seja, se $d > -2a$.

□

Exemplo 4.2.6. *Curvatura de uma elipse.* Considere a elipse definida por $\underline{\mathbf{r}}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi)$ e $0 < a < b$. Sua função curvatura, de acordo com a Tabela 5, é da forma $\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$, $t \in [0, 2\pi)$. A Figura 4.10 mostra o gráfico de $\kappa(t)$:

Figura 4.10 – Gráfico de $\kappa(t)$



Fonte: O autor (2021)

Neste caso, $\frac{a}{b^2} \leq \kappa(t) \leq \frac{b}{a^2}$. Logo, pela Proposição 4.2.1, a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ será regular se, e somente se,

$$\frac{1}{d} \notin \left[\frac{a}{b^2}, \frac{b}{a^2}\right],$$

ou seja, se $d < \frac{a^2}{b}$ ou $d > \frac{b^2}{a}$.

□

Lema 4.2.1. *Seja $\underline{\mathbf{r}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, de classe \mathcal{C}^2 , e $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Um parâmetro t é singular para a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ se, e somente se, $\underline{\mathbf{p}}(t) = \underline{\mathbf{c}}(t)$.*

Demonstração. Da Proposição 4.2.1, verifica-se que $\underline{\mathbf{p}}(t)$ é singular se, e somente se, $\kappa(t) = \frac{1}{d}$.

Por outro lado, a evoluta é dada por $\underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \underline{\mathbf{n}}(t)$. Assim,

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + d \underline{\mathbf{n}}(t) = \underline{\mathbf{p}}(t).$$

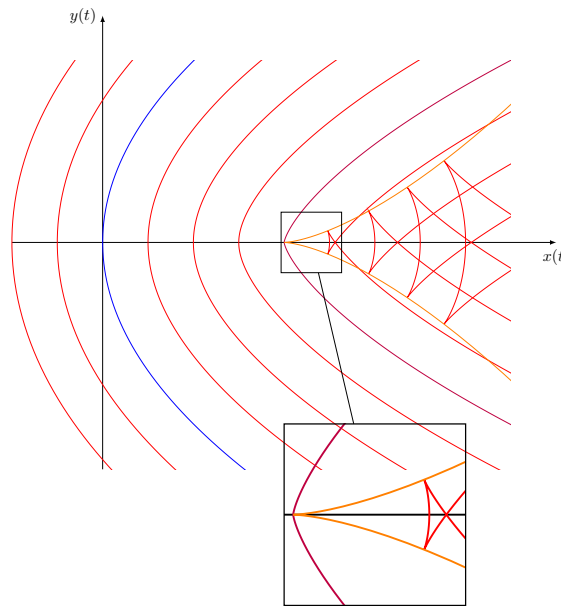
□

O resultado acima diz que os pontos singulares das paralelas pertencem à evoluta da curva dada.

Exemplo 4.2.7. Evoluta e paralelas (parábola). Considere a parábola do Exemplo 4.2.1. A paralela é dada por $\underline{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ 2at \end{pmatrix} + \frac{d}{\sqrt{t^2+1}} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ e a evoluta por $\underline{\mathbf{c}}(t) = a \begin{pmatrix} 3t^2+2 \\ -2t^3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Derivando a expressão da evoluta, obtém-se $\underline{\mathbf{c}}'(t) = 6a \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$. Assim, $t = 0$ corresponde ao único ponto singular da evoluta: $(2a, 0)$. Por este ponto, passa a **paralela limitadora** ($d = -2a$) e têm-se: i) se $d > -2a$, a paralela é regular; ii) se $d = -2a$, a paralela contém um ponto singular simples; e iii) caso $d < -2a$, a paralela contém dois pontos singulares. Nos dois últimos casos, de acordo com o Lema 4.2.1, os pontos singulares das paralelas estão na evoluta, como pode ser visto na Figura 4.11.

Como $\underline{\mathbf{c}}''(t) = 6a \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$, $(2a, 0)$ é um ponto singular simples da evoluta.

Figura 4.11 – Parábola, paralelas (limitadora) e evoluta



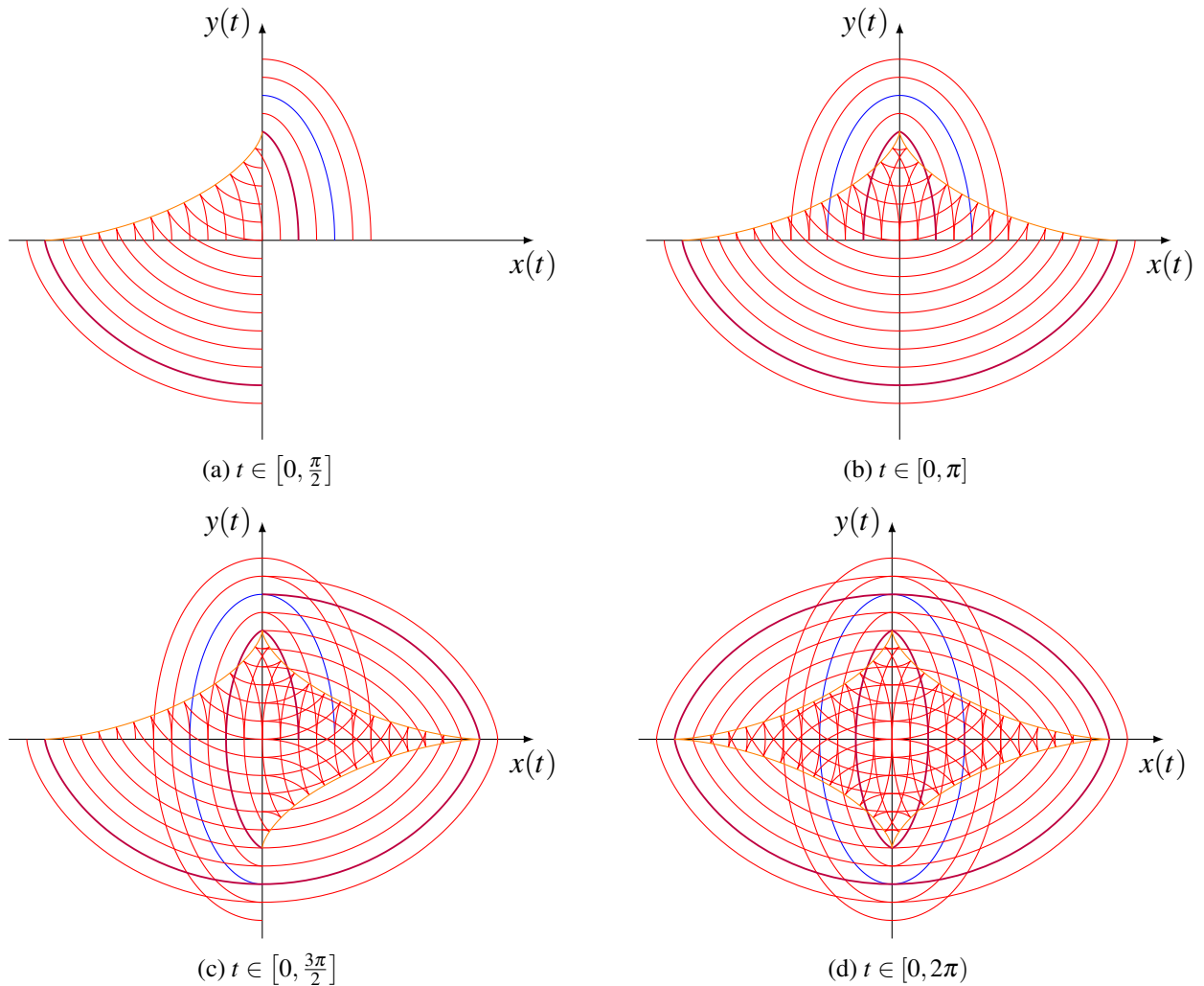
Fonte: O autor (2020)

□

Exemplo 4.2.8. Evoluta e paralelas (elipse). Seja a elipse dada no Exemplo 4.2.2. A paralela, à distância d , é dada por $\underline{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} - \frac{d}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$, e a evoluta por $\underline{\mathbf{c}}(t) = \frac{a^2 - b^2}{ab} \begin{pmatrix} b \cos^3 t \\ -a \sin^3 t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi)$.

Na Figura 4.12, são representadas a elipse, algumas paralelas (duas negativas e dezessete positivas) e sua evoluta, distantes 0,5 entre uma curva e outra.

Figura 4.12 – Elipse, paralelas (limitadoras) e evoluta



Fonte: O autor (2021)

A derivada da evoluta é dada por

$$\underline{c}'(t) = -3 \frac{a^2 - b^2}{ab} \operatorname{sen} t \cos t \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Assim, para os parâmetros t pertencentes ao conjunto $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, são originados os pontos singulares $(\frac{a^2 - b^2}{a}, 0)$, $(0, -\frac{a^2 - b^2}{b})$, $(-\frac{a^2 - b^2}{a}, 0)$ e $(0, \frac{a^2 - b^2}{b})$, respectivamente, na evoluta.

Note que, conforme o Exemplo 4.2.6, pelos pontos $(0, \frac{a^2 - b^2}{b})$ e $(0, -\frac{a^2 - b^2}{b})$ passa uma das paralelas limitadoras, quando $d = \frac{a^2}{b}$; e, pelos pontos $(\frac{a^2 - b^2}{a}, 0)$ e $(-\frac{a^2 - b^2}{a}, 0)$ passa a outra, quando $d = \frac{b^2}{a}$.

Pela Proposição 4.2.1 e pelo Lema 4.2.1, para $\frac{a^2}{b} \leq d \leq \frac{b^2}{a}$, as paralelas são todas singulares, e, para $d < \frac{a^2}{b}$ ou $d > \frac{b^2}{a}$, as paralelas são regulares.

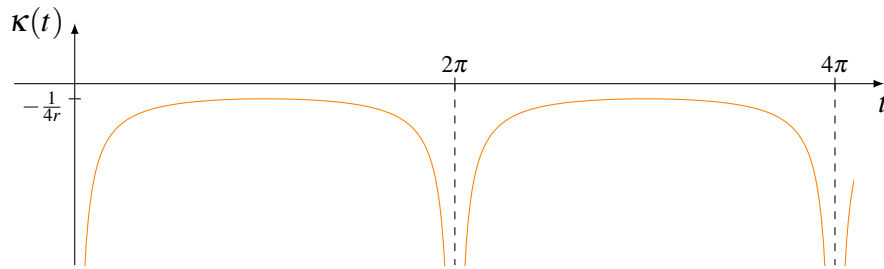
□

Exemplo 4.2.9. Evoluta e paralelas (cicloide). Considere a cicloide do Exemplo 4.2.3, com $t \in \mathbb{R}_+$, e a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$, com $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Tem-se que sua evoluta é dada por $\underline{\mathbf{c}}(t) = r \begin{pmatrix} t + \text{sent } t \\ \text{cost} - 1 \end{pmatrix}$, com $\underline{\mathbf{c}}'(t) = r \begin{pmatrix} 1 + \text{cost} \\ -\text{sent } t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Assim, $\underline{\mathbf{c}}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_+$, gerando pontos singulares na evoluta da forma $r \begin{pmatrix} \pi + 2k\pi \\ -2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. A função curvatura dessa cicloide é dada por

$$\kappa(t) = \frac{-1}{2\sqrt{2r} \cdot \sqrt{1 - \text{cost}}}, t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

cujos gráficos estão representados na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Gráfico de $\kappa(t)$



Fonte: O autor (2021)

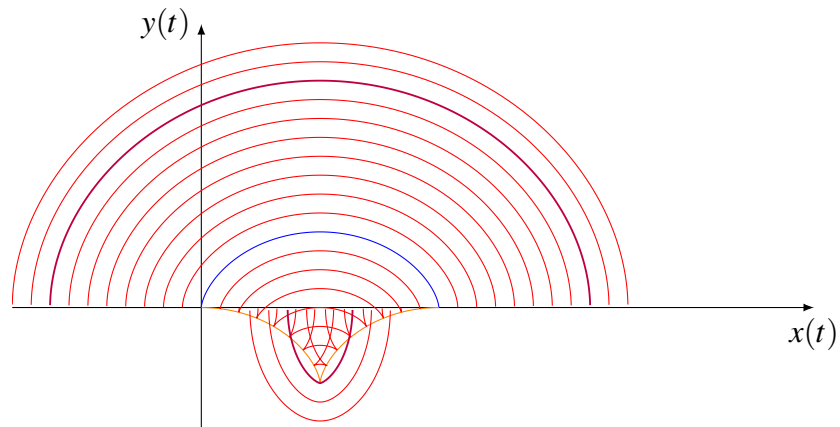
Tem-se que $\kappa(t) \leq -\frac{1}{4r}$, para todo t no domínio da função. Logo, pela Proposição 4.2.1, a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$ será regular se, e somente se,

$$\frac{1}{d} \notin \left(-\infty, -\frac{1}{4r}\right],$$

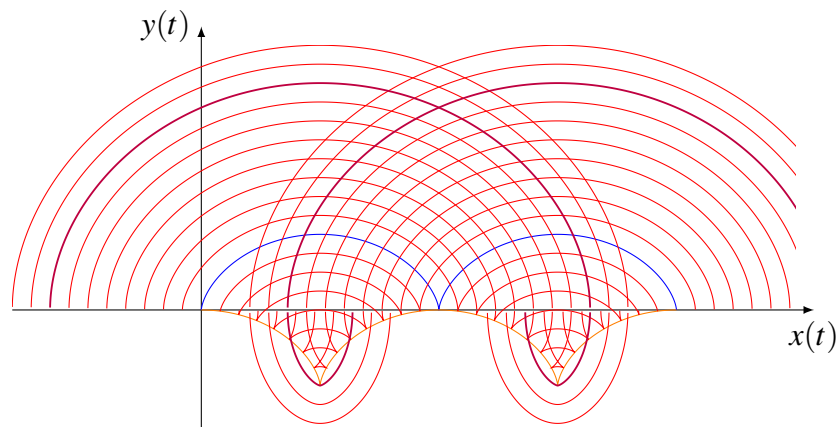
ou seja, se $-\frac{1}{4r} < \frac{1}{d} < 0 \Leftrightarrow d < -4r$ ou $\frac{1}{d} > 0 \Leftrightarrow d > 0$.

Na Figura 4.14, são mostrados os traços da cicloide, de vinte paralelas (dez positivas e dez negativas), a uma distância de 0,5 entre uma e outra, e da evoluta.

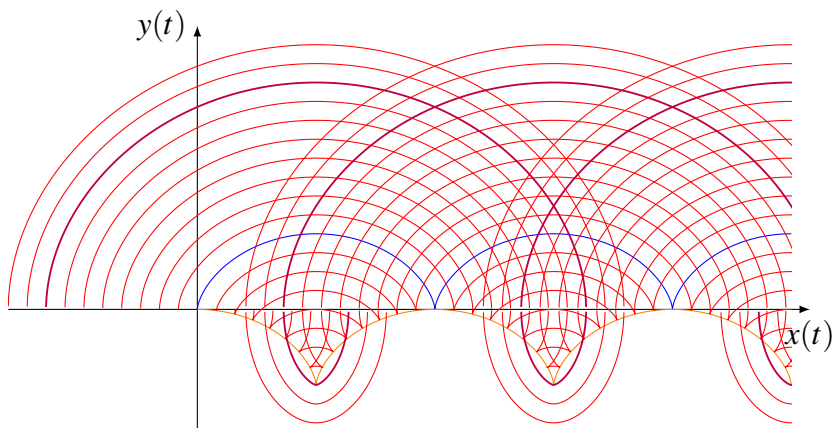
Figura 4.14 – Cicloide, paralelas (limitadoras) e evoluta



(a) $t \in [0, 2\pi]$



(b) $t \in [0, 4\pi]$



(c) $t \in [0, 5\pi]$

Fonte: O autor (2021)

Note que, como observado no Exemplo 4.2.3, analisando a Figura 4.14c, verifica-se que, restringindo ao intervalo $(0, 5\pi]$, a união de uma paralela positiva à distância d , $t \in (0, 2\pi)$ e $t \in (4\pi, 5\pi]$, com uma paralela negativa à distância $-d$, $t \in (2\pi, 4\pi)$, onde $d > 4r$, a menos das descontinuidades, é uma curva regular.

Caso $|d| \leq 4r$, a união de uma paralela positiva com uma paralela negativa, à distância $|d|$, desconsiderando as descontinuidades, é uma curva singular. Conforme o Lema 4.2.1, os pontos singulares dessa paralela pertencem à evoluta da cicloide.

□

Exemplo 4.2.10. *Evoluta e paralelas (hipocicloide).* Seja a hipocicloide $\mathbf{r}(t) = r\{\delta\mathbf{e}(t) - \mathbf{g}(\delta t)\}$, $t \in [0, 2\pi)$, onde $r > 0$ e $\delta = \frac{R-r}{r} > 0$. Sua evoluta é dada por

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = r\{\delta(1 - \varphi(t))\mathbf{e}(t) - (1 + \delta\varphi(t))\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}, t \in [0, 2\pi),$$

a paralela é da forma

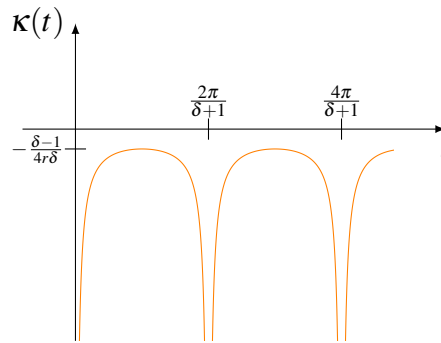
$$\underline{\mathbf{p}}(t) = r\{\delta\mathbf{e}(t) - \underline{\mathbf{g}}(\delta t)\} - \frac{d\{\delta\mathbf{e}(t) - \underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}}{\sqrt{2[1 - \cos((\delta + 1)t)]}}, t \in (0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{2k\pi}{\delta + 1} \right\}, k = 1, 2, \dots, \delta,$$

e a função curvatura é

$$\kappa(t) = \frac{1}{r\delta} \cdot \frac{1 - \delta + (\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)}{\sqrt{[2(1 - \cos((\delta + 1)t))]^3}}, t \in (0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{2k\pi}{\delta + 1} \right\}, k = 1, 2, \dots, \delta,$$

cujo gráfico está representado na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Gráfico de $\kappa(t)$



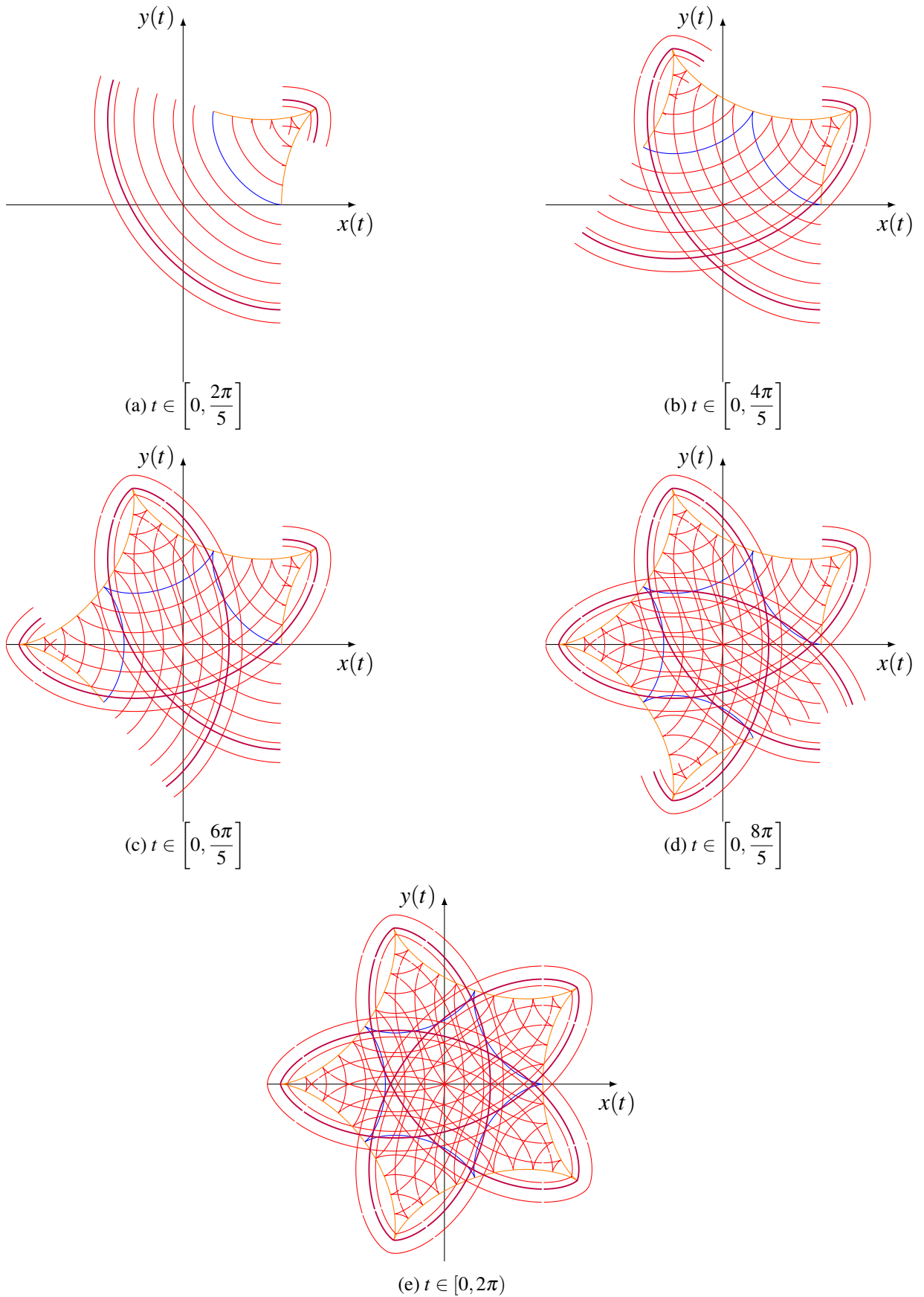
Fonte: O autor (2021)

Nesse caso, tem-se $\kappa(t) \leq -\frac{\delta - 1}{4r\delta}$, para todo t no domínio da função curvatura. Pela 4.2.1, a paralela $\underline{\mathbf{p}}(t)$, à distância d , será regular se, e somente se,

$$-\frac{\delta - 1}{4r\delta} < \frac{1}{d} < 0 \Leftrightarrow d < -\frac{4r\delta}{\delta - 1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{d} > 0 \Leftrightarrow d > 0.$$

Na Figura 4.16, estão representados os traços de uma hipocicloide ($r = 1$, $\delta = 4$), de quatorze paralelas (sete positivas e sete negativas) e de sua evoluta.

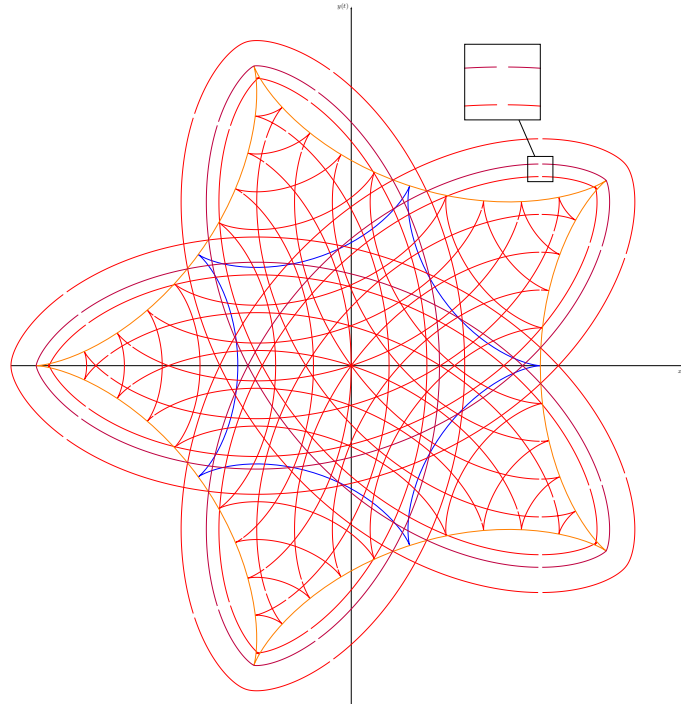
Figura 4.16 – Hipocicloide, paralelas (limitadoras) e evoluta



Fonte: O autor (2021)

Como observado no Exemplo 4.2.4, a união das paralelas às distâncias d e $-d$, na Figura 4.16e, dá a impressão de continuidade no traço da curva. No entanto, como foi dito, existem descontinuidades referentes aos pontos singulares da hipocicloide, conforme verifica-se na Figura 4.17.

Figura 4.17 – Pontos de descontinuidade nas paralelas



Fonte: O autor (2021)

Para $d < -\frac{4r\delta}{\delta-1}$ (no caso do exemplo, $d < -\frac{16}{3}$), a união das paralelas às distâncias d e $-d$ origina uma curva regular, a menos das descontinuidades $\left(t \in \left\{\frac{2k\pi}{5}\right\}, k = 1, 2, 3, 4\right)$. Para $-\frac{4r\delta}{\delta-1} < d < \frac{4r\delta}{\delta-1}$ (no exemplo, $-\frac{16}{3} < d < \frac{16}{3}$), a união de uma paralela positiva com uma negativa, à distância $|d|$, contém dez pontos singulares, os quais pertencem à evoluta. No caso em que $d = -\frac{4r\delta}{\delta-1}$ ($d = -\frac{16}{3}$), a união das paralelas às distâncias d e $-d$ dá origem à paralela limitadora, que passa pelos cinco pontos singulares da evoluta.

□

4.3 Propriedades geométricas da paralela

A seguir, serão encontradas as propriedades geométricas da paralela. Será omitido o parâmetro t , a fim de se evitar abuso na notação.

Sendo $\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{r}} + d\underline{\mathbf{n}}$ a curva paralela, têm-se:

- **Vetor velocidade (tangente), $\underline{\mathbf{p}}'(t)$:**

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{p}}' &= \underline{\mathbf{r}}' + d\underline{\mathbf{n}}' \\ &= v\underline{\mathbf{t}} - d\omega\underline{\mathbf{t}} \\ &= (v - d\omega)\underline{\mathbf{t}}\end{aligned}$$

- **Vetor aceleração, $\underline{\mathbf{p}}''(t)$:**

$$\underline{\mathbf{p}}'' = (v' - d\omega')\underline{\mathbf{t}} + \omega(v - d\omega)\underline{\mathbf{n}}$$

- **Vetor normal, $\widehat{\underline{\mathbf{p}}}'(t)$:**

$$\widehat{\underline{\mathbf{p}}}' = (v - d\omega)\underline{\mathbf{n}}$$

- **Velocidade escalar, $v_{\underline{\mathbf{p}}}(t)^2 = \underline{\mathbf{p}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{p}}'(t)$:**

$$v_{\underline{\mathbf{p}}}^2 = (v - d\omega)\underline{\mathbf{t}} \cdot (v - d\omega)\underline{\mathbf{t}} = (v - d\omega)^2$$

- **Determinante, $D_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = \widehat{\underline{\mathbf{p}}}'(t) \cdot \underline{\mathbf{p}}''(t)$:**

$$D_{\underline{\mathbf{p}}} = (v - d\omega)\underline{\mathbf{n}} \cdot [(v' - d\omega')\underline{\mathbf{t}} + \omega(v - d\omega)\underline{\mathbf{n}}] = (v - d\omega)^2\omega$$

- **Vetor tangente unitário, $\underline{\mathbf{t}}_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = \frac{\underline{\mathbf{p}}'(t)}{v_{\underline{\mathbf{p}}}(t)}$:**

$$\underline{\mathbf{t}}_{\underline{\mathbf{p}}} = \frac{(v - d\omega)\underline{\mathbf{t}}}{v - d\omega} = \underline{\mathbf{t}}$$

- **Vetor normal unitário, $\underline{\mathbf{n}}_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = \frac{\widehat{\underline{\mathbf{p}}}'(t)}{v_{\underline{\mathbf{p}}}(t)}$:**

$$\underline{\mathbf{n}}_{\underline{\mathbf{p}}} = \frac{(v - d\omega)\underline{\mathbf{n}}}{v - d\omega} = \underline{\mathbf{n}}$$

- **Fator de curvatura, $\omega_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = \frac{D_{\underline{\mathbf{p}}}(t)}{v_{\underline{\mathbf{p}}}(t)^2}$:**

$$\omega_{\underline{\mathbf{p}}} = \frac{(v - d\omega)^2\omega}{(v - d\omega)^2} = \omega$$

- **Fator osculador, $\varphi_{\underline{\mathbf{p}}}(t) = \frac{1}{\omega_{\underline{\mathbf{p}}}(t)}$:**

$$\varphi_{\underline{\mathbf{p}}} = \frac{1}{\omega} = \varphi$$

- **Curvatura**, $\kappa_{\underline{p}}(t) = \frac{D_{\underline{p}}(t)}{v_{\underline{p}}(t)^3} = \frac{\omega_{\underline{p}}(t)}{v_{\underline{p}}(t)}$:

$$\kappa_{\underline{p}} = \frac{\omega}{v - d\omega}$$

- **Raio de curvatura**, $\rho_{\underline{p}}(t) = \frac{1}{\kappa_{\underline{p}}(t)}$:

$$\rho_{\underline{p}} = \frac{v - d\omega}{\omega} = \rho - d$$

- **Centro de curvatura, evoluta**, $\underline{c}_{\underline{p}}(t) = \underline{p}(t) + \rho_{\underline{p}}(t)\underline{n}_{\underline{p}}(t) = \underline{p}(t) + \varphi_{\underline{p}}(t)\widehat{\underline{p}}'(t)$:

$$\begin{aligned}\underline{c}_{\underline{p}} &= \underline{r} + d\underline{n} + \varphi(v - d\omega)\underline{n} \\ &= \underline{r} + d\underline{n} + \varphi v\underline{n} - \varphi d\omega\underline{n} \\ &= \underline{r} + \cancel{d\underline{n}} + \varphi v\underline{n} - \cancel{d\underline{n}} \\ &= \underline{r} + \rho\underline{n} = \underline{c}\end{aligned}$$

- **Vetor velocidade da evoluta**, $\underline{c}'_{\underline{p}}(t)$:

$$\underline{c}'_{\underline{p}} = \underline{c}'$$

Note que as propriedades geométricas da paralela dependem de fatores intrínsecos à curva original.

Observe, também, que a paralela possui mesmos fatores de curvatura e osculador da curva dada. Além disso, a evoluta da paralela também é a mesma da curva original. Assim, essas propriedades são invariantes com relação à paralela a uma curva dada.

Na Tabela 1, estão resumidas as propriedades geométricas da paralela.

Tabela 1 – Propriedades geométricas das curvas paralelas

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{p}}$	$= \underline{\mathbf{r}} + d\underline{\mathbf{n}}$	$\underline{\mathbf{p}}'$	$= (v - d\omega)\underline{\mathbf{t}}$
$\underline{\mathbf{p}}''$	$= (v' - d\omega')\underline{\mathbf{t}} + \omega(v - d\omega)\underline{\mathbf{n}}$	$\widehat{\underline{\mathbf{p}}}'$	$= (v - d\omega)\underline{\mathbf{n}}$
$v_{\underline{\mathbf{p}}}^2$	$= (v - d\omega)^2$	$D_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \omega(v - d\omega)^2$
$\underline{\mathbf{t}}_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \underline{\mathbf{t}}$	$\underline{\mathbf{n}}_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \underline{\mathbf{n}}$
$\omega_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \omega$	$\varphi_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \varphi$
$\kappa_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \frac{\omega}{v - d\omega}$	$\rho_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \frac{v - d\omega}{\omega}$
$\underline{\mathbf{c}}_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \underline{\mathbf{c}}$	$\underline{\mathbf{c}}'_{\underline{\mathbf{p}}}$	$= \underline{\mathbf{c}}'$

Fonte: O autor (2020)

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O 3º DO ENSINO MÉDIO

A proposta de intervenção foi pensada para uma turma de 3º do ensino médio, e foi planejada para que, ao final, os estudantes, além de encontrar a evoluta e a paralela a uma curva dada, fossem capazes de desenhar essas curvas, com o auxílio da ferramenta TikZ. Dessa forma, seria fundamental que a escola possuísse laboratório de informática apto para uso. Lá, seriam realizadas todas as atividades práticas e teóricas, com a sugestão de que ocorressem no contraturno, tendo em vista o tempo de execução da proposta. Uma outra alternativa, levando em consideração a questão do tempo, é que se realize em uma escola de tempo integral. E mais, tendo em conta a integração de áreas do conhecimento como a matemática e a programação, a proposta pode ser aplicada no formato de projeto.

Assim, foram elaboradas atividades considerando que os conceitos, bem como a ferramenta tecnológica, fossem novidades para os alunos. Dessa forma, a proposta pedagógica se enquadraria como uma “sequência didática”.

De acordo com Zabala (1998):

As sequências de atividades de ensino/aprendizagem, ou sequências didáticas, são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma unidade didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizam e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma sequência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir. (ZABALA, 1998, p. 20)

Para justificar a proposta, serão mostrados, na próxima seção, pontos da BNCC que tratam das competências e habilidades a serem alcançadas pelos estudantes da educação básica brasileira, bem como sobre os objetivos dos currículos propostos.

Após, será trazido um breve contexto histórico do ensino da disciplina de Cálculo e, em menor parte, da cadeira de Geometria (Analítica), no Brasil, em especial quanto aos conteúdos de vetor e derivada. Como nos dias atuais tais conceitos não são ensinados na educação básica, serão expostos motivos que possam justificar o seu ensino, como a forma de abordagem e a sua presença nos programas curriculares de países que se encontram no topo do *ranking* do último Pisa, como China (1º), Canadá (6º) e Finlândia (7º).

Em seguida, será dada uma introdução à ferramenta TikZ, e também sobre como utilizar um dos editores T_EX: o TeXmaker.

Além de estar fortemente presente na BNCC, como será visto a seguir, a utilização da tecnologia auxiliará os estudantes na visualização (física e cognitiva) dos conceitos abordados, fortalecendo a ideia da conexão entre as áreas da matemática, no caso a Álgebra e a Geometria.

5.1 Base Nacional Comum Curricular: Caracterização, competências e a matemática do ensino médio

Segundo consta no próprio texto:

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7, grifo do autor)

A Base é, então, o instrumento pelo qual são norteados os currículos propostos para a educação básica, das escolas municipais e estaduais de todo o país. Além disso, serve como referência pedagógica e metodológica para os sistemas de ensino da rede privada.

Sua elaboração, em regime de cooperação e sob a coordenação do Ministério da Educação (MEC), contou com a participação dos estados, do Distrito Federal e dos municípios, após ampla consulta à comunidade educacional e à sociedade (BRASIL, 2018, p. 20).

Alguns dos objetivos fundamentais da BNCC é proporcionar aos estudantes um ensino equitativo, democrático e inclusivo, de modo que todos possam desenvolver, se possível no mesmo nível, as competências gerais – que são dez – previstas no documento.

Tendo em vista a atividade proposta neste trabalho, das dez competências gerais, serão destacadas as seguintes:

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. (BRASIL, 2018, p. 9-10)

De acordo com Brasil (2018, p. 16-17), cabe destacar, com relação aos currículos, levando-se em consideração a autonomia das escolas e o contexto, que eles devem:

- “contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas”;
- “selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.”;
- “conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens”;
- “selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender”; e
- “criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem”.

De acordo com Brasil (2018), a BNCC “[...] da área de Matemática e suas Tecnologias [do ensino médio] propõe a **consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais** desenvolvidas no Ensino Fundamental. [...]” (BRASIL, 2018, p. 527, grifo do autor).

Ainda segundo o documento, no ensino fundamental, com relação ao pensamento geométrico, os alunos “[...] desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano. [...]” (BRASIL, 2018, p. 527).

Com relação à tecnologia, a BNCC propõe sua utilização desde os anos iniciais do ensino fundamental, para que, “[...] ao chegarem aos anos finais, eles [os estudantes] possam **ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos [...].**” (BRASIL, 2018, p. 528, grifo nosso).

Conforme a Base, o foco no ensino médio é a incorporação da Matemática à realidade, nos mais variados contextos, como, por exemplo, devido ao avanço tecnológico e às exigências do mercado de trabalho. “Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.” (BRASIL, 2018,

p. 528).

Nessa transição para o ensino médio, “[...] novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.” (BRASIL, 2018, p. 529).

Fica clara ao ler a BNCC sua proposta de ensino e aprendizagem voltada para a investigação matemática e para a resolução de problemas. Dessa forma, para que os estudantes desenvolvam habilidades relativas a essas metodologias, devem “[...] raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.” (BRASIL, 2018, p. 529).

Dentre as cinco competências específicas da disciplina para o ensino médio, enfatiza-se:

4. “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.” (BRASIL, 2018, p. 538).

Outra competência específica que destaca-se é:

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, **experimentações e diferentes tecnologias**, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 540, grifo nosso)

De acordo com a BNCC, referente à competência 5:

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. [...] (BRASIL, 2018, p. 540)

A Base considera a flexibilidade na organização curricular das aprendizagens de Matemática. Ressalta que “[...] é possível adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas nesta BNCC quanto a outras que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas.” (BRASIL, 2018, p. 542).

Por fim, evidencia a necessidade de se relacionar as áreas da Matemática, com o objetivo de fomentar nos estudantes a ideia de harmonia entre elas, bem como sua aplicabilidade à vida real. Conclui enfatizando a importância da fundamentação dos saberes matemáticos em diferentes bases, “[...] de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais.” (BRASIL, 2018, p. 542).

Para cada uma das competências específicas, dentre as quais destacou-se, neste texto, a 4 e a 5, são relacionados quadros contendo as habilidades que objetivam ser alcançadas. Será sublinhada aqui a seguinte, referente à área “Números e Álgebra”:

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (BRASIL, 2018, p. 544).

Com relação ao momento de colocação em prática da sequência didática proposta neste trabalho, seria interessante que ocorresse quando as seguintes habilidades da BNCC estivessem sendo trabalhadas:

- **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

5.2 Considerações sobre o ensino de derivada e vetor na educação básica brasileira

Pelo Decreto nº 981, de 08/11/1890, foi regulamentada a “Instrução Primária e Secundária” do Distrito Federal (unidade federativa à época). Tal regulamento foi assinado pelo Ministro e Secretário de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, General Benjamin Constant Botelho de Magalhães, e aprovado pelo Chefe do Governo Provisório da então República dos Estados Unidos do Brasil, o General Manoel Deodoro da Fonseca.

Nessa reforma educacional, que ficou conhecida como “Reforma Benjamin Constant”, a fase primária seria destinada a estudantes de 7 a 15 anos de idade, e dividida em “escolas do 1º grau” (7 a 13 anos) e “escolas do 2º grau” (13 a 15 anos).

Com relação ao currículo de matemática, nas escolas do 1º grau aprendia-se a contar e a calcular (aritmética básica) e o sistema métrico precedido do estudo de geometria prática (taqueometria); e, nas do 2º grau, era praticado um estudo complementar de aritmética, álgebra elementar, geometria e trigonometria.

O ensino secundário tinha duração de sete anos, e era ofertado pelo Estado no Ginásio Nacional (antigo Instituto Nacional de Instrução Secundária).

Quanto ao programa de matemática do ensino secundário, era da seguinte forma:

- 1º ano
 - 1ª cadeira - “Aritmética (estudo completo). Álgebra elementar (estudo completo)”: 6 horas/semana.
- 2º ano
 - 1ª cadeira - “Geometria preliminar. Trigonometria retilínea. Geometria especial”: 6 horas/semana.
- 3º ano
 - 1ª cadeira - “Geometria geral e o seu complemento algébrico. **Cálculo diferencial e integral**, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita”: 6 horas/semana.

Do 4º ao 7º ano, era feita uma revisão de Cálculo e Geometria, com carga horária de 1 hora/semana.

Em 01/05/1931, foi publicado o Decreto nº 19.890, de 18/04/1931, que viria a ser consolidado pelo Decreto nº 21.241, de 04/04/1932, ambos assinados pelo Chefe do Governo Provisório da República dos Estados Unidos do Brasil, Getúlio Vargas, que dispunham sobre a organização do ensino secundário, ficando conhecida por “Reforma Francisco Campos”.

De acordo com o Art. 2º do Decreto nº 21.241, o ensino secundário era dividido em dois cursos seriados: fundamental, com duração de 5 anos, e complementar, de 2 anos.

No 5º ano do curso fundamental (estudantes de 15/16 anos de idade), segundo Dassie (2001, p. 8), eram propostos os seguintes conteúdos, relativos à disciplina de Álgebra:

- “Derivada de um polinômio inteiro em x ”;
- “Noção de limite. Derivada de \sqrt{x} . Derivada de seno de x , cosseno de x , tangente de x e cotangente de x ”; e
- “Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples”.

Alguns defensores da chamada “matemática clássica” se manifestaram contrários à oferta desses conteúdos, dentre eles o padre jesuíta Arlindo Vieira – não matemático e defensor das humanidades clássicas –, que travou um embate ferrenho com Euclides Roxo, professor catedrático de matemática do Colégio Pedro II, do Rio de Janeiro, proponente de tal currículo (DASSIE, 2001, p. 9).

Após, pelo Decreto-Lei nº 4.244, de 09/04/1942, assinado pelo presidente Getúlio Vargas, foi instituída a lei orgânica do ensino secundário, que ficou conhecida por “Reforma Gustavo Capanema”.

De acordo com o Art. 2º do referido decreto-lei, o ensino secundário foi dividido em dois ciclos: o primeiro seria o curso ginásial (duração de 4 anos), e o segundo, por sua vez dividido em dois, composto pelos cursos clássico e científico (duração de 3 anos cada um).

Conforme Dassie (2001, p. 151), pela Portaria ministerial nº 177, publicada no Diário Oficial de 18/03/1943, foram propostos os programas de matemática dos cursos clássico e científico, onde constavam os seguintes conteúdos:

- Curso clássico – 1ª série
 - Álgebra
 - * Unidade III - “O trinômio do 2º grau: 2 - Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica.”
- Curso clássico – 2ª série
 - Trigonometria
 - * Unidade IV - “Vetor: 1 - Grandezas escalares e vetoriais. 2 - Noção de vetor; equipolência. 3 - Resultante ou soma geométrica de vetores.”
- Curso clássico – 3ª série
 - Álgebra
 - * Unidade I - “Funções: 1 - Noção de função de variável real. 2 - Representação cartesiana. 3 - Noção de limite e de continuidade.”
 - * Unidade II - “Derivadas: 1 - Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 - Cálculo das derivadas. 3 - Derivação das funções elementares. 4 - Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.”
- Curso científico – 1ª série
 - Álgebra

- * Unidade V - “O trinômio do 2º grau: 2 - Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2º grau; representação gráfica. 3 - Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.”
- Curso científico – 2ª série
 - Trigonometria
 - * Unidade VI - “Vetor: 1 - Grandezas escalares e vetoriais. 2 - Noção de vetor; equipolência. 3 - Resultante ou soma geométrica de vetores.”
- Curso científico – 3ª série
 - Álgebra
 - * Unidade III - “Derivadas: 1 - Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2 - Cálculo das derivadas. 3 - Derivação das funções elementares. 4 - Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.”

A Reforma Capanema “[...] permaneceu em vigor até 1961, com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional [Lei nº 4.024, de 20/12/1961]. Apenas um reajustamento dos programas foi feito em 1951.” (DASSIE, 2001, p. 156).

A partir do final da década de 50 e início dos anos 60, começou a ficar conhecido, no mundo todo, um movimento que proporia mudanças no currículo da disciplina de Matemática, que ficou conhecido como “Movimento da Matemática Moderna”. A referência à palavra “moderna” vem do fato do movimento querer incluir conteúdos da chamada “Matemática Moderna” (FEHR; CAMP; KELLOG, 1971 apud SOARES, 2001, p. 46).

“A tônica dessa modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos antigos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo.” (ÁVILA, 1991, p. 1). Dessa forma, o Cálculo foi excluído dos programas de matemática da educação pública brasileira. O conceito de vetor, da Geometria, que também outrora fora ensinado, deixou de fazer parte do currículo.

Ainda segundo Ávila (1991), “[...] descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.” (ÁVILA, 1991, p. 1).

Em defesa do ensino da disciplina no ensino médio, Ávila (1991) diz que:

O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm

grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2º grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (ÁVILA, 1991, p. 1)

Considerando a importância do ensino da disciplina na educação básica, Ávila (1991) sugere uma readequação do currículo, de modo que o Cálculo possa ser reinserido nos programas de matemática. Diz ainda que “é perfeitamente possível, em uma única aula, introduzir a noção de reta tangente a uma curva e a de derivada de uma função [...]” (ÁVILA, 1991, p. 1).

Contudo, existe a preocupação com a abordagem utilizada na introdução dos conceitos da disciplina. Ao apresentar o conceito de derivada, por exemplo, devem ser mostradas algumas de suas aplicações, como na Cinemática, ramo importante da Física (ÁVILA, 1991, p. 1). Neste trabalho, em especial, verificou-se que é possível estudar o movimento de uma partícula ao longo de uma curva, calcular sua velocidade, sua aceleração, em um ponto, utilizando o conceito de derivada associado à ideia de vetor.

Em países como a China, o Canadá e a Finlândia, que figuraram entre os sete primeiros colocados no último Pisa, esses conceitos são praticados no ensino secundário. Ressalta-se que, pelo menos nos dois últimos, o formato do equivalente ao ensino médio brasileiro é diferente. Os estudantes podem optar para qual área querem seguir. Assim, podem se matricular em disciplinas que tenham mais, ou menos, matemática.

Na China, de acordo com Hsiang e Hsiang (1994), na “Geometria Intermediária” são ensinados:

O conceito de vetores de deslocamento, o significado geométrico das operações com vetores e das leis que regulam essas operações são analisados minuciosamente. É inculcado nos estudantes o ponto de vista de que a Álgebra Vetorial é o resultado final de uma algebrização sistemática do espaço e constitui já um modelo algébrico completo da estrutura do espaço. Deve ficar claro para os estudantes que as operações vetoriais são exatamente a algebrização das estruturas básicas do espaço, e que as leis que regem essas operações são exatamente a algebrização das propriedades básicas do espaço. Portanto, a Álgebra Vetorial fornece um conjunto completo de sistemas eficazes e computáveis para o estudo da Geometria Analítica. (HSIANG; HSIANG, 1994, p. 2)

Em “Análise Básica”, são introduzidos os conceitos do Cálculo: sequências e limites, continuidade, derivadas e integrais (HSIANG; HSIANG, 1994, p. 2-3).

Na Finlândia, de acordo com o *National Core Curriculum for Upper Secondary Schools* 2003, documento que parametriza o currículo do ensino secundário daquele país, são oferecidas as seguintes disciplinas:

5. Vetores (MAA5): “propriedades básicas de vetores; adição e multiplicação por escalar; produto escalar de vetores em um sistema de coordenadas”;

7. Derivada (MAA7): “limite, continuidade e derivadas de funções; derivada de funções polinomiais e as regras de derivação do produto e do quociente de funções; análise do comportamento de uma função polinomial e o cálculo dos seus máximos e mínimos”;

9. Funções trigonométricas (MAA9): “derivadas de funções trigonométricas”;

13. Cálculo diferencial avançado (MAA13): “analisar a continuidade e diferenciabilidade de funções; propriedades gerais de funções contínuas e diferenciáveis”;

4. Análise matemática (MAB4): “derivada de funções polinomiais; análise do sinal e do comportamento de funções polinomiais; determinação do máximo e do mínimo de uma função polinomial”.

As siglas MAA e MAB significam “Matemática Avançada” e “Matemática Básica”, respectivamente. Os estudantes escolhem qual curso frequentar, e podem mudar ao longo do período de estudo.

No ensino secundário do Canadá, baseado no *The Ontario Curriculum, Grades 11 and 12*, destaca-se a disciplina “Cálculo e Vetores” (MCV4U). Esse curso, de acordo com o documento, é voltado para estudantes que pretendem seguir carreira na áreas da Ciência, Engenharia, Economia e Negócios (ONTARIO, 2007, p. 99). Nela, são ensinados os seguintes tópicos, com os objetivos gerais a serem alcançados:

A. Taxa de variação: 1 - “demonstrar compreensão sobre taxa de variação, fazendo conexões entre a taxa média de variação em um intervalo e a taxa de variação instantânea em um ponto, utilizando as inclinações das retas secantes e tangentes e o conceito de limite”. 2 - “representar, graficamente, as derivadas de funções polinomiais, senoidais e exponenciais, e fazer relações entre as representações numérica, gráfica e algébrica de uma função e a sua derivada”. 3 - “verificar, graficamente e algebricamente, as regras para determinar as derivadas; aplicar essas regras para determinar as derivadas de funções polinomiais, senoidais, exponenciais, racionais e radicais, e de funções compostas simples; resolver problemas relacionados”.

B. Derivadas e suas aplicações: 1 - “fazer relações, graficamente e algebricamente, entre as características fundamentais de uma função e sua primeira e segunda derivada, e usar

essas relações no esboço da curva”. 2 - “resolver problemas, incluindo de otimização, que requerem o uso dos conceitos e procedimentos associados à derivada, inclusive em problemas com aplicação ao mundo real, envolvendo o desenvolvimento de modelos matemáticos”.

C. Geometria e álgebra de vetores: 1 - “demonstrar conhecimento sobre vetores no plano e no espaço, sabendo representá-los, algebricamente e geometricamente, reconhecendo suas aplicações”. 4 - “representar retas utilizando vetores e equações paramétricas, e resolver problemas associados”.

Assim, analisando os programas de matemática que são praticados em alguns dos países referências na disciplina, acredita-se que um ensino semelhante pode ser proposto no Brasil, no mesmo formato, onde os alunos pudessem escolher quais cadeiras cursar.

Ressalta-se, contudo, que outros fatores devem ser levados em consideração nesse processo, como, por exemplo, a infraestrutura das escolas, a formação/valorização dos professores e as políticas públicas para a educação.

5.3 Desenhando em TikZ com o TeXmaker

5.3.1 Sobre o TikZ

Como foi dito na Introdução deste trabalho, TikZ é uma ferramenta para se desenhar figuras por meio de **comandos** \TeX , uma linguagem de programação.

Diferentemente de editores de texto convencionais, como o *Word*, por exemplo, que se enquadra na categoria WYSIWYG – acrônimo do inglês “*What you see is what you get*”, que pode ser traduzido como “O que você vê é o que você obtém” –, onde o usuário pode visualizar o resultado final do documento enquanto digita, os editores de \TeX inserem-se na categoria WYSIWYM – acrônimo de “*What you see is what you mean*” (“O que você vê é o que você quer dizer”), onde o que o usuário digita é o que ele quer que apareça no resultado final, que pode ser visualizado somente após a compilação do que foi digitado.

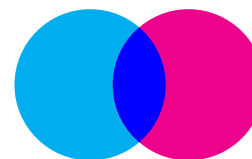
Abaixo, do lado esquerdo, estão alguns comandos TikZ, e, do lado direito, o resultado gerado:

```

\begin{tikzpicture}
\fill[cyan] (0,0) circle (1);
\fill[magenta] (1.3,0) circle (1);
\clip (0,0) circle (1);
\fill[blue] (1.3,0) circle (1);
\end{tikzpicture}

```

Figura 5.1 – Interseção de círculos



Fonte: O autor (2021)

Todas as figuras feitas em TikZ iniciam-se com o comando

```
\begin{tikzpicture}
```

e se encerram com o comando

```
\end{tikzpicture}.
```

O que vem entre os dois é, de fato, a figura em si. `tikzpicture` é chamado de **ambiente**; e ao conjunto de comandos dá-se o nome **código**. Os comandos TikZ são iniciados com uma barra invertida (`\`).

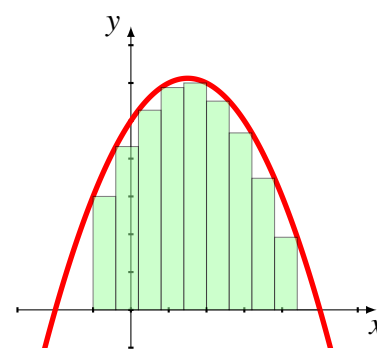
Outro exemplo, retirado de Matthes (2020c):

```

\begin{tikzpicture}
\tkzInit[xmin=-3,xmax=6,ymin=-2,ymax=14,ystep=2]
\tkzDrawXY
\tkzFct[line width=2pt,color=red,
domain=-3:6]{(-\x-2)*(\x-5)}
\tkzDrawRiemannSumInf[fill=green!40,opacity=.5,
interval=-1:5,number=10]
\end{tikzpicture}

```

Figura 5.2 – Soma de Riemann



Fonte: Matthes (2020c, p. 41)

Repare que, com quatro linhas de comandos, foi possível desenhar essa figura.

A sintaxe dos comandos TikZ é, razoavelmente, de fácil compreensão. Isso facilita o entendimento do que cada um faz, tornando o código intuitivo.

Observando o código do exemplo anterior, cada comando faz o que se segue:

- `\tkzInit[xmin=-3,xmax=6,ymin=-2,ymax=14,ystep=2]`: define o comprimento dos eixos coordenados, tendo o eixo y escala 1:2;

- `\tkzDrawXY`: desenha os eixos;
- `\tkzFct[line width=2pt,color=red,domain=-3:6]`
 $\{(-x-2) * (x-5)\}$: desenha a parábola $f(x) = (-x-2)(x-5)$; com largura 2 pt⁶ (aproximadamente, 0.0702 cm); de cor vermelha; com domínio de -3 a 6 ; e
- `\tkzDrawRiemannSumInf[fill=green!40,opacity=.5,`
`interval=-1:5,number=10]`: desenha os retângulos abaixo da curva (Soma de Riemann); coloridos de 40% de verde; com opacidade de 50%; no intervalo de -1 a 5 ; e em número de 10.

As instruções colocadas entre colchetes são *opcionais*, e os argumentos que aparecem entre chaves são *obrigatórios*. Como visto no exemplo anterior, existem comandos que requerem apenas instruções opcionais, enquanto outros necessitam de argumento(s) obrigatório(s).

Na elaboração de documentos $\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, é necessário que o código tenha uma estrutura que consiste de um **preâmbulo** e do ambiente `document`. No preâmbulo – tudo o que vem antes de `\begin{document}` – são declarados, basicamente, a **classe** (estilo do documento) e os **pacotes** (“liberação de comandos”). Os comandos colocados entre `\begin{document}` e `\end{document}` são os que, de fato, “aparecem” no documento gerado, após a compilação.

- Classe (`\documentclass[<opcionais>]{<classe>}`): `article` (artigos; textos curtos; etc.); `report` (relatórios; textos longos; etc.); `book` (livros); `beamer` (apresentações em *slides*); `abntex2` (textos científicos nas normas da ABNT); `standalone` (pré-visualização de figuras, que são geradas “recortadas”); entre outras. Como exemplos de opcionais, estão: `a4paper` (formato da página); `12pt` (tamanho da fonte); `twocolumn` (texto dividido em duas colunas); `landscape` (página no formato de paisagem); etc.
- Pacotes (`\usepackage[<opcionais>]{<pacote>}`): arquivos que implementam uma determinada característica adicional do documento. Por exemplo: `geometry` (pode-se definir as margens do papel); `graphicx` (incluir figuras); `xcolor` (utilizar cores); `amsmath` (acrescenta caracteres matemáticos); `tikz` (utilizar comandos para desenho de figuras); etc.

No momento, como o foco é o desenho de figuras, a classe utilizada será a `standalone`.

Abaixo, segue um código completo, bem como a figura gerada, retirado de Matthes

⁶ pt vem de “*point*”. 1 pt equivale a, aproximadamente, 0.0351 cm; e 1 cm é igual a, aproximadamente, 28.4527 pt.

(2020c). O único pacote declarado foi o `tkz-fct`. Para a sua utilização, pelo qual é possível desenhar gráficos de funções e curvas em geral, é necessária a instalação da ferramenta `gnuplot`. No Apêndice C, é mostrado um tutorial de instalação da referida ferramenta, disponível para os sistemas operacionais Windows, Linux, MacOSX e BSD.

Código-fonte 1 – Coração

```

1 \documentclass{standalone} % Classe
2 \usepackage{tkz-fct} % Pacote
3
4 \begin{document} % Inicio do documento
5   \begin{tikzpicture}[scale=.5] % Inicio
6     do ambiente tikzpicture
7     \tkzInit[xmin=-20,xmax=20,xstep=5,ymin
8       =-25,ymax=15,ystep=5] % Define os
9       comprimentos dos eixos coordenados
10    \tkzFctPar[samples=400,smooth,domain
11      =0:6.28,
12      ball color=red,shading=ball]
13    {16*(sin(t))**3}{13*cos(t)-5*cos(2*t)-2*
14      cos(3*t)-cos(4*t)} % Desenha a curva,
15      dada na forma parametrizada, e faz o
16      preenchimento
17  \end{tikzpicture} % Fim do ambiente
18  tikzpicture
19 \end{document} % Fim do documento

```

Figura 5.3 – Coração



Fonte: Matthes (2020c, p. 55)

Para uma leitura detalhada sobre os comandos TikZ, sugere-se a leitura de Tantau (2020) (desenho de figuras em geral), Matthes (2020a) (desenho de figuras geométricas e gráficos), Matthes (2020b) (desenho de figuras geométricas) e Matthes (2020c) (desenho de gráficos de funções reais e de curvas paramétricas).

Como vantagens do TikZ, Tantau (2020) cita a criação rápida de figuras simples, o posicionamento preciso e a qualidade tipográfica. Por outro lado, como desvantagens, menciona que a aprendizagem leva tempo, que não é WYSIWYG e que algumas compilações podem

demorar (TANTAU, 2020, p. 27).

No Apêndice B, são mostrados os códigos de algumas figuras presentes neste trabalho. Nesse exemplo, utiliza-se o comando `\tkzFctPar`, que serve para desenhar uma curva parametrizada.

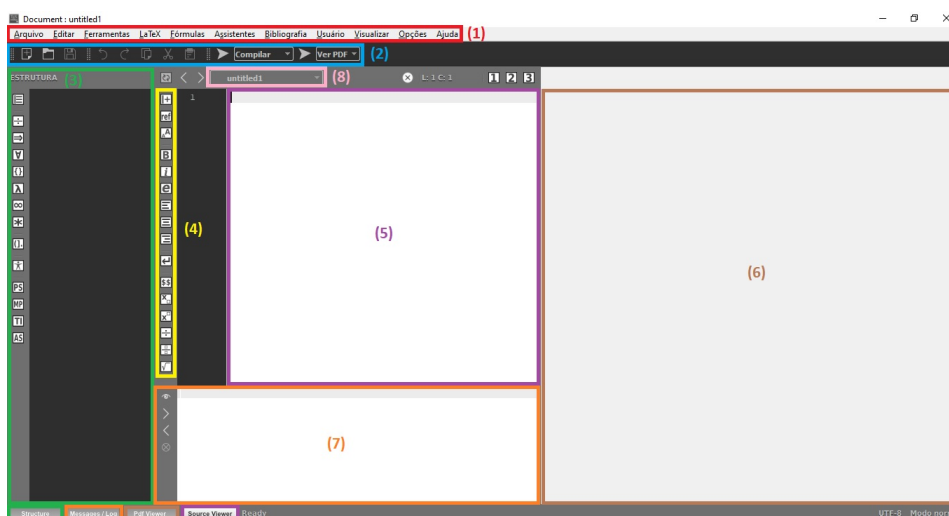
5.3.2 Sobre o TeXmaker

O TeXmaker é um dos editores de códigos $\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Existem outros, como o TeXstudio, Kile, TeXnicCenter, por exemplo. Todos esses editores são *offline* (requerem instalação) e gratuitos. Tem ainda o Overleaf, que é *online*, isto é, não necessita ser instalado no computador. De acordo com Srikanth (2020), o TeXmaker é um dos mais populares, ficando em 1º lugar em uma lista com dez editores. O *download* do *software* pode ser feito [por aqui](#), nos sistemas operacionais Windows, MacOSX e Linux. A página possui um manual de utilização do editor. Sua última versão é a 5.0.4.

Além do editor, é necessária a instalação de um **sistema $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$** , que consiste, resumidamente, de uma implementação para a edição de documentos $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Esse sistema adiciona programas relacionados ao $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, estilos, fontes e gerencia a instalação de pacotes. Os mais utilizados são o MikTeX e o TeX Live, ambos para Windows, MacOSX e Linux (para informações sobre as diferenças entre um e outro, [clique aqui](#)). Sugere-se o *download* do MikTeX, que pode ser realizado na [página do programa](#), onde possui tutoriais de instalação.

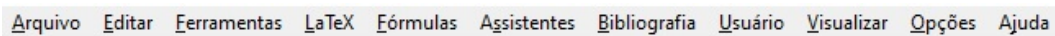
Na Figura 5.4, está representada a área de trabalho do TeXmaker.

Figura 5.4 – Área de trabalho do TeXmaker



Fonte: O autor (2021)

Legenda:

(1) 

Barra de tarefas. Possui opções para o arquivo, bem como ferramentas para a edição do documento e configurações do editor. Inicialmente, o TeXmaker estará configurado em inglês. Para alterar para o português do Brasil, a partir dessa barra, siga os passos:

Options > Interface Language > pt_BR.

(2) 

Barra de ferramentas do arquivo (Novo, Abrir, Salvar); de edição (Desfazer, Refazer, Copiar, Cortar e Colar); de execução (a opção utilizada apenas para desenho de figuras é `Compile`; basta selecioná-la e clicar na seta à esquerda, para gerar o documento) e de visualização (ver o resultado gerado).

(3)



Janela de estrutura. Possui opções de visualizar a estrutura do documento; comandos de símbolos (operações, setas, diversos, delimitadores, letras gregas, mais usados e favoritos); “left/right” (parênteses, colchetes, chaves, “menor que” e “maior que”, aumentados) e comandos de alguns pacotes, dentre eles o `TikZ`.

(4)



Barra de ferramentas. Possui opções para a estrutura do texto (divisão em partes, capítulos e seções; referências; tamanho da fonte; negrito, itálico e ênfase; alinhamento à esquerda, centralizado ou à direita) e alguns comandos para o ambiente matemático, como subscrito (índices), sobrescrito (expoentes), frações e raiz quadrada.

(5) Janela do código-fonte. Local destinado à digitação dos comandos.

(6) Janela de visualização do PDF. Após a compilação do código, é possível visualizar o resultado gerado. Inicialmente, essa janela não se encontra visível. Para sua habilitação, é necessário realizar os seguintes passos, a partir de (1):

Opções > Configurar o Texmaker > Selecionar Comandos > Em **Leitor de Pdf**, marcar a caixa `embutir`.

(7) Janelas mensagens/log. Ao compilar o código, é mostrada na janela de mensagem a frase de processo iniciado (`Process started`). Se o código não possuir erros, será exibida a mensagem de processo finalizado normalmente (`Process exited normally`), caso contrário, aparecerá a mensagem de processo finalizado com erro(s) (`Process exited with error(s)`). Em seguida, caso o código tenha algum comando inadequado, poderão aparecer mensagens de três tipos: `Warning` (relacionada a algum comando), `Badbox` (em geral, ocorre quando um texto excede uma região pré-determinada, por exemplo, a margem do papel) e `Error` (erro que pode estar relacionado à sintaxe de algum comando, por exemplo). Nos dois primeiros casos, o processo é finalizado normalmente, enquanto que, no terceiro, é finalizado com erro(s). Em todos os três casos, são fornecidas

informações sobre o arquivo onde ocorreu o problema, o tipo, o número da linha e a mensagem. No mesmo momento, na janela de log, é gerado um relatório detalhado da compilação do arquivo. Ao clicar na mensagem de erro, são destacadas, na janela de log, as informações referentes ao problema. E mais, na pasta onde se encontra o arquivo \TeX , é gerado um documento de texto contendo o relatório que se encontra na janela de log.

(8)

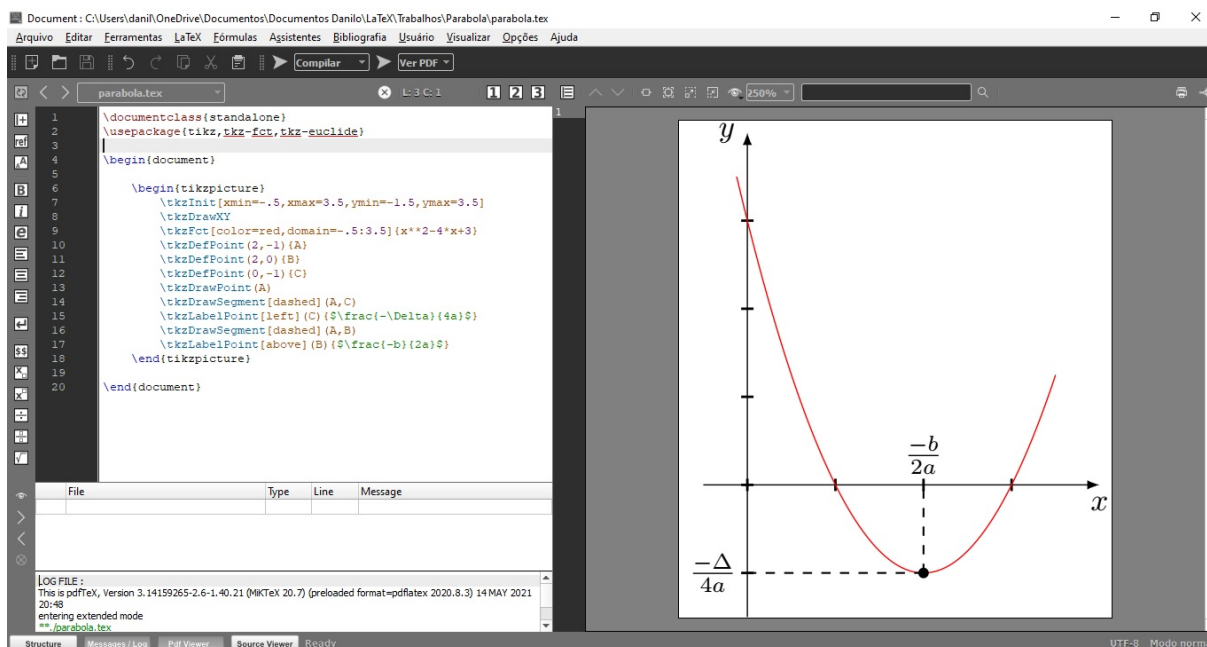
untitled1

Janela para alternar arquivos \TeX (.tex, .bib, .sty, .cls, .mp, .Rnw, .asy).

Nesse momento, estaremos interessados apenas na extensão .tex. Assim, ao iniciar um novo arquivo, o primeiro passo é salvá-lo (nome sem espaço e sem acentos) em uma pasta, pois, sem isso, não será possível a compilação. Em seguida, estará tudo pronto para a digitação do código.

Na Figura 5.5, está representada uma situação em que o código foi compilado com sucesso, não sendo gerada nenhuma mensagem de erro.

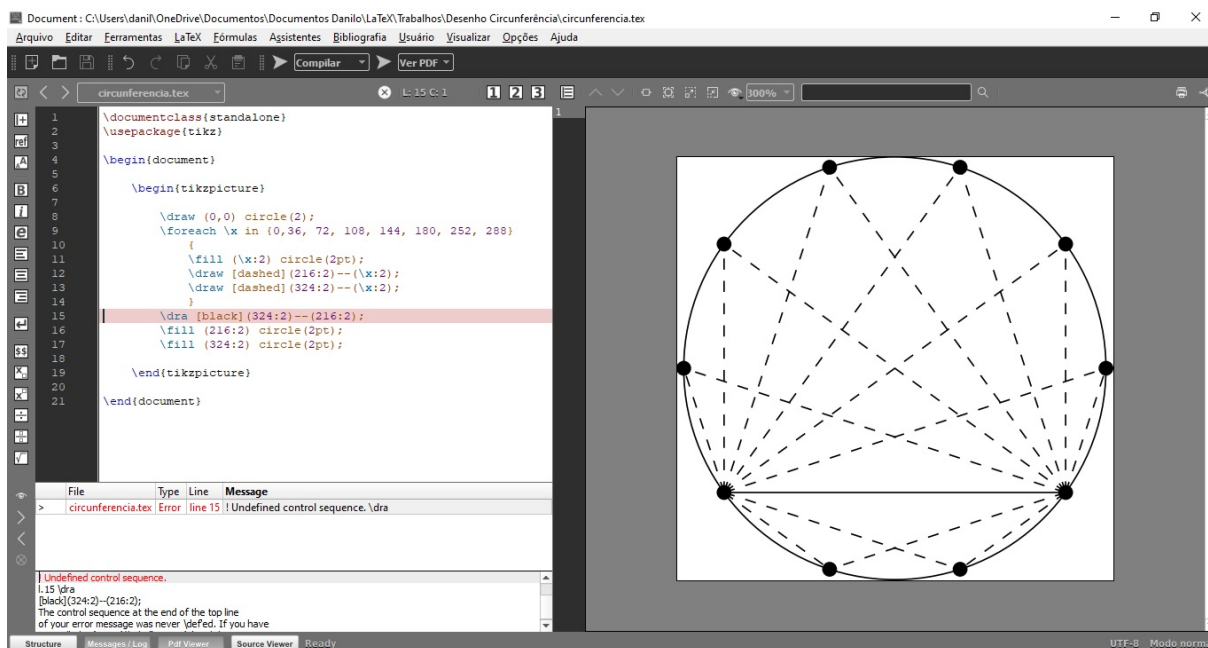
Figura 5.5 – Compilação sem erro(s)



Fonte: O autor (2021)

Por outro lado, na compilação do código da Figura 5.6, o processo foi finalizado com um erro.

Figura 5.6 – Compilação com um erro



Fonte: O autor (2021)

Na janela de mensagem, é fornecida a informação de que o erro se encontra na linha 15, e que é indefinido o comando `\dra`. Na janela de log, são fornecidas mais informações sobre esse erro e possíveis ações para corrigi-lo:

File	Type	Line	Message
circunferencia.tex	Error	line 15	! Undefined control sequence. \dra


```

! Undefined control sequence.
l.15 \dra
[black](324:2)--(216:2);
The control sequence at the end of the top line
of your error message was never \defed. If you have

```

```

14     }
15     \dra [black] (324:2)--(216:2);
16     \fill (216:2) circle(2pt);

```

De fato, o erro procede, já que a sintaxe correta do comando é `\draw`.

5.4 A sequência didática

Antes de iniciar as atividades, a proposta deverá ser apresentada aos estudantes, informando sobre o tema, o objetivo, os conteúdos a serem trabalhados, as habilidades a serem desenvolvidas e o tempo de execução.

Nesse primeiro encontro, deverão ser colhidas informações sobre o conhecimento prévio dos estudantes, com relação aos conteúdos que serão abordados. Essa averiguação serviria como base, por exemplo, para a preparação de alguma atividade relacionada ao tema, necessária para o prosseguimento da sequência.

Como motivação, propõe-se que sejam exibidas algumas curvas, com suas respectivas evolutas e paralelas, informando sobre o objetivo final: eles próprios desenharem aquelas e outras curvas. Isso poderá ser feito em uma aula, no laboratório de informática. Durante as aulas, sugere-se que os estudantes sejam divididos em grupos de, no máximo, três alunos por computador, visando o desenvolvimento da competência geral número 9, da BNCC.

É fundamental que os estudantes possam relacionar o objeto algébrico ao geométrico. Assim, propõe-se que a ferramenta TikZ seja apresentada no início, para que no decorrer das atividades eles possam desenhar as figuras relacionadas aos conteúdos.

Abaixo, segue a sequência didática, que é constituída por 19 aulas (um total, então, de 20 encontros). As aulas terão uma componente teórica e outra prática, onde, para cada uma, será reservado o tempo de 50 minutos, com um intervalo de 20 minutos entre elas. Durante a exposição dos conteúdos, o professor deverá dispor de uma área para projeção da tela do computador e de um quadro branco.

1ª AULA

Tema: TikZ.

Objetivos: Conhecer a ferramenta gráfica que será utilizada ao longo da sequência didática. Trabalhar a habilidade **(EM13MAT405)**.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar a ferramenta;
- Explicar sobre a sintaxe e a funcionalidade de alguns comandos, exibindo os códigos da Figura 5.1, da Figura 5.2 e da Figura 5.3;

- Instruir sobre como elaborar um código completo (preâmbulo e ambiente `document`).
-

2ª AULA

Tema: TeXmaker.

Objetivo: Conhecer o editor TeXmaker, que será utilizado na elaboração das figuras.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar o editor;
 - Explicar sobre um sistema $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$;
 - Informar sobre a instalação do `gnuplot`, conforme Apêndice C;
 - Detalhar sobre a digitação dos códigos e as mensagens de erro.
-

Antes de iniciar o conteúdo de vetores, deverá ser feita uma revisão do plano cartesiano e de distância euclidiana. A partir daqui, os estudantes serão estimulados a desenhar as figuras durante as aulas, utilizando o `TikZ`.

3ª AULA

Tema: Plano cartesiano e `TikZ`.

Objetivos: Revisar o plano cartesiano (marcar pontos e calcular a distância entre eles). Praticar o desenho, em `TikZ`, dos elementos do plano.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

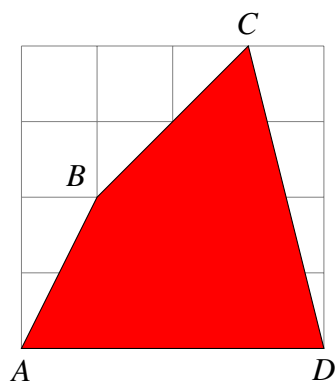
Desenvolvimento:

- Desenhar alguns dos elementos do plano cartesiano (eixos; pontos, dados em coordenadas cartesianas, polares e por expressões numéricas; segmentos), utilizando diferentes comandos dos pacotes `tikz` e `tkz-euclide`;
- Demonstrar a fórmula da distância entre dois pontos;
- Desenhar polígonos e círculos.

Atividade proposta:

1. Utilizando o `TikZ`, desenhe:
 - a) Os semieixos positivos.

- b) O plano cartesiano, contendo os pontos $A(2, 1)$, $B(-1, \frac{5}{2})$ e $C(3, 2.8)$.
- c) Um triângulo cujos vértices são os pontos dados na alínea anterior. Encontre os valores dos lados desse triângulo.
- d) No mínimo, quatro pontos que estão sobre uma circunferência de raio R qualquer, utilizando coordenadas polares.
2. Reproduza a figura abaixo e responda ao que se segue.



- a) Quantos comandos utilizou para desenhar a figura?
- b) Apresente aos colegas os passos e os comandos que utilizou na elaboração do desenho.
- c) Acredita ser possível desenhar a mesma figura utilizando outros comandos? Tente fazer isso.

Propõe-se que a partir dos primeiros desenhos em TikZ, seja apresentado aos estudantes o comando `\foreach`, com o objetivo de otimizar o código, utilizando variáveis. Como exemplo, pode usar o comando para desenhar a figura do item 1-d.

Durante as aulas em que serão propostas atividades, os grupos serão estimulados a apresentarem suas resoluções, com o objetivo de exercitarem a comunicação e a argumentação.

4ª AULA

Tema: Vetor.

Objetivos: Representar um vetor do plano nas formas algébrica e geométrica; reconhecer as características de um vetor (módulo, direção e sentido) e relacioná-las a situações do mundo real.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Diferenciar grandezas escalares e vetoriais;
- Exemplificar situações do mundo real onde são utilizados vetores, como na Construção Civil (máquina bate-estacas) e na Física (posição e deslocamento de um móvel; atuação de forças em um corpo), por exemplo;
- Representar um vetor nas formas algébrica e geométrica.

Atividade proposta:

1. Você ouviu a seguinte frase: “Joana está a uma distância de 75 km de Goiânia”. Com essa informação, é possível saber a localização de Joana? Por quê?
2. Sejam os pontos $A(2, 3)$ e $B(5, 2)$ do plano. Desenhe o segmento de reta orientado que sai de A e chega em B . Encontre o vetor $\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, onde O é a origem do plano. Desenhe os dois vetores anteriores no mesmo plano. Qual é a relação entre eles?
3. Considere os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, \frac{1}{2})$ e $C(2, 0)$. Determine as coordenadas do vetor $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas do ponto D , tal que $\underline{v} = \overrightarrow{CD}$. Desenhe os dois vetores no plano cartesiano.
4. Determine as coordenadas de um vetor que possui módulo igual a 5 e que forma um ângulo de 60° com o eixo x , no sentido anti-horário. Desenhe esse vetor.

5ª AULA

Tema: Operações com vetores.

Objetivo: Realizar operações com vetores no plano, interpretando os resultados geometricamente.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Definir a operação de adição de vetores;
- Definir a operação de produto de um vetor por um escalar;
- Explicar as propriedades das duas operações;
- Definir vetores múltiplos um do outro (se múltiplos, linearmente dependentes; caso contrário, linearmente independentes); combinação linear; base do \mathbb{R}^2 ; com a exibição de exemplos.

Atividade proposta:

- Sejam $\underline{u} = (-2, 4)$, $\underline{v} = (-1, 2)$ e $\underline{w} = (0, 3)$. Determine:
 - $\underline{r} = \underline{u} + \underline{v}$;
 - $\underline{s} = \underline{v} - 2 \cdot \underline{v}$;
 - $\underline{t} = -\underline{u} + 3 \cdot \underline{v} + 2 \cdot \underline{w}$.
 - Verifique se algum dos vetores do item anterior é múltiplo um do outro. Desenhe os três vetores em um mesmo plano cartesiano.
 - Verifique que qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\underline{u} = (1, 3)$ e $\underline{v} = (2, -1)$. Escreva o vetor $\underline{w} = (-2, 4)$ como combinação linear de \underline{u} e \underline{v} .
-

6ª AULA

Tema: Produto escalar; comprimento e ângulo entre vetores e projeção.

Objetivo: Conhecer propriedades geométricas dos vetores.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Definir o produto escalar (ou produto interno) e apresentar as suas propriedades;
- Definir o comprimento (ou norma) de um vetor e exibir as suas propriedades;
- Introduzir a ideia de normalização de um vetor;
- Explicar, a partir de uma das propriedades (desigualdade de Cauchy-Schwarz), sobre o ângulo formado entre dois vetores;
- Definir bases ortogonal e ortonormal.

Atividade proposta:

- Para cada par de vetores abaixo, calcule o seu produto escalar, identificando os que são ortogonais:
 - $\underline{u} = (-1, 3)$ e $\underline{v} = (-2, 5)$;
 - $\underline{u} = (2, 1)$ e $\underline{v} = (\sqrt{3}, 0)$;
 - $\underline{u} = (4, -2)$ e $\underline{v} = (3, 6)$.
- Encontre o valor de m para o qual os vetores $\underline{u} = (-1, m - 1)$ e $\underline{v} = (2, -3)$ sejam ortogonais.
- Investigue a relação entre o produto escalar dos vetores $\underline{u} = (1, -1)$ e $\underline{v} = (-2, 3)$ e o produto escalar de múltiplos desses vetores.

4. Calcule os comprimentos dos vetores \underline{u} e \underline{v} dados no item 1.
5. Determine o ângulo formado entre os vetores $\underline{u} = (0, 2)$ e $\underline{v} = (2, 2)$.
6. Encontre a projeção ortogonal do vetor $\underline{u} = (2, 2)$ na direção do vetor $\underline{v} = (3, -1)$. Qual é o ângulo formado entre os vetores \underline{u} e \underline{v} ?

Da mesma forma como no ensino de vetor, será dada ênfase à visualização geométrica dos conceitos envolvendo derivada. Também, por meio das atividades, os estudantes serão estimulados a elaborarem as figuras.

Assim, antes da proposição do conteúdo de derivada, será importante apresentar aos alunos os comandos para o desenho de gráficos de funções. O pacote utilizado será o `tkz-fct`.

7ª AULA

Tema: Desenho de gráficos de funções em TikZ.

Objetivo: Apresentar uma maneira de se desenhar gráficos de funções reais.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar o desenho do gráfico de uma função qualquer;
- Exibir os comandos necessários para se desenhar aquele gráfico, esclarecendo que existem outras formas de se plotar uma curva. Os comandos, basicamente, serão os seguintes:

```

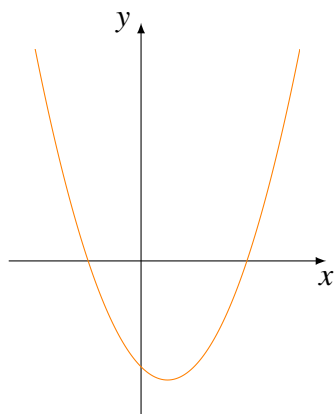
1 \tkzInit[xmin=<valor>,xmax=<valor>,ymin=<valor>,ymax=<
   valor>]
2 \tkzDrawXY[noticks]
3 \tkzFct[color=<cor>, domain=<a>:<b>]{<funcao>}

```

- Explicar o que cada comando realiza.

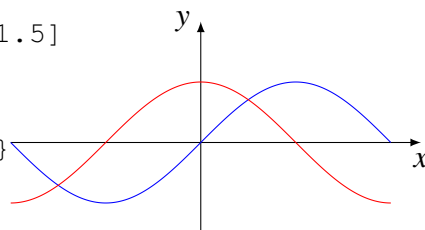
Atividade proposta:

1. Reproduza a figura abaixo, sabendo que a função é dada por $f(x) = x^2 - x - 2$. (Dica: para se escrever a potência x^2 , faça `x**2` ou então `\x*\x`)



2. Abaixo, segue o código utilizado para desenhar os gráficos das funções $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$, no intervalo $(-\pi, \pi)$:

```
\begin{tikzpicture}
\tkzInit[xmin=-pi,xmax=pi,ymin=-1.5,ymax=1.5]
\tkzDrawXY[noticks]
\tkzFct[color=blue,domain=-pi:pi]{sin(x)}
\tkzFct[color=red,domain=-pi:pi]{cos(x)}
\end{tikzpicture}
```



- a) Pesquise por outros tipos de funções e desenhe os seus gráficos.

No decorrer da aula, mostre outros comandos que possam acrescentar informações ao gráfico, como, por exemplo, identificar um ponto da curva.

8ª AULA

Tema: Derivada.

Objetivo: Compreender a ideia de derivada por meio de uma explicação geométrica.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Dar exemplos de aplicações da derivada: Química (reação química), Física (cinemática), Biologia (crescimento de uma população), Economia (custo marginal), Engenharia (velocidade de escoamento de um fluido), Psicologia (taxa de desenvolvimento do desempenho, curva de aprendizagem), etc.;

- Introduzir o conteúdo por meio do problema da reta tangente (aproximação por retas secantes), apresentando a situação por meio de figuras;
- Discutir sobre a razão incremental e o seu limite (inclinação da reta tangente à curva em um ponto).

Atividade proposta:

1. Calcule, com o auxílio de uma planilha eletrônica (Microsoft Excel ou LibreOffice Calc, por exemplo) ou utilizando uma calculadora, o valor da razão incremental

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0,$$

da função $f(x) = x^2$, em $x = 3$, para os seguintes valores de h próximos de zero:

- a) $h = 1$;
- b) $h = 0.1$;
- c) $h = 0.001$; e
- d) $h = 0.0001$.

Em seguida, faça a simplificação de

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}, h \neq 0.$$

Na expressão encontrada, substitua os valores de h presentes nas alíneas “a” à “d”. Qual é a relação entre os valores encontrados na primeira parte e os calculados agora? O que ocorre com o valor da razão incremental à medida que o valor de h se aproxima de zero?

2. O que o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$$

representa com relação ao gráfico da função $f(x) = x^3$? E quanto ao gráfico de uma função $f(x)$ qualquer?

9ª AULA

Tema: Derivada.

Objetivo: Desenhar a reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado ponto.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Calcular o limite da razão incremental (inclinação da curva em um ponto);
- Encontrar a equação da reta tangente ao gráfico nesse ponto;
- Escolher uma função – de preferência começar pelas polinomiais – e calcular os itens anteriores. Após, desenhar o gráfico e a reta tangente no mesmo plano cartesiano.

Atividade proposta:

1. Seja a função $f(x) = x^2 - 1$.
 - a) Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
 - b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(1, 0)$. Desenhe a reta e a parábola em um mesmo plano.
 - c) Para a mesma função, encontre e desenhe a reta tangente ao gráfico no ponto $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.
 - d) Escolha outros valores para x , encontre as equações das retas tangentes ao gráfico nos pontos da forma (x, x^2) e faça os desenhos.
 - e) Desenhe o gráfico da expressão encontrada na alínea “a”. Estabeleça uma relação entre esse gráfico e o gráfico de $f(x)$.

10ª AULA

Tema: Regras de derivação e derivadas de ordem superior.

Objetivo: Identificar o tipo de uma função e decidir qual regra utilizar para a sua derivação.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar as regras de derivação das funções constantes, polinomiais e trigonométricas, exibindo exemplos;
- Apresentar as regras de derivação da soma, do produto, do quociente e da composição de funções;
- Definir derivadas de ordens superiores.

Atividade proposta:

1. Utilizando as regras apresentadas, encontre as derivadas das seguintes funções:
 - a) $f(x) = x^{12} - 4x^{10} + 2x^3 + x - \sqrt{13}$;
 - b) $S(p) = \sqrt{p} + \sqrt[3]{p^2}$;
 - c) $f(t) = \operatorname{sen} t - 3 \operatorname{cost}$;

- d) $f(x) = \sinh x \cdot \cosh x$;
 e) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$;
 f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
2. Seja a função $f(x) = x^4 + 2x^2 - x$.
- a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(1, 2)$. Desenhe o gráfico da função e a reta no mesmo plano.
- b) Desenhe o gráfico de $f'(x)$ e o relacione com o gráfico de $f(x)$. O que percebeu dessa relação?
3. Encontre as derivadas de 2ª e 3ª ordens das funções dadas nas alíneas “a” e “c” do item 1.

11ª AULA

Tema: Funções vetoriais e suas derivadas.

Objetivo: Identificar uma função do tipo vetorial e aplicar as regras de derivação quando necessário.

Materiais: Quadro branco.

Desenvolvimento:

- Definir uma função vetorial;
- Explicar sobre como derivar uma função vetorial;
- Apresentar as regras de derivação de funções vetoriais, estabelecendo relações com as regras de derivação de funções reais.

Atividade proposta:

1. Encontre as derivadas das seguintes funções vetoriais:
- a) $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t^2, t^3)$;
 b) $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t, \cos t)$;
 c) $\underline{\mathbf{r}}(t) = (t \cdot \sin t, \cos 2t)$.
2. Determine, para cada uma das funções do item anterior, $\underline{\mathbf{r}}''(t)$.

O conteúdo trabalhado até aqui é suficiente para iniciar o estudo das curvas planas parametrizadas. Deverão ser apresentadas a ideia intuitiva do objeto geométrico e a sua definição formal, que nada mais é do que uma função vetorial. Em seguida, deverão ser apresentados exemplos desse tipo de curva. Como motivação, propõe-se que mostre a parametrização da cicloide e exiba a sua animação, um dos recursos do L^AT_EX.

12ª AULA

Tema: Curvas planas parametrizadas.

Objetivos: Compreender o conceito de curva plana parametrizada. Reconhecer uma curva dada nessa forma.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar a ideia intuitiva de curva plana;
- Definir, formalmente, curva plana parametrizada, associando a uma função vetorial;
- Exibir exemplos;
- Apresentar a parametrização da cicloide, ilustrando a curva por meio de uma animação.

Atividade proposta:

1. Pesquise, na *internet* e nos livros, outros exemplos de curvas planas dadas na forma paramétrica.
-

13ª AULA

Tema: Curvas planas parametrizadas.

Objetivo: Desenhar o traço de uma curva dada.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar o comando `\tkzFctPar`, do pacote `tkz-fct`, para desenho de uma curva plana paramétrica;
- Exibir o código de um exemplo de curva plana parametrizada.

Atividade proposta:

1. Da pesquisa solicitada na atividade anterior, desenhe a(s) curva(s) encontrada(s).
-

A partir de agora, serão estudadas as propriedades geométricas de uma curva plana parametrizada, as quais deverão ser relacionadas às grandezas escalares e vetoriais estudadas na cinemática.

14ª AULA

Tema: Geometria diferencial das curvas planas.

Objetivos: Conhecer as propriedades geométricas de uma curva plana, dada na forma paramétrica. Relacionar essas propriedades aos conceitos estudados na Física (Cinemática).

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Definir vetores tangente (velocidade) e normal, e vetor aceleração;
- Definir velocidade escalar (módulo do vetor velocidade);
- Definir pontos regulares e singulares, com a apresentação de exemplos.

Atividade proposta:

1. Determine para quais valores de t a curva

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} -t^3 \\ \frac{3}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é regular. Existe(m) ponto(s) singular(es) em seu traço? Se sim, informe para qual(is) valor(es) de t e se esse(s) é(são) simples.

2. Desenhe a curva do item anterior.
-

15ª AULA

Tema: Geometria diferencial das curvas planas.

Objetivo: Encontrar as retas tangente e normal a uma curva plana parametrizada.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar como encontrar retas tangente e normal à curva em um ponto regular, dando um exemplo.

Atividade proposta:

1. Encontrar as equações das retas tangente e normal à curva da aula 14, quando $t = -1$. Desenhe, no mesmo plano, a curva e as retas encontradas.

16ª AULA

Tema: Geometria diferencial das curvas planas.

Objetivo: Conhecer propriedades geométricas de uma curva plana parametrizada.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Definir vetores tangente e normal unitários e o Sistema de Frenet;
- Definir outras propriedades de uma curva plana parametrizada: velocidade e frequência angular; determinante; e curvatura;
- Definir círculo osculador; raio e centro de curvatura, apresentando exemplos.

17ª AULA

Tema: Geometria diferencial das curvas planas.

Objetivo: Conhecer a curva evoluta.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Definir a evoluta de uma curva plana parametrizada por meio do centro de curvatura;
- Relacionar a evoluta com os pontos singulares da curva dada;
- Selecionar uma curva e encontrar a sua evoluta.

Atividade proposta:

1. Encontre a evoluta da elipse dada por

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Desenhe as duas curvas. Caso a evoluta possua ponto(s) singular(es), identifique para qual(is) valor(es) de t esse(s) ponto(s) ocorre(m).

18ª AULA

Tema: Curvas paralelas.

Objetivo: Generalizar a ideia de paralelismo para uma curva qualquer.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Explicar o significado de curvas paralelas à uma outra curva dada;
 - Definir, algebricamente, curva paralela, exibindo sua representação geométrica;
 - Apresentar uma figura contendo curvas paralelas a uma dada curva;
 - Apresentar resultados que relacionam características da paralela com propriedades geométricas da curva dada.
-

19ª AULA

Tema: Curvas paralelas.

Objetivo: Utilizar os conceitos estudados e encontrar a paralela a uma curva paramétrica dada.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar uma curva, encontrar sua evoluta e sua paralela, e, ao final, desenhá-las em um mesmo plano.
1. **(Projeto final):** analise as curvas estudadas até agora e escolha uma para:
 - a) encontrar a sua evoluta;
 - b) encontrar a sua paralela;
 - c) determinar os valores de d para os quais as paralelas são regulares e singulares. Destaque a paralela limitadora.
 - d) desenhar, em um mesmo plano, as três curvas.
-

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisarmos os baixos índices alcançados pelo Brasil em programas internacionais que avaliam a educação, é possível termos uma ideia dos fatores que levam a esse desempenho insatisfatório. Alguns exemplos são: infraestrutura e recursos das escolas insuficientes; desvalorização dos professores e, em consequência, desmotivação para a formação continuada; metodologias ineficazes, dentre as quais há o predomínio das aulas expositivas; entre outros.

Levando em consideração que é notória a presença desses fatores na educação pública brasileira, e que não existe perspectiva para mudanças, a tendência é que o país continue a ocupar as últimas posições do *ranking* nesse quesito.

Apesar da proposta presente neste trabalho não ter sido colocada em prática, espera-se que ela estimule o professor-leitor a utilizar os recursos tecnológicos disponíveis, bem como a praticar conteúdos que, hoje, não estão presentes nos parâmetros curriculares do país, mas que pertencem aos programas dos que se encontram nas primeiras posições do mesmo *ranking*. A própria BNCC fala em “exercitar a curiosidade intelectual” nos estudantes, na segunda competência geral do ensino médio. Então, que de alguma forma isso seja feito.

Sabe-se que a ênfase dada à algebrização dos conceitos é prejudicial no processo de aprendizagem. O estudante precisa, literalmente, visualizar aquele objeto de estudo, e as tecnologias digitais estão aí para isso.

Além da utilização durante a aula, que o conteúdo sobre a ferramenta TikZ sirva de inspiração para que os professores elaborem seu próprio material didático; e que propicie novas possibilidades para trabalhos futuros, que tratem dessa temática. Por experiência própria, utilizando TikZ há quase dez anos, sempre existe algo novo para se aprender, com a vantagem de os manuais estarem disponibilizados de forma gratuita.

Por fim, com relação ao conteúdo da Geometria Diferencial, fica a sugestão para futuras pesquisas de se elevar em uma unidade a dimensão do espaço que aqui serviu de referência, passando a estudar as superfícies paralelas.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria diferencial das curvas no \mathbb{R}^2** . 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020. ISBN 978-65-990395-4-6.

ÁVILA, G. O ensino de cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 18, p. 1–9, 1991. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm>>. Acesso em: 7 maio 2021.

ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 1.

BRASIL. Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. aprova o regulamento da instrução primária e secundária do distrito federal. **Coleção de Leis do Brasil**, Rio de Janeiro, 1890. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html>>. Acesso em: 10 maio 2021.

BRASIL. Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931. dispõe sobre a organização do ensino secundário. **Diário Oficial**, Rio de Janeiro, 1931. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>>. Acesso em: 7 maio 2021.

BRASIL. Decreto nº 21.241, de 4 de abril de 1932. consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. **Coleção de Leis do Brasil**, Rio de Janeiro, 1932. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/CCIVil_03/decreto/1930-1949/D21241.htm>. Acesso em: 7 maio 2021.

BRASIL. Decreto-lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942. lei orgânica do ensino secundário. **Diário Oficial da União**, Rio de Janeiro, 1942. Disponível em: <<https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>>. Acesso em: 7 maio 2021.

BRASIL. Ministério da Educação; Conselho Nacional de Secretários de Educação; União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 22 abr. 2021.

DASSIE, B. A. **A matemática do curso secundário na reforma Gustavo Capanema**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017. (Coleção PROFMAT).

DIAS, C. C.; DANTAS, N. M. **Geometria analítica e números complexos**. Natal: EDUFRN, 2006. v. 11.

DRAWING the circle for a cycloid curve in tikz. Stack Exchange Inc., 2018. Animação. Disponível em: <<https://tex.stackexchange.com/questions/421924/drawing-the-circle-for-a-cycloid-curve-in-tikz>>. Acesso em: 07 nov. 2020.

- FAROUKI, R. T.; NEFF, C. A. Analytic properties of plane offset curves. **Computer Aided Geometric Design**, Oberwolfach, v. 7, p. 83–99, 1990. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/016783969090023K>>. Acesso em: 20 nov. 2020.
- FEHR, H.; CAMP, J.; KELLOG, H. **La Revolution en las matemáticas escolares**: segunda fase. Buenos Aires: OEA, 1971.
- GIBLIN, P. J.; WARDER, J. P. Envolving evolutooids. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 121, n. 10, p. 871–889, 2014. Disponível em: <www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.121.10.871>. Acesso em: 11 nov. 2020.
- GIBSON, C. G. **Elementary geometry of differentiable curves**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- GONÇALVES, F. **Espirógrafo, hipotrocoides e epitrocoides**: atividades exploratórias de curvas planas para o ensino médio utilizando o geogebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Mato Grosso, Barra do Garças, 2019.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.
- HOFFMANN, M. **Topology and differential geometry**. Budapeste: Hallgatói Információs Központ, 2011.
- HSIANG, M. W.; HSIANG, W. Currículo de matemática para o século xxi na república da china. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 25, p. 1–3, 1994. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/25/9.htm>>. Acesso em: 11 maio 2021.
- MARSH, D. **Applied geometry for computer graphics and CAD**. 2. ed. Londres: Springer, 2005.
- MATTHES, A. **tkz-base**: Documentation v. 3.06c. [S.l.], 2020. 64 p. Disponível em: <<https://ctan.dcc.uchile.cl/macros/latex/contrib/tkz/tkz-base/doc/TKZdoc-base.pdf>>.
- MATTHES, A. **tkz-euclide**: Documentation v. 3.06c. [S.l.], 2020. 171 p. Disponível em: <<http://linorg.usp.br/CTAN/macros/latex/contrib/tkz/tkz-euclide/doc/TKZdoc-euclide.pdf>>.
- MATTHES, A. **tkz-fct**: Documentation v. 1.4c. [S.l.], 2020. 87 p. Disponível em: <<http://linorg.usp.br/CTAN/macros/latex/contrib/tkz/tkz-fct/doc/TKZdoc-fct-main.pdf>>.
- MEIRELLES, E. Como organizar sequências didáticas. **Nova Escola**, fev. 2014. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/1493/como-organizar-sequencias-didaticas>>. Acesso em: 16 maio 2021.
- MINISTRY OF EDUCATION. **National Core Curriculum for Upper Secondary Schools**. Vammala: Finnish National Board of Education, 2003. ISBN 952-13-1972-0.
- ONTARIO. Ministry of Education. **The Ontario Curriculum: Grades 11 and 12**. 2007. (Mathematics). Disponível em: <<http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math1112currb.pdf>>. Acesso em: 15 maio 2021.
- PATRIKALAKIS, N. M.; MAEKAWA, T. **Shape interrogation for computer aided design and manufacturing**. Berlin: Springer, 2002. ISBN 978-3-540-42454-3.

PRESSLEY, A. **Elementary differential geometry**. 2. ed. Londres: Springer, 2001.

SMITH, O. P. **Calculating planar evolutes**. Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, 2018.

SMITH, O. P. **Geometria analítica**. Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, 2020.

SOARES, F. **Movimento da matemática moderna no Brasil: Avanço ou retrocesso?** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SRIKANTH, A. 10 best latex editors you should use. **Beebom**, dez. 2020. Disponível em: <<https://beebom.com/best-latex-editors/>>. Acesso em: 10 maio 2021.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução: EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução: EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

TANTAU, T. **The TikZ and PGF Packages: Manual for version 3.1.8b**. Institut für Theoretische Informatik. Universität zu Lübeck, 2020. 1.321 p. Disponível em: <<http://linorg.usp.br/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf>>.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICE A – PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CURVAS PARAMÉTRICAS

Tabela 2 – Propriedades geométricas das curvas paramétricas

Propriedade	Expressão	Descrição
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= (x(t), y(t))$	curva
$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= (x'(t), y'(t))$	vetor velocidade (tangente), 1ª derivada
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= (x''(t), y''(t))$	vetor aceleração, 2ª derivada
$\underline{\hat{\mathbf{r}}}'(t)$	$= (-y'(t), x'(t))$	vetor normal, $\underline{\mathbf{r}}'(t)$ rotacionado de 90°
$v(t)^2$	$= x'(t)^2 + y'(t)^2$	velocidade escalar
$D(t)$	$= -x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)$	determinante
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot (x'(t), y'(t))$	vetor tangente unitário
$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot (-y'(t), x'(t))$	vetor normal unitário
$\omega(t)$	$= \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}$	velocidade angular
$\varphi(t)$	$= \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}$	frequência angular
$\kappa(t)$	$= \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$	curvatura
$\rho(t)$	$= \frac{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}$	raio de curvatura
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= \underline{\mathbf{r}}(t) + \rho(t) \cdot \underline{\mathbf{n}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(t) + \varphi(t) \cdot \underline{\hat{\mathbf{r}}}'(t)$	evoluta (centro de curvatura)
$\underline{\mathbf{c}}'(t)$		derivada da evoluta

Tabela 3 – Propriedades geométricas de um círculo

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= -r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	$\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)$	$= -r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
$v(t)^2$	$= r^2$	$D(t)$	$= r^2$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= - \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
$\omega(t)$	$= 1$	$\varphi(t)$	$= 1$
$\kappa(t)$	$= \frac{1}{r}$	$\rho(t)$	$= r$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fonte: O autor (2021)

Tabela 4 – Propriedades geométricas de uma parábola

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= a \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= 2a \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= 2a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)$	$= 2a \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$
$v(t)^2$	$= 4a^2(t^2 + 1)$	$D(t)$	$= -4a^2$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$
$\omega(t)$	$= -\frac{1}{t^2 + 1}$	$\varphi(t)$	$= -(t^2 + 1)$
$\kappa(t)$	$= \frac{-1}{2a\sqrt{(t^2 + 1)^3}}$	$\rho(t)$	$= -2a\sqrt{(t^2 + 1)^3}$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= a \begin{pmatrix} 3t^2 + 2 \\ -2t^3 \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= 6a \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$

Fonte: O autor (2021)

Tabela 5 – Propriedades geométricas de uma elipse

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= - \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$	$\underline{\hat{\mathbf{r}}}'(t)$	$= - \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$
$v(t)^2$	$= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$	$D(t)$	$= ab$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{-1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$
$\omega(t)$	$= \frac{ab}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$	$\varphi(t)$	$= \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab}$
$\kappa(t)$	$= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$	$\rho(t)$	$= \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= \frac{a^2 - b^2}{ab} \begin{pmatrix} b \cos^3 t \\ -a \sin^3 t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= -3 \frac{a^2 - b^2}{ab} \sin t \cos t \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$

Fonte: O autor (2021)

Tabela 6 – Propriedades geométricas de uma hipérbole

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= \begin{pmatrix} \pm a \sinh t \\ b \cosh t \end{pmatrix}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= \begin{pmatrix} -b \cosh t \\ \pm a \sinh t \end{pmatrix}$
$v(t)^2$	$= a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t$	$D(t)$	$= \mp ab$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}} \begin{pmatrix} \pm a \sinh t \\ b \cosh t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}} \begin{pmatrix} -b \cosh t \\ \pm a \sinh t \end{pmatrix}$
$\omega(t)$	$= \mp \frac{ab}{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}$	$\varphi(t)$	$= \mp \frac{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}{ab}$
$\kappa(t)$	$= \mp \frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}$	$\rho(t)$	$= \mp \frac{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= \frac{a^2 + b^2}{ab} \begin{pmatrix} \pm b \cosh^3 t \\ -a \sinh^3 t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= 3 \frac{a^2 + b^2}{ab} \sinh t \cosh t \begin{pmatrix} \pm b \cosh t \\ -a \sinh t \end{pmatrix}$

Fonte: O autor (2021)

Tabela 7 – Propriedades geométricas de uma cicloide

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= r \begin{pmatrix} t - \text{sent } t \\ 1 - \text{cost } t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= r \begin{pmatrix} 1 - \text{cost } t \\ \text{sent } t \end{pmatrix}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= r \begin{pmatrix} \text{sent } t \\ \text{cost } t \end{pmatrix}$	$\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)$	$= r \begin{pmatrix} -\text{sent } t \\ 1 - \text{cost } t \end{pmatrix}$
$v(t)^2$	$= 2r^2(1 - \text{cost } t)$	$D(t)$	$= r^2(\text{cost } t - 1)$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \text{cost } t)}} \begin{pmatrix} 1 - \text{cost } t \\ \text{sent } t \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \text{cost } t)}} \begin{pmatrix} -\text{sent } t \\ 1 - \text{cost } t \end{pmatrix}$
$\omega(t)$	$= -\frac{1}{2}$	$\varphi(t)$	$= -2$
$\kappa(t)$	$= \frac{-1}{2\sqrt{2}r \cdot \sqrt{1 - \text{cost } t}}$	$\rho(t)$	$= -2\sqrt{2}r \cdot \sqrt{1 - \text{cost } t}$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= r \begin{pmatrix} t + \text{sent } t \\ \text{cost } t - 1 \end{pmatrix}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= r \begin{pmatrix} 1 + \text{cost } t \\ -\text{sent } t \end{pmatrix}$

Fonte: O autor (2021)

Tabela 8 – Propriedades geométricas da hipotrocoide

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= r\{\delta\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= r\delta\{\underline{\mathbf{f}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{h}}(\delta t)\}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= r\delta\{-\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\delta\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}$	$\underline{\tilde{\mathbf{r}}}'(t)$	$= r\delta\{-\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}$
$v(t)^2$	$= r^2\delta^2\{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)\}$	$D(t)$	$= r^2\delta^2\{1 - \lambda^2\delta + \lambda(\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)\}$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{\underline{\mathbf{f}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{h}}(\delta t)}{\sqrt{\{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)\}}}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{-\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{g}}(\delta t)}{\sqrt{\{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)\}}}$
$\omega(t)$	$= \frac{1 - \lambda^2\delta + \lambda(\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)}$	$\varphi(t)$	$= \frac{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)}{1 - \lambda^2\delta + \lambda(\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)}$
$\kappa(t)$	$= \frac{1}{r\delta} \cdot \frac{1 - \lambda^2\delta + \lambda(\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)}{\sqrt{[1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)]^3}}$	$\rho(t)$	$= r\delta \cdot \frac{\sqrt{[1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta + 1)t)]^3}}{1 - \lambda^2\delta + \lambda(\delta - 1)\cos((\delta + 1)t)}$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= r\{\delta(1 - \varphi(t))\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda(1 + \delta\varphi(t))\underline{\mathbf{g}}(\delta t)\}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= r\delta\{(1 - \varphi(t))\underline{\mathbf{f}}(t) + \lambda(1 + \delta\varphi(t))\underline{\mathbf{h}}(\delta t) - \varphi'(t)(\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{g}}(\delta t))\}$

Fonte: O autor (2021)

Tabela 9 – Propriedades geométricas da epitrocoide

Propriedade	Expressão	Propriedade	Expressão
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$= r\{\delta\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{e}}(\delta t)\}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$= r\delta\{\underline{\mathbf{f}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{f}}(\delta t)\}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$= r\delta\{-\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\delta\underline{\mathbf{e}}(\delta t)\}$	$\underline{\tilde{\mathbf{r}}}'(t)$	$= r\delta\{-\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{e}}(\delta t)\}$
$v(t)^2$	$= r^2\delta^2\{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)\}$	$D(t)$	$= r^2\delta^2\{1 + \lambda^2\delta - \lambda(\delta + 1)\cos((\delta - 1)t)\}$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$= \frac{\underline{\mathbf{f}}(t) - \lambda\underline{\mathbf{f}}(\delta t)}{\sqrt{\{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)\}}}$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$= \frac{-\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{e}}(\delta t)}{\sqrt{\{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)\}}}$
$\omega(t)$	$= \frac{1 + \lambda^2\delta - \lambda(\delta + 1)\cos((\delta - 1)t)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)}$	$\varphi(t)$	$= \frac{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)}{1 + \lambda^2\delta - \lambda(\delta + 1)\cos((\delta - 1)t)}$
$\kappa(t)$	$= \frac{1}{r\delta} \cdot \frac{1 + \lambda^2\delta - \lambda(\delta + 1)\cos((\delta - 1)t)}{\sqrt{[1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)]^3}}$	$\rho(t)$	$= r\delta \cdot \frac{\sqrt{[1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos((\delta - 1)t)]^3}}{1 + \lambda^2\delta - \lambda(\delta + 1)\cos((\delta - 1)t)}$
$\underline{\mathbf{c}}(t)$	$= r\{\delta(1 - \varphi(t))\underline{\mathbf{e}}(t) - \lambda(1 - \delta\varphi(t))\underline{\mathbf{e}}(\delta t)\}$	$\underline{\mathbf{c}}'(t)$	$= r\delta\{(1 - \varphi(t))\underline{\mathbf{f}}(t) + \lambda(\delta\varphi(t) - 1)\underline{\mathbf{f}}(\delta t) - \varphi'(t)(\underline{\mathbf{e}}(t) + \lambda\underline{\mathbf{e}}(\delta t))\}$

Fonte: O autor (2021)

APÊNDICE B – CÓDIGOS TIKZ DE ALGUMAS FIGURAS

Na elaboração das figuras, foram utilizados, no preâmbulo, os pacotes `tikz`, `tkz-fct`, `tkz-euclide`, `graphicx` e `xcolor`, e a seguinte biblioteca, que possui a funcionalidade de realizar cálculo nos comandos:

```
\usetikzlibrary{math}.
```

Código-fonte 2 – Catenária (Figura 2.3)

```

1 \begin{figure}[H] % Ini'cio do ambiente figure. Exige que a
   figura fique naquele lugar (Here).
2 \caption{Catenaria} % Nomeia a figura.
3 \centering % Centraliza a figura.
4 \begin{tikzpicture}[scale=.8] % Ini'cio do desenho da figura,
   reduzida em 20%.
5 \tkzInit[xmin=-3,xmax=3,ymin=-.5,ymax=4] % Define os
   comprimentos dos eixos coordenados.
6 \tkzDrawX[label=$x(t)$,noticks] % Desenha o eixo x, sem
   marcacoes dos pontos, e o nomeia com x(t).
7 \tkzDrawY[label=$y(t)$,noticks] % Desenha o eixo y, sem
   marcacoes, e o nomeia com y(t).
8 \tkzFctPar[color=blue,domain=-3:3]{t}{cosh(t)} % Desenha a
   curva no domi'nio definido, em azul. Entre as primeiras
   chaves, vai x(t), e, depois, y(t).
9 \end{tikzpicture} % Te'rmino do desenho da figura.
10 \legend{Fonte: O autor (2021)} % Coloca a fonte embaixo da
   figura.
11 \label{fig:catenaria} % Da' um ro'tulo `a figura, para que
   possa ser referenciada por meio dos comandos \ref{label}
   ou \autoref{label}.
12 \end{figure} % Fim do ambiente figure.
```

Fonte: O autor (2021)

Código-fonte 3 – Cicloide (Figura 2.13)

```
1 \begin{tikzpicture}
2
3 \tikzmath{\r=2;} % Raio da circunferencia que gira.
4 \tikzmath{\t=60;} % Angulo t, em graus.
5 \tikzmath{\tr=\t*pi/180;} % Angulo t, em radianos.
6
7 \tkzDefPoint(0,0){O} % Define a origem.
8
9 % Coordenadas de C
10 \tikzmath{\xc=\r*\tr;}
11 \tikzmath{\yc=\r;}
12 \tkzDefPoint(\xc,\yc){C}
13
14 % Coordenadas de P
15 \tikzmath{\xp=(\r*(\tr-sin(\t)))};
16 \tikzmath{\yp=(\r*(1-cos(\t)))};
17 \tkzDefPoint(\xp,\yp){P}
18
19 % Coordenadas de A
20 \tikzmath{\xa=\xp;}
21 \tikzmath{\ya=0;}
22 \tkzDefPoint(\xa,\ya){A}
23
24 % Coordenadas de B
25 \tikzmath{\xb=\xc;}
26 \tikzmath{\yb=0;}
27 \tkzDefPoint(\xb,\yb){B}
28
29 % Coordenadas de D
30 \tikzmath{\xd=\xc;}
31 \tikzmath{\yd=\yp;}
32 \tkzDefPoint(\xd,\yd){D}
33
```

```

34 \tkzInit[xmin=-.5,xmax=2.2*pi*\r,ymin=-.5,ymax=2*\r+.5] % Define os
    cumprimentos dos eixos coordenados.
35 \tkzDrawXY[noticks] % Desenha os eixos.
36
37 \draw[dotted] (C) circle (\r); % Desenha a circunferencia de centro
    C e raio r, pontilhada.
38 \node at (\xc,2*\r+.3){$\mathcal{C}$}; % Da' nome `a circunferencia
39
40 \tkzFillAngle[size=.3, fill=gray!20](P,C,B) % Desenha o angulo PCB,
    em cinza.
41 \tkzLabelAngles[pos=.45](P,C,B){\footnotesize{$t$}} % Nomeia o
    angulo PCB, com t.
42
43 \tkzMarkRightAngle[size=.2,fill=gray!20](P,D,C) % Desenha o angulo
    reto PDC.
44
45 \draw[red] (P) arc [start angle = 270-\t, end angle = 270, radius =
    \r]; % Pinta o arco PB, em vermelho.
46 \draw[red] (O) -- (B); % Pinta o segmento AB, em vermelho.
47
48 % Desenha e nomeia pontos O, C, P, A, B e D. Dependendo do angulo
    declarado, sera' necessaria'rio alterar as localizacoes dos nomes
    dos pontos C e D.
49 \fill (O) circle (1.5pt) node[below left]{$O$};
50 \fill (C) circle (1.5pt) node[right]{$C$};
51 \fill (P) circle (1.5pt) node[above]{$P$};
52 \fill (A) circle (1.5pt) node[below]{$A$};
53 \fill (B) circle (1.5pt) node[below]{$B$};
54 \fill (D) circle (1.5pt) node[right]{$D$};
55
56 \draw[dotted] (A) -- (P) -- (D) -- (B); % Desenha os segmentos
    pontilhados.
57 \draw[dotted] (C) -- (D);
58 \draw (C) -- (P) node[above, midway]{$r$}; % Desenha o segmento CP,

```

```
raio da circunferencia, e coloca o seu comprimento, r, acima e
centralizado.
59
60 \tkzFctPar[color=blue,domain=0:2.2*pi*\r]{(\r*(t-sin(t)))}{(\r*(1-
cos(t)))} % Desenha a curva.
61
62 \end{tikzpicture}
```

Fonte: O autor (2021)

Código-fonte 4 – Hipotrocoide (Figura 2.18)

```

1 \begin{tikzpicture}[scale=.8]
2
3 \tikzmath{\R=5;} % Raio da circunferencia maior.
4 \tikzmath{\r=1.5;} % Raio da circunferencia menor.
5 \tikzmath{\d=2;} % Distancia de C a P.
6 \tikzmath{\t=190;} % Angulo t, em graus.
7 \tikzmath{\de=(\R-\r)/\r;} % Delta.
8
9 % Coordenadas de C
10 \tikzmath{\xc=(\R-\r)*cos(\t);}
11 \tikzmath{\yc=(\R-\r)*sin(\t);}
12 \fill (\xc,\yc) circle (1.5pt) node[above]{$C$};
13
14 % Coordenadas de P
15 \tikzmath{\xp=(\R-\r)*cos(\t)+\d*cos(\de*\t);}
16 \tikzmath{\yp=(\R-\r)*sin(\t)-\d*sin(\de*\t);}
17
18 \draw (\xp,\yp) -- (\xc,\yc) node[midway,left]{$d$};
19
20 \draw (0,0) circle (\R);
21 \draw (\xc,\yc) circle (\r);
22
23 \tkzInit[xmin=-\R-.5,xmax=\R+.5,ymin=-\R-.5,ymax=\R+.5]
24 \tkzDrawX[label=$x(t)$,noticks]
25 \tkzDrawY[label=$y(t)$,noticks]
26 \tkzFctPar[color=blue,domain=0:6*pi]{((\R-\r)*cos(t)+\d*cos(\de*t))
    }{((\R-\r)*sin(t)-\d*sin(\de*t))}
27
28 \fill (\xp,\yp) circle (1.5pt) node[below,xshift=-.1cm]{$P$};
29
30 \end{tikzpicture}

```

Código-fonte 5 – Elipse, paralelas e evoluta (Figura 4.12)

```

1 \begin{tikzpicture}[scale=.5]
2 \tikzmath{\a=2;}
3 \tikzmath{\b=4;}
4 \tikzmath{\mi=((\a*\a)/\b);} % Valor de d da paralela limitadora
   menor
5 \tikzmath{\ma=(\b*\b)/\a);} % Valor de d da paralela limitadora
   maior
6
7 \tkzInit[xmin=-\ma,xmax=\ma,ymin=-(\b+1),ymax=\b+1]
8 \tkzDrawX[label=$x(t)$,noticks]
9 \tkzDrawY[label=$y(t)$,noticks]
10
11 \tkzFctPar[color=blue,domain=0:2*pi]{(\a*cos(t))}{(\b*sin(t))} %
   Desenha a elipse em azul.
12
13 \foreach \d in {-1,-.5,.5,1.5,2,...,7.5,8.5}{
14 \tkzFctPar[color=red,domain=0:2*pi]{((\a*cos(t))-((\d*\b*cos(t)))
   /(\sqrt{\a**2*sin(t)**2+\b**2*cos(t)**2}))}{((\b*sin(t))-((\d
   *\a*sin(t)))/(\sqrt{\a**2*sin(t)**2+\b**2*cos(t)**2}))} %
   Desenha as paralelas em vermelho.
15
16 \foreach \l in {\mi,\ma}{
17 \tkzFctPar[color=purple,domain=0:2*pi]{((\a*cos(t))-((\l*\b*cos(t)
   )))/(\sqrt{\a**2*sin(t)**2+\b**2*cos(t)**2}))}{((\b*sin(t))-((\l
   *\a*sin(t)))/(\sqrt{\a**2*sin(t)**2+\b**2*cos(t)**2}))} %
   Desenha as paralelas limitadoras em roxo.
18
19 \tkzFctPar[color=orange,domain=0:2*pi]{(((\a**2-\b**2)/\a)*cos(t)
   **3)}{((-\a**2+\b**2)/\b)*sin(t)**3} % Desenha a evoluta em
   laranja.
20 \end{tikzpicture}

```

Código-fonte 6 – Hipocicloide, paralelas e evoluta (Figura 4.16)

```

1 \begin{tikzpicture}[scale=.35]
2
3 \tikzmath{\R=5;}
4 \tikzmath{\r=1;}
5 \tikzmath{\de=(\R-\r)/\r);}
6
7 \tkzInit[xmin=-\R+4,xmax=\R+3.3,ymin=-\R+4,ymax=\R+4]
8 \tkzDrawX[label=$x(t)$,noticks]
9 \tkzDrawY[label=$y(t)$,noticks]
10
11 \tkzFctPar[color=blue,domain=0:2*pi]{((\R-\r)*cos(t)+\r*cos(\de*t))
    }{((\R-\r)*sin(t)-\r*sin(\de*t))} % Desenha a hipocicloide em
    azul.
12
13 \foreach \n in {0,1,...,\de}{ % Divide o intervalo (0, 2pi) em (
    Delta+1) subintervalos de comprimento 2pi/(Delta+1).
14 \foreach \d in {-6,-5,...,-1,1,2,...,6}{ % Valores das distancias
    das paralelas.
15 \tkzFctPar[color=red,domain=.4*pi*\n:.4*pi*(\n+1)]{((\R-\r)*cos(t)
    +\r*cos(\de*t)-(\d/(2*(1-cos((\R/\r)*t))))**.5)*(cos(t)-cos(\de*
    t))}{((\R-\r)*sin(t)-\r*sin(\de*t)-(\d/(2*(1-cos((\R/\r)*t))))
    **.5)*(sin(t)+sin(\de*t))}} % Desenha as paralelas em
    vermelho.
16
17 \foreach \m in {0,1,...,\de}{
18 \foreach \l in {-(4*\r*\de)/(\de-1),(4*\r*\de)/(\de-1)}{ %
    Valores das distancias das paralelas limitadoras, uma positiva
    e uma negativa.
19 \tkzFctPar[color=purple,domain=.4*pi*\m:.4*pi*(\m+1)]{((\R-\r)*cos(
    t)+\r*cos(\de*t)-(\l/(2*(1-cos((\R/\r)*t))))**.5)*(cos(t)-cos(\
    de*t))}{((\R-\r)*sin(t)-\r*sin(\de*t)-(\l/(2*(1-cos((\R/\r)*t)
    )))**.5)*(sin(t)+sin(\de*t))}} % Desenha a paralela limitadora
    em roxo.

```

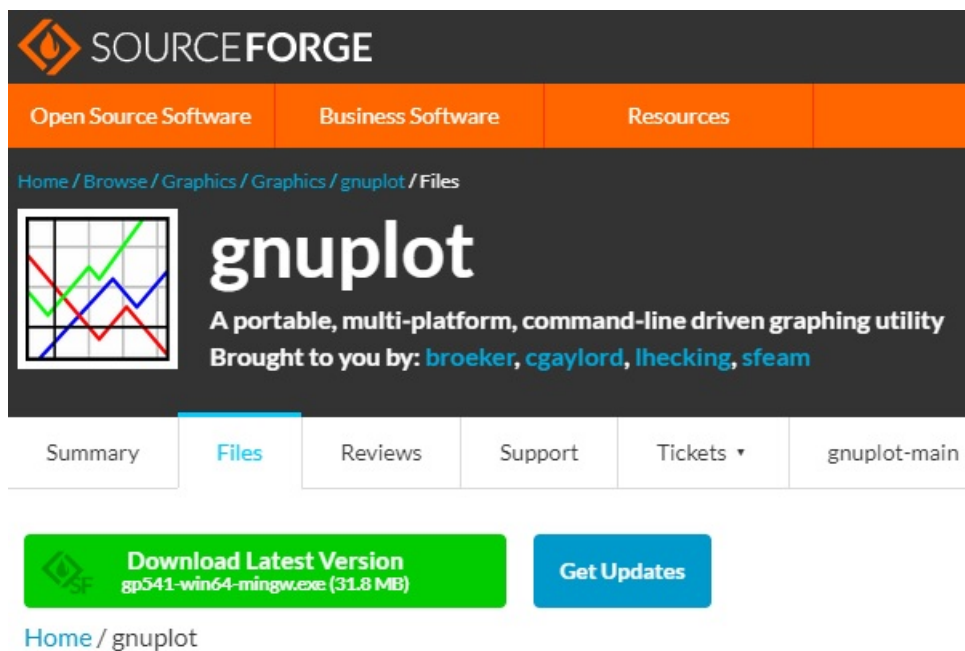
```
20
21 \tkzFctPar[color=orange,domain=0:2*pi]{((\R-\r)*(-\de-1)/(1-\de))*
    cos(t)+\r*((\de+1)/(1-\de))*cos(\de*t)}{((\R-\r)*(-\de-1)
    /(1-\de))*sin(t)-\r*((\de+1)/(1-\de))*sin(\de*t)} % Desenha a
    evoluta em laranja.
22
23 \end{tikzpicture}
```

Fonte: O autor (2021)

APÊNDICE C – INSTALAÇÃO DO GNUPLOT

O *download* do programa pode ser feito [neste sítio](#). Ao clicar, será direcionado para a página inicial da ferramenta, conforme a Figura C.1.

Figura C.1 – Página inicial do gnuplot

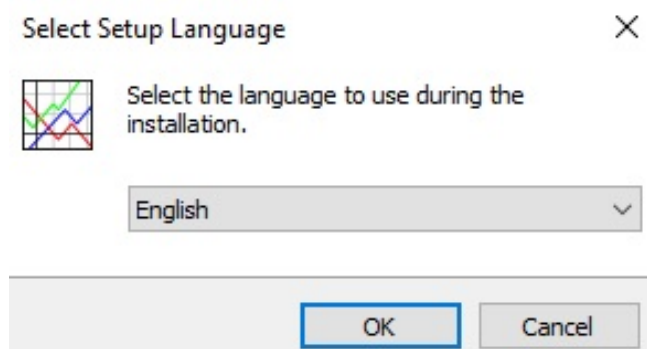


Fonte: O autor (2021)

Na aba *Files*, é disponibilizado o ícone de *download* da versão mais recente (gp541).

Feito o *download*, ao clicar no arquivo, serão apresentadas as seguintes janelas:

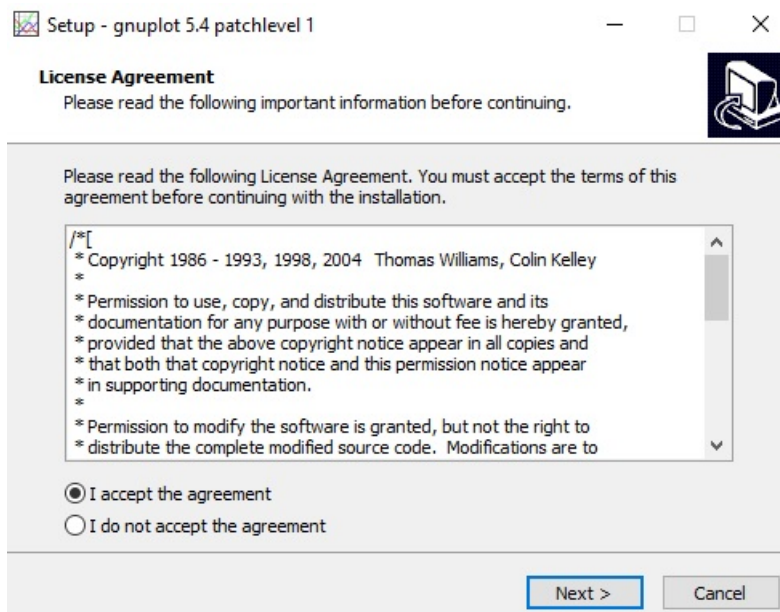
Figura C.2 – Idioma para a instalação



Fonte: O autor (2021)

Idioma de instalação: dentre as opções de idioma, estão o alemão, o inglês e o mandarim. Escolhida a língua, clique em OK. Nesse tutorial, o idioma selecionado foi o inglês.

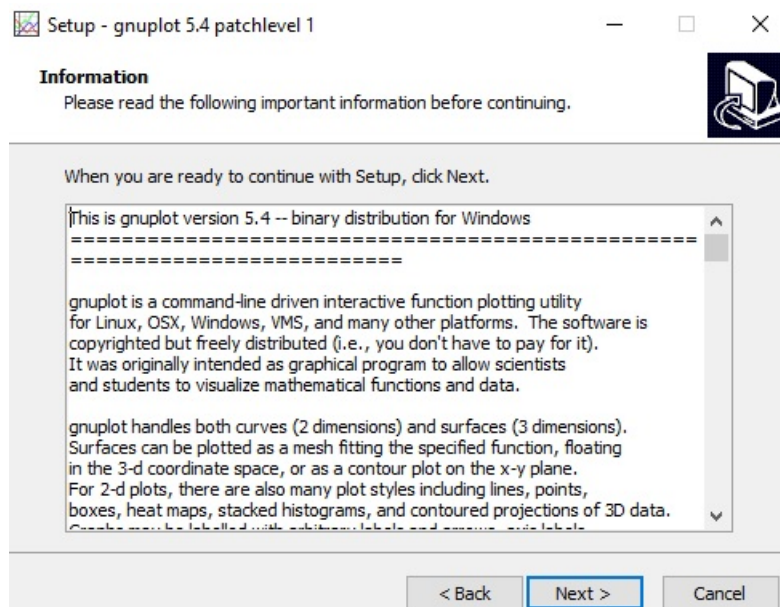
Figura C.3 – Acordo de licença



Fonte: O autor (2021)

Acordo de licença: termos de utilização da ferramenta. Selecione **I accept the agreement** e clique em **Next**.

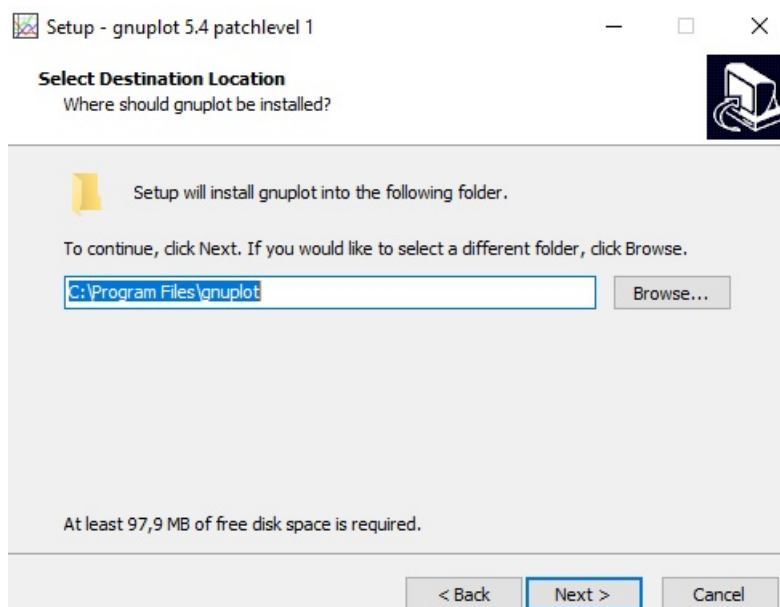
Figura C.4 – Informação



Fonte: O autor (2021)

Informação: contém informações importantes sobre o `gnuplot`. Ao concluir a leitura, clique em **Next**.

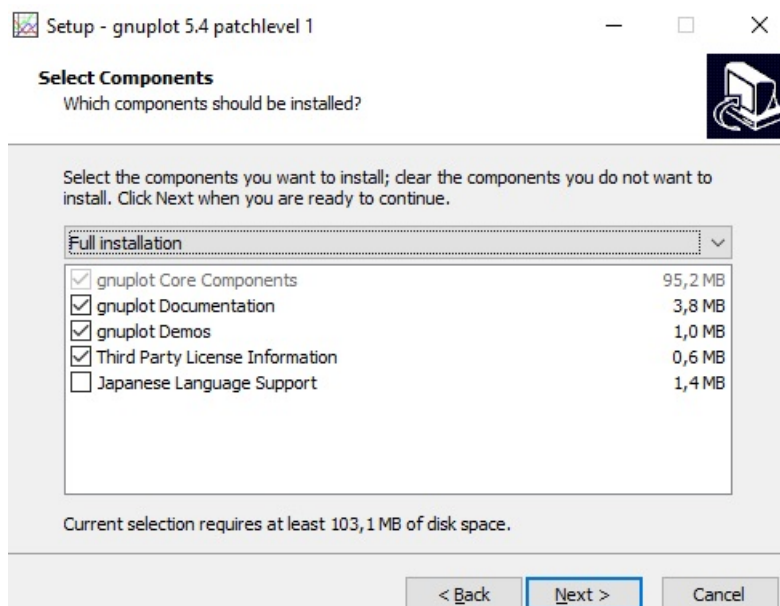
Figura C.5 – Pasta de destino



Fonte: O autor (2021)

Escolha do destino: deverá ser selecionada a pasta onde serão salvos os arquivos da instalação. É requerido, pelo menos, 97,9 MB de espaço em disco. Escolhida a pasta, clique em **Next**.

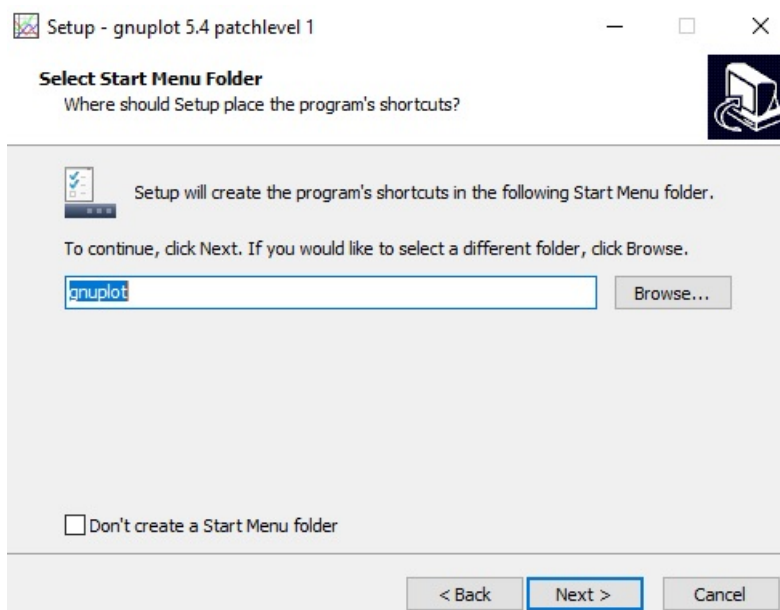
Figura C.6 – Componentes



Fonte: O autor (2021)

Seleção de componentes: deverão ser instaladas as componentes da ferramenta. Recomenda-se a instalação **Full installation**. Para essa seleção, é necessário espaço de, pelo menos, 103,1 MB. Clique em **Next**.

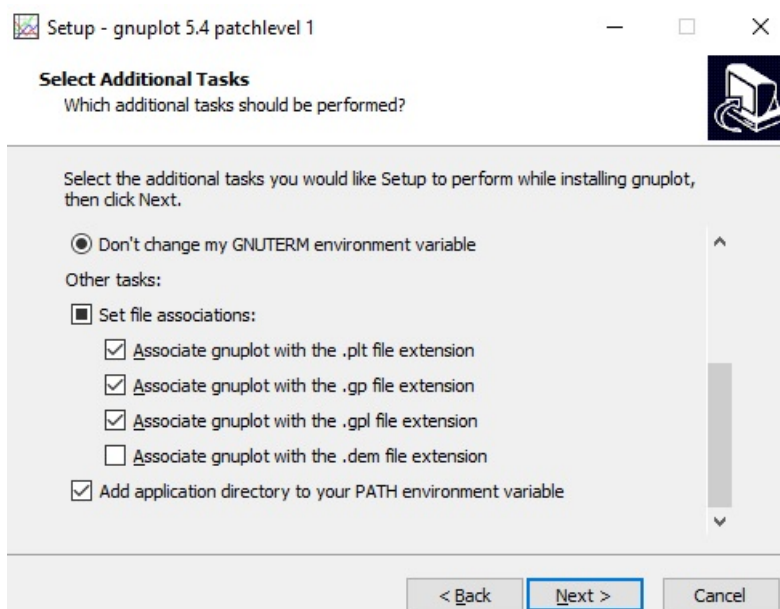
Figura C.7 – Atalho



Fonte: O autor (2021)

Criação de atalho: caso queira, poderá ser criado um atalho do programa no menu Iniciar. Se não quiser, desmarque a caixa `Don't create a Start Menu folder`. Clique em `Next`.

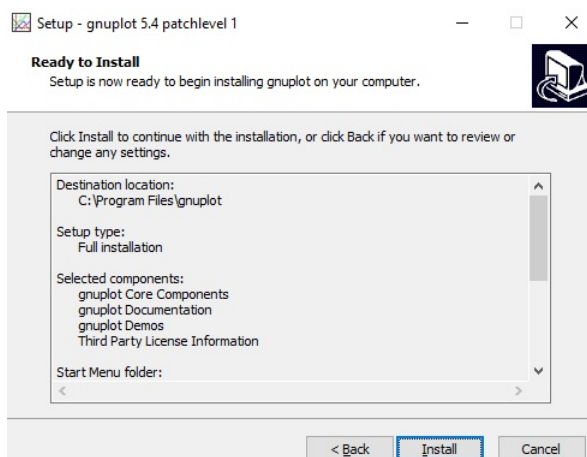
Figura C.8 – Tarefas adicionais



Fonte: O autor (2021)

Seleção de tarefas adicionais: poderão ser instaladas funções adicionais. Recomenda-se manter a marcação das caixas de diálogo. Após, clique em `Next`.

Figura C.9 – Instalação



Fonte: O autor (2021)

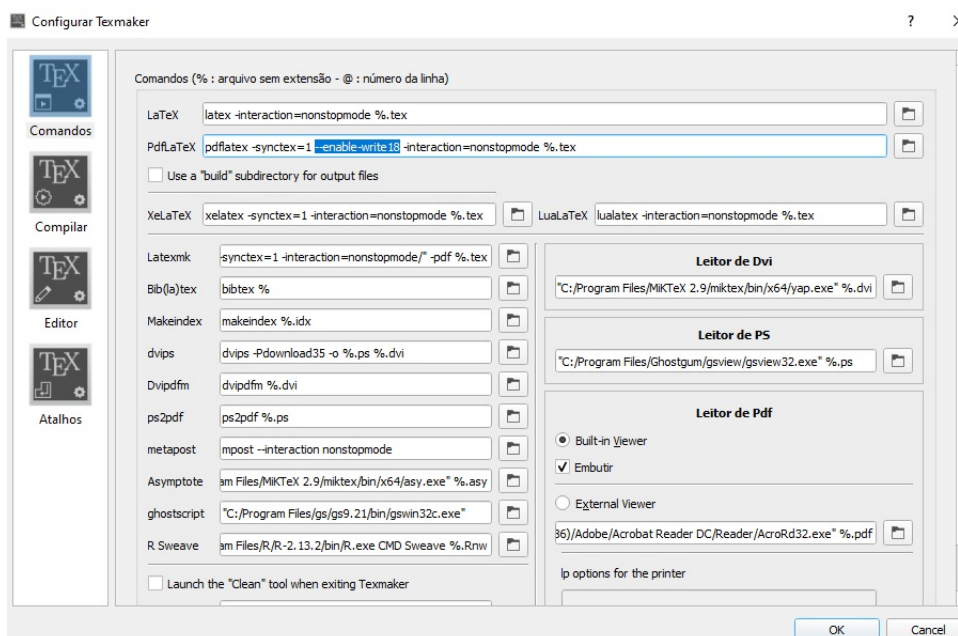
Pronto para a instalação: última janela a ser exibida. São mostradas as seleções feitas nas janelas anteriores. Se tiver de acordo, clique em **Install**.

Por fim, um último procedimento a ser realizado no TeXmaker. A partir de **(1)**, siga os passos:

Opções > Configurar o TeXmaker

Em seguida, será exibida a janela abaixo:

Figura C.10 – Configuração



Fonte: O autor (2021)

Em PdfLaTeX, acrescente `--enable-write18` e clique em **OK**. O objetivo desse procedimento é permitir ao editor “chamar” programas externos.