



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

MATHEUS TIMÓTEO DE OLIVEIRA

Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra

GOIÂNIA

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Matheus Timóteo de Oliveira

3. Título do trabalho

Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **MATHEUS TIMÓTEO DE OLIVEIRA, Discente**, em 09/12/2021, às 14:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 23/12/2021, às 14:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2550056** e o código CRC **32A6E571**.

Referência: Processo nº 23070.059116/2021-60

SEI nº 2550056

MATHEUS TIMÓTEO DE OLIVEIRA

Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes

GOIÂNIA
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Matheus Timóteo

Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra [manuscrito] / Matheus Timóteo Oliveira. - 2021.

111 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RB), Goiânia, 2021.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, tabelas, lista de figuras.

1. Geometria Plana. 2. Triângulos. 3. GeoGebra. I. Gomes, Alacyr José, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 35 da sessão de Defesa de Dissertação de **Matheus Timóteo de Oliveira**, que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de concentração em Matemática do Ensino Básico**.

Ao trigésimo dia do mês de novembro do ano de dois mil e vinte um, a partir das dezesseis horas e zero minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Alacyr José Gomes - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Dr. **Ronaldo Antônio dos Santos - IME/UFG** membro titular interno e o Professor Doutor **Eudes Antônio da Costa - MAT/UFT** membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **APROVADO** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Alacyr José Gomes - IME/UFG, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao trigésimo dia do mês de novembro do ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra

Documento assinado eletronicamente por **EUDES ANTONIO DA COSTA, Usuário Externo**, em 30/11/2021, às 17:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 30/11/2021, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Antonio Dos Santos, Professor do Magistério Superior**, em 30/11/2021, às 18:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2464325** e o código CRC **E3EA1DE8**.

Dedico este trabalho a minha esposa Cleidivane, aos meus filhos Artur e Heitor e aos meus pais João Donizete e Maria José pelo apoio e paciência que tiveram comigo ao longo dessa trajetória.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pelo dom da vida.

Agradeço por fazer parte de uma família maravilhosa que apoia minhas escolhas. Meus pais, Maria José e João Donizete, que nunca mediram esforços na minha formação pessoal e profissional me ensinando os maiores valores que uma pessoa de bem deve ter. Tenho muito orgulho, admiração e amor pelos pais que tenho.

Agradeço a minha esposa, Cleidivane Muniz, que é uma pessoa admirável, compreensiva, atenciosa e cuidadosa, além de ser a melhor mãe para nossos filhos. Sou muito grato por ser você que está ao meu lado todos os dias.

Agradeço a todos os colegas, em especial Andrei, Américo, Eber e Mylena que compartilharam comigo momentos de estudos e descontração ao longo do curso.

Agradeço aos professores pela dedicação e contribuição na minha formação, em especial ao meu orientador professor Alacyr José Gomes, que teve muita paciência e me conduziu de forma ímpar na conclusão deste trabalho.

Sigo aprendendo matemática para continuar ensinando matemática.

Matheus Timóteo de Oliveira,

.

Resumo

de Oliveira, Matheus Timóteo. **Estudo sobre Triângulos no Ensino Fundamental usando o software GeoGebra**. Goiânia, 2021. 111p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O trabalho se concentra no estudo sobre triângulos no ensino fundamental, uma vez que o aluno apresenta dificuldades em compreender e interpretar figuras planas e criar uma relação com problemas. Daí pesquisamos por ferramentas capazes de despertar a atenção do aluno para a geometria. Decidimos utilizar o software **GeoGebra** que é capaz de reproduzir nas telas de computadores e similares as informações descritas em um problema, viabilizando aulas mais interativas.

Primariamente será feita uma explanação do conteúdo de geometria plana, especificamente sobre triângulos, explorando conceitos, propriedades e aplicações nas resoluções de exercícios. A seguir iremos fazer o uso das ferramentas do GeoGebra com o objetivo de abordar uma forma significativa para a construção do conhecimento geométrico, como por exemplo ao precisar movimentar uma figura de um lado para o outro e fazer comparações, depois retornar ao mesmo lugar, ou até mesmo verificar a soma dos ângulos internos de um triângulo ao movimentar um de seus vértices e constatar a mudança nos valores de cada ângulo, porém com soma sempre igual a 180° .

Este trabalho busca contribuir para a evolução na utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) na educação, tornando as aulas prazerosas aos educandos que terão a oportunidade de vivenciar aulas inovadoras com atributos tecnológicos que facilite o aprendizado.

Palavras-chave

Geometria Plana, Triângulos, GeoGebra.

Abstract

de Oliveira, Matheus Timóteo. **Study about Triangles in Elementary School using GeoGebra software**. Goiânia, 2021. 111p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The work focuses on the study of triangles in elementary school, since the student has difficulties in understanding and interpreting flat figures and creating a relationship with problems. Hence, we searched for tools capable of awakening the student's attention to geometry. We decided to use the software **GeoGebra** which is capable of reproducing the information described in a problem on computer screens and similar, enabling more interactive lessons.

Primarily an explanation of the content of plane geometry will be done, specifically about triangles, exploring concepts, properties and applications in the resolution of exercises. Next, we will make use of GeoGebra tools in order to address a meaningful way to build geometric knowledge, such as when you need to move a figure from one side to the other and make comparisons, then return to the same place, or even checking the sum of the internal angles of a triangle when moving one of its vertices and noting the change in the values of each angle, but with a sum always equal to 180° .

This work seeks to contribute to the evolution in the use of Information and Communication Technologies (ICTs) in education, making classes enjoyable for students who will have the opportunity to experience innovative classes with technological attributes that facilitate learning.

Keywords

Plane Geometry, Triangles, GeoGebra.

Sumário

| | |
|---|-----|
| Lista de Figuras | 15 |
| INTRODUÇÃO | 17 |
| 1 Contexto Histórico | 19 |
| 2 Fundamentação Teórica | 22 |
| 2.1 Conceitos | 23 |
| 2.2 Triângulos | 29 |
| 2.2.1 Congruência de Triângulos | 35 |
| 2.2.2 Semelhança de Triângulos | 45 |
| 3 Relações Métricas no Triângulo Utilizando o GeoGebra | 53 |
| 3.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo | 53 |
| 3.2 Relações Métricas em Triângulo Qualquer | 65 |
| 3.2.1 Lei dos Senos | 65 |
| 3.2.2 Lei dos Cossenos | 69 |
| 3.2.3 Uma conexão entre as Relações Métricas: Teorema de Pitágoras e Lei dos Cossenos | 76 |
| 4 Proposta de Ensino | 79 |
| 4.1 Considerações | 87 |
| Referências Bibliográficas | 89 |
| A Primitivas | 91 |
| B Transformação Geométrica | 92 |
| C Ferramentas do GeoGebra | 93 |
| D Plano de aula 1 | 101 |
| D.1 Objetivos | 101 |
| D.1.1 Geral | 101 |
| D.1.2 Específicos | 101 |
| D.2 Conteúdo Programático | 101 |
| D.3 Metodologia | 102 |
| D.4 Recursos Didáticos | 102 |
| D.5 Avaliação | 102 |

| | | |
|---|---------------------------|------------|
| E | Lista de Exercícios 1 | 103 |
| F | Plano de aula 2 | 106 |
| | F.1 Objetivos | 106 |
| | F.1.1 Geral | 106 |
| | F.1.2 Específicos | 106 |
| | F.2 Conteúdo Programático | 106 |
| | F.3 Metodologia | 107 |
| | F.4 Recursos Didáticos | 107 |
| | F.5 Avaliação | 107 |
| G | Lista de Exercícios 2 | 108 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Reta | 24 |
| 2.2 | Semirreta | 24 |
| 2.3 | Segmento de Reta | 24 |
| 2.4 | Ângulo $B\hat{O}A$ | 25 |
| 2.5 | Transferidor | 25 |
| 2.6 | Transporte de Segmento | 26 |
| 2.7 | Transporte de Ângulo | 27 |
| 2.8 | Poligonais. | 27 |
| 2.9 | Polígono | 28 |
| 2.10 | Polígono Convexo. | 28 |
| 2.11 | Polígono não Convexo. | 29 |
| 2.12 | Polígonos Regulares. | 29 |
| 2.13 | Triângulos Congruentes | 31 |
| 2.14 | Ângulo Externo | 32 |
| 2.15 | \triangle_{ABC} | 33 |
| 2.16 | Triângulos Semelhantes | 35 |
| 2.17 | LAL - Lado, Ângulo, Lado | 35 |
| 2.18 | Triângulo Isósceles | 37 |
| 2.19 | ALA - Ângulo, Lado, Ângulo | 38 |
| 2.20 | LLL - Lado, Lado, Lado | 39 |
| 2.21 | Transporte de ângulos e segmentos por semiplanos opostos | 40 |
| 2.22 | LAA _o - Lado, Ângulo, Ângulo Oposto | 41 |
| 2.23 | Retângulo | 42 |
| 2.24 | Paralelogramo | 42 |
| 2.25 | Área do Paralelogramo | 43 |
| 2.26 | Área do Triângulo | 44 |
| 2.27 | Triângulos com a mesma área | 44 |
| 2.28 | Teorema Fundamental | 45 |
| 2.29 | Teorema Fundamental | 46 |
| 2.30 | Teorema Fundamental | 46 |
| 2.31 | Semelhança de Triângulos - Caso AA | 47 |
| 2.32 | Semelhança de Triângulos - Caso LAL | 49 |
| 2.33 | Semelhança de Triângulos - Caso LLL | 51 |
| 3.1 | Construção do Triângulo Retângulo - Parte I | 54 |
| 3.2 | Construção do Triângulo Retângulo - Parte II | 55 |
| 3.3 | Construção do Triângulo Retângulo - Parte III | 56 |
| 3.4 | Construção Triângulo Retângulo - Parte IV | 57 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.5 | Semelhança de Triângulos | 57 |
| 3.6 | Construção - Teorema de Pitágoras | 61 |
| 3.7 | Semelhança de Triângulos | 62 |
| 3.8 | Construção - Lei dos Senos | 65 |
| 3.9 | Lei dos Senos. | 66 |
| 3.10 | Lei dos Cossenos (triângulo acutângulo) | 70 |
| 3.11 | Lei dos Cossenos (triângulo obtusângulo) | 72 |
| 3.12 | Relações Métricas | 77 |
| | | |
| C.1 | Mover | 93 |
| C.2 | Ponto | 93 |
| C.3 | Reta | 94 |
| C.4 | Reta Perpendicular | 95 |
| C.5 | Polígono | 96 |
| C.6 | Círculo | 96 |
| C.7 | Ângulo | 97 |
| C.8 | Reflexão em Relação a uma Reta | 98 |
| C.9 | Controle Deslizante | 99 |
| C.10 | Mover Janela de Visualização | 99 |
| | | |
| E.1 | http://www2.ime.unicamp.br/ma225/2016Tarefa4-GrupoA.pdf | 103 |
| E.2 | http://www2.ime.unicamp.br/ma225/2016Tarefa4-GrupoA.pdf | 104 |
| E.3 | Compilação do autor | 104 |
| E.4 | https://pt-static.z-dn.net/files/d80/fc88a8afd461309bae1f107541b42345.doc | 105 |
| E.5 | https://pt-static.z-dn.net/files/d80/fc88a8afd461309bae1f107541b42345.doc | 105 |

Introdução

O ensino de geometria plana é muito importante para o desenvolvimento intelectual do educando, desenvolvendo a compreensão do espaço que o rodeia e que ele está inserido. Porém algumas vezes acaba sendo menos explorado que outros conteúdos, e alguns motivos são: a falta de interesse dos alunos pelo conteúdo, a má formação e a falta de envolvimento com as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) por parte dos professores. O resultado são aulas que não trazem significado e causam desinteresse aos alunos, prejudicando o processo de ensino-aprendizagem.

No estudo de geometria no ensino fundamental o discente precisa visualizar as formas geométricas as quais estão sendo trabalhadas, uma vez que ele ainda não tem a habilidade de formar conjecturas para dar continuidade em suas atividades. Surge então o suporte oferecido pelas TICs auxiliando na criação de figuras geométricas por meio de recursos tecnológicos de acordo com a atividade desenvolvida pelo discente.

Em sala de aula me deparei, algumas vezes, com dificuldade de aprendizagem e falta de motivação dos alunos. Constatei que a minha metodologia estava deixando a desejar, ou seja, defasada e foi então que busquei auxílio em ferramentas tecnológicas capazes de suprir essa demanda. Veio a oportunidade de trabalhar com o software GeoGebra, suas ferramentas e funcionalidades aplicadas ao ensino de geometria, que é o tema desse trabalho.

Ao analisar o contexto histórico das últimas décadas podemos perceber o crescimento da tecnologia educacional, sendo que na década de 1980 surgem os primeiros computadores pessoais que chamaram a atenção dos professores, na década de 1990 algumas escolas investiram na montagem de laboratórios com computadores que ainda não se comunicavam, na década de 2000 a internet aparece como promessa de revolução no ensino com infinidade de informações e recursos gráficos, na década de 2010 a proliferação das redes sociais e a implantação do EAD (Ensino a Distância) como modelo de ensino e por fim na década de 2020 o computador passa a ocupar todos os espaços com o distanciamento social devido a pandemia do Corona Vírus que acarretou no fechamento das escolas. E como as novas gerações se mantêm atualizadas, com aparelhos tecnológicos cada vez mais eficientes, as escolas

também tem que acompanhar esse avanço. O presente trabalho é voltado para uma metodologia que utilize esses recursos tecnológicos como instrumentos didáticos a serem utilizados pelos professores no processo educacional de matemática. Nesse sentido, buscamos viabilizar aulas mais dinâmicas e interativas com o objetivo final de melhorar processo de ensino aprendizagem de geometria.

O trabalho foi estruturado em quatro capítulos, no primeiro faço uma breve apresentação sobre a história da geometria dos tempos mais remotos até os dias atuais mostrando a importância da geometria na educação básica, segundo o autor [1]. No segundo uma explanação teórica sobre a presença e importância das TICs na educação, segundo os autores [20] e [6], além de apresentar conceitos, definições, teoremas e postulados essenciais da geometria plana para o trabalho com exemplos e aplicações, feitos no GeoGebra e detalhados no programa no capítulo 3. No terceiro vamos explorar as ferramentas necessárias para utilização do software GeoGebra como ferramenta didática e a verificação da autenticidade dos seus recursos usando relações métricas no triângulo retângulo e no triângulo qualquer com exemplos e aplicações. Por fim, no quarto capítulo apresentamos uma proposta de ensino com dois planos de aula para que o professor possa aplicar em sala de aula e verificar a importância da utilização do software GeoGebra como ferramenta didática.

Contexto Histórico

A geometria está presente em diversas formas e situações cotidianas, da natureza até as construções civis. Ela sempre esteve presente na vida do ser humano, sendo uma das áreas mais antigas da matemática que estuda o espaço e as formas.

Papiros produzidos pelos egípcios antigos contendo informações sobre a geometria. A construção das pirâmides e outros monumentos mostram o uso de conhecimentos geométricos. Registros apontam sua origem a partir da necessidade de medir a terra e provavelmente venha daí o termo utilizado, já que geometria é uma palavra de origem grega, *geo* provém de *gaia* (terra) e *metria* de *métron* (medida).

Nossa preocupação com o apoio histórico da geometria não é por acaso, de fato, a História da Matemática é uma área do conhecimento que proporciona ao aluno uma melhor compreensão. [9] relata que a História da Matemática traz múltiplas vantagens na construção de atividades que vai propiciar ao aluno a participação no desenvolvimento matemático, aumentando assim o interesse sobre o estudo e melhorando, conseqüentemente, o desempenho.

A história proporciona ao aluno o significado da investigação matemática proposta e, em consequência, a mesma deixa de ser algo misterioso e ininteligível. Ao focar elementos pré-formais e, frequentemente, aplicados da matemática, a história leva o aluno a pensar sobre conceitos matemáticos sem a linguagem técnica que poderá ser uma barreira inicial ao seu entendimento [9, p.13].

De acordo com [11] a geometria faz parte do mundo desde os primórdios, onde era usada nas plantações, nas construções de monumentos e de cidades, nas observações dos movimentos dos astros entre outras várias aplicações, como no cálculo de áreas, volumes e superfícies.

Buscando a origem do desenvolvimento da geometria nos primórdios, com o homem primitivo, podemos imaginar que o conhecimento das configurações do espaço, formas e tamanhos tenham se originado, possivelmente, com a capacidade humana de observar e refletir sobre os deslocamentos, com a construção de estratégias de caça e colheita de alimentos, com a criação de ferramentas e utensílios, visando satisfazer suas necessidades básicas. Ao fixar moradia,

com a divisão do trabalho, outras necessidades foram surgindo e a produção do conhecimento geométrico se ampliando. A necessidade de fazer construções, delimitar a terra levou à noção de figuras e curvas e de posições como vertical, perpendicular, paralela [11].

A geometria, para [13], teria surgido com a necessidade de medir terras depois das inundações no vale do rio Nilo, Eufrates e Ganges, a qual havia a necessidade de determinar a cobrança de impostos nestas áreas.

Foi da necessidade do Homem em compreender e descrever o seu meio ambiente (físico e mental), que as imagens, representadas através de desenhos, foram lentamente conceitualizadas até adquirirem um significado matemático, na Geometria e uma forma, nas Artes [13].

Embora existam outras geometrias, aquela que é abordada no ensino fundamental e médio é a Euclidiana, que estuda as propriedades das figuras e dos corpos geométricos enquanto relações internas entre os seus elementos, sem levar em consideração o espaço, [17, p.24] e que recebe esse nome em homenagem a Euclides.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância desse ramo da matemática que também serve de instrumento para outras áreas do conhecimento:

O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento [4, p.39].

Dependendo de como são trabalhados os conceitos geométricos existem muitas possibilidades para explorar propriedades, o que contribui de forma fundamental para o desenvolvimento do aluno de abstrair e generalizar. Através da exploração das formas geométricas, o aluno desenvolve a percepção do mundo, descrevendo, representando e localizando-se nele. Trabalhando noções geométricas o aluno é instigado a observar, perceber semelhanças e diferenças e a identificar regularidades. Assim é possível apresentar, para a criança, de forma prática a geometria.

É importante lembrar que o aluno deve ser direcionado a explorar formas geométricas, porque, segundo [16, p.44], a aprendizagem acontece pelas ações mentais que a criança realiza quando compara, distingue, separa e monta. O raciocínio geométrico desenvolve-se pela visualização, ou seja, a criança é capaz de identificar uma figura apenas por sua forma física e por sua imagem.

Com os avanços das tecnologias, no início dos anos 2000, os PCN's se adequaram a essa nova realidade, já que a informática passou a fazer parte do trabalho, dos estudos e das pesquisas em todo país, fazendo necessária a inserção dessas ferramentas no processo de ensino e aprendizagem. O professor, como mediador, deve estudar (inteirar-se) para utilizar as tecnologias como recurso didático, proporcionando aulas mais produtivas.

É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras [4, p.67].

Segundo a BNCC, existem mudanças próprias na fase da adolescência que implicam a compreensão do adolescente como sujeito em desenvolvimento, com singularidades e formações identitárias e culturais próprias, que exigem práticas escolares diferenciadas, capazes de contemplar suas necessidades e diferentes modos de inserção social.

Há que se considerar, ainda, que a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil [6, p.61]

A importância histórica apresentadas por [9] e [13], a relevância para a formação de um pensamento por [11] e o destaque nos PCNs mostram de forma incontestável a importância da geometria. Agora apresentaremos alguns aspectos metodológicos da pesquisa.

Fundamentação Teórica

No trabalho vamos considerar a análise do conteúdo de geometria plana, especificamente abordando sobre o triângulo e suas propriedades, fazendo uso da tecnologia computacional, ou seja, usando as ferramentas do software GeoGebra como suporte educacional abordando uma forma prazerosa e significativa para a construção do conhecimento geométrico. Nesse sentido [20] ressalta as contribuições da informática no processo escolar:

A informática deverá assumir duplo papel na escola. Primeiro, deverá ser uma ferramenta para permitir a comunicação de profissionais da escola e consultores ou pesquisadores externos, permitindo a presença virtual desse sistema de suporte na escola. Segundo a informática deverá ser usada para apoiar a realização de uma pedagogia que proporcione a formação dos alunos, possibilitando o desenvolvimento de habilidades que serão fundamentais na sociedade do conhecimento [20].

Um dos principais objetivos dos softwares, na educação, é assessorar o processo de ensino-aprendizagem da disciplina em questão [10]. Para que isso aconteça algumas características são essenciais, como ser fácil de usar e de compreender, favoreça a assimilação de conteúdos e possua características motivadoras que aguace a atenção.

O uso da informática em um ambiente educacional tem que ser bem pensado, ou seja, o professor que se dispôr a utilizar aplicativos educativos precisa conhecer suas funcionalidades para não cair no erro de apenas utilizar uma ferramenta tecnológica sem recursos educacionais.

Ir para um ambiente de informática sem ter o prévio conhecimento a ser utilizado é o mesmo que dar uma aula sem planejar, afirma [19]. Ele complementa dizendo que a utilização do computador na educação só faz sentido na medida em que os professores o utilizam como uma ferramenta de auxílio nas atividades pedagógicas, tornando o processo de aprendizagem uma atividade inovadora, dinâmica, participativa e interativa.

Segundo [18] o professor está apto a realizar uma aula dinâmica e criativa, se conhecer os recursos disponíveis dos programas escolhidos para suas atividades de ensino.

Na literatura de [1] ressalta a importância da geometria na resolução de problemas:

A geometria pode ser o caminho para desenvolvermos habilidades e competências necessárias para a resolução de problemas do nosso cotidiano, visto que o seu entendimento nos proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair. [1]

A Resolução de Problemas utilizada como estratégia metodológica pode despertar o interesse dos estudantes e acelerar o processo de aprendizagem, uma vez que problemas é a base para novos conhecimentos, além de proporcionar um trabalho cooperativo entre os discentes. Podendo ainda ser associada a utilização das tecnologias como recurso didático, no entanto a forma de utilização desses materiais deve ser apropriada para auxiliar na aprendizagem.

[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização [6, p.276].

Adiante serão apresentados definições, postulados e teoremas que serão observados a partir de [8] e utilizados ao longo do trabalho.

2.1 Conceitos

Podemos dizer que um dos conceitos iniciais da geometria são referente a ponto e reta que são primícias de diversas figuras geométricas. Por ser uma figura geométrica primitiva elas não possuem definição. Além delas também existem as semirretas e os segmentos de retas que possuem características próximas e são importantes para a geometria.

Uma reta fica completamente determinada por dois pontos distintos. Nossa intuição sobre reta nos leva a um objeto que contém pontos alinhados "não faz curva", isto é, não permite que dois pontos de uma reta determinem uma outra reta distinta da inicial.

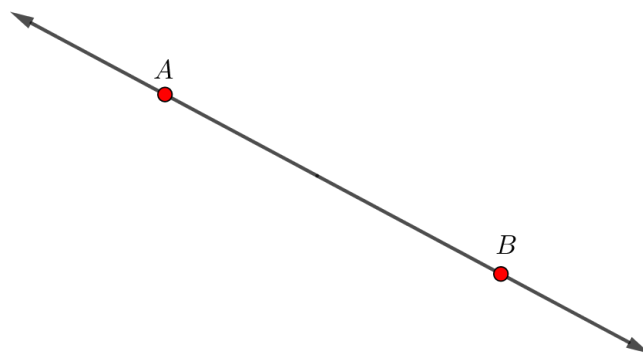


Figura 2.1: *Reta*

As semirretas se diferenciam das retas por não serem infinitas em uma de suas extremidades, ou seja, as semirretas têm um ponto que determina o início.

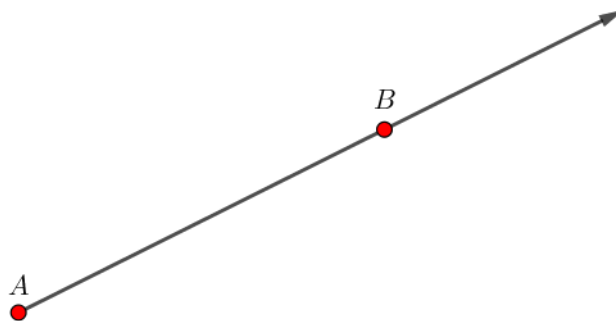


Figura 2.2: *Semirreta*

Os segmentos de retas se caracterizam por ter começo e fim definido. Assim, eles se diferenciam das semirretas por não serem infinito.



Figura 2.3: *Segmento de Reta*

Denotaremos por \overline{AB} o segmento de extremidades A e B . Sua medida denotaremos por $|\overline{AB}|$.

Definição 2.1. Chamamos de **ângulo** a figura formada por duas semirretas de mesma origem.

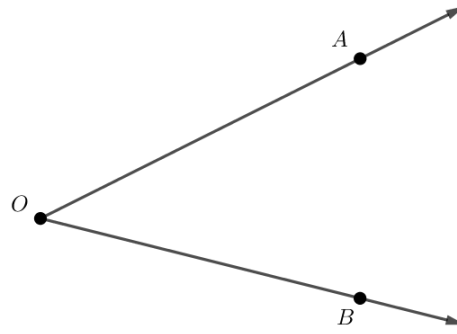


Figura 2.4: Ângulo $B\hat{O}A$

$$B\hat{O}A = \overrightarrow{OB} \cup \overrightarrow{OA}$$

O ponto O , origem comum às duas semirretas, é o vértice do ângulo e as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo.

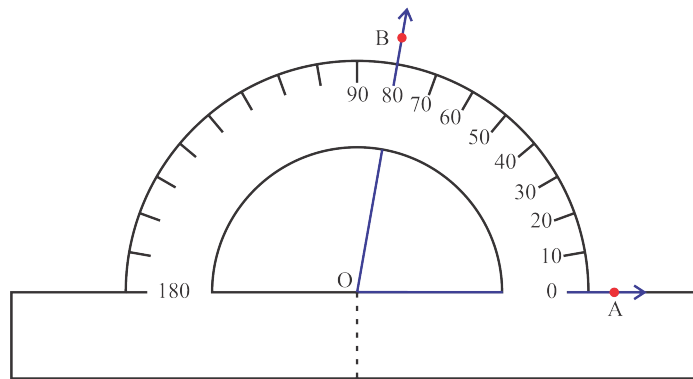
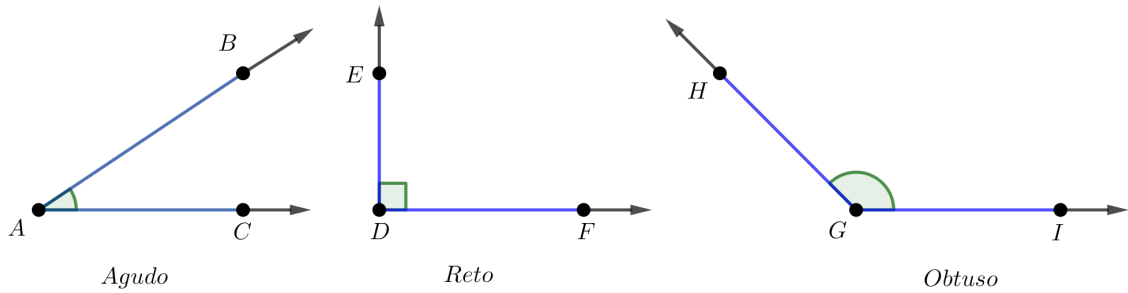


Figura 2.5: Transferidor

Para medir um ângulo, isto é, sua abertura, precisamos de uma unidade de medida. Um pouco diferente do que fazemos com outras medidas, isso é feito indiretamente definindo a medida do ângulo raso que é de 180° , ou seja, o seu ângulo é formado por duas semirretas de uma mesma reta. A partir dessa definição as outras medidas são obtidas. Um ângulo α é chamado de *agudo* quando sua abertura, em grau, é maior do que 0° e menor que 90° , ou seja, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; *reto* quando sua abertura é exatamente 90° ; *obtusos* quando sua abertura é maior que 90° e menor que 180° . O transferidor é um instrumento comum para medir ângulos composto por uma escala circular, ou de seções de círculo, dividida e marcada em ângulos espaçados regularmente.



Os ângulos podem ser medidos em graus com o transferidor. Em 2.5, usaremos a notação $m(\widehat{BOA}) = 80^\circ$ (cinquenta graus). Observe que da mesma forma que ocorre no caso da medição de segmentos, o transferidor pode ser colocado de várias maneiras, no entanto, o valor da medida do ângulo \widehat{CAB} seria sempre 50° .

Em algumas situações é necessário fazer uso do comprimento de um determinado segmento em outra direção e/ou sentido, como por exemplo desenhar um triângulo com um de seus lados sobre uma determinada reta com um comprimento já definido, e nesse caso dizemos que o segmento foi transportado. No papel utilizamos o compasso como ferramenta de suporte para realizar esse procedimento, com recursos digitais, como o GeoGebra, dispõe de ferramentas específicas.

Postulado 2.2 (Transporte de Segmentos). Dados um segmento \overline{AB} e uma semirreta de origem O , existe sobre esta semirreta um único ponto P tal que \overline{OP} seja congruente a \overline{AB} , isto é, $|\overline{OP}| = |\overline{AB}|$.

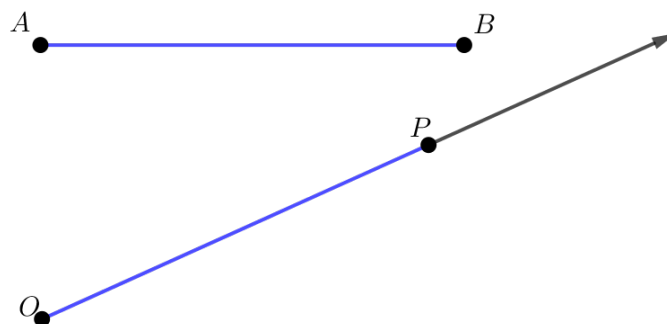


Figura 2.6: Transporte de Segmento

Existem casos em que é necessário fazer uso de um determinado ângulo em outra direção ou sentido, como por exemplo na construção de um triângulo que possui dois ângulos com a mesma medida (isósceles). Em casos como esse dizemos que o ângulo foi transportado.

Postulado 2.3 (Transporte de Ângulos). Dados um ângulo \widehat{AOB} e uma semirreta \overrightarrow{PQ} em um mesmo plano, existe sobre um dos semiplanos de \overrightarrow{PQ} uma única semirreta

\vec{PT} que forma com \vec{PQ} um ângulo $Q\hat{P}T$ congruente ao ângulo $A\hat{O}B$, ou seja, $m(Q\hat{P}T) = m(A\hat{O}B)$.

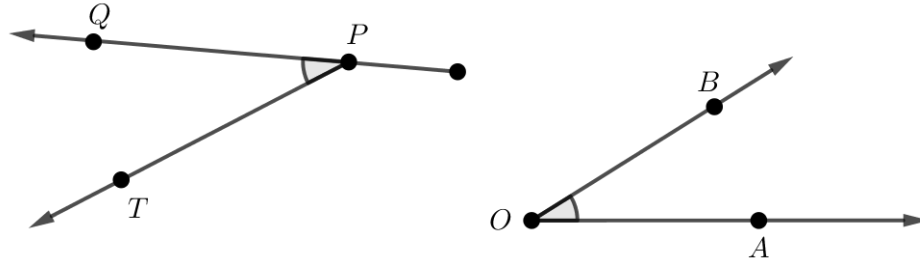


Figura 2.7: Transporte de Ângulo

Definição 2.4. Chamamos de **Poligonal** o conjunto de segmentos de retas consecutivos não pertencentes a uma mesma reta e em um mesmo plano.

Uma poligonal é chamada *aberta* se a extremidade do último segmento não coincide com a origem do primeiro; *fechada* se a extremidade do último segmento coincide com a origem do primeiro; *entrelaçada* se pelo menos um segmento intercepta outro segmento em um ponto diferente do vértice.

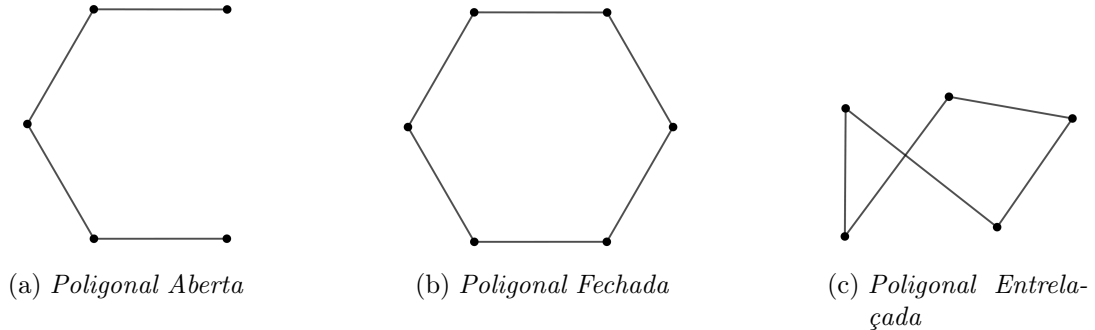


Figura 2.8: Poligonais.

Definição 2.5. Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, consideramos consecutivos $A_{(n-1)}, A_n$ e A_1 , ou A_n, A_1 e A_2 ou ainda $A_{(n-2)}, A_{(n-1)}$ e A_n chamamos de **Polígono** à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{(n-1)}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

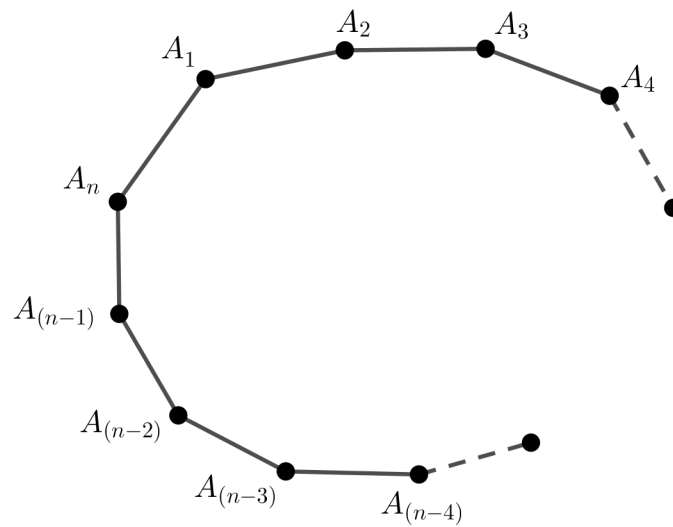
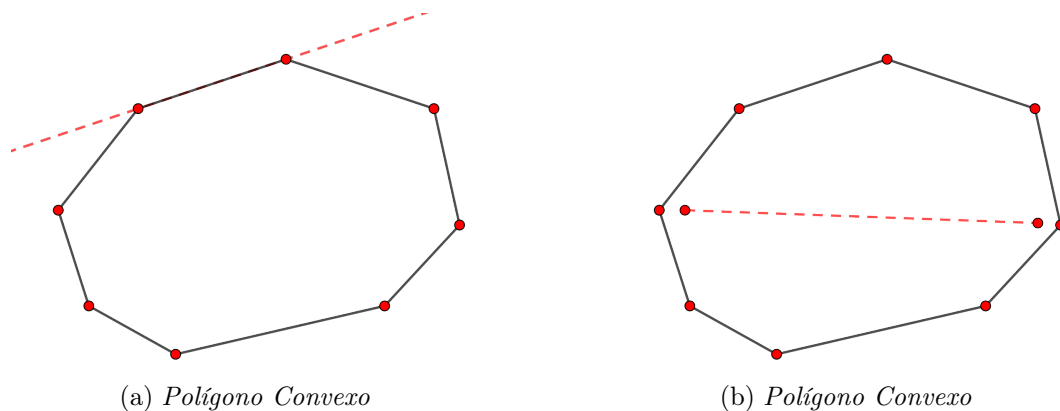


Figura 2.9: *Polígono*

Um polígono simples é dito **convexo** se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n - 2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina, Caso contrário dizemos que ele é **não convexo**. Outra forma de determinar um polígono **convexo** é quando todos os pontos de um segmento de reta que possui as extremidades no interior do polígono também estão dentro dele. Se for possível encontrar pelo menos um segmento de reta que possui as extremidades dentro do polígono e, ao mesmo tempo, um ponto fora dele, esse polígono é **não convexo**.



(a) *Polígono Convexo*

(b) *Polígono Convexo*

Figura 2.10: *Polígono Convexo.*

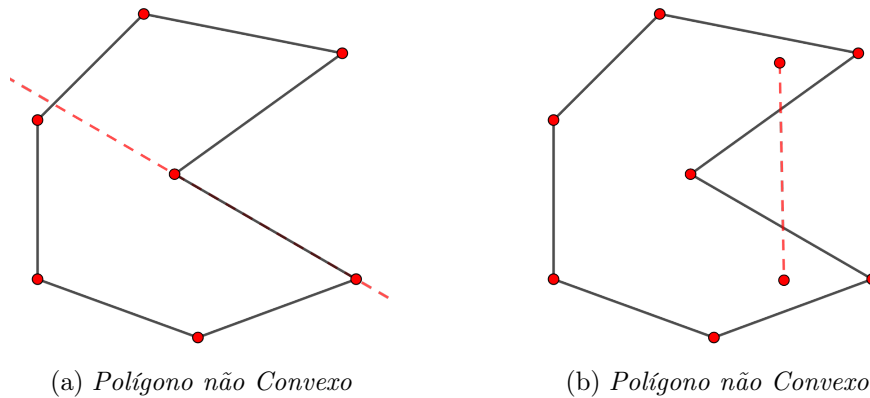


Figura 2.11: *Polígono não Convexo.*

Definição 2.6. Um polígono convexo é dito **regular** se, e somente se, todos os seus lados são congruentes e todos os seus ângulos são congruentes.

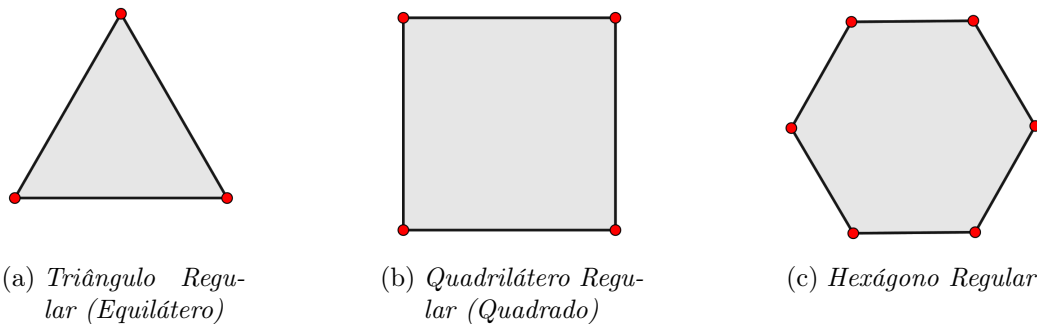
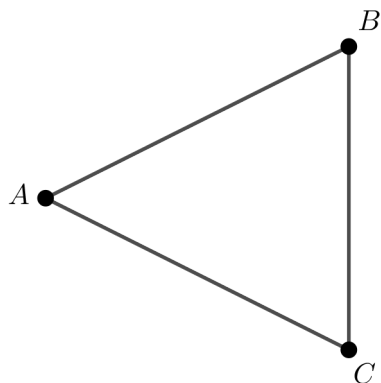


Figura 2.12: *Polígonos Regulares.*

2.2 Triângulos

Não temos referências precisas de quando e como surgiram os triângulos, porém sabemos que durante a evolução do homem surgiu a necessidade da criação e utilização do triângulo. Os triângulos mais antigos que se possui registro pertencem a arquitetura egípcia, quando o escriba Ahmes registrou o cálculo de área de círculos, retângulos e triângulos em papiros. O estudo de triângulos é parte fundamental desse trabalho e adiante iremos explorar um pouco seus elementos.

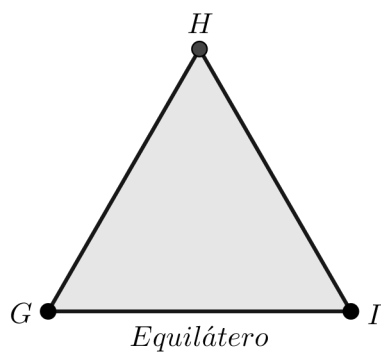
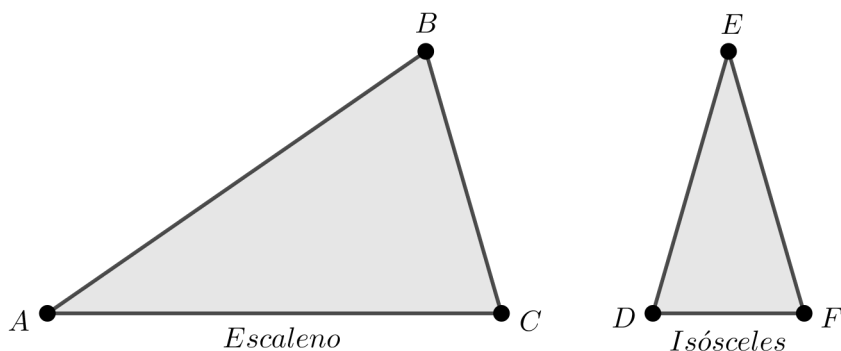
Definição 2.7. Dados três pontos quaisquer A, B e C não colineares, a junção dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} é chamada de **Triângulo** (\triangle_{ABC}).



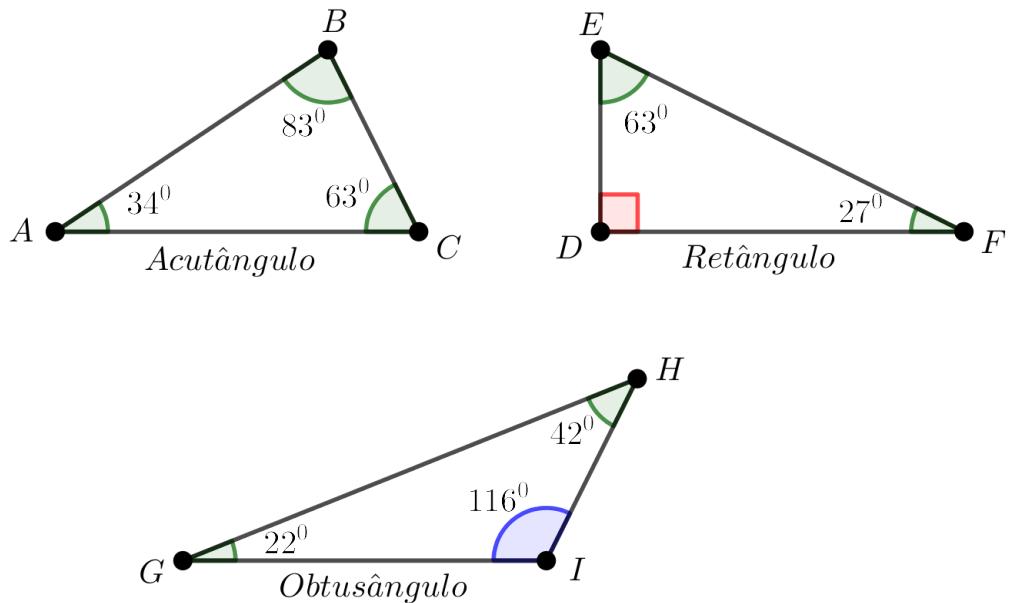
Os pontos A , B e C são chamados **vértices** do \triangle_{ABC} ; Os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} são os **lados** do triângulo; \widehat{CAB} , \widehat{ABC} e \widehat{BCA} são, respectivamente, os **ângulos** do triângulo. Por simplicidade também usaremos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} para representar os ângulos \widehat{CAB} , \widehat{ABC} e \widehat{BCA} , respectivamente.

Os triângulos podem ser classificados pelos seus lados ou ângulos da seguinte forma:

Lado { **Escaleno:** todos os lados com medidas distintas.
Isósceles: dois lados de mesma medida.
Equilátero: todos os lados com mesma medida.



$\hat{\text{Ângulo}}$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Acutângulo: todos os ângulos agudos.} \\ \text{Retângulo: um ângulo reto e dois agudos.} \\ \text{Obtusângulo: um ângulo obtuso e dois agudos.} \end{array} \right.$



Definição 2.8 (Congruência de Triângulos). Dois triângulos são congruentes se, e somente se, seus lados e ângulos são ordenadamente congruentes.

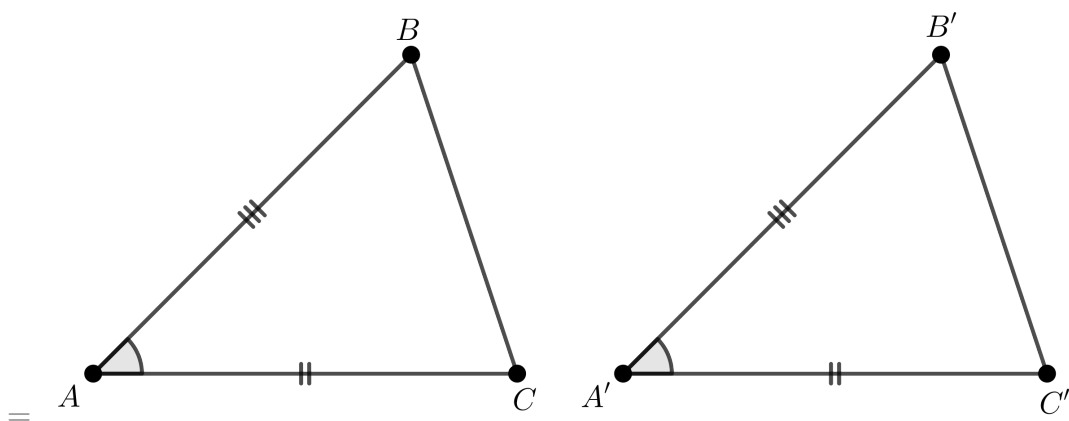


Figura 2.13: Triângulos Congruentes

$$\triangle_{ABC} \equiv \triangle_{A'B'C'} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{CA} \equiv \overline{C'A'} & \text{e } \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right. \quad (2.1)$$

A definição de congruência de triângulos fornece todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes, porém existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, e estas condições são chamadas de casos de congruência que serão observadas a seguir.

Teorema 2.9 (Ângulo Externo). Em um triângulo \triangle_{ABC} existe \overrightarrow{AD} , com $C \in \overline{AD}$, onde o ângulo α (\widehat{DCB}) é externo ao \triangle_{ABC} , adjacente à \widehat{BCA} e não adjacente aos ângulos \widehat{CAB} e \widehat{ABC} . É chamado de suplementar adjacente de \widehat{BCA} e é sempre igual à soma dos ângulos internos não adjacente a ele.

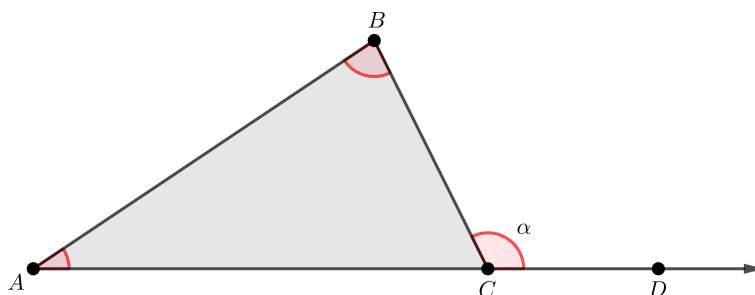
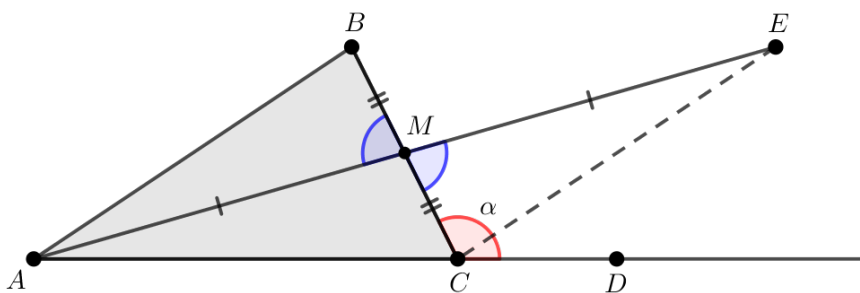


Figura 2.14: Ângulo Externo

Demonstração. Suponha M ponto médio de \overline{BC} e $E \in \overrightarrow{AM}$ tal que $\overline{AM} \equiv \overline{ME}$. Logo, pelo caso *LAL* (será apresentado a seguir), $\triangle_{ABM} \equiv \triangle_{ECM}$ o que nos garante que $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ECM}$.



Como percebemos, \overline{EC} é interno ao ângulo α , daí: $\alpha > \widehat{ECM} \Rightarrow \alpha > \widehat{ABC}$. Agora tomando o ponto médio de \overline{CA} , analogamente temos que $\alpha > \widehat{CAB}$. E para finalizar, como $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ e concorrente com \overline{AD} , temos que $m(\widehat{BAC}) \equiv m(\widehat{ECD})$. Logo $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{CBA}) + m(\widehat{BAC})$. \square

Teorema 2.10. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a esses lados não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado do triângulo.

Demonstração. Considere o triângulo \triangle_{ABC} como na Figura 2.15, sem perda de generalidade suponhamos que \overline{AC} seja o maior lado e $D \in \overline{AC}$ tal que $\overline{DC} \equiv \overline{BC}$. Queremos mostrar que o ângulo $\hat{A}BC$ oposto ao lado \overline{AC} é o maior ângulo.

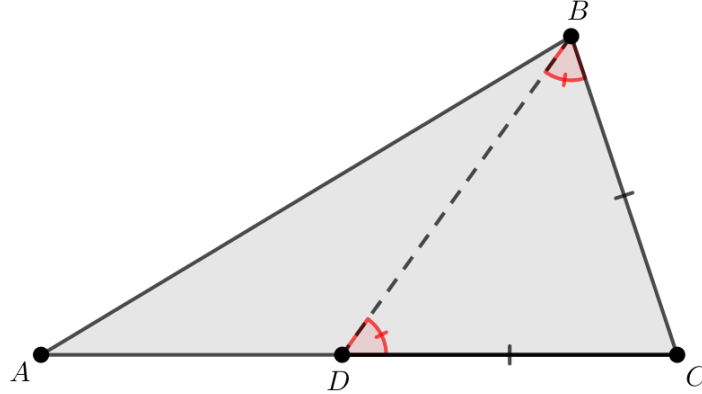


Figura 2.15: \triangle_{ABC}

Como D está entre A e C , $m(\hat{A}BC) = m(\hat{A}BD) + m(\hat{D}BC)$, ou seja, $m(\hat{A}BC) > m(\hat{D}BC)$.

Ainda como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$, segue que $|\overline{AC}| > |\overline{DC}|$, daqui e por \triangle_{DBC} ser isósceles concluímos que $|\overline{AC}| > |\overline{BC}|$

Enfim como $\hat{C}DB$ é ângulo externo do \triangle_{ABD} , temos que $m(\hat{C}DB) = m(\hat{D}AB) + m(\hat{A}BD)$.

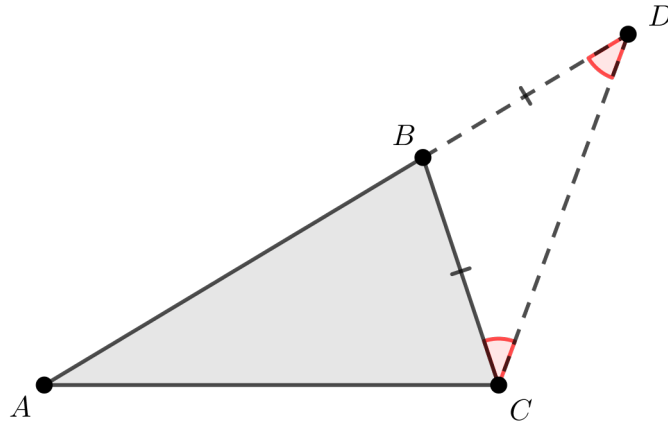
Portanto podemos concluir que

$$m(\hat{A}BC) > m(\hat{D}BC) > m(\hat{C}AB) \implies m(\hat{A}BC) > m(\hat{C}AB)$$

□

Teorema 2.11 (Condição de existência). *Em qualquer triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.*

Demonstração. Considerando o \triangle_{ABC} e D na semirreta \overrightarrow{AB} tal que $|\overline{BD}| = |\overline{CB}|$. Sem perda de generalidade, vamos mostrar que $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| > |\overline{AC}|$ os demais casos seguem de forma análoga.



Por construção $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$, conseqüentemente

$$|\overline{AD}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|. \quad (2.2)$$

Como $D\hat{C}B \equiv B\hat{D}C$, pois o triângulo \triangle_{BDC} é isósceles, temos também que

$$\text{med}(D\hat{C}A) = \text{med}(D\hat{C}B) + \text{med}(B\hat{C}A),$$

ou seja

$$\text{med}(D\hat{C}A) > \text{med}(D\hat{C}B) = \text{med}(B\hat{D}C). \quad (2.3)$$

Pelo Teorema 2.10 o maior ângulo é oposto ao maior lado, segue de (2.2) e (2.3), que

$$|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BD}| = |\overline{AD}| > |\overline{AC}|,$$

concluindo o resultado. □

Definição 2.12 (Semelhança de Triângulos). Dois triângulo são semelhantes (\sim) se, e somente se:

- Seus lados são ordenadamente proporcionais;
- Seus ângulos são ordenadamente congruentes;
- Lados homólogos são proporcionais e os ângulos opostos, a esses lados, congruentes.

$$\triangle_{ACB} \sim \triangle_{A'C'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

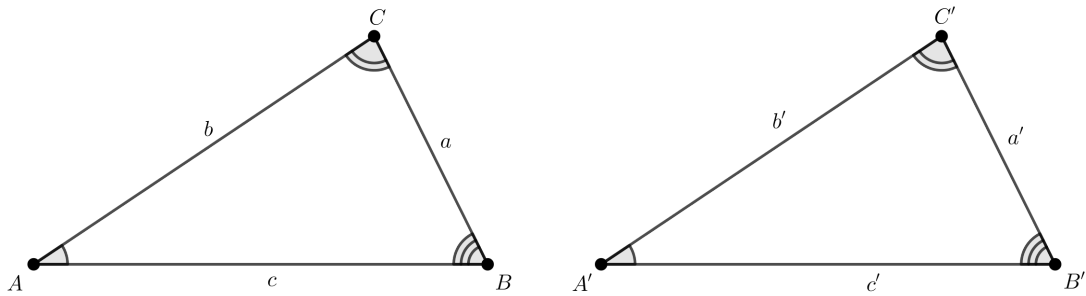


Figura 2.16: Triângulos Semelhantes

2.2.1 Congruência de Triângulos

A congruência denotada por (\equiv) é um adjetivo atribuído a figuras que coincidem, ou seja, possuem a mesma forma e tamanho. Dois conjuntos geométricos serão congruentes se, e somente se, um deles puder ser transformado no outro através da isometria que é uma combinação de translações, reflexões e rotações.

A congruência entre triângulos é uma relação de equivalência, portanto satisfaz as seguintes condições:

Reflexiva: Todo triângulo é congruente a si próprio;

Simétrica: Se um triângulo é congruente a um outro, este é semelhante ao primeiro;

Transitiva: Se um triângulo é congruente a um segundo e este é congruente a um terceiro, então o primeiro é congruente ao terceiro.

Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes que chamamos de *casos de congruência*. O primeiro caso é um axioma e será enunciado a seguir.

Axioma 2.13 (1º Caso - LAL). Se dois triângulos têm ordenadamente dois lados congruentes e os ângulos compreendido entre eles também são congruentes, então esses triângulos são congruentes.

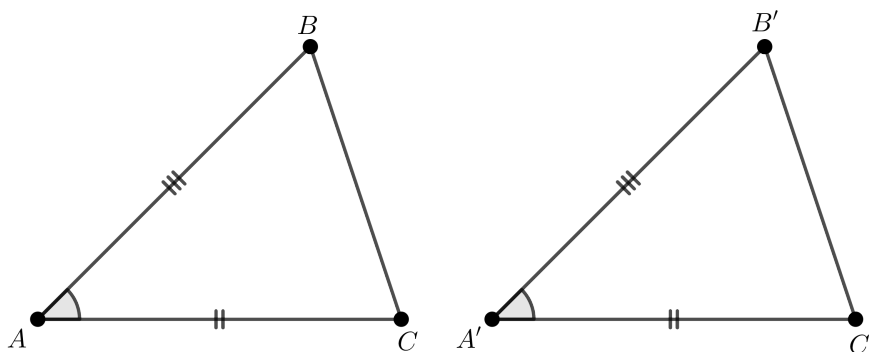
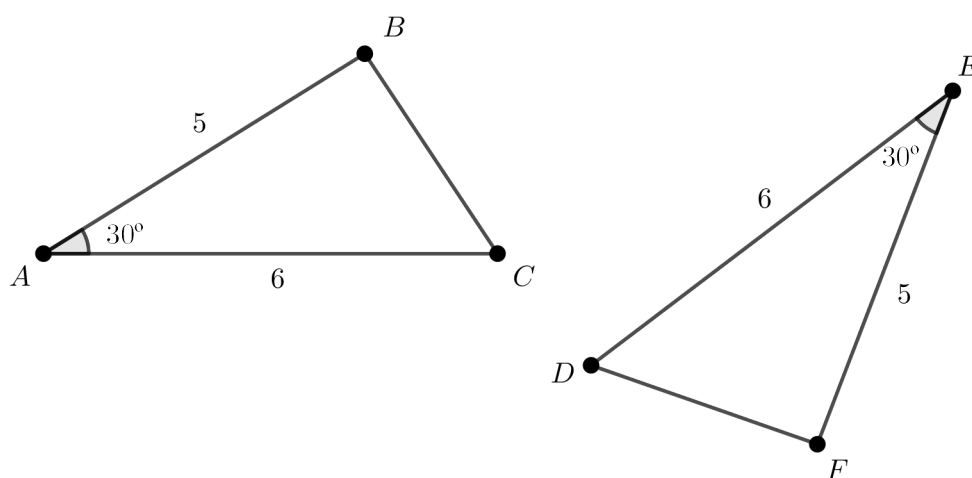


Figura 2.17: LAL - Lado, Ângulo, Lado

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{CA} \equiv \overline{C'A'} \end{array} \right\} \xRightarrow{LAL} \Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right.$$

Exemplo 2.14. Os triângulos Δ_{ABC} e Δ_{DEF} da figura a seguir são congruentes pelo caso *LAL*.



Temos que $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, $\hat{CAB} \equiv \hat{DEF}$, e $\overline{CA} \equiv \overline{DE}$.

Teorema 2.15. (Triângulo Isósceles) Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes.

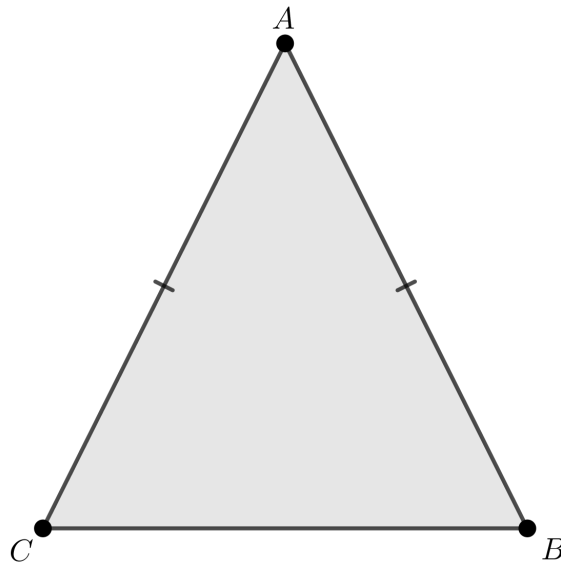


Figura 2.18: *Triângulo Isósceles*

Demonstração. Consideremos os triângulos ABC e ACB , isto é, associemos a A, B e C , respectivamente, A, C e B .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hipótese} \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{CA} \\ \text{Hipótese} \Rightarrow \widehat{CAB} \equiv \widehat{BCA} \\ \text{Hipótese} \Rightarrow \overline{CA} \equiv \overline{AB} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} \triangle ABC \equiv \triangle ACB$$

Pelo Teorema 2.10 o ângulo $\widehat{BCA} \equiv \widehat{ABC}$. □

Teorema 2.16 (2º Caso - ALA). Se dois triângulos têm um lado e os dois ângulos adjacentes a ele ordenadamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.

O Teorema 2.16 indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os ângulos adjacentes a ele, então os outros dois lados e o ângulo restante também são ordenadamente congruentes.

Demonstração. Considere os triângulos \triangle_{ACB} e $\triangle_{A'C'B'}$, como na Figura 2.19

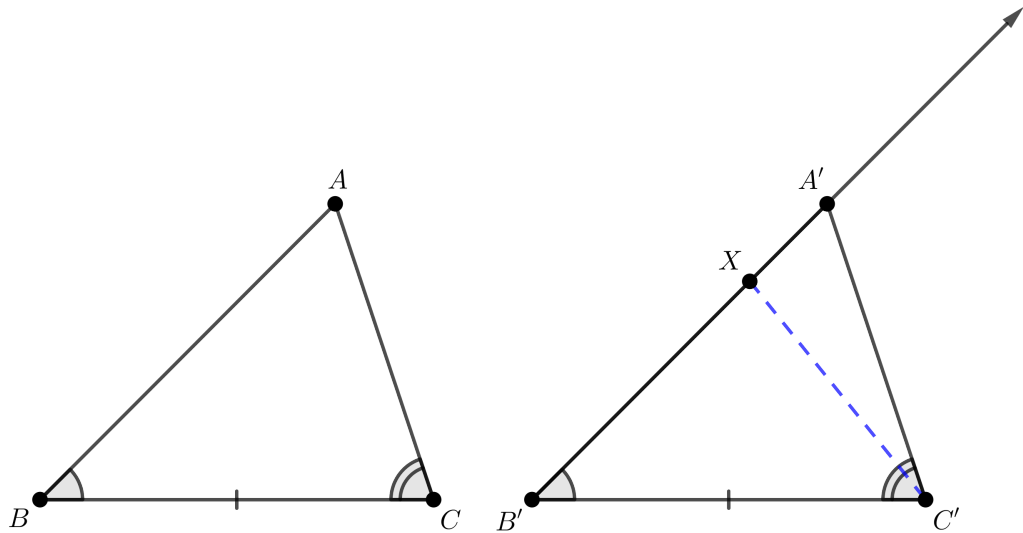


Figura 2.19: ALA - Ângulo, Lado, Ângulo

Os ângulos adjacentes ao lado \overline{CB} são \hat{B} e \hat{C} e os ângulos adjacentes ao lado $\overline{C'B'}$ são \hat{B}' e \hat{C}' .

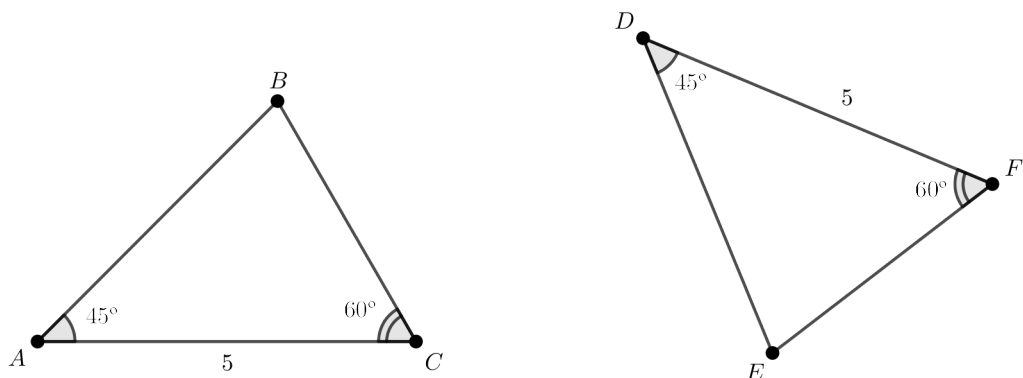
Para demonstrar vamos provar que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, assim recaímos no caso do Axioma 2.13 e concluímos que

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{CB} \equiv \overline{C'B'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} \triangle_{ACB} \equiv \triangle_{A'C'B'}$$

Seja o ponto $X \in \overrightarrow{B'A'}$ tal que $\overline{B'X} \equiv \overline{BA}$.

Observamos que $\hat{ACB} \equiv \hat{A'C'B'} \Rightarrow \hat{ACB} \equiv \hat{XC'B'} \Rightarrow X \equiv A'$, daí concluímos que $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$, como queríamos mostrar. □

Exemplo 2.17. Os triângulos \triangle_{ABC} e \triangle_{DFE} da figura a seguir são congruentes pelo caso ALA.



Temos que $C\hat{A}B \equiv E\hat{D}F$, $\overline{CA} \equiv \overline{DF}$, e $B\hat{C}A \equiv D\hat{F}E$.

Teorema 2.18 (3º Caso - LLL). Se dois triângulos têm os três lados ordenadamente congruentes, então esses triângulos são congruentes.

O Teorema 2.18 indica que, se dois triângulos têm ordenadamente três lados congruentes, então os três ângulos também são ordenadamente congruentes.

Demonstração. Considere os triângulos \triangle_{ACB} e $\triangle_{A'C'B'}$, na Figura 2.20, o Teorema 2.18, nos diz que

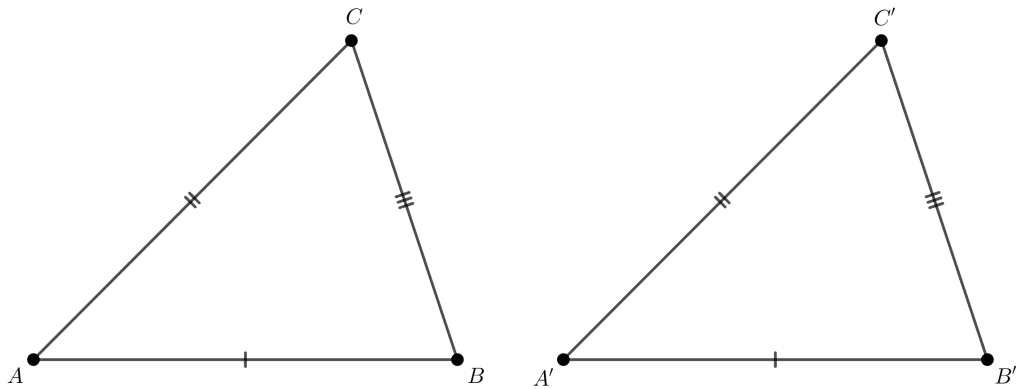


Figura 2.20: LLL - Lado, Lado, Lado

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BA} \equiv \overline{B'A'} \\ \overline{CB} \equiv \overline{C'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{LLL} \triangle_{ACB} \equiv \triangle_{A'C'B'}$$

Como $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, fazendo o transporte do ângulo $B\hat{A}C$ para o semi-plano oposto C' determinado pela reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ e marque um ponto X tal que $A'X \equiv AC$, portanto pelo Axioma 2.13, temos que $\triangle_{ACB} \equiv \triangle_{A'B'X}$.

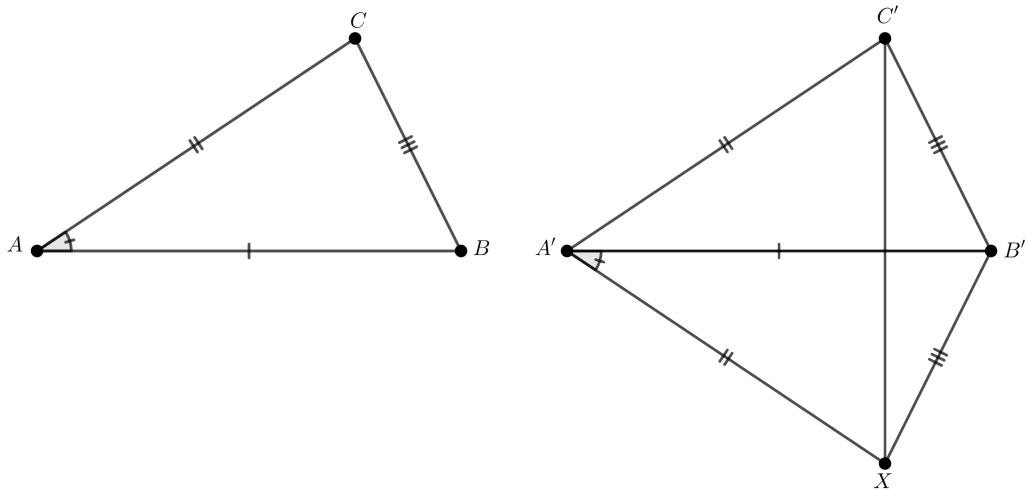


Figura 2.21: Transporte de ângulos e segmentos por semiplanos opostos

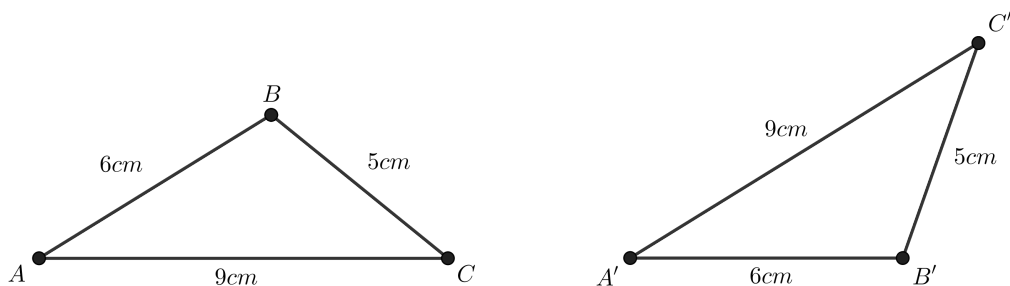
Pela construção como $\overline{XA'} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{XB'} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, donde concluímos que:

$$\triangle_{A'C'X} \text{ é isósceles de base } \overline{C'X} \Rightarrow A'\hat{C}'X \equiv C'\hat{X}A' \quad (2.4)$$

$$\triangle_{XC'B'} \text{ é isósceles de base } \overline{XC'} \Rightarrow X\hat{C}'B' \equiv B'\hat{X}C'. \quad (2.5)$$

Assim, de (2.4) e (2.5), concluímos que $A'\hat{C}'B' \equiv B'\hat{X}A'$, novamente do Axioma 2.13 segue que $\triangle_{A'C'B'} \equiv \triangle_{A'B'X} \equiv \triangle_{ACB}$, concluindo o resultado desejado. \square

Exemplo 2.19. Os triângulos \triangle_{ABC} e $\triangle_{A'B'C'}$ da figura a seguir são congruentes pelo caso *LLL*.



Temos que $\overline{AB} \equiv \overline{B'A'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{C'B'}$ e $\overline{CA} \equiv \overline{A'C'}$.

Teorema 2.20 (4^o Caso - **LAA**_o). Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Essa proposição indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então os outros dois lados e o outro ângulo também são ordenadamente congruentes.

Demonstração. Considere os triângulos \triangle_{ACB} e $\triangle_{A'C'B'}$, na Figura 2.22, o Teorema 2.20, nos diz que

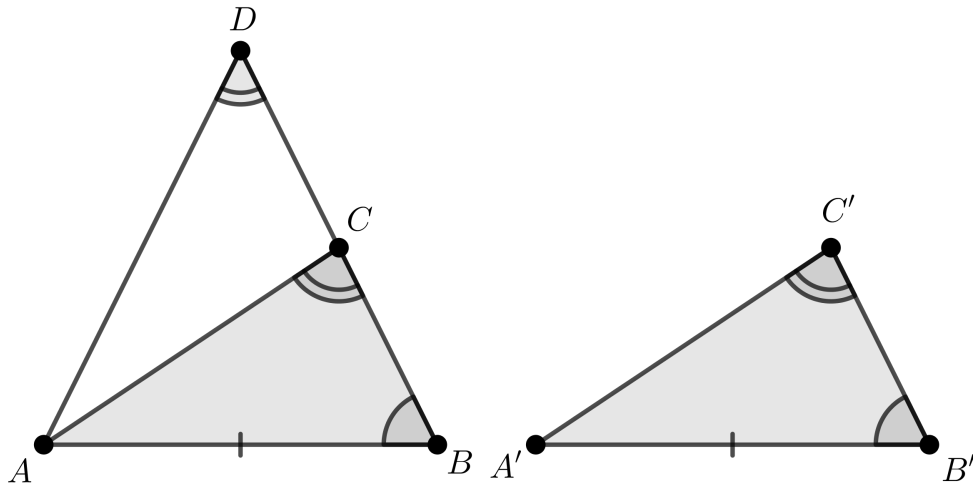


Figura 2.22: LAA_o - Lado, Ângulo, Ângulo Oposto

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \end{array} \right\} \xrightarrow{LAA_o} \triangle_{ACB} \equiv \triangle_{A'C'B'}$$

Vamos analisar os seguintes casos:

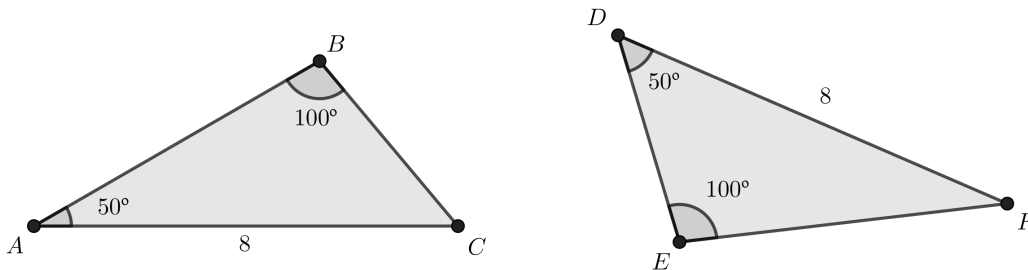
- (I) $|\overline{CB}| \neq |\overline{C'B'}|$
 (II) $|\overline{CB}| = |\overline{C'B'}|$

No caso (I), tome o ponto $D \in \overrightarrow{BC}$ de modo que $|\overline{BD}| = |\overline{B'C'}|$ isso é possível pelo transporte de segmento dado pelo Postulado 2.2. Pelo caso 2.13 (LAL), pois $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\overline{BD} \equiv \overline{B'C'}$ segue que $\triangle_{ABD} \equiv \triangle_{A'C'B'}$ e portanto $\hat{D} \equiv \hat{C}' \equiv \hat{C}$, o que contrária o teorema do ângulo externo, portanto esse caso não ocorre.

De (II), na Figura 2.22 apresentamos o caso em que $|\overline{CB}| < |\overline{C'B'}|$, mas a mesma argumentação demonstra a impossibilidade na desigualdade oposta, isto é, se $|\overline{CB}| = |\overline{C'B'}|$, como já temos $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, segue do caso 2.13 (LAL) que $\triangle_{ACB} \equiv \triangle_{A'C'B'}$, concluindo a demonstração.

□

Exemplo 2.21. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ da figura a seguir são congruentes pelo caso LAA_0 .



Temos que $\overline{CA} \equiv \overline{DF}$, $\hat{CAB} \equiv \hat{EDF}$, e $\hat{ABC} \equiv \hat{FED}$.

Axioma 2.22 (Área do Retângulo). Seja o retângulo $ABCD$, sua área é dada por $|\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$.



Figura 2.23: Retângulo

Definição 2.23 (Paralelogramo). É um quadrilátero $ABCD$ cujos lados opostos são paralelos.

Proposição 2.24. Em um paralelogramo os lados e os ângulos opostos são congruentes.

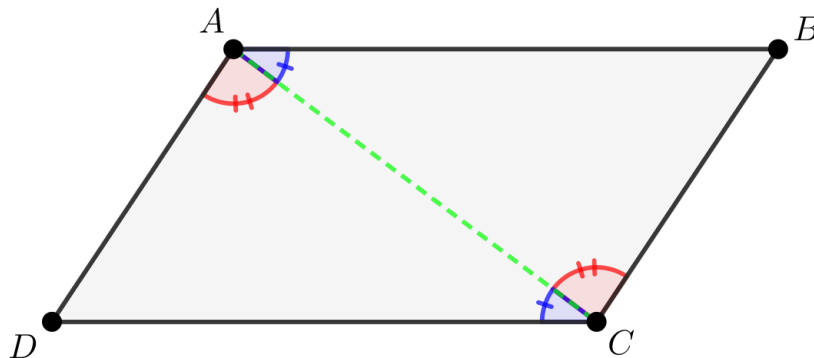


Figura 2.24: Paralelogramo

Demonstração. Temos $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, então $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ACD}$ e como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, então $\widehat{DAC} \equiv \widehat{BCA}$. Já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , deduzimos que $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$. Temos ainda que \overline{AC} é comum aos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABC$, então pelo caso 2.20(LAA_o), concluímos que $\triangle ACD \equiv \triangle CAB$, e conseqüentemente que $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ ou seja os lados opostos do paralelogramo $ABCD$ são congruentes. \square

Proposição 2.25. A área do paralelogramo é o produto do comprimento de qualquer lado pela altura relativa a este lado.

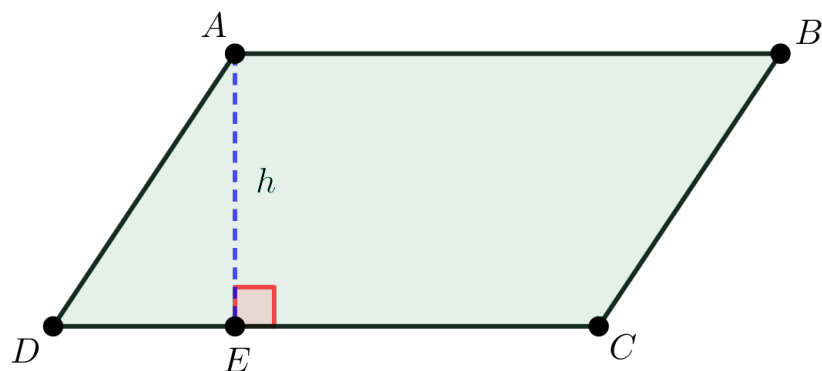
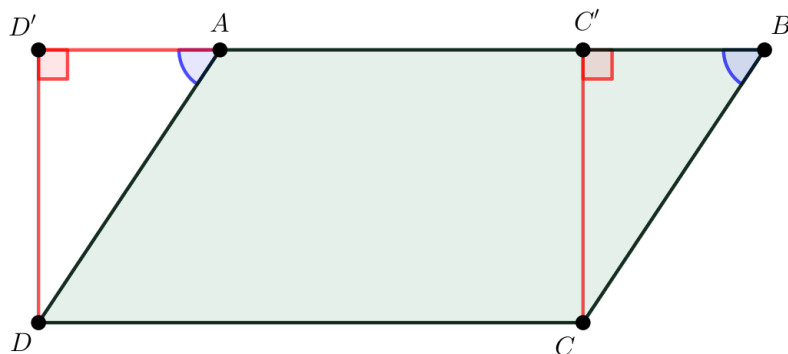


Figura 2.25: Área do Paralelogramo

$$\text{Ou seja, } A_p = |\overline{DC}| \cdot |\overline{AE}|$$

Demonstração. Suponha C' e $D' \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overline{D'D}$ e $\overline{C'C}$ são ortogonais a \overleftrightarrow{CD} e a \overleftrightarrow{AB} .



Como $\overline{D'D}$ e $\overline{C'C}$ são altura do paralelogramo $ABCD$, pelo Axioma 2.17 (LAL) o $\triangle ADD' \equiv \triangle BCC'$. Segue que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a área do retângulo $CDD'C'$. \square

Teorema 2.26. A área do triângulo ABC é a metade do produto de um dos seus lados pela altura relativa a este lado.

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$ como na Figura 2.26. Tracemos a reta paralela a \overline{BC} que contem o ponto A e a reta paralela a \overline{CA} que contem o ponto B . O ponto D dado pela interseção destas retas, determina o paralelogramo $ADBC$.

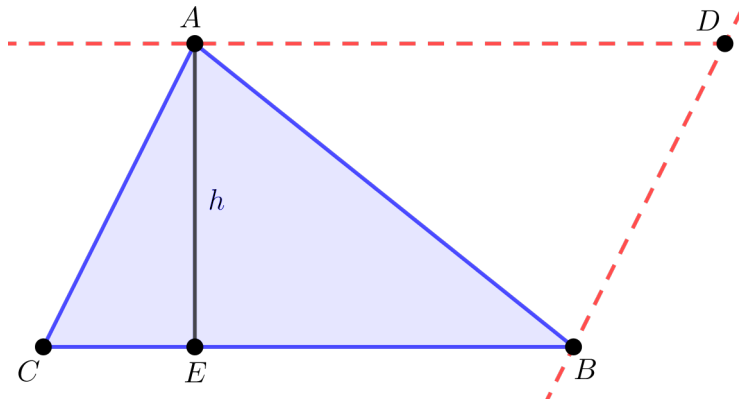


Figura 2.26: Área do Triângulo

Notamos que pela Proposição 2.24 o $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$. Logo a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. Portanto,

$$A_t = \frac{|\overline{BC}| \cdot |\overline{AE}|}{2}$$

□

Proposição 2.27. Dado os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ e a reta $l \parallel \overline{AB}$, com C e $D \in l$, então suas áreas são iguais.

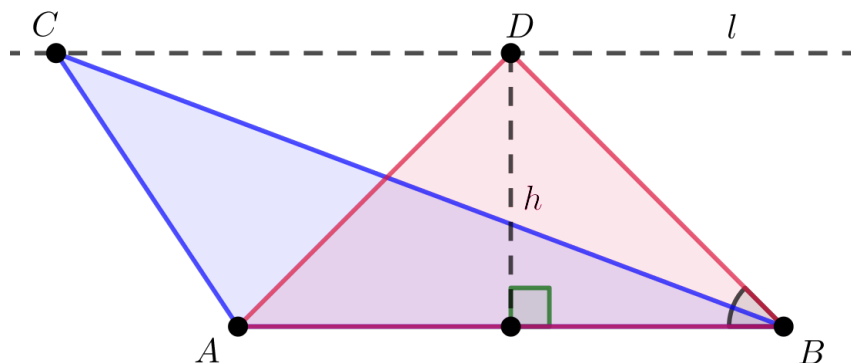


Figura 2.27: Triângulos com a mesma área

Demonstração. Sejam C e D dois pontos na reta l paralela a \overline{AB} . Observe que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ tem a mesma altura h relativa ao lado \overline{AB} , que é comum aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$, portanto

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{|\overline{AB}| \cdot h}{2} = \text{Área}(\triangle ABD).$$

□

2.2.2 Semelhança de Triângulos

Para identificar os lados proporcionais de dois triângulos semelhantes, pela Definição 2.12, primeiro devemos localizar os ângulos de mesma medida, e em seguida os lados homólogos (correspondentes) serão os lados opostos a esses ângulos.

Definição 2.28 (Razão de Semelhança). Sendo k a razão entre os lados homólogos, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, que é chamado razão de semelhança dos triângulos.

Da definição decorrem as seguintes propriedades:

1. Reflexiva: Todo triângulo é semelhante a si próprio.

$$\triangle ABC \sim \triangle ABC$$

2. Simétrica: Se um triângulo é semelhante a outro, este é semelhante ao primeiro.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

3. Transitiva: Se um triângulo é semelhante a um segundo e este é semelhante a um terceiro, então o primeiro é semelhante ao terceiro.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ e } \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$$

Teorema 2.29 (Fundamental). Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração. Vamos mostrar que $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle APQ$. Para isso vamos observar as áreas de alguns triângulos que aparecem na Figura 2.28.

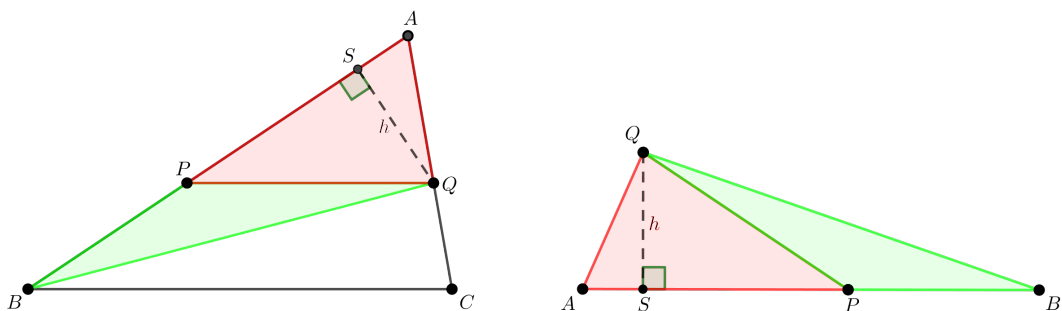


Figura 2.28: Teorema Fundamental

Sabemos que $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{BC}$, temos que $\hat{P} \equiv \hat{B}$ e $\hat{Q} \equiv \hat{C}$ (correspondentes), e \hat{A} é comum.

Temos que

$$\frac{A_{(\triangle APQ)} = \frac{|\overline{AP}| \cdot h}{2}}{A_{(\triangle BPQ)} = \frac{|\overline{PB}| \cdot h}{2}} \Rightarrow \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|}$$

Por outro lado,

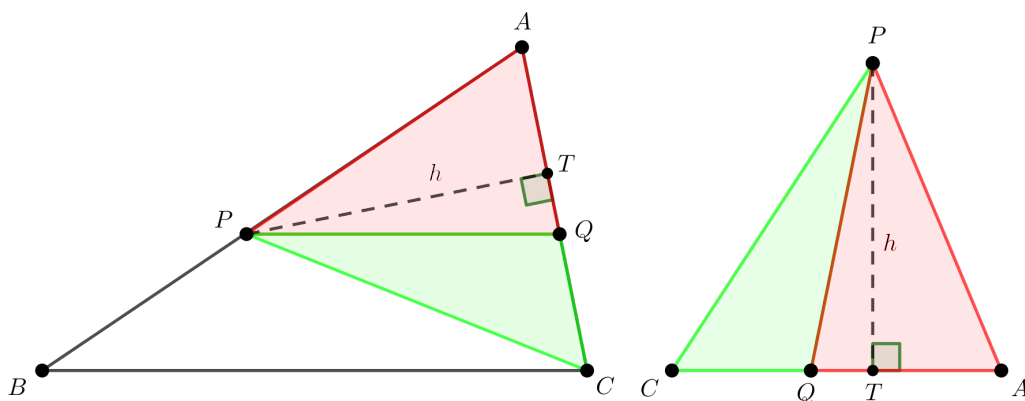


Figura 2.29: *Teorema Fundamental*

Temos que

$$\frac{A_{(\triangle APQ)} = \frac{|\overline{AQ}| \cdot h}{2}}{A_{(\triangle PQC)} = \frac{|\overline{QC}| \cdot h}{2}} \Rightarrow \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{QC}|}$$

E por fim,

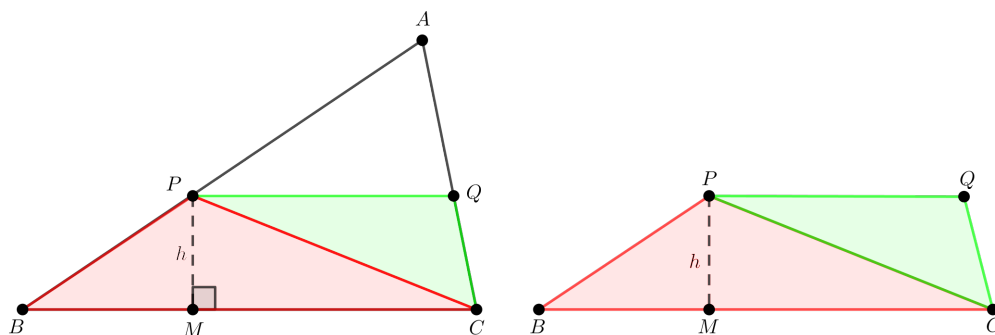


Figura 2.30: *Teorema Fundamental*

Temos que

$$\frac{A_{(\triangle BPC)} = \frac{|\overline{BC}| \cdot h}{2}}{A_{(\triangle PQC)} = \frac{|\overline{PQ}| \cdot h}{2}} \implies \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{PQ}|}$$

Como $A_{(\triangle BPQ)} = A_{(\triangle PQC)}$ pela Proposição 2.27, temos que

$$\frac{A_{(\triangle APQ)}}{A_{(\triangle BPQ)}} = \frac{A_{(\triangle APQ)}}{A_{(\triangle PQC)}} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{QC}|} \implies \frac{|\overline{PB}|}{|\overline{AP}|} = \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{AQ}|}$$

E ainda

$$1 + \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = 1 + \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{QC}|} \implies \frac{|\overline{AP}| + |\overline{PB}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{AQ}| + |\overline{QC}|}{|\overline{QC}|} = \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{AQ}| + |\overline{QC}|}$$

ou

$$1 + \frac{|\overline{PB}|}{|\overline{AP}|} = 1 + \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{PB}| + |\overline{AP}|}{|\overline{AP}|} = \frac{|\overline{QC}| + |\overline{AQ}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{QC}| + |\overline{AQ}|}$$

e por fim

$$\frac{|\overline{AP}| + |\overline{PB}|}{|\overline{AP}|} = \frac{|\overline{AQ}| + |\overline{QC}|}{|\overline{AQ}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{PQ}|}$$

Portanto, $\triangle ACB \sim \triangle AQP$. □

Veja a seguir os casos de semelhança.

Teorema 2.30 (1º Caso - AA). Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

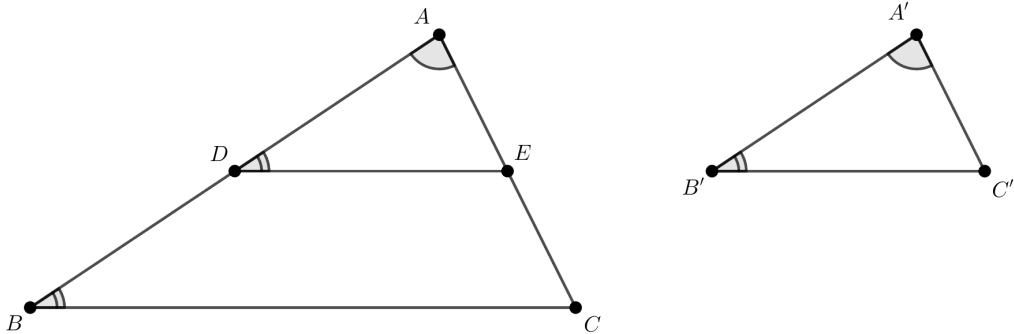
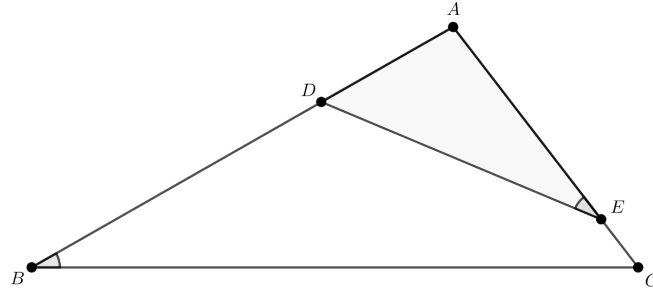


Figura 2.31: Semelhança de Triângulos - Caso AA

Demonstração. Suponha que os triângulos não são congruentes e $D \in \overline{BA}$ tal que $|\overline{DA}| \equiv |\overline{B'A'}|$, $\hat{D} \equiv \hat{C} \hat{B} \hat{A}$ e $E \in \overline{AC}$.

Pela propriedade transitiva, como $\triangle A'C'B' \stackrel{ALA}{\cong} \triangle AED$ e $\triangle ACB \sim \triangle AED \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle A'C'B'$. \square

Exemplo 2.31. No triângulo a seguir é dado $\hat{E} \equiv \hat{B}$, $\overline{BA} = 8\text{cm}$, $\overline{CB} = 10\text{cm}$, $\overline{AC} = 5\text{cm}$ e $\overline{AE} = 4\text{cm}$. Encontre a medida de \overline{DA} e \overline{ED} .

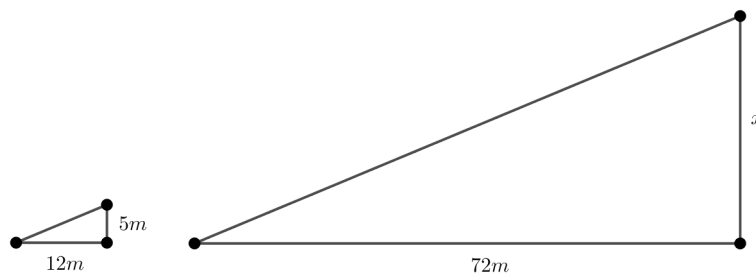


Resolução É importante notar que \overline{ED} não é paralelo a \overline{CB} . Em seguida observamos que o ângulo \hat{A} é comum, o que nos garante afirmar que os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle AED$ são semelhantes. Então temos $A\hat{E}D \sim C\hat{B}A$ e $D\hat{A}E \sim B\hat{A}C$ é comum, logo

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{5} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5 = \overline{ED} \\ \frac{y}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2,5 = \overline{DA} \end{cases}$$

Exemplo 2.32 (Aplicação). Num dado instante de uma tarde ensolarada é observado que a sombra formada por uma árvore de $5m$ de altura é exatamente $12m$. Nesse mesmo instante em uma construção civil, cuja sombra mede $72m$, o pintor precisa montar uma torre de andaime para realizar seu trabalho. Determine a altura dessa construção civil.

Resolução. É fácil perceber que se trata de dois triângulos semelhantes, já que eles possuem dois ângulos homólogos congruentes formados pelos raios solares que são paralelos. O que nos garante isso é o fato dos raios solares responsáveis por projetar suas respectivas sombras são paralelos (o evento ocorre no mesmo horário), e como a árvore e a construção civil estão no mesmo plano horizontal, logo temos ângulos congruentes. O evento pode ser ilustrado da seguinte forma:



Aplicando o Teorema de Tales, temos

$$\frac{x}{5} = \frac{72}{12} \Rightarrow x = 30m$$

Teorema 2.33 (2º Caso - LAL). Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

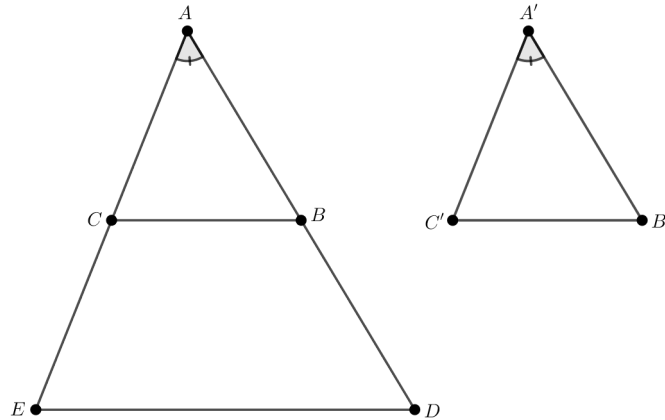


Figura 2.32: Semelhança de Triângulos - Caso LAL

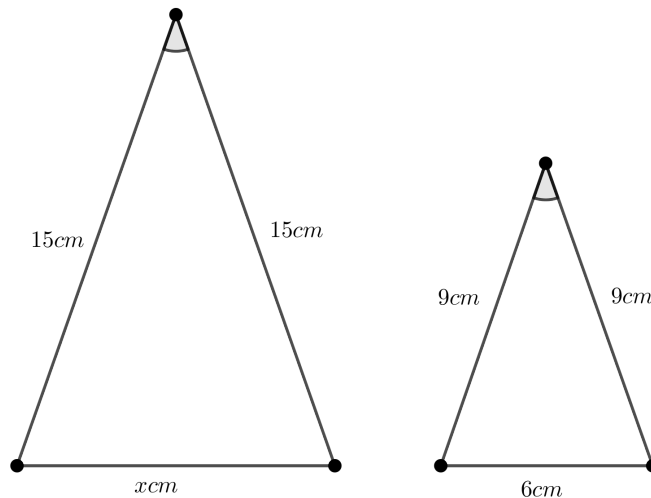
Demonstração. Nesse caso a demonstração é análoga ao primeiro caso, suponha que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ não são semelhantes, $|\overline{CA}| \equiv |\overline{C'A'}|$ com $C \in \overline{EA}$, $|\overline{AB}| \equiv |\overline{A'B'}|$ com $B \in \overline{AD}$ e $\hat{C}AB \equiv \hat{C}'A'B'$, logo

$$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$$

Pela propriedade transitiva, como $\triangle A'B'C' \stackrel{LAL}{\equiv} \triangle ABC$ e $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, pelo Teorema 2.29, temos que $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$. \square

Exemplo 2.34. Dois triângulos são isósceles e semelhantes, suas bases medem, respectivamente, $6cm$ e xcm . Os lados congruentes do primeiro triângulo medem $9cm$, enquanto do segundo medem $15cm$. Encontre o perímetro do segundo triângulo.

Resolução. Como o enunciado afirma que os triângulos são semelhantes e ao mesmo tempo são isósceles, percebemos que o ângulo entre os lados iguais nos dois triângulos são congruentes. Então podemos ilustrar esse problema da seguinte forma:

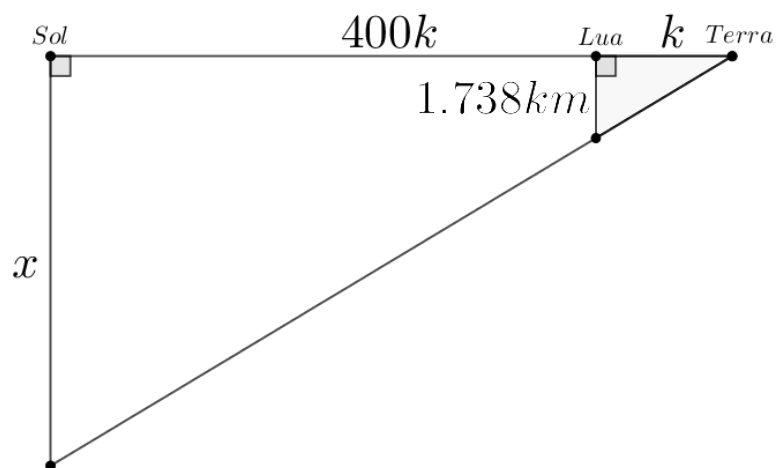


$$\frac{15}{x} = \frac{9}{6} \Rightarrow x = 10\text{cm}$$

Logo o perímetro do segundo triângulo é dado por $2p = 15 + 15 + 10 = 40\text{cm}$.

Exemplo 2.35 (Aplicação). Num eclipse total do Sol comprovamos que o ângulo sob o qual vemos o Sol é o mesmo sob o qual vemos a Lua. Considerando que a distância da Lua ao Sol é 400 vezes a distância da Terra à Lua e que a Lua tem raio de 1.738km , determine o raio do Sol.

Resolução. Nesse problema podemos visualizar dois triângulos semelhantes pelo caso AA , já que o raio solar é o mesmo, ou pelo caso LAL já que os raios da Lua e da Terra e suas respectivas distâncias ao Sol são proporcionais.



Daí temos

$$\frac{x}{1738} = \frac{400k + k}{k} \Rightarrow x = 696.938\text{km}$$

Teorema 2.36 (3º Caso - LLL). Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

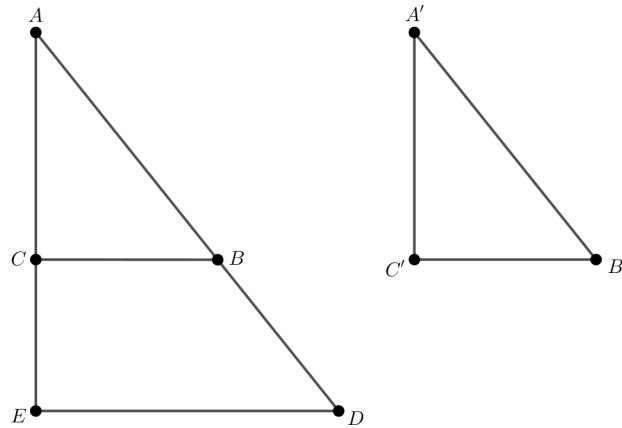
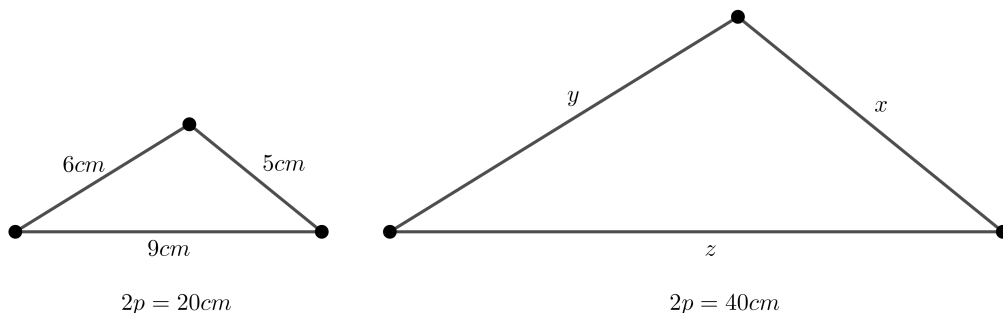


Figura 2.33: Semelhança de Triângulos - Caso LLL

Demonstração. A demonstração desse caso também assemelha-se a primeira, suponha que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ não são congruentes, $|\overline{CA}| \equiv |\overline{C'A'}|$ com $C \in \overline{EA}$, $|\overline{AB}| \equiv |\overline{A'B'}|$ com $B \in \overline{AD}$ e $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$. Pela propriedade transitiva, como $\triangle A'B'C' \stackrel{LLL}{\cong} \triangle ABC$ e $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, pelo Teorema 2.29, temos que $\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$. \square

Exemplo 2.37. Sabendo que os lados de um triângulo medem 5cm , 6cm e 9cm , determine as medidas dos lados de um triângulo semelhante a este, sabendo que seu perímetro é de 40cm .

Resolução. Se os lados são proporcionais, também o são os perímetros e na mesma proporção, logo podemos ilustrar a seguinte situação

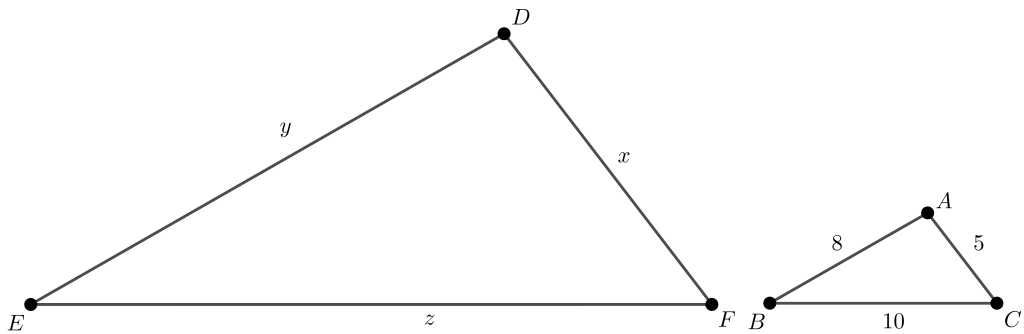


Daí vem

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = \frac{40}{20} = \frac{2}{1} \implies \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 10 \\ \frac{y}{6} = \frac{2}{1} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{z}{9} = \frac{2}{1} \Rightarrow z = 18 \end{cases}$$

Exemplo 2.38 (Aplicação). Na apresentação de uma maquete, na escala de 1:100, para o lançamento de um condomínio, um monumento em formato de prisma triangular é apresentado com medidas da base de 5cm, 8cm e 10cm. Caso o projeto seja aprovado, para a execução do monumento serão necessários quantas barras de metalon (estrutura metálica), medindo 6m cada, para formar seu perímetro?

Resolução. Como se trata de uma ampliação, sabemos que os triângulos são semelhantes pois seus lados são proporcionais. Diante do exposto, temos:



$$\frac{5}{x} = \frac{8}{y} = \frac{10}{z} = \frac{1}{100} \implies \begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = 500 \\ \frac{8}{y} = \frac{1}{100} \Rightarrow y = 800 \\ \frac{10}{z} = \frac{1}{100} \Rightarrow z = 1000 \end{cases}$$

Logo, $x + y + z = 2300\text{cm} = 23\text{m} \Rightarrow 4$ barras de metalon.


Relações Métricas no Triângulo Utilizando o GeoGebra


Neste capítulo vamos apresentar o GeoGebra, suas ferramentas (Apêndice C) e respectivas funcionalidades separadas por grupos, assim como no programa. Em seguida falaremos sobre as relações métricas no triângulo retângulo e no triângulo qualquer, fazendo demonstrações e acompanhando os resultados passo a passo paralelamente no software. No final de cada demonstração vamos deixar um exemplo de aplicação com resolução acompanhada pelo GeoGebra.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra, sua distribuição é gratuita, além de ser escrito em linguagem Java o que permite estar disponível em vários sistemas operacionais.

Com ele é possível fazer construções geométricas utilizando pontos, retas, segmentos, polígonos e outros, além de permitir a inserção de funções e alterar todos esses objetos, como por exemplo mudar suas posições no plano ou a estrutura de uma função. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas, assim o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras adequadas à álgebra. Daí a vantagem de representar características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. Nas últimas versões (GeoGebra Clássico 6) é possível trabalhar com geometria em três dimensões.

3.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Para iniciar vamos construir, com o auxílio do software GeoGebra, um triângulo ABC , retângulo em A e altura h (segmento \overline{AH}) referente a base \overline{BC} . Selecionando com o botão esquerdo do mouse a ferramenta  2.9, com um clique do botão esquerdo do mouse na área de trabalho escolhemos o vértice A , e da mesma forma B e C , até que fechamos o triângulo clicando, por último, sobre o vértice A . É aconselhável utilizar a malha quadriculada na escolha dos pontos para facilitar na construção do triângulo, já que é possível formar ângulo reto com o auxílio da

mesma. Em seguida, utilizando a ferramenta  2.4 e selecionando três vértices consecutivos definimos o valor de cada ângulo interno do polígono (triângulo), assim clicamos com o botão esquerdo do mouse sobre o vértice B , em seguida sobre o vértice A e por fim sobre o vértice C para evidenciar o ângulo reto como na Figura 3.1.

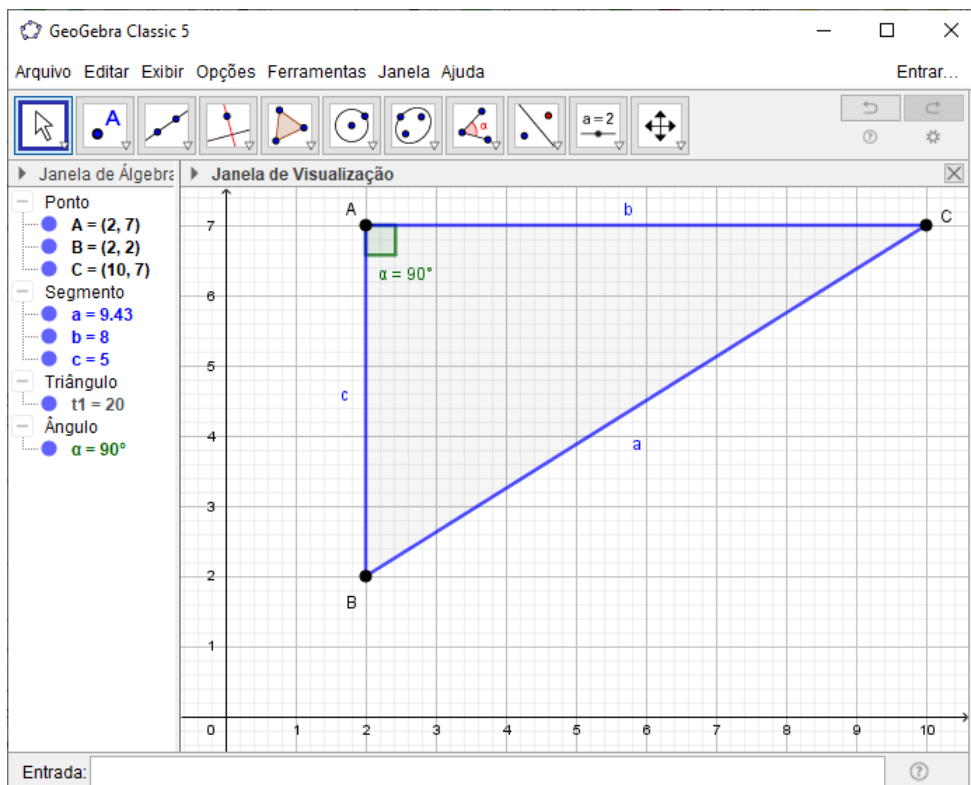




Figura 3.1: Construção do Triângulo Retângulo - Parte I

O próximo passo é interessante e, se for conveniente, mudar a nomenclatura dos vértices e lados do triângulo, clicando sobre cada um deles com o botão direito do mouse e escolhendo a opção *Renomear*. Agora vamos traçar a altura h referente a hipotenusa \overline{BC} . Para isso selecionamos a ferramenta *Reta Perpendicular*  e clicamos primeiro sobre o vértice A e em seguida sobre a reta desejada que passa pelo segmento \overline{BC} . Para melhorar a visualização do desenho é interessante construir um *Segmento de Reta* , sobre a reta definida anteriormente, com origem no ponto A e fim na intersecção dessa reta com a base \overline{BC} , em seguida clicando com o botão direito do mouse sobre a reta e desmarcamos a opção *Exibir Objeto*, para ocultá-la. E por fim, mostramos o ângulo reto $B\hat{H}A$ usando a ferramenta *Ângulo*.

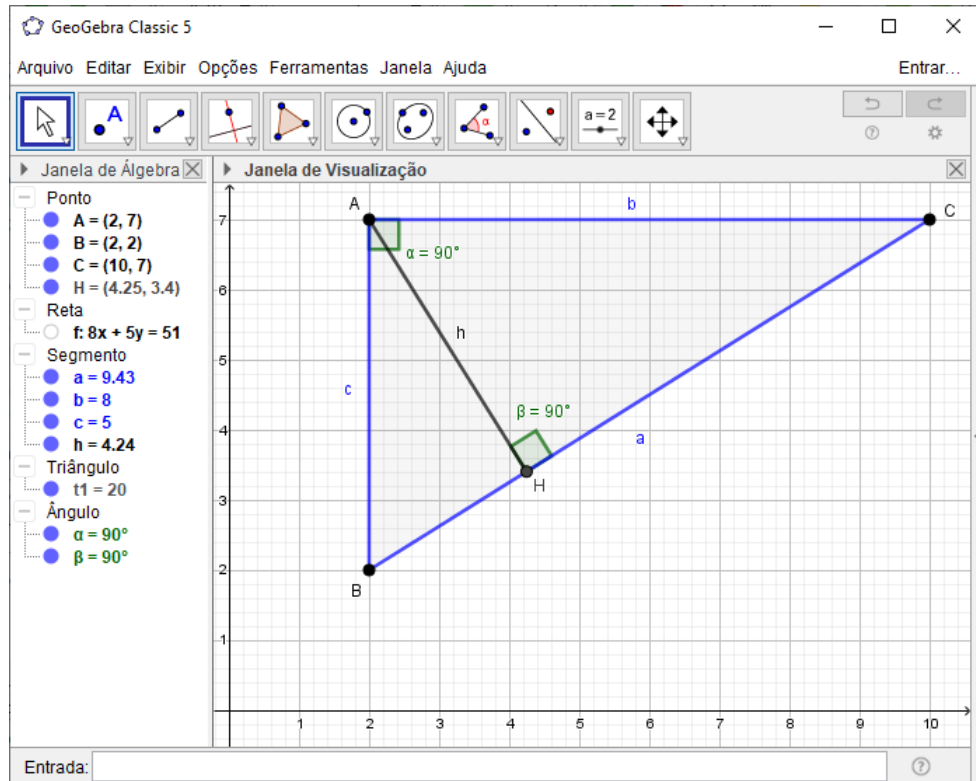



Figura 3.2: Construção do Triângulo Retângulo - Parte II

Como nosso triângulo retângulo foi dividido em duas partes pela altura referente à base \overline{BC} , formamos agora dois triângulos também retângulos em H . Vamos usar a Ferramenta 2.9 para construir esses dois polígonos e estabelecer uma cor para cada clicando com o botão esquerdo do mouse sobre um deles e escolhendo a opção *Propriedades* e em seguida escolhemos a cor desejada no menu *cor*. Outra opção interessante é ocultar os textos (nome de vértices, lados e ângulos) dos polígonos pré definidos pelo GeoGebra e usar a ferramenta *Texto*  para criar outros textos que nos permitem alterar estilo de fonte e tamanho.

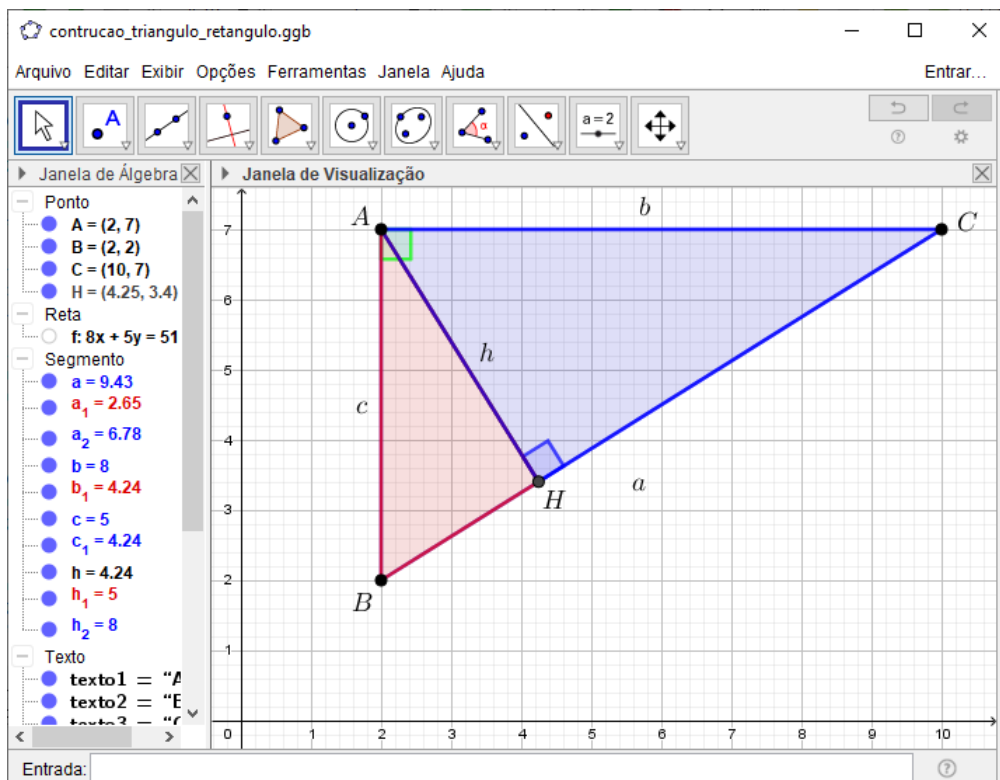


Figura 3.3: Construção do Triângulo Retângulo - Parte III

Agora vamos verificar se os triângulos ABC , ABH e AHC são semelhantes. Mas isso se torna fácil uma vez que seus ângulos internos são congruentes já que no $\triangle ABC$ os ângulos $\hat{C}BA$ e $\hat{A}CB$ são complementares e o mesmo acontece nos triângulos $\triangle ABH$ com os ângulos $\hat{H}BA$ e $\hat{B}AH$ complementares e no $\triangle ACH$ com os ângulos $\hat{A}CH$ e $\hat{H}AC$ complementares, ou seja, $\hat{A}BC \equiv \hat{H}AC$, $\hat{B}AH \equiv \hat{A}CB$ e $\hat{A}HB \equiv \hat{C}HA = 90^\circ$, verificados, também, usando a Ferramenta 2.4 no software GeoGebra. Portanto, podemos evidenciar os Ângulos congruentes escolhendo um estilo diferente para cada par e assim concluirmos que $\triangle ABC \sim \triangle AHB \sim \triangle AHC$.

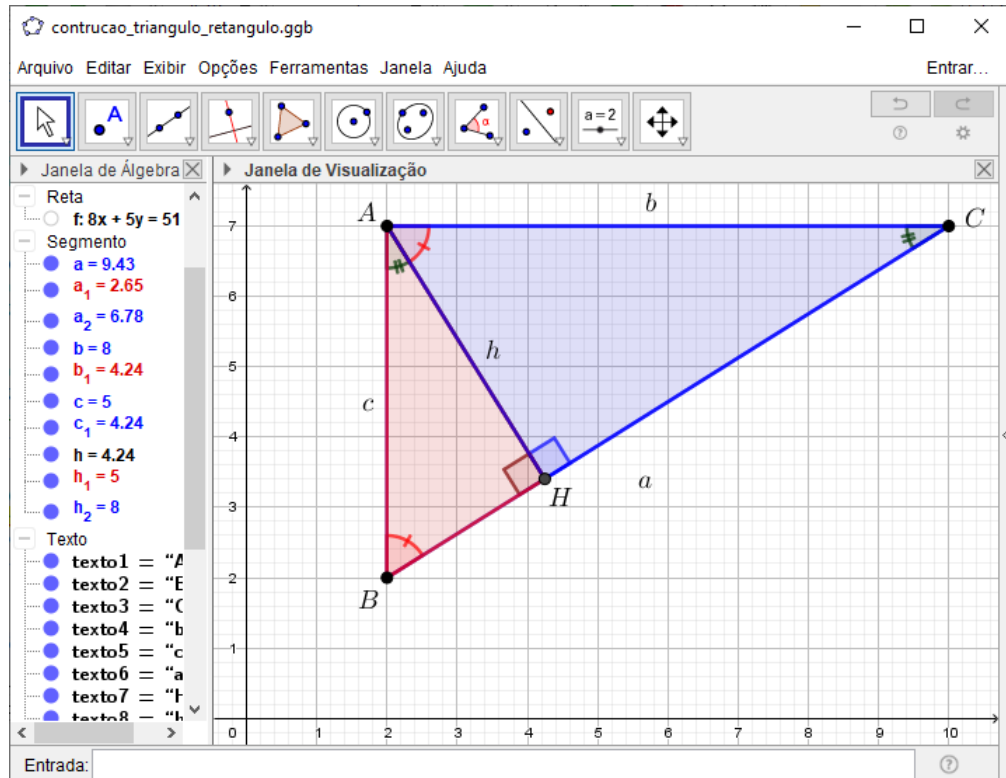


Figura 3.4: Construção Triângulo Retângulo - Parte IV

Agora para encontrar as relações métricas devemos chamar \overline{BH} de m e \overline{HC} de n , já que \overline{BC} (hipotenusa) foi dividida em duas partes, e comparar os triângulos 2 a 2.

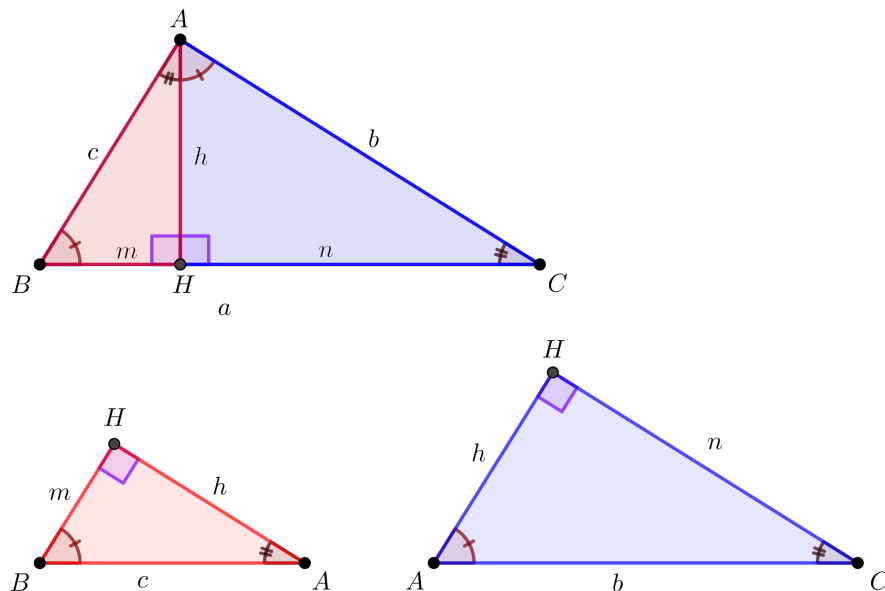


Figura 3.5: Semelhança de Triângulos

Teorema 3.1. Seja o $\triangle ABC$ retângulo em A com altura h referente ao lado \overline{BC} e projeções " m " e " n " dos catetos \overline{AB} e \overline{AC} sobre a hipotenusa, são válidas as relações

métricas

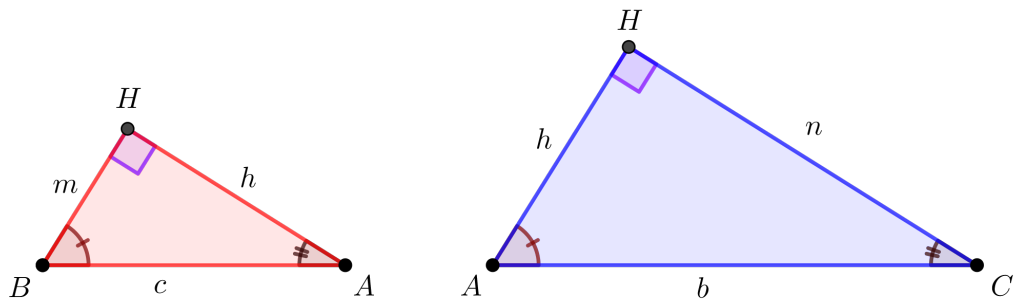
Relação 1 - $h^2 = m \cdot n$

Relação 2 - $c^2 = a \cdot m$

Relação 3 - $a \cdot h = b \cdot c$

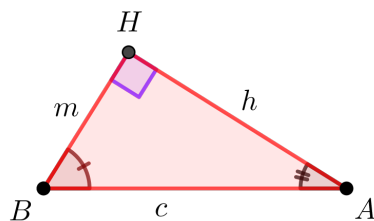
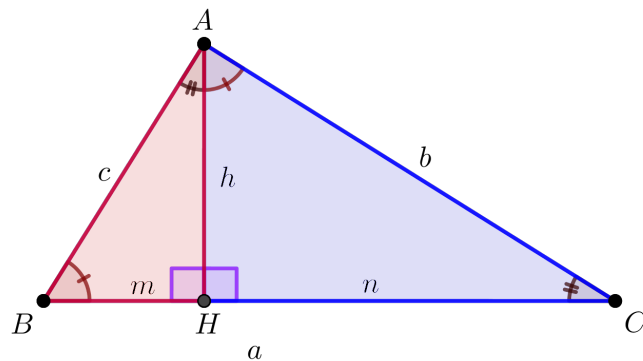
Relação 4 - $b^2 = a \cdot n$

Demonstração. Vamos mostrar as relações que existem entre os lados, a altura e as projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa. Para isso vamos considerar os triângulos \triangle_{AHB} e \triangle_{ACH}



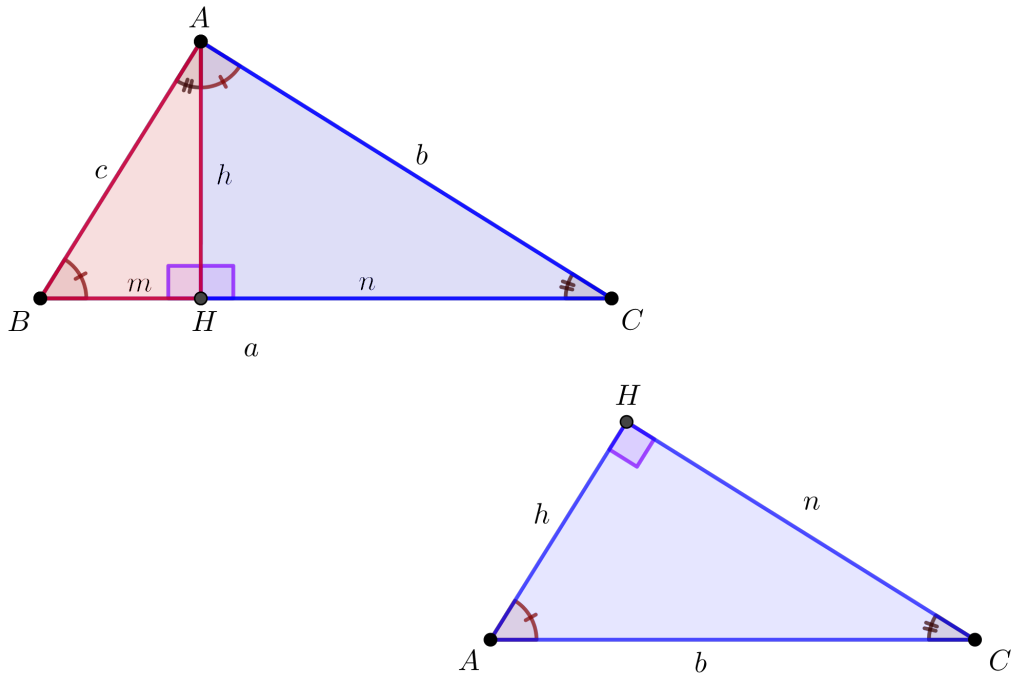
$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad (3.1)$$

Agora consideremos os triângulos \triangle_{AHB} e \triangle_{ABC}



$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \quad (3.2)$$

Tomemos agora os triângulos $\triangle ACH$ e $\triangle ABC$



$$\frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c \quad (3.3)$$

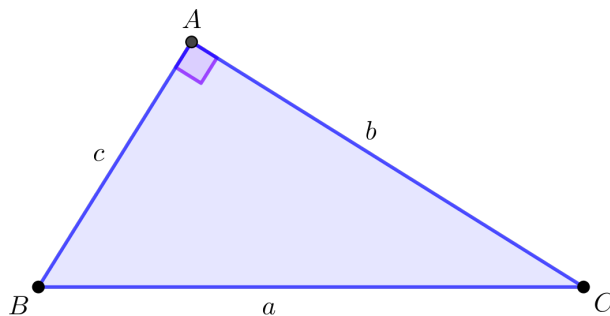
E, por fim, ainda sobre os triângulos $\triangle ACH$ e $\triangle ABC$

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \quad (3.4)$$

□

A seguir enunciaremos e demonstraremos um importante teorema conhecido como *Teorema de Pitágoras* e vamos complementar com interpretações geométricas usando o GeoGebra.

Teorema 3.2 (Teorema de Pitágoras). Num triângulo retângulo, a área do quadrado da hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados dos catetos.



Demonstração. Vamos mostrar que o quadrado do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Para isso vamos somar 3.2 e 3.4

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

Agora colocando a em evidência do lado direito da igualdade temos

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

Como $(m + n) = a$, concluímos que

$$b^2 + c^2 = a^2 \tag{3.5}$$

□

O resultado obtido nesse teorema pode ser reforçado utilizando a interpretação geométrica, desenhando um quadrado a partir da medida de cada lado do triângulo retângulo no GeoGebra e em seguida verificar se a soma das áreas dos dois quadrados menores é igual a área do quadrado maior. Para isso basta desenhar um triângulo retângulo qualquer, usando a Ferramenta 2.9, e em seguida, usando a ferramenta *Polígono Regular*, desenhar quadrados com os lados fixos nos lados do triângulo.

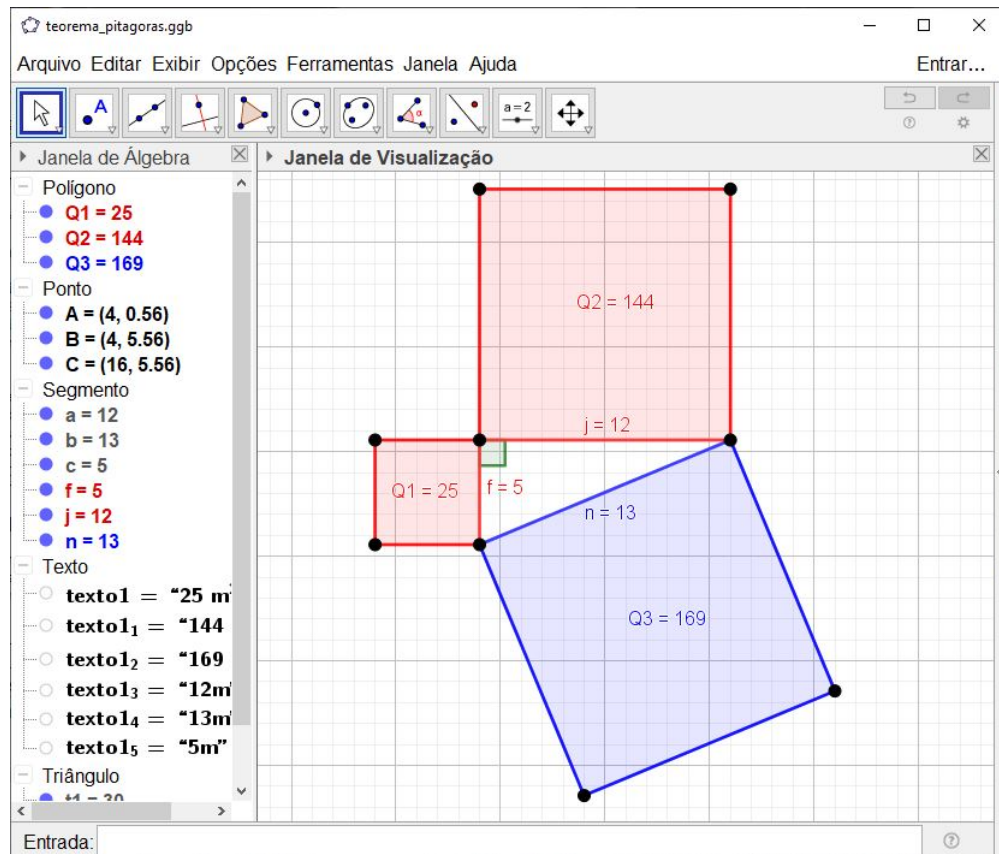


Figura 3.6: Construção - Teorema de Pitágoras

Fazendo algumas modificações ocultando a escrita padrão do GeoGebra e substituindo por texto no tamanho e fonte desejada, temos

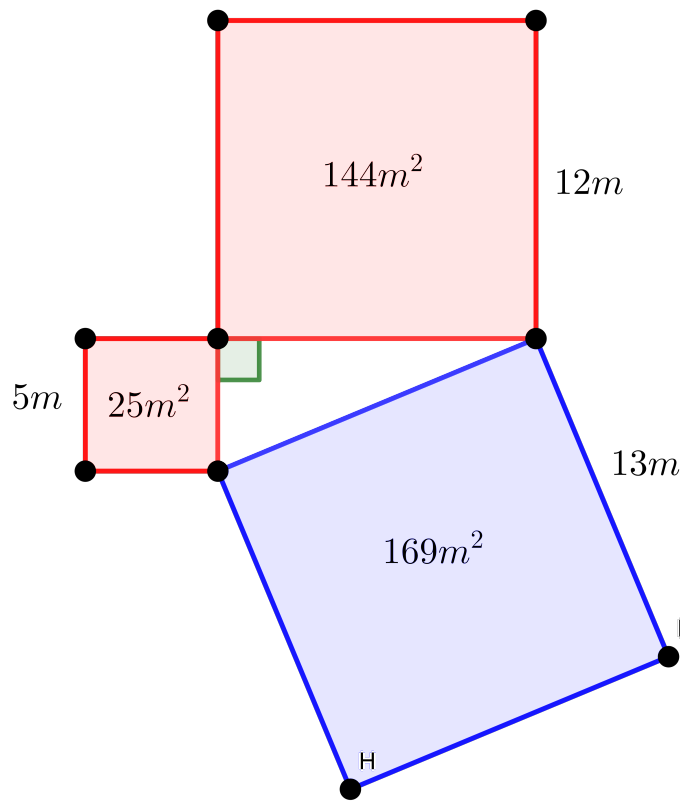
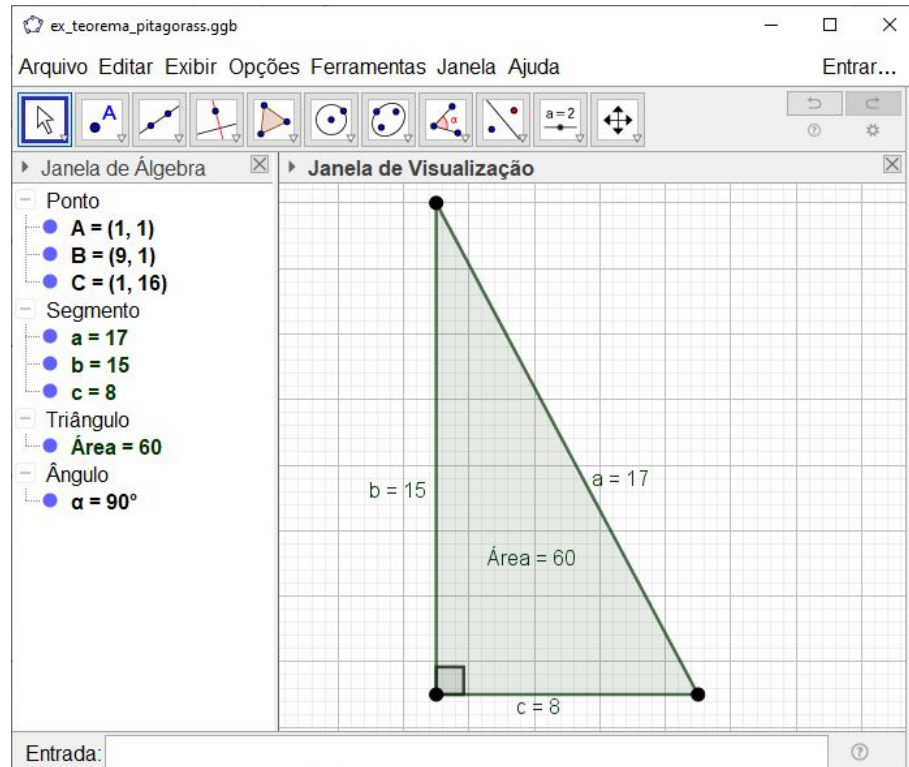


Figura 3.7: *Semelhança de Triângulos*

Exemplo 3.3. Determine a área do triângulo retângulo que admite um cateto medindo $8m$ e a hipotenusa medindo $17m$.

Resolução. Vamos desenhar o triângulo retângulo com as especificações do enunciado usando a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo* e estabelecemos a base medindo 8 e no final desse segmento determinamos outro medindo 17 , em seguida, com a ferramenta *Mover*, deslocamos o vértice móvel do último segmento de tal forma que possamos completar com o terceiro segmento e o triângulo ser retângulo (uma sugestão é fazer uso da malha quadriculada do GeoGebra para identificar a coordenada que permite que o triângulo seja retângulo). Ao concluir o desenho, a medida do outro cateto e a área do triângulo já aparecem na janela de álgebra e na janela de visualização.



Vamos aplicar o *Teorema de Pitágoras* 3.5 para encontrar a medida do outro cateto

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 + 8^2 = 17^2$$

$$b = \sqrt{225}$$

$$b = 15$$

E agora vamos encontrar a área desse triângulo

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

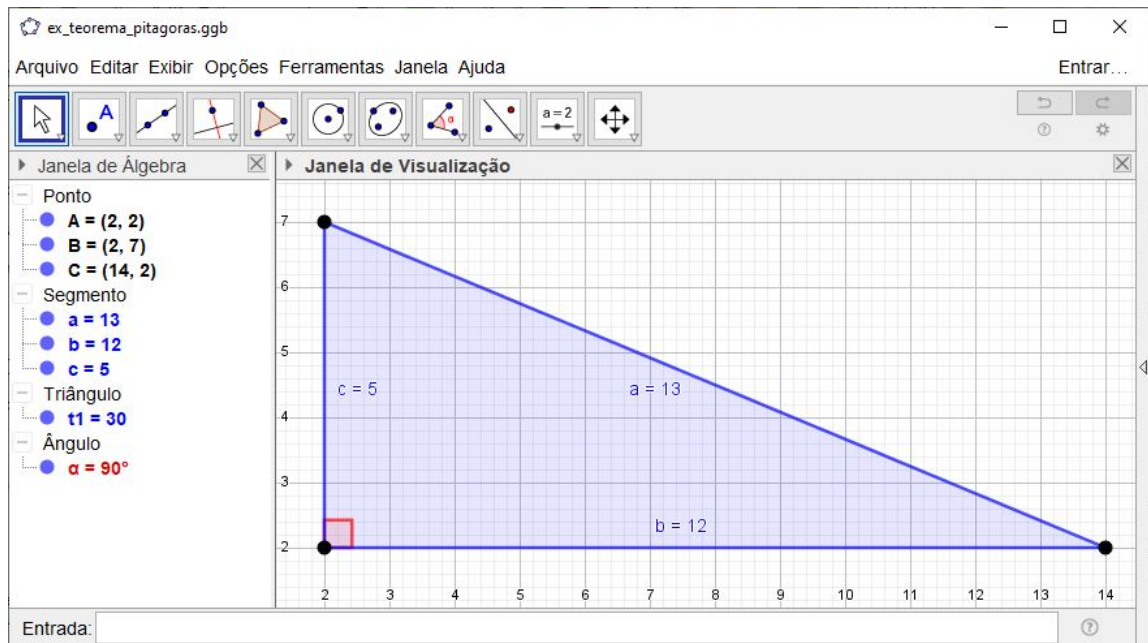
$$A = \frac{15 \cdot 8}{2}$$

$$A = 60m^2$$

Exemplo 3.4 (Aplicação). Uma árvore centenária da floresta amazônica quebrou ficando com o seu topo sobre uma rodovia nas proximidades de Manaus (capital da Amazônia). Os bombeiros foram chamados para a retirada da árvore. Ao chegar ao local perceberam que a parte que ainda estava fixa no solo tinha $5m$ de altura formando com este ângulo de 90° , e a parte quebrada que ainda estava presa ao

que sobrou do tronco com a ponta sobre o asfalto mantinha uma distância da sua própria base de $12m$. Determine qual era a altura dessa árvore.

Resolução. Para resolver o problema vamos trazer as informações descritas para o GeoGebra usando a ferramenta *Polígono* 2.9 e ilustrar um triângulo retângulo, com o auxílio da malha quadriculada, com os catetos medindo 5 e 12, e verificar a forma geométrica sugerida.



O GeoGebra já nos fornece o comprimento da árvore que foi quebrado e assim já podemos visualizar a resposta. Como se tratada de um problema em que precisamos saber o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, vamos aplicar o *Teorema de Pitágoras* 3.5

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 + 12^2$$

$$a = \sqrt{169}$$

$$a = 13$$

Logo, temos que o tamanho da árvore, que é a soma da parte quebrada com a parte que ficou fixa no solo, é de

$$5m + 13m = 18m$$

3.2 Relações Métricas em Triângulo Qualquer

Para um triângulo qualquer, especialmente aquele que não é retângulo, podemos fazer uso de duas relações muito importantes e que fazem parte da trigonometria, que veremos a seguir.

3.2.1 Lei dos Senos

Teorema 3.5. A razão entre os lados de um triângulo e os senos dos ângulos opostos são proporcionais e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita no triângulo.

Demonstração. Vamos imaginar um \triangle_{ABC} qualquer. Sabendo que três pontos não colineares determinam uma única circunferência, traçamos a circunferência usando a Ferramenta *Círculo definido por Três Pontos* e em seguida selecionamos os pontos A, B e C para determinar a circunferência, de centro O e raio r , circunscrita em \triangle_{ABC} . Traçando o diâmetro \overline{AD} , usando a Ferramenta 2.3, temos

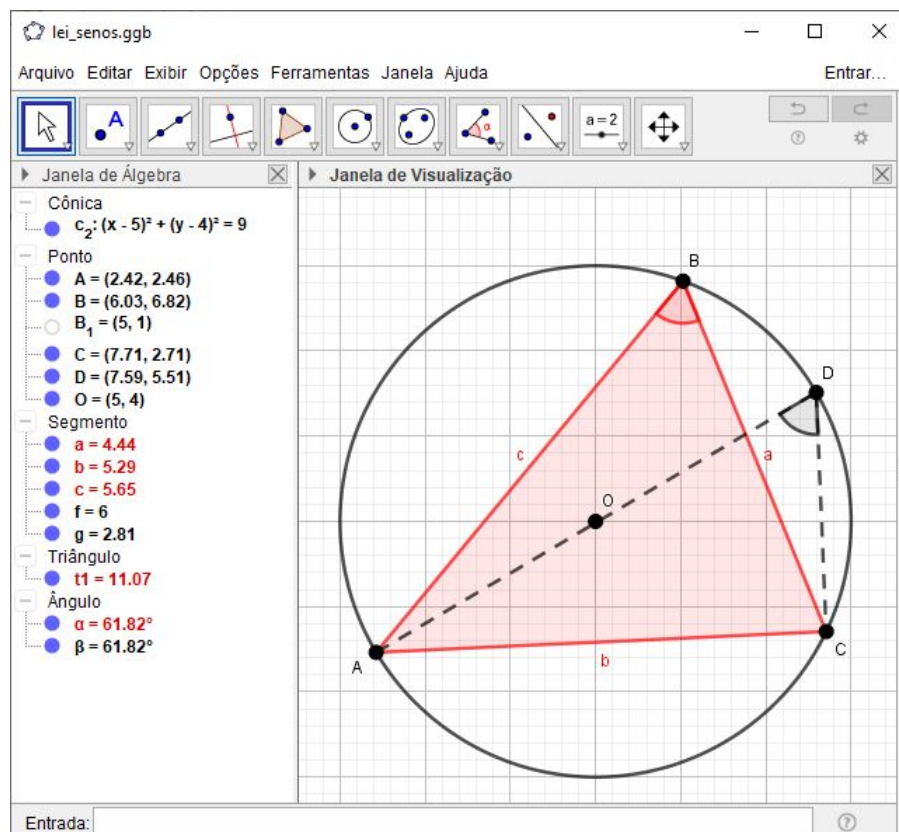


Figura 3.8: Construção - Lei dos Senos

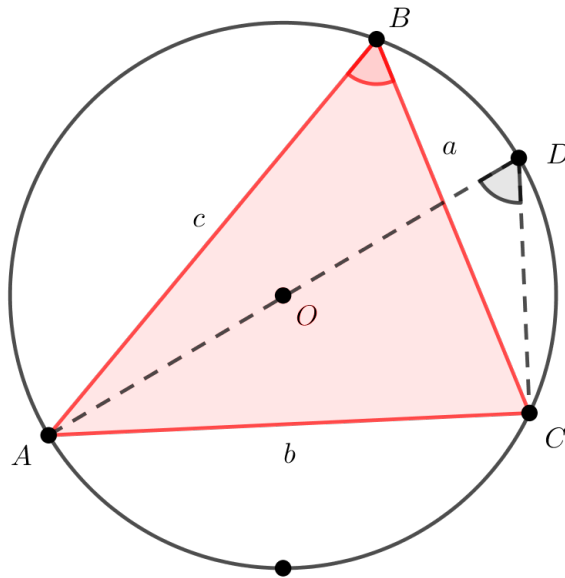


Figura 3.9: *Lei dos Senos.*

Com o ponto D determinamos o triângulo $\triangle ADC$ que é retângulo em C já que \overline{AD} é diâmetro da circunferência e então o *Ângulo Inscrito* \widehat{DCA} corresponde à metade do arco \widehat{AD} (180°), e como \widehat{ABC} e \widehat{ADC} são *Ângulos Inscritos* na circunferência e compartilham do mesmo arco \widehat{AC} podemos dizer que

$$\hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

No $\triangle ACD$, retângulo em C , temos

$$\sin(\hat{D}) = \frac{b}{2r} \Rightarrow \frac{b}{\sin(\hat{B})} = 2r,$$

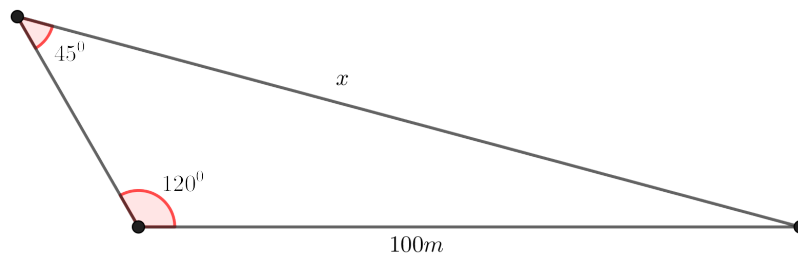
e de forma análoga

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})} = 2r. \quad (3.6)$$

□

Observação 3.6. Nos casos em que o triângulo seja obtuso, para a demonstração, não teremos $\hat{B} \equiv \hat{D}$ e $\sin \hat{D} = 180^\circ - \hat{B}$ (suplementar).

Exemplo 3.7. Determine o valor de x no triângulo a seguir.

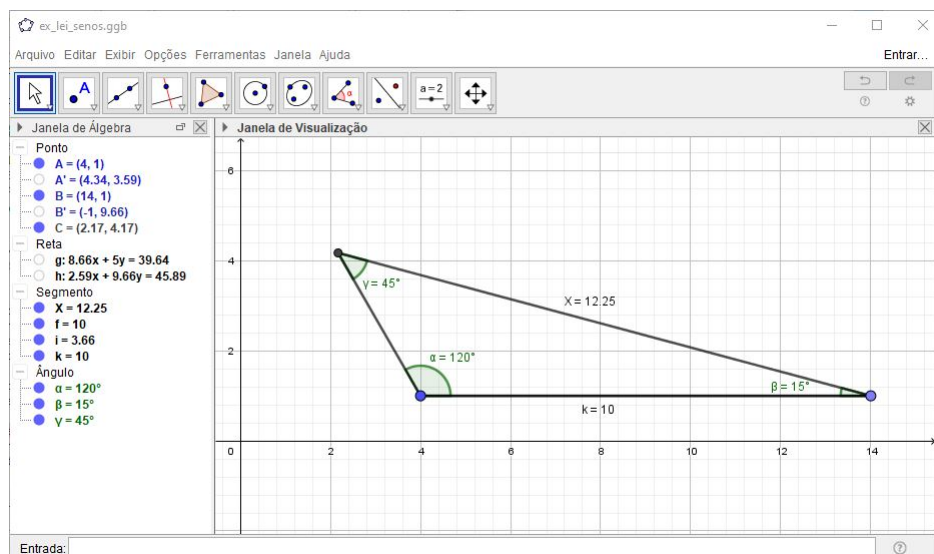


Resolução. Para solucionar o problema verificamos que as informações fornecidas pelo enunciado são de dois ângulos e um lado, como ele deseja saber a medida de outro lado, precisamos relacionar dois lados e dois ângulos do triângulo. Então faremos uso da lei dos senos.

$$\text{Sendo } \begin{cases} \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,865 \\ \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,705 \end{cases}$$

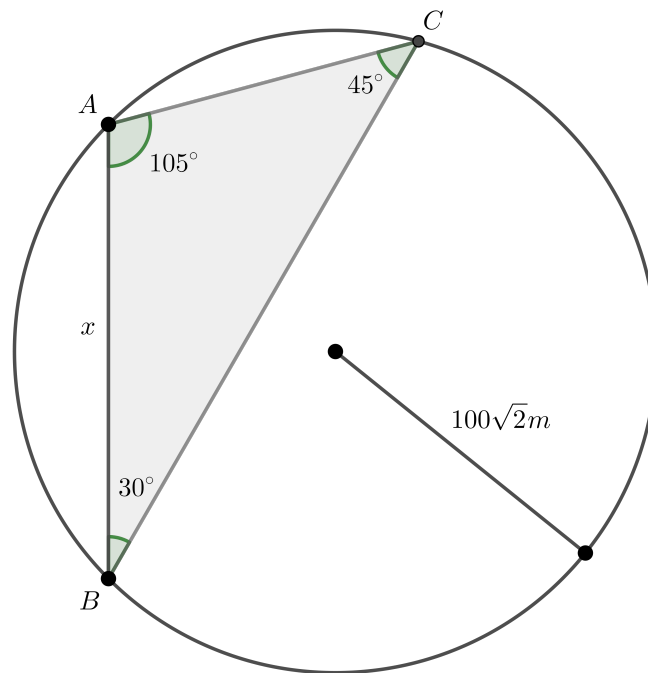
$$\frac{x}{\sin(120^\circ)} = \frac{100}{\sin(45^\circ)} \implies x = 122,5m$$

No GeoGebra, basta inserir um segmento de medida igual a 100 unidades (faremos na escala de 1:10) e em seguida construir um ângulo de 120° com o auxílio da ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa* a partir de uma das extremidades do segmento e outro de 15° , a partir da outra extremidade desse segmento no sentido horário. Da intersecção desses dois ângulos, que podemos usar a ferramenta *Reta*, encontramos o terceiro vértice do triângulo (com ângulo de 45°). O segmento de reta formado entre os ângulo de 45° e de 15° nos fornecerá o valor x desejado.



Exemplo 3.8 (Aplicação). Ana, Beatriz e Carlos estão em pontos distintos ao redor de uma praça com formato circular e de raio $100\sqrt{2}m$ de tal forma que Ana visualiza seus amigos sob um ângulo de 105° e Beatriz visualiza seus amigos sob um ângulo de 30° . Qual é a distância, em linha reta, entre Ana e Beatriz?

Resolução. Vamos considerar a situação descrita e construir uma circunferência usando a ferramenta *Círculo dado Centro e Raio* de raio $100\sqrt{2}$ e em seguida definimos os pontos A e B qualquer na circunferência, acrescentar os ângulos que Carlos e Beatriz visualizam seus amigos com o auxílio da ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*, que são, respectivamente, de 105° e 30° . E para finalizar, traçar as retas \overline{AC} e \overline{BC} com o intuito de localizar o vértice C do triângulo que, por sua vez, deve estar sobre a circunferência. Caso isso não aconteça devemos usar a ferramenta *Mover* para movimentar o ponto A ou o ponto B sobre a circunferência até que C também fique sobre a ela.



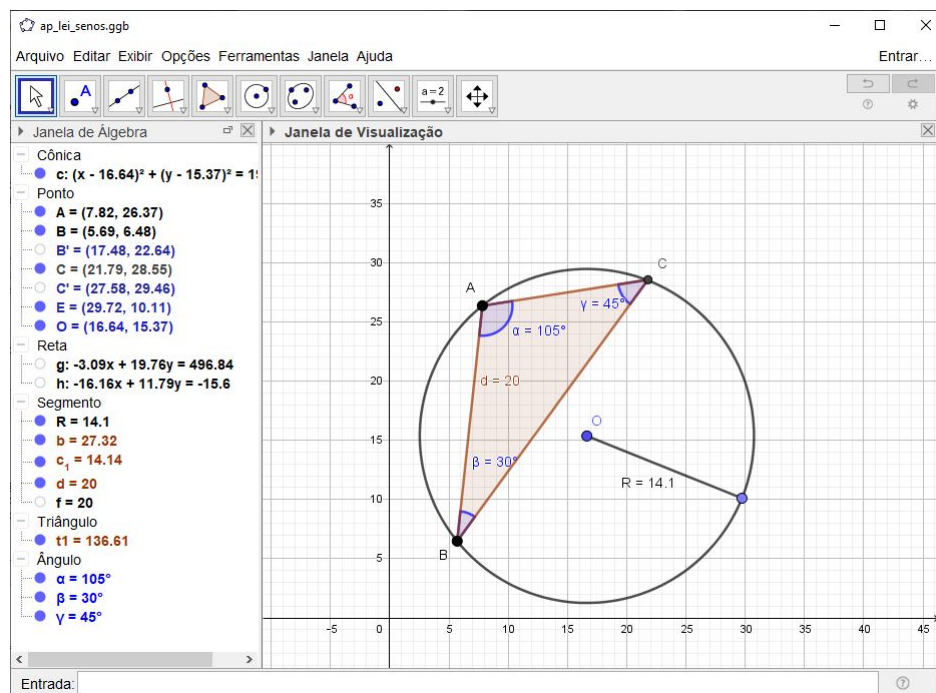
Agora basta aplicar a lei dos senos, já que vamos fazer uso da medida do raio da circunferência circunscrita, de um ângulo do triângulo e desejamos saber a medida do seu lado oposto, que é a distância entre Ana e Beatriz.

$$\frac{x}{\sin(45^\circ)} = 2R \implies \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \cdot (100\sqrt{2}) \implies x = 2 \cdot (100\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 200m$$

Logo, a distância entre Ana e Beatriz é de $200m$ como queríamos mostrar.

No GeoGebra, ao inserir as informações descritas a cima (usaremos na escala de 1:10), o comprimento do segmento \overline{AB} aparecerá na janela de álgebra e na janela de visualização.



3.2.2 Lei dos Cossenos

Teorema 3.9. Em um triângulo qualquer o quadrado do seu lado é sempre igual a soma dos quadrados dos outros dois lados menos o produto desses dois lados por 2 e pelo cosseno do ângulo formado por esses lados.

Demonstração. Vamos mostrar a lei dos cossenos usando o \triangle_{ABC} acutângulo de altura h referente a base \overline{AC} . No GeoGebra, usando a ferramenta *Polígono* traçamos um triângulo qualquer \triangle_{ABC} , e com a ferramenta *Reta Perpendicular* traçamos a altura h referente ao vértice B e em seguida com a ferramenta *Segmento* fixamos uma extremidade sobre o vértice B e a outra na intersecção da reta perpendicular com a base AC e finalizamos ocultando a reta perpendicular.

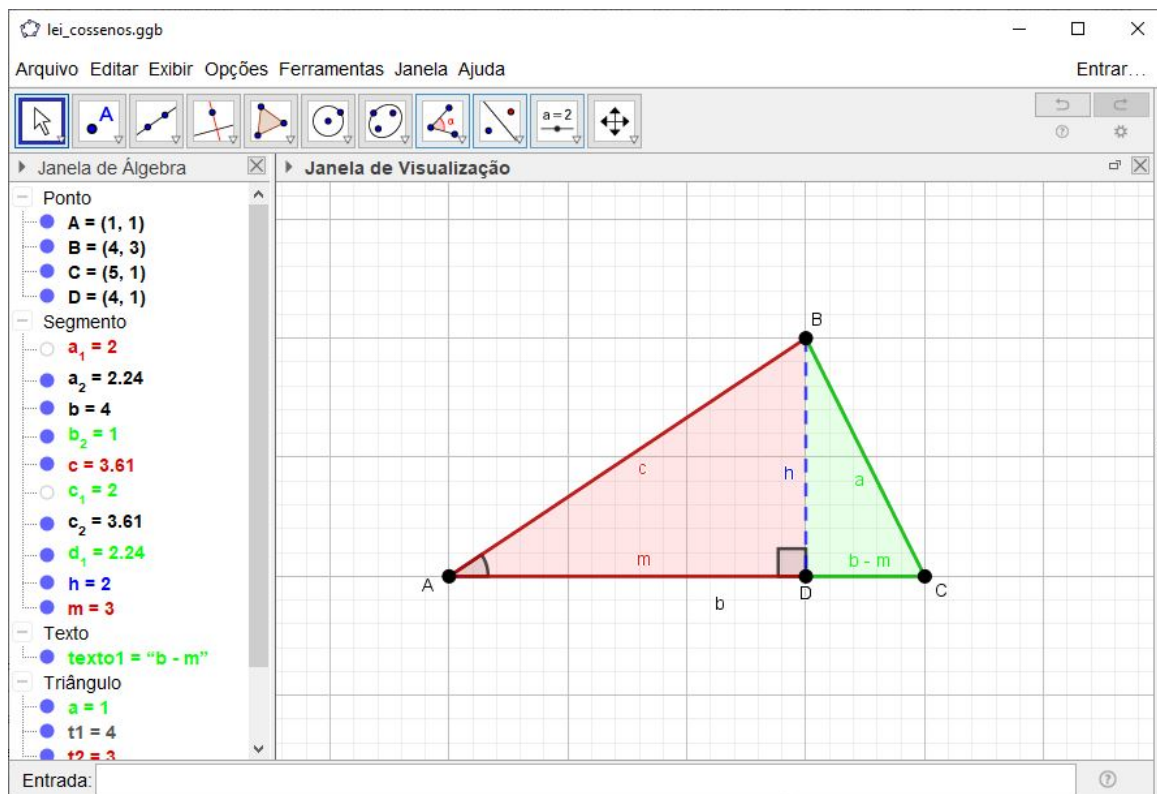
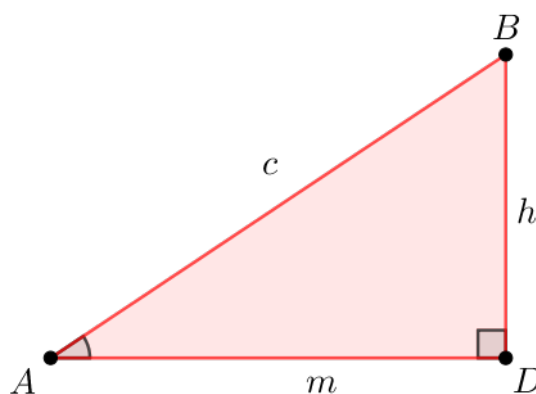


Figura 3.10: Lei dos Cossenos (triângulo acutângulo)

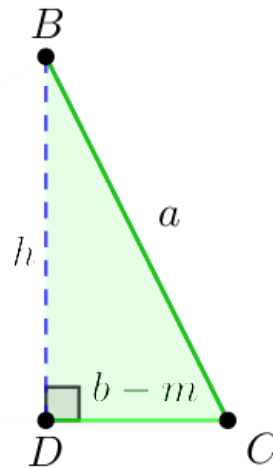
No $\triangle ABD$ temos



$$\cos(\hat{A}) = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos(\hat{A}) \quad (3.7)$$

$$c^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (3.8)$$

No $\triangle BCD$ temos



$$a^2 = h^2 + (b - m)^2 \quad (3.9)$$

Substituindo 3.7 e 3.8 em 3.9, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \quad (3.10)$$

De forma análoga para os demais lados do triângulo, temos

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

□

Outra opção de demonstração seria usando um triângulo obtuso.

Observação 3.10. Nos casos de triângulo obtuso, temos que $\cos(\hat{A}) = -\cos(180^\circ - \hat{A})$.

Demonstração. Vamos mostrar a lei dos cossenos usando o \triangle_{ABC} obtuso em A de altura h referente a base \overline{AC} . No GeoGebra podemos fazer uso da figura anterior, basta apenas deslocar, usando a ferramenta *Mover*, o vértice B para a direita (ou para a esquerda) até que o ângulo $C\hat{A}B$ (ou $B\hat{C}A$) seja obtuso.

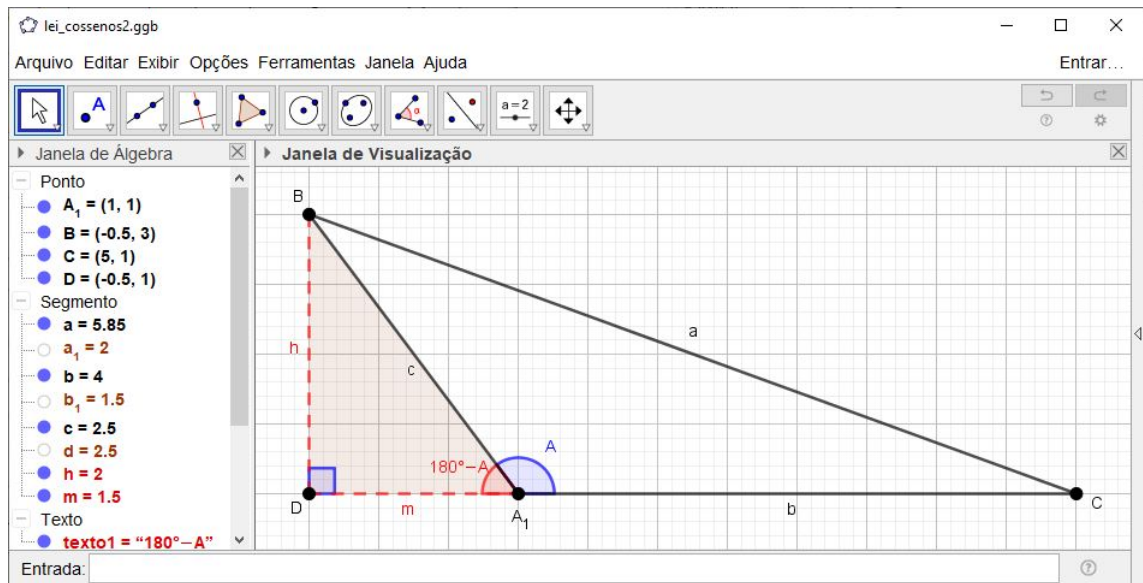
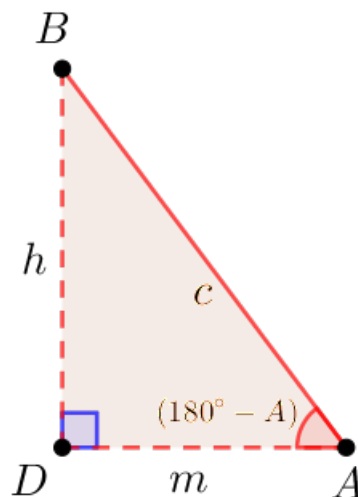


Figura 3.11: Lei dos Cossenos (triângulo obtusângulo)

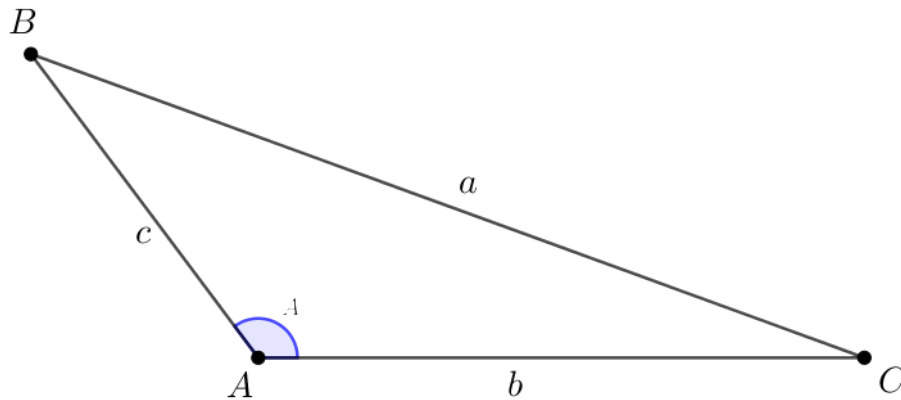
no $\triangle BAD$ temos



$$\cos(180^\circ - A) = \frac{m}{c} \Rightarrow m = -c \cdot \cos(\hat{A}) \quad (3.11)$$

$$c^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (3.12)$$

no $\triangle BCA$ temos



$$a^2 = h^2 + (b + m)^2 \quad (3.13)$$

substituindo 3.11 e 3.12 em 3.13, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) \quad (3.14)$$

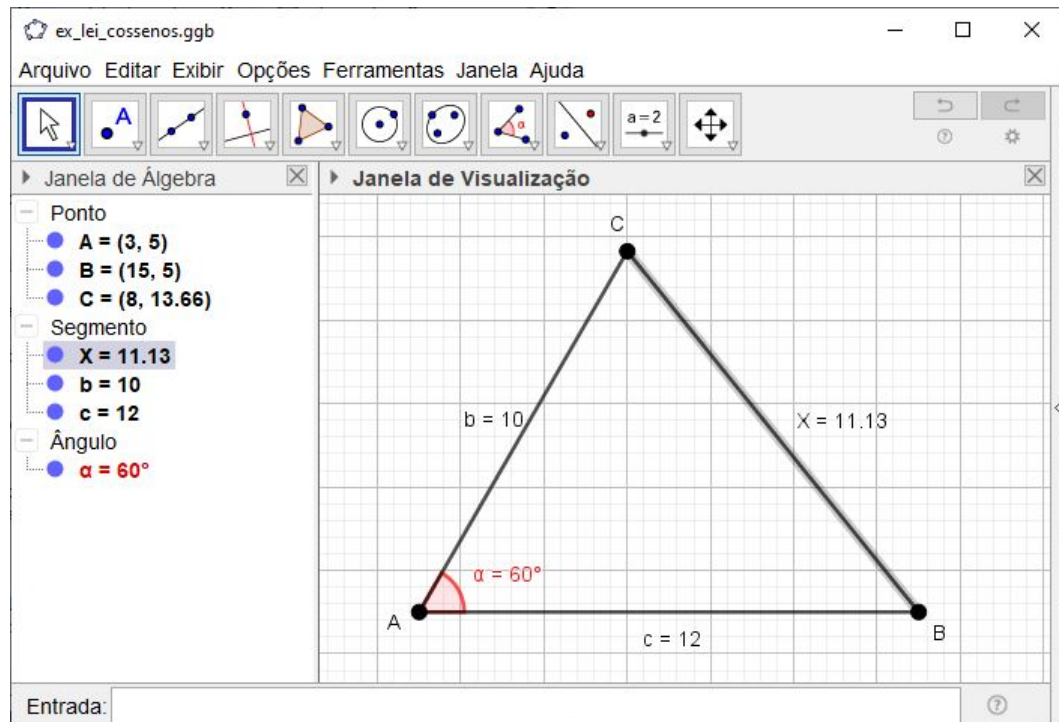
O processo ocorre de forma análoga caso o ângulo obtuso estivesse em qualquer dos outros vértices, daí temos

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

□

Exemplo 3.11. Dois lados de um triângulo medem 10cm (\overline{AB}) e 12cm (\overline{AC}) e formam entre si o ângulo \hat{BAC} de 60° . Calcule a medida do lado \overline{BC} .

Resolução. Do problema podemos inserir no GeoGebra dois segmentos de mesma origem (A) usando a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo*, cada um medindo 10 e 12, e em seguida, usando a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa*, determinar o ângulo de 60° que deve formar entre os dois segmentos. Com a ferramenta *Polígono* determinar o triângulo que contém os três vértices determinados. Encontramos a medida do segmento \overline{BC} desejada.



Como será utilizado o ângulo $B\hat{A}C$ e dos lados \overline{AB} e \overline{AC} e desejamos saber a medida do lado $\overline{BC}(x)$, devemos aplicar a lei dos cossenos.

$$\begin{aligned} x^2 &= 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos(60^\circ), \\ &= 100 + 144 - 120, \\ &= 124, \end{aligned}$$

agora extraíndo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade, temos

$$x = 2\sqrt{31} = \overline{BC}$$

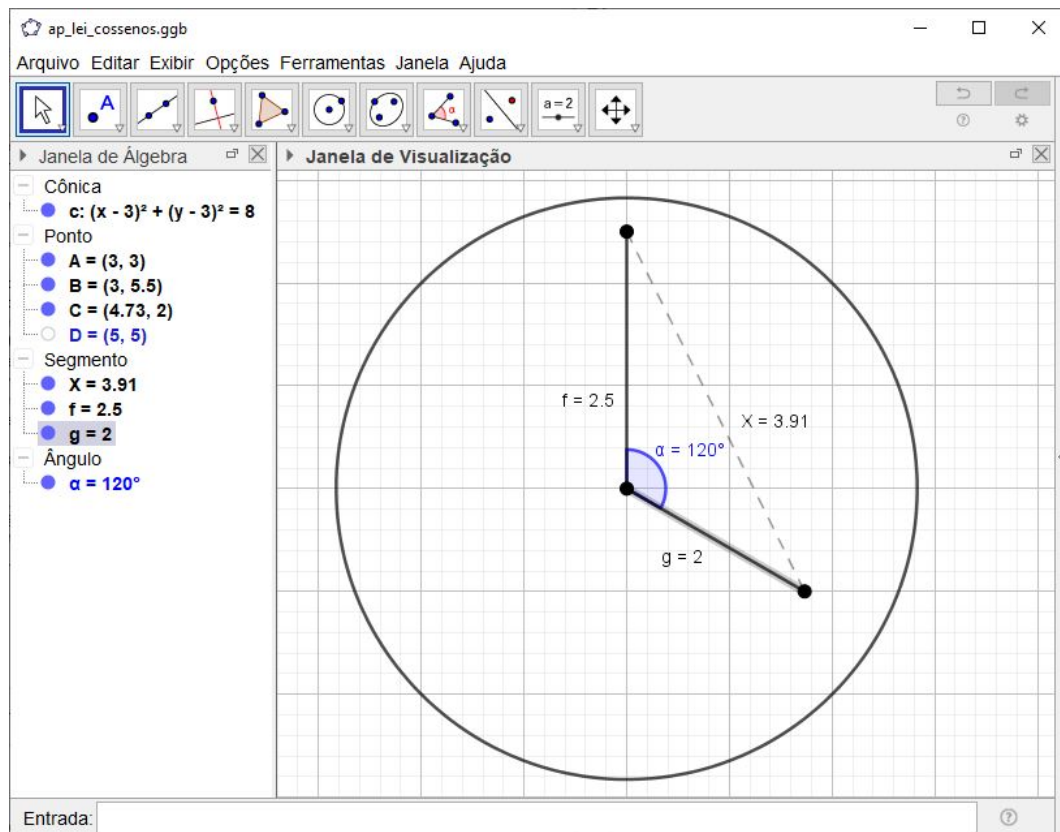
Na janela de álgebra e na janela de visualização do GeoGebra podemos constatar que o segmento \overline{BC} tem medida igual $2\sqrt{31} \cong 11,13$.

Exemplo 3.12 (Aplicação). Um relógio de parede com ponteiros das horas e minutos medindo, respectivamente, 20cm e 25cm marca exatamente 16h. Determine a distância entre as extremidades dos dois ponteiros.

Resolução. Vamos primeiramente descobrir a medida do ângulo formado entre os ponteiros do relógio multiplicando por 4 a medida do ângulo entre cada número do relógio,

$$\alpha = 4 \cdot \frac{360^{\circ}}{12} = 120^{\circ}$$

Agora, podemos imaginar essa situação no GeoGebra, onde já sabemos que a medida do ângulo formado entre os ponteiros do relógio é de 120° . Com a ferramenta *Círculo dados Centro e um dos Seus Pontos* determinamos uma circunferência com raio maior que 25, já que o ponteiro maior do relógio tem medida igual a 25, para representar o relógio (Vamos fazer a figura na escala 1:10). Agora vamos utilizar a ferramenta *Segmento com Comprimento Fixo* para inserir os segmentos de medida iguais a 20 unidades e 25 unidades com mesma origem. Em seguida, com a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa* determinar o ângulo de 120° formado entre esses segmentos. Basta usar a ferramenta **Segmento** para medir a distância entre as extremidades desses segmentos que aparecerá na janela de álgebra ou na janela de visualização.



aplicando a lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} x^2 &= 25^2 + 20^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20 \cdot \cos(120^{\circ}), \\ &= 625 + 400 + 500, \\ &= 1525, \end{aligned}$$

agora extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade, temos

$$x = 5\sqrt{61} \cong 39,1cm$$

3.2.3 Uma conexão entre as Relações Métricas: Teorema de Pitágoras e Lei dos Cossenos

Percebemos que a diferença entre o Teorema de Pitágoras 3.7 e o Teorema Lei dos Cossenos 3.9 é o termo $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A})$, que é responsável justamente por compensar a diferença que ocorre quando o triângulo não é retângulo. Aplicando lei dos cossenos em um triângulo retângulo teremos $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\hat{A}) = 0$ já que $\cos(90^\circ) = 0$, reduzindo, dessa forma, ao Teorema de Pitágoras, onde a área do polígono formado a partir do maior lado do triângulo é igual a soma das áreas dos polígonos formados pelos outros dois lados. Quando o ângulo \hat{A} é obtuso, teremos um acréscimo na soma das áreas formadas pelos lados adjacentes a este ângulo. E quando o ângulo \hat{A} é agudo, teremos um desconto na soma das áreas formadas pelos lados adjacentes a este ângulo.

Usando o GeoGebra conseguimos destacar essa relação utilizando a Ferramenta Controle Deslizante C sobre o vértice \hat{B} ou \hat{C} , de tal forma que ao deslocar o vértice com relação ao eixo das ordenadas ou das abscissas causará mudança de valor no ângulo reto fazendo com que este passe a ser obtuso ou agudo, e ao mesmo tempo a medida dos dois lados que compartilham o vértice que está sendo deslocado alteram seu comprimento.

Podemos verificar essa relação em <https://www.geogebra.org/m/cns9yucc>, onde o vértice B do triângulo \triangle_{ABC} , através do controle deslizante, se desloca na horizontal de forma a admitir triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo. E ainda constatar, através das fórmulas que aparecem na janela de visualização o Teorema da Lei dos Cossenos.

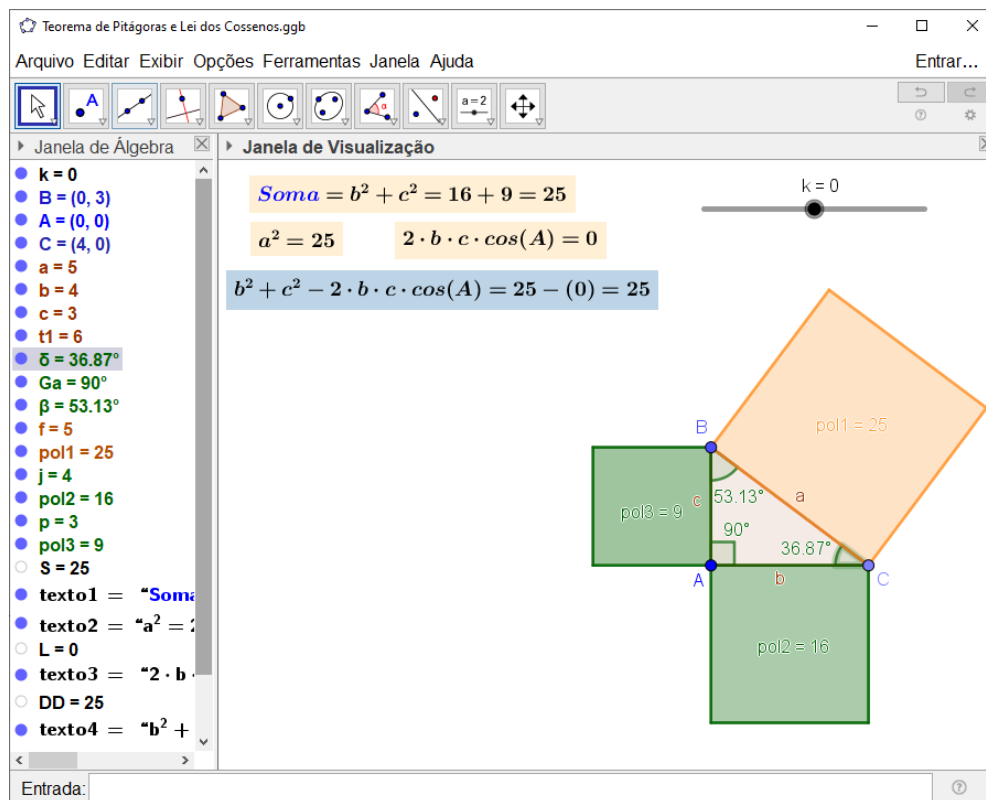
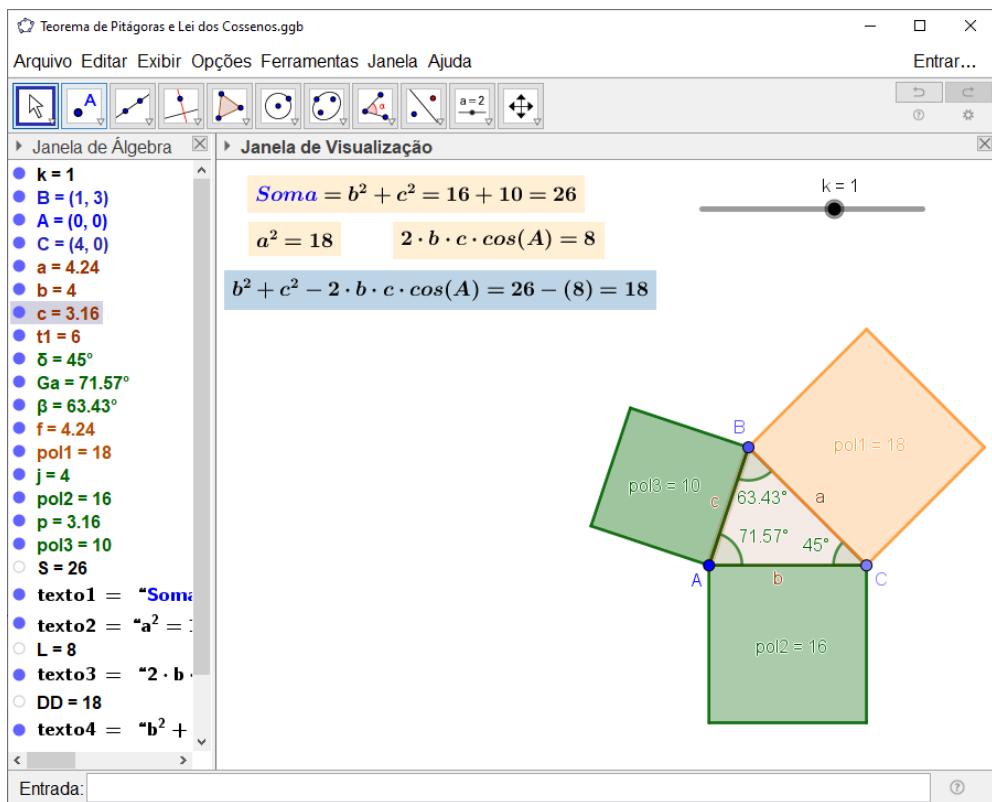
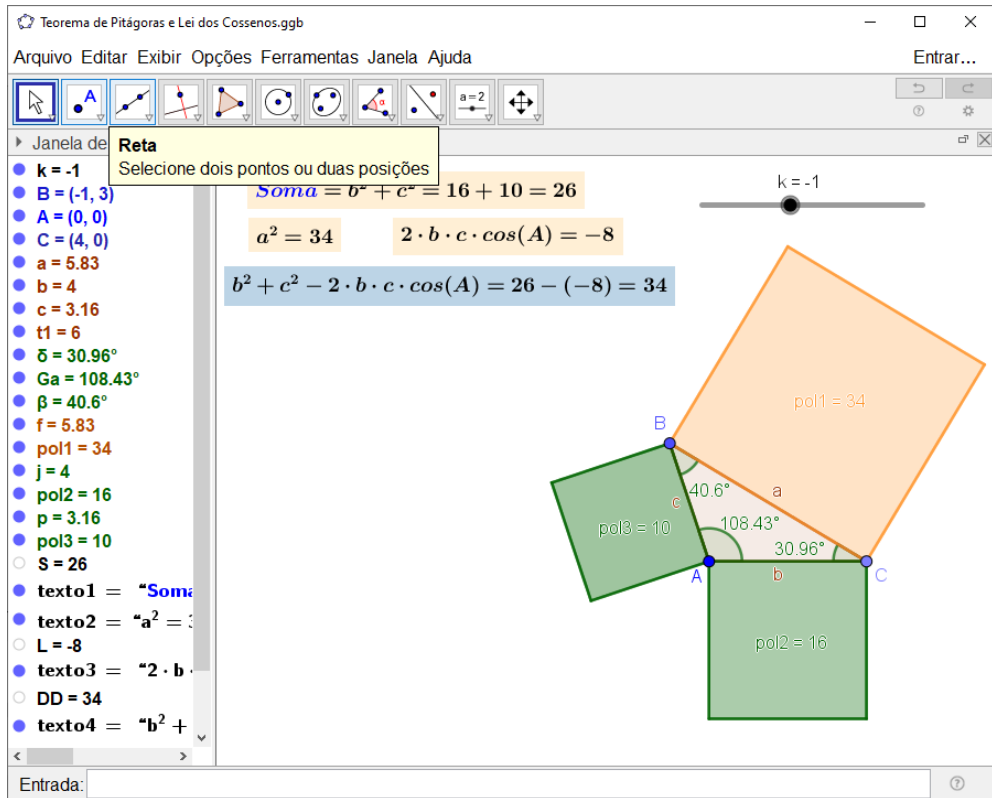


Figura 3.12: Relações Métricas

Na Figura 3.12 escolhemos o Controle Deslizante no vértice B deslocando-o na horizontal, ou seja, alterando o valor de x em até 5 unidades (para a direita ou para esquerda). Dessa forma os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} mudam de tamanho.



Proposta de Ensino

No ambiente escolar me deparei, ao longo do tempo de docência, com obstáculos como dificuldade de aprendizagem e concentração, falta de motivação e diversidade cognitiva que impediam ou atrasavam o processo de aprendizagem de geometria plana no ensino fundamental. Percebi que a ausência de ferramentas que transformassem figuras geométricas em objetos concretos era fator evidente no atraso da construção do conhecimento. Percebi a dificuldade do discente em resolver problemas geométricos que não acompanham suas respectivas figuras. Daí surgiu a ideia de pesquisar por ferramentas atuais, suficientes e capazes de despertar a atenção do aluno para a matemática, especificamente falando da geometria. Como a informática está presente no cotidiano dos jovens, decidimos utilizar um software capaz de produzir ou reproduzir nas telas de computadores e similares as informações descritas em um problema, ou seja, reproduzir de forma simples suas formas geométricas. Buscamos soluções para melhorar o rendimento do aprendizado de geometria que seria utilizar o software **GeoGebra** e suas ferramentas para viabilizar aulas mais dinâmicas e interativas.

A matemática, assim como outras disciplinas, necessita de meios que possibilitem o aprimoramento de habilidades para obtenção de conhecimentos utilizando tecnologia. O próprio governo brasileiro, desde meados de 1980, vem estimulando a implantação das TICs na educação com investimentos em estrutura física e capacitação de professores.

A informática na Educação vem como um aliado do professor para facilitar o processo de ensino, é uma nova ferramenta no processo pedagógico que permite ao professor uma maior facilidade em mostrar e apresentar seu conteúdo para seus alunos e de forma bem mais interessante e criativa. [2, p.17]

De acordo com os PCN'S é preciso desenvolver competências que estimulem a capacidade de ouvir, discutir, ler ideias, interpretar significados, pensar de forma criativa e desenvolver o pensamento indutivo do indivíduo possibilitando assim a ampliação da sua capacidade de solucionar problemas. A tecnologia presente nos

computadores, tablets e celulares podem e devem desempenhar o papel de mídias responsáveis por desenvolver essas competências. Apesar da evolução tecnológica e das tentativas governamentais para que a implantação e acesso às TICs sejam o mais amplo e democrático possível, percebemos quão lento é o processo de inserção dessas ferramentas em sala de aula. Quando o problema não é infraestrutura é a resistência do profissional da educação em fazer uso da tecnologia diante da falta de conhecimento e, na maioria das vezes, não é do seu interesse sair da sua zona de conforto e ampliar seu conhecimento.

Mesmo diante de todas as dificuldades e sabendo que o processo é longo e trabalhoso, a inserção pedagógica de softwares, como o GeoGebra, na educação básica pode alcançar resultados extremamente satisfatórios no que tange ao processo ensino aprendizagem, sendo uma ferramenta didática que se torna facilitadora no aprendizado de matemática.

O desenvolvimento das tecnologias da informação permite que a aprendizagem ocorra em diferentes lugares e por diferentes meios. Portanto, cada vez mais as capacidades para criar, inovar, imaginar, questionar, encontrar soluções e tomar decisões com autonomia assumem importância. A escola tem um importante papel a desempenhar ao contribuir para a formação de indivíduos ativos e agentes criadores de novas formas culturais. [5, p.140]

Este trabalho busca contribuir para a evolução na utilização das TICs na educação, tornando as aulas prazerosas aos educandos que terão a oportunidade de vivenciar aulas não tradicionais, ou seja, aulas com didática inovadora com atributos tecnológicos objetivando chegar a resultados satisfatórios no processo de ensino aprendizagem de matemática.

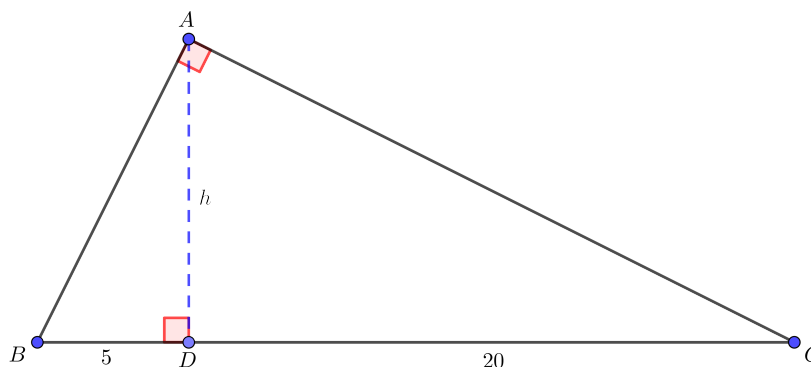
Uma vez que as TICs são recursos tecnológicos e ferramentas essenciais no processo educacional, o professor trabalhando de forma ética e responsável se torna uma ponte de conexão entre os alunos e as tecnologias educacionais. Entretanto um estudo contundente sobre o tema se faz necessário para superar os desafios de implantação/utilização das TICs aproximando cada vez mais a informática da educação matemática. Há um longo caminho a ser trilhado na busca de ferramentas que visem proporcionar ao professor e ao aluno conhecimentos matemáticos ou um meio para construção de conhecimentos matemáticos. Este trabalho busca avançar neste caminho.

Nesse sentido propomos a lista de exercícios (E) que aborda relações métricas no triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras, e a lista de exercícios (G) que retrata lei dos senos e dos cossenos que deverão ser desenvolvidas com o auxílio e/ou verificação do software GeoGebra, em que o educando deverá fazer os

cálculos matemáticos na lista ou no caderno e averiguar a veracidade do resultado junto ao programa.

A seguir será apresentado alguns exemplos resolvidos que deverão ser observados para o desenvolvimento da lista de exercícios (E).

Exemplo 4.1 (1). Calcule a altura h do triângulo \triangle_{ABC} , retângulo em A .

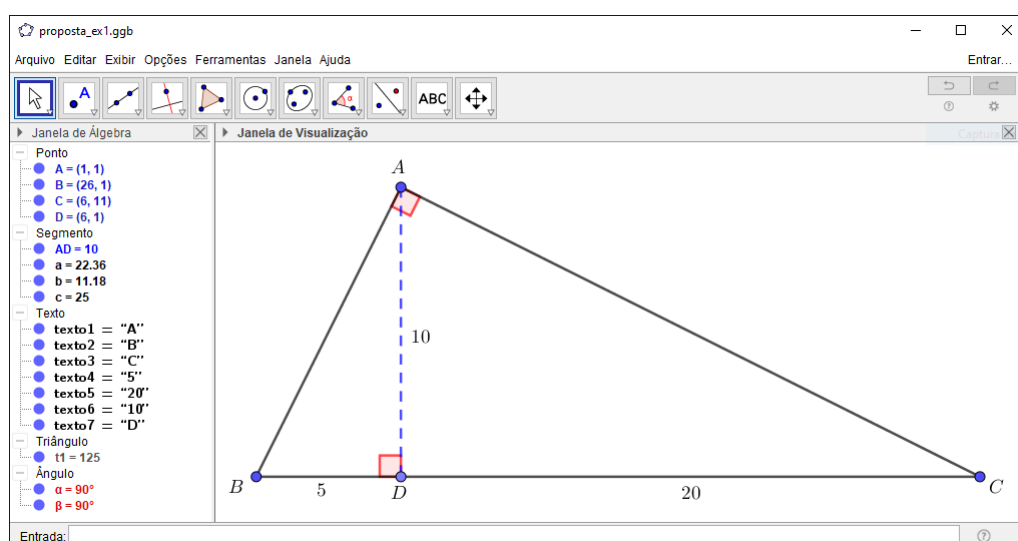


Resolução. Utilizando a relação 3.1, temos

$$\begin{aligned} h^2 &= 5 \cdot 20 \\ &= 100 \end{aligned}$$

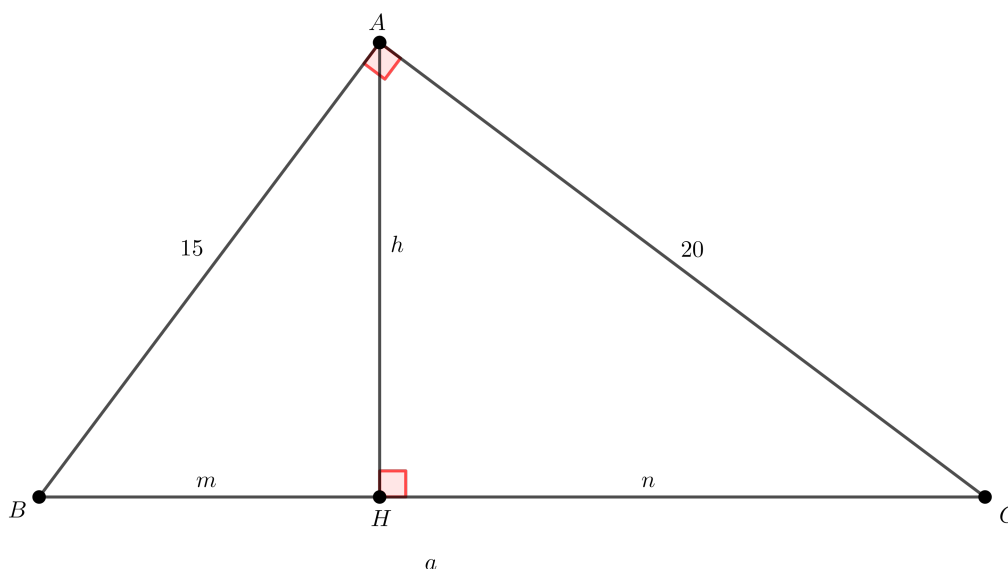
Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade temos

$$h = 10$$



No software GeoGebra devemos construir a figura e verificar a altura h do segmento \overline{AD} , para isso devemos primeiramente estabelecer a base \overline{BC} fixa com comprimento de 25 unidades, usando a ferramenta **Segmento de Comprimento Fixo**, como apresentado inicialmente no exercício. Em seguida devemos construir o triângulo, retângulo em A , usando a ferramenta **Polígono** onde sua hipotenusa será \overline{BC} . Enfim, com a ferramenta **Reta Perpendicular** definimos a reta suporte da altura h que corresponde ao segmento \overline{AD} e na janela de álgebra verificamos a medida do seu comprimento que é igual a 10.

Exemplo 4.2 (2). Determine no triângulo abaixo a medida da hipotenusa a (\overline{BC}), da altura h (\overline{AH}), e a projeção dos catetos m (\overline{BH}) e n (\overline{HC}) sobre a hipotenusa.



Resolução. Utilizando a relação 3.5, temos

$$\begin{aligned} a^2 &= 15^2 + 20^2 \\ &= 625 \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade temos

$$a = 25$$

Agora usando a relação 3.3, temos

$$25 \cdot h = 15 \cdot 20$$

$$25 \cdot h = 300$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por 25 temos

$$h = 12$$

Agora usando a relação 3.4, temos

$$15^2 = 25 \cdot m$$

$$225 = 25 \cdot m$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por 25 temos

$$m = 9$$

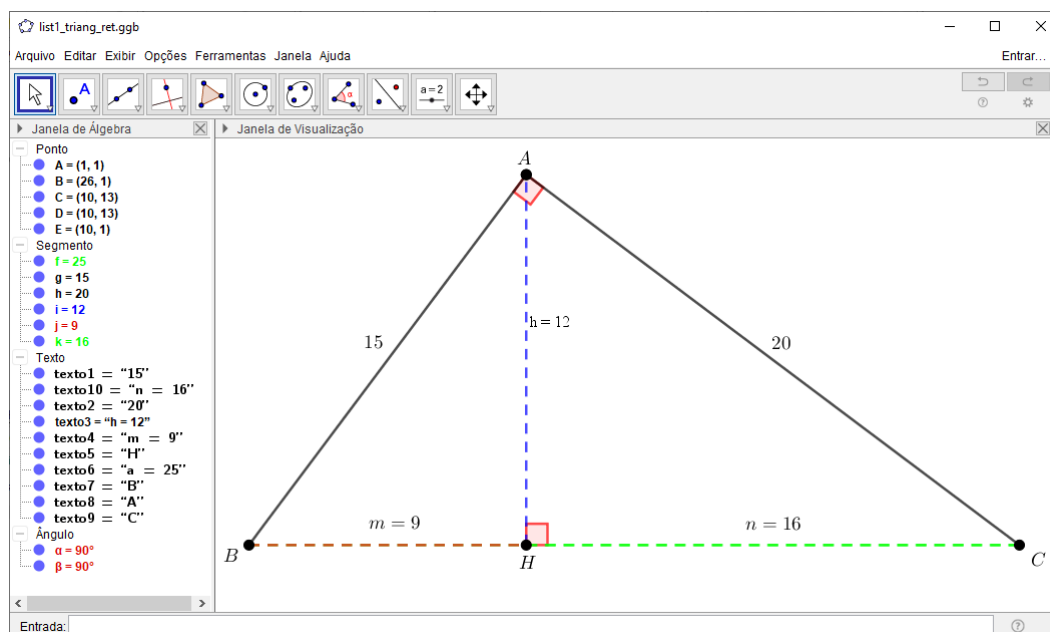
Agora usando a relação 3.1, temos

$$12^2 = 9 \cdot n$$

$$144 = 9 \cdot n$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por 9 temos

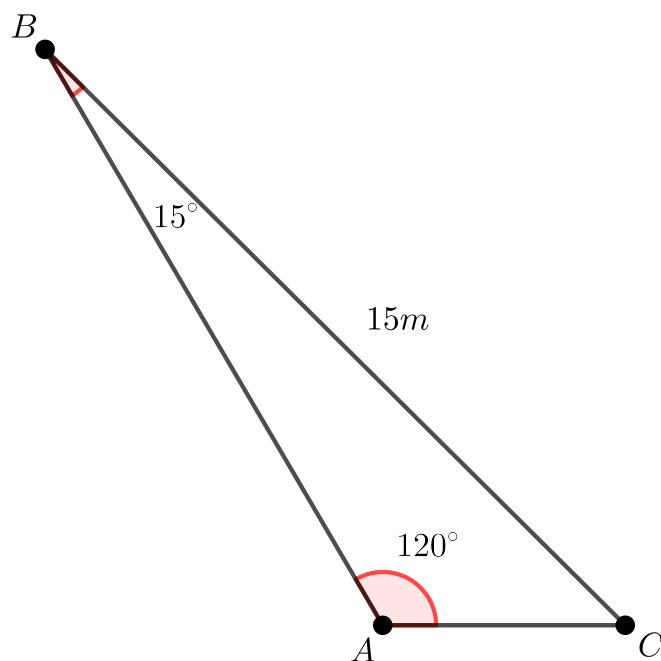
$$n = 16$$



No GeoGebra devemos desenhar um triângulo retângulo com catetos medindo 15 unidades e 20 unidades. Para isso basta usarmos a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** e construir os dois segmentos a partir do mesmo vértice e em seguida rotacionar um dos dois 90° em qualquer sentido, assim teremos os catetos do triângulo retângulo como foi fornecido no enunciado. Agora podemos construir o polígono (triângulo) usando a ferramenta **Polígono** e traçar a altura referente à hipotenusa, usando a ferramenta **Reta Perpendicular**. A partir de agora é só encontrar as medidas pedidas de m, n, a e h construindo segmentos de retas e verificando suas medidas na janela de álgebra.

Propomos também uma lista de exercícios (G) que aborda as relações métricas em um triângulo qualquer, ou seja, as leis de Seno e de Cosseno que, também, deverá ser desenvolvida junto ao GeoGebra verificando os resultados. A seguir será apresentado alguns exemplos resolvidos que deverão ser observados para o desenvolvimento da lista de exercícios 2.

Exemplo 4.3 (1). Sabendo que em todo triângulo ABC a medida de cada lado é diretamente proporcional ao seno do ângulo oposto ao lado, determine a medida do lado \overline{AB} do triângulo representado abaixo.



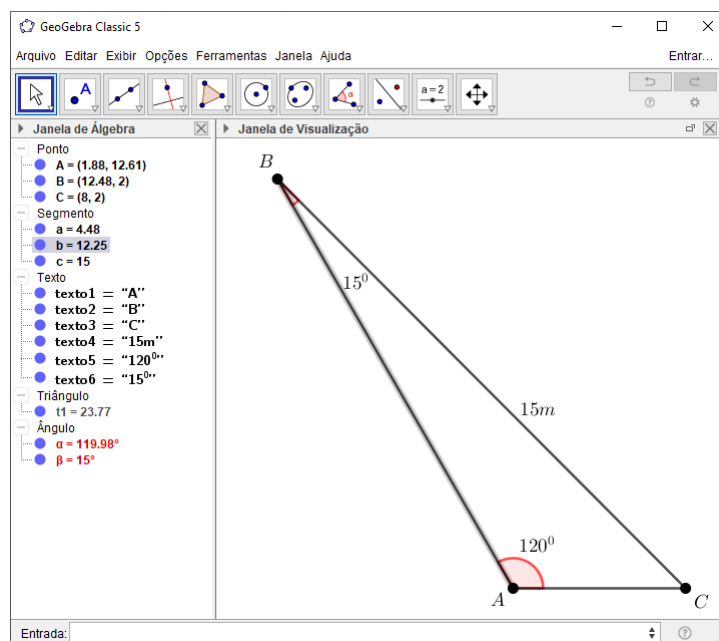
Resolução. Como o ângulo $\hat{A}CB = 45^\circ$ e utilizando a relação 3.6 temos

$$\frac{x}{\sin(45^\circ)} = \frac{15}{\sin(120^\circ)}$$

$$x = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

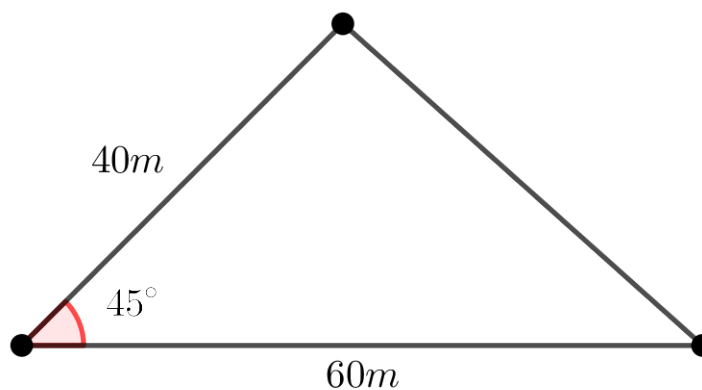
Racionalizando o denominador, temos

$$x = 5\sqrt{6}m.$$



No GeoGebra, analogamente aos exemplos anteriores, basta construir o triângulo obedecendo as restrições de ângulos e a medida do lado \overline{BC} que é $15m$, usando a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**. Em seguida conferir na janela de álgebra o valor do segmento \overline{AB} desejado que é de $5\sqrt{6}m$.

Exemplo 4.4 (2). Um engenheiro precisa fazer a medições de um terreno na forma triangular. Um dos lados mede $40m$, outro mede $60m$ e o ângulo formado por este dois lados é de 45° . Determine a medida o terceiro lado.

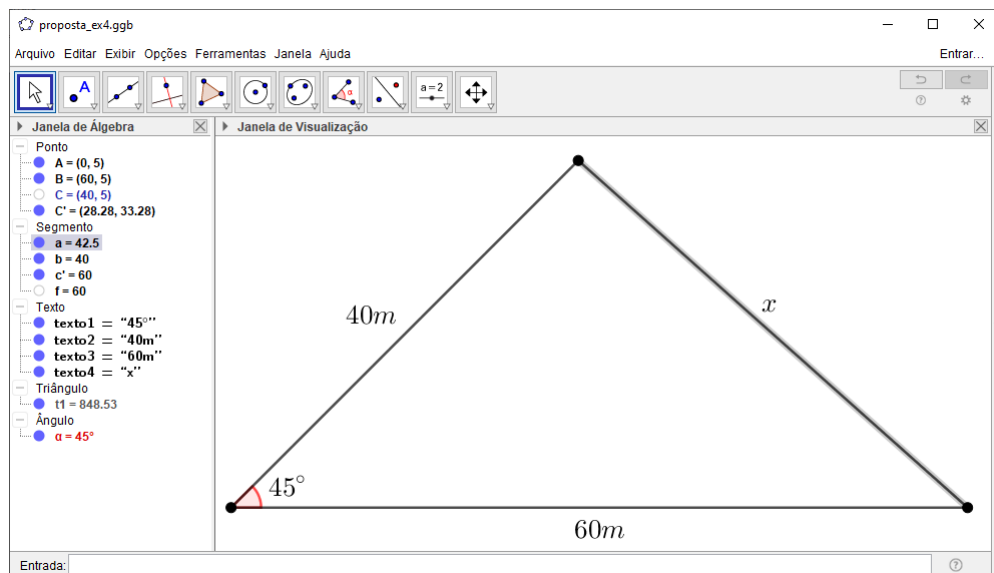


Resolução. Utilizando a relação 3.10, temos

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \cos(45^\circ) \\
 &= 1600 + 3600 - 4800 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= 5200 - 2400\sqrt{2} \\
 &= 400(13 - 6\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade temos

$$x = 20\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}m$$



No GeoGebra, construímos o triângulo obedecendo as restrições do ângulo e as medidas dos lados, primeiramente construindo dois segmentos, usando a ferramenta **Segmento de Comprimento Fixo**, de mesma origem e em seguida, usando a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa**, definimos a medida do ângulo formado entre os dois segmentos. Agora, para finalizar, usamos a ferramenta **Segmento** para medir o comprimento entre as extremidades dos dois segmentos e verificar sua medida na janela de álgebra.

4.1 Considerações

Como vimos ao longo do trabalho a geometria, segundo [4] e [1], fornece ao aluno a capacidade de visualizar, interpretar e ainda ampliar sua percepção da

realidade. Com ela o aluno desenvolve sua capacidade de relacionar o abstrato ao concreto. Assim, o trabalho apresentou conceitos matemáticos que se tornam ainda mais atraentes com o auxílio do software GeoGebra. Finalizamos com uma proposta de práticas a serem aplicadas em sala de aula.

Esperamos que o presente trabalho seja relevante no desenvolvimento e crescimento crítico dos professores, principalmente da rede pública de educação, proporcionando uma prática tecnológica para ensinar matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] BOULOS, A. M. M. **O ensino da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental.** *XIII CIAEM ? IACME*, 2011.
- [2] BRAGA, J. V. **Informática na educação - ferramenta de apoio ao ensino e de estruturação do profissional do futuro.** *Anapolis: Semect*, 2011.
- [3] BRASIL, L. D. B. **Lei n. 5692/71: Lei de diretrizes e bases da educação nacional, ldb**, 1971.
- [4] BRASIL, P. C. N. **Matemática (1ª e 2ª Ciclos do Ensino Fundamental).** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [5] BRASIL, P. C. N. **Matemática (3ª e 4ª Ciclos do Ensino Fundamental).** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [6] BRASIL, S. D. E. B. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC.** Brasília: MEC, 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso: 27/06/2021.
- [7] DANTE, L. R. **Teláris matemática, 8º ano: ensino fundamental, anos finais.** 2018.
- [8] DOLCE, O.; PONPEU, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**, volume 9. Atual Editora, São Paulo, 2013.
- [9] FOSSA, J. A. **Matemática, história e compreensão.** *Revista Cocar*, 2:7–15, 2008.
- [10] FRESCKI, F. B. **Avaliação da qualidade de softwares educacionais para o ensino de álgebra.** 2008. http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Fran.pdf Acesso: 02/08/2021.

- [11] GRANDO, C. M. **Geometria: espaço e forma.** *Coordenadoria de Educação a Distância*, 2008.
- [12] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade: 8º ano**, volume 6. São Paulo, 2009.
- [13] KALEFF, A. M. **Tomando o ensino da geometria em nossas mãos.** *Educação Matemática em Revista*, (2), 1994.
- [14] LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas.**(revisão técnica e adaptação da obra de lana mara siman). *Editora UFMG, Porto Alegre*, 1999.
- [15] LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar geometria? a educação matemática em revista.** *Blumenau, ano III*, 3(4):3–13, 1995.
- [16] LORENZATO, S. A. **Educação infantil e percepção matemática.** campinas, sp: **Autores associados**, 2006. *Coleção Formação de Professores*, 2006.
- [17] NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores.** *São Carlos: EdUFSCar*, p. 9–74, 2003.
- [18] TAJRA, S. F. **Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade.** Número 3. rev. atual e ampl., São Paulo: Érica, 2001.
- [19] TEIXEIRA, A. C.; BRADÃO, E. J. R. **Software educacional: o difícil começo**, volume 1. CINTED-UFRGS, 2003. http://penta2.ufrgs.br/edu/ciclopalestras/artigos/adriano_software.pdf Acesso: 01/08/2021.
- [20] VALENTE, J. A.; OTHERS. **O computador na sociedade do conhecimento.** *Campinas: Unicamp/NIED*, 6, 1999.

Primitivas

Reta - É uma figura geométrica que não possui definição. É formada por pontos e é infinita em qualquer direção, isso significa que dados dois pontos distintos de uma reta sempre existirá um ponto entre eles também pertencente a essa reta.

Semirreta - É parte de uma reta que tem início em um ponto qualquer e segue para uma de suas direções. Podemos dizer que um ponto divide uma reta em duas semirretas.

Segmento de Reta - É definido como uma parte da reta que está delimitada por dois pontos.

Colinear - Que está sobre a mesma reta ou que compartilha a mesma reta.

Congruente - É uma característica atribuída as figuras que derivam de outra através de uma rotação ou translação.

Adjacente - Ângulos que têm o mesmo vértice e estão situados em oposição ao seu lado comum.

Complementar - Dizem-se complementares um do outro dois ângulos cuja soma é um ângulo reto.

Suplementar - Ângulo cuja soma com o primeiro equivale a um ângulo raso (180^0).

Ponto Médio - É o ponto de equilíbrio de um segmento de reta. Podemos dizer que é o ponto que divide o segmento de reta exatamente no meio tendo dois segmentos iguais.

Lados Homólogos - São os dois lados que são opostos a ângulos iguais, cada um em um triângulo.

Cateto - Cada um dos lados do ângulo reto no triângulo retângulo.

Hipotenusa - É o lado oposto ao ângulo reto no triângulo retângulo.

Equiângulo - Possui todos os ângulos congruentes.

Equilátero - Possui todos os lados congruentes.

Retas ortogonais - São retas reversas (não estão no mesmo plano) que formam, entre si, um ângulo reto.

Transformação Geométrica

Isometria - é uma transformação geométrica do plano que conserva os comprimentos dos segmentos de reta e as amplitudes dos seus ângulos. Podem ser chamados de isometrias as aplicações que transformam uma figura em outra geometricamente igual mantendo suas propriedades, ou seja, é uma aplicação que conserva as distâncias entre os pontos e a amplitude dos ângulos.

Translação - é uma isometria que desloca a figura original segundo um vetor conservando a direção, o comprimento de segmentos de reta e as amplitudes dos ângulos. Nessa simetria a figura "desliza" sobre uma reta, ou seja, um elemento se desloca numa determinada direção e sempre paralelo a si próprio. Temos como exemplo o movimento dos elevadores e das escadas rolantes.

Reflexão - é uma isometria do ponto, reta, plano ou espaço que "espelha" os pontos em relação a um ponto (centro de reflexão), uma reta (eixo de reflexão) ou um plano (plano de reflexão), transformando-os em outro, que é simétrico em relação ao eixo dado.

Rotação - é um movimento corporal rígido que mantém um ponto fixo aplicando-se a rotações dentro de duas e três dimensões. Rotações em torno dos eixos x , y e z são chamadas de rotações principais. A rotação em torno de qualquer eixo pode ser realizada tomando uma rotação ao redor do eixo x , seguida de uma rotação ao redor do eixo y , seguida por uma rotação ao redor do eixo z . Em suma, qualquer rotação espacial pode ser decomposta em uma combinação de rotações principais.

Ângulo Inscrito em uma Circunferência - é o ângulo que tem seu vértice sobre a circunferência e lados secantes a ela em pontos distintos. Um ângulo inscrito tem medida igual a metade da medida do seu arco correspondente.

Ferramentas do GeoGebra

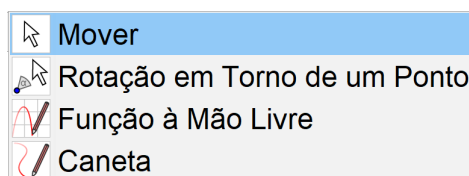


Figura C.1: *Mover*

Mover - desloca o objeto através da janela de visualização. É necessário selecionar o objeto e arrasta-lo até a posição desejada.

Rotação em Torno de um Ponto - rotaciona um objeto em torno de outro mantendo a mesma distância entre eles. É necessário selecionar o ponto de referência e o objeto a ser rotacionado.

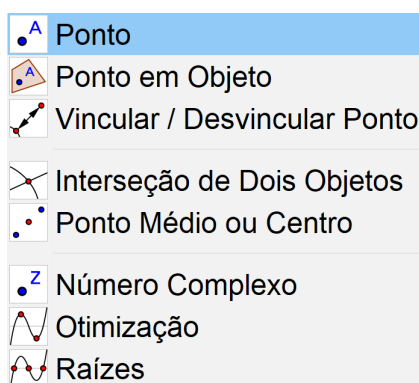


Figura C.2: *Ponto*

Ponto - cria pontos na janela geométrica. É necessário selecionar a posição desejada na janela.

Ponto em Objeto - permite que o ponto se vincule ao objeto que está na posição onde será inserido.

Vincular/Desvincular Ponto - vincula um ponto livre a um objeto ou desvincula um ponto. É necessário selecionar o ponto e o objeto em questão.

Interseção de Dois Objetos - cria um ponto fixo que pertence aos dois objetos.

No caso em que a interseção é um conjunto que contém mais de um ponto, apenas um será criado. É necessário selecionar a ferramenta e selecionar os dois objetos que serão utilizados.

Ponto Médio ou Centro - é necessário selecionar os dois pontos que darão origem ao ponto que está alinhado aos primeiros e cuja distância deste e os outros dois é a mesma.

Número Complexo - cria um ponto com coordenadas (x, y) que representa o ponto Z (*número complexo*), cuja expressão é: $z = x + yi$, sendo $i = (\sqrt{-1})$ e $i^2 = -1$. É necessário selecionar as coordenadas do ponto desejado na janela de visualização.

Otimização - exibe os extremos locais de uma junção já determinada. É necessário selecionar a ferramenta e depois a função que deseja utilizar para conhecer seus extremos locais.

Raízes - segue a mesma lógica da ferramenta de *Otimização*, porém apresenta as raízes da função escolhida.

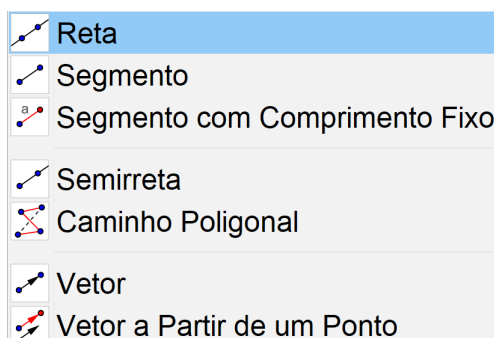


Figura C.3: *Reta*

Reta - constrói uma reta escolhendo dois pontos distintos da janela geométrica.

Segmento - constrói um segmento escolhendo dois pontos distintos da janela geométrica.

Segmento com Comprimento Fixo - seleciona ou cria um ponto livre que dará origem ao segmento e seu comprimento, sendo permitido movimentar o primeiro ponto, para mover o segmento, e rotacionar o segundo em torno no primeiro.

Semirreta - é criada a partir de dois pontos estabelecidos, onde o primeiro indica a origem da semirreta e o segundo o final do vetor direção.

Caminho Poligonal - é o caminho ao longo dos lados de um polígono que liga um ponto (considerado como o primeiro) até o último. Essa ferramenta é diferente de perímetro por desconsiderar um dos lados do polígono.

Vetor - segmento de reta orientado com propriedades. É necessário selecionar ou criar o ponto de origem e, em seguida, sua outra extremidade.

Vetor a Partir de um Ponto - gera um novo vetor com as mesmas propriedades de um já criado e origem em outro ponto. É necessário selecionar o vetor que se deseja copiar e o ponto que será utilizado como origem do novo vetor.

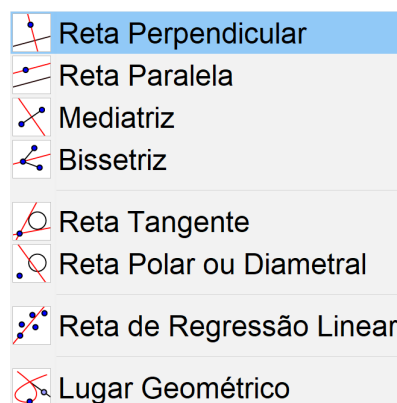


Figura C.4: *Reta Perpendicular*

Reta Perpendicular - selecione ou crie um ponto e depois escolha uma reta ou vetor e uma nova reta perpendicular à escolhida, e que passa pelo ponto desejado, será criada.

Reta Paralela - gera uma reta paralela à desejada, passando pelo ponto escolhido ou criado.

Mediatriz - cria uma reta perpendicular ao segmento que liga dois pontos escolhidos passando pelo seu ponto médio.

Bissetriz - é o lugar geométrico de pontos com uma característica em comum, ou seja, sejam duas retas A e B não coincidentes, ao conjunto de pontos que possuem uma distância igual a ambas as retas damos o nome de Bissetriz.

Reta Tangente - cria uma reta que tangente a uma função, cônica ou círculo desejado e depende de um ponto escolhido. Quando esse ponto pertence ao objeto desejado a reta gerada será tangente à curva naquele ponto.

Reta Polar ou Diametral - utilizada ao selecionar uma cônica ou círculo e um ponto qualquer. Ao considerarmos o ponto utilizado como A e o raio da circunferência, ou a distância focal da cônica como R, com origem em O, a ferramenta criará uma reta que passa por um ponto não representado, mas que será reconhecido nesse documento como A', tal que o produto escalar entre $\vec{OA'}$ e \vec{OA} seja igual a R^2 . A reta gerada passará pelo ponto A', e terá como vetor normal o vetor \vec{OA} .

Reta de Regressão Linear - determina a reta que mais se adequa a uma sequência de pontos, ou seja, determina o que seria a reta ideal para uma

situação hipotética considerando que aqueles pontos possuem uma margem de erro em relação ao ideal. Para utilizá-la, é necessário selecionar a sequência de pontos que vai gerar a reta desejada.

Lugar Geométrico - cria um lugar geométrico a partir de dois pontos dependentes entre si, ou a partir de um ponto e um controle deslizante.



Figura C.5: *Polígono*

Polígono - para ser criado é necessário selecionar ou criar os vértices do mesmo que são ligados entre si através de um segmento de reta.

Polígono Regular - para ser criado é necessário determinar os dois primeiros vértices e a quantidade total de vértices na figura.

Polígono Rígido - é utilizado selecionando os vértices da nova figura ou um polígono já criado e o resultado é um polígono que não pode ser modificado.

Polígono Semi-deformável - gera um polígono que ao mover o primeiro ponto é o mesmo que mover todo o polígono.

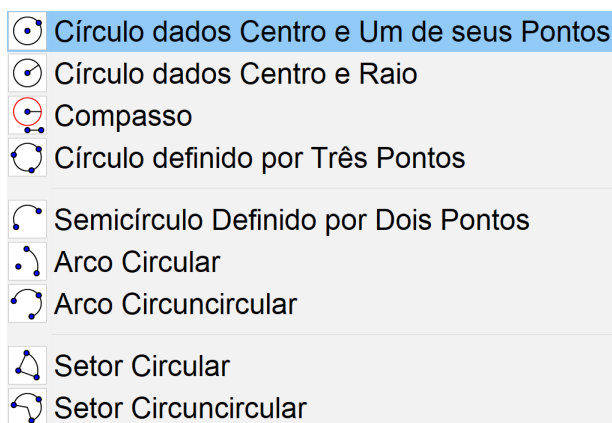


Figura C.6: *Círculo*

Círculo dados Centro e Um de seus Pontos - para ser utilizada basta selecionar primeiro o ponto que representa o centro do círculo e depois um dos pontos que definirá o raio.

Círculo dados Centro e Raio - para ser utilizada é necessário selecionar o ponto referente ao centro do círculo e depois determinar um valor para o seu raio.

Compasso - usa a distância entre dois pontos para que a mesma seja o raio de um novo círculo a ser determinado. É necessário selecionar os dois pontos e o ponto que será o centro do novo círculo.

Círculo definido por Três Pontos - é necessário selecionar os três pontos que determinarão o novo círculo.

Semicírculo Definido por Dois Pontos: cria um semicírculo a partir da seleção do primeiro ponto.

Arco Circular - utiliza três pontos para criar um arco, sendo o primeiro ponto responsável por determinar o centro do arco que será criado, o segundo dará início ao mesmo e o terceiro representará o final.

Arco Circuncircular - utiliza três pontos para criar um arco, sendo o primeiro ponto responsável por determinar o início do arco que será criado, o segundo será um ponto contido no arco e o terceiro será o final do arco.

Setor Circular - utiliza três pontos para criar um setor circular, sendo o primeiro ponto responsável por determinar o centro do setor que será criado, o segundo dará início ao mesmo e o terceiro representará a direção do segmento que vai do centro até o ponto final.

Setor Circuncircular - utiliza três pontos para criar um setor circuncircular, sendo os primeiros dois pontos contidos no círculo que dá origem ao setor desejado.

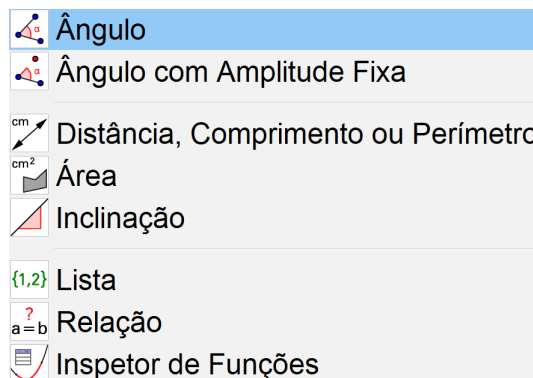


Figura C.7: *Ângulo*

Ângulo - determina o ângulo entre dois segmentos. É necessário selecionar os segmentos ou os três pontos que definem o ângulo.

Ângulo com Amplitude Fixa - determina um ângulo a partir de um segmento e de sua amplitude. É necessário selecionar os dois pontos que formam o primeiro seguimento e a amplitude desejada.

Distância, Comprimento ou Perímetro - exibe uma caixa de texto com informações sobre um ou mais objetos, como por exemplo a distância entre

eles, comprimento de um segmento ou perímetro de uma figura. É necessário selecionar os elementos para obter suas informações.

Área - exibe uma caixa de texto com informações sobre a área de um objeto. É necessário selecionar o objeto desejado.

Inclinação - apresenta o coeficiente de inclinação de uma reta, semirreta ou segmento. É necessário selecionar o objeto cujo coeficiente deseja-se descobrir.

Lista - funciona em conjunto com uma Planilha.

Relação - identifica algumas relações entre dois objetos: se um objeto pertence a outro; se duas retas são paralelos; se duas retas são iguais.

Inspetor de Funções - possibilita uma análise mais específica da função em um intervalo como pontos de máximo e mínimo, integral, reta tangente, etc.

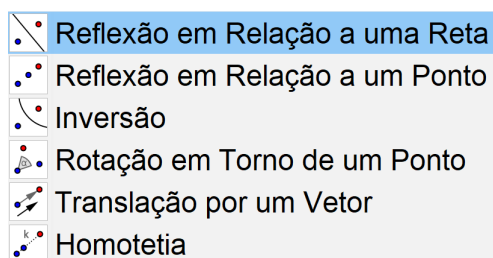


Figura C.8: *Reflexão em Relação a uma Reta*

Reflexão em Relação a uma Reta - espelha um objeto em relação a uma reta. É necessário selecionar o objeto e a reta desejados.

Reflexão em Relação a um Ponto - espelha um objeto em relação a um ponto. É necessário selecionar o objeto e ponto desejados.

Inversão - inverte um objeto em relação a um círculo. É necessário selecionar primeiro o objeto e, em seguida, o círculo desejado.

Rotação em Torno de um Ponto - permite que um novo objeto seja criado a partir da rotação de um primeiro em torno de um ponto. É necessário selecionar o objeto que será rotacionado, o ponto central da rotação e o ângulo desejado, nessa ordem, e o seu sentido.

Translação por um Vetor - cria um novo objeto a partir da movimentação de um objeto inicial do mesmo tipo pela trajetória descrita por um vetor. É necessário selecionar o objeto que será movimentado e, em seguida, o vetor que descreverá esse caminho.

Homotetia - multiplica por um fator constante a distância de um ponto qualquer do espaço a um ponto fixo, deslocando-o sobre a reta definida por estes dois pontos. É necessário selecionar o objeto desejado, o ponto de homotetia e o fator multiplicativo.

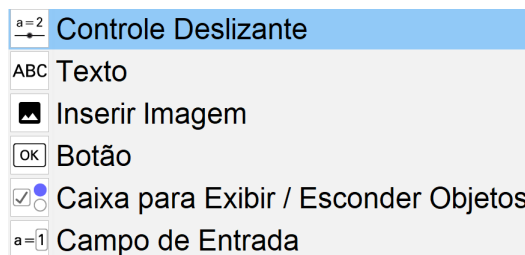


Figura C.9: *Controle Deslizante*

Controle Deslizante - permite criar um botão rolante na Janela de Visualização, usado para determinar o valor do objeto em si. Ele pode ser configurado com valor mínimo, máximo, velocidade de variação e a forma como varia. É útil para criar parâmetros a serem utilizados juntos a outras ferramentas.

Texto - insere qualquer texto na área gráfica.

Inserir Imagem - insere figuras na área gráfica. Ao selecionar esta ferramenta e ao clicar na área gráfica uma caixa onde você poderá procurar a figura que deseja inserir na tela será aberta. A figura pode ser jpg, gif, png e tif.

Botão - cria um botão que executará o código na linguagem GeoGebra definido para o mesmo.

Caixa para Exibir / Esconder Objetos - cria um ambiente onde é possível selecionar quais objetos serão exibidos ou não na Janela de Visualização. É necessário selecionar a ferramenta e selecionar quais objetos estarão nesse ambiente.

Campo de Entrada - funciona de forma semelhante ao Controle Deslizante criando um campo vinculado a uma variável onde é possível inserir um novo valor para a mesma. É necessário selecionar uma legenda e decidir a qual variável o campo vai estar vinculado.

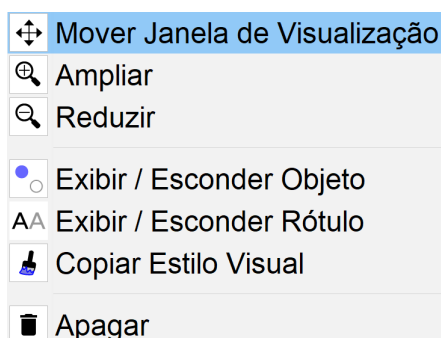


Figura C.10: *Mover Janela de Visualização*

Mover Janela de Visualização - serve para movimentar o conteúdo exibido na janela de visualização, permitindo percorrer a visualização do ambiente.

Ampliar - amplia a Janela de Visualização com foco no local selecionado.

Reduzir - reduz a Janela de Visualização com foco no local selecionado.

Exibir / Esconder Objeto - permite exibir e ocultar objetos temporariamente.

É necessário selecionar a ferramenta, os objetos que serão ocultados e uma nova ferramenta. Para exibir novamente selecione mais uma vez a ferramenta

Exibir / Esconder Rótulo - permite exibir e ocultar o rótulo de objetos na Janela de Visualização. É necessário selecionar o objeto cujo rótulo será exibido ou ocultado.

Copiar Estilo Visual - permite que o estilo de um determinado objeto seja copiado para outros objetos. É necessário selecionar o objeto cujo estilo será copiado e em seguida aqueles que receberão a nova configuração.

Apagar - apaga os objetos que forem selecionados após a ativação da ferramenta.

Plano de aula 1

| | |
|-------------|--|
| Professor: | Matheus Timóteo de Oliveira |
| Orientador: | Alacyr José Gomes |
| Disciplina: | Matemática |
| Série: | 9º Ano Ensino Fundamental |
| Tema: | Software Matemático e Geometria Plana |
| Conteúdo: | Relações Métricas no Triângulo Retângulo |
| Duração: | 05 horas aulas |

D.1 Objetivos

D.1.1 Geral

Utilizar softwares matemáticos e recursos algébricos para demonstrar e comprovar conceitos de relações métricas no triângulo retângulo.

D.1.2 Específicos

1. Realizar a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo.
2. Utilizar ferramentas algébricas e o GeoGebra para realizar demonstrações.
3. Interpretar situações que envolvam o uso das relações.

D.2 Conteúdo Programático

1. Relações Métricas no Triângulo Retângulo.
2. Teorema de Pitágoras.

D.3 Metodologia

O conteúdo será ministrado por meio de aulas práticas e expositivas, estimulando o diálogo, pensamento crítico e a construção do conhecimento pelos próprios alunos através da resolução de problemas.

D.4 Recursos Didáticos

1. Quadro branco;
2. Pincéis;
3. Lista de exercícios;
4. Computador;
5. Software GeoGebra.

D.5 Avaliação

A avaliação será realizada através de exercícios de classe que também irão enriquecer o tema e fornecer exemplos e aplicações. Além disso, será feita uma atividade avaliativa no final das aulas para verificação de aprendizagem.

Lista de Exercícios 1

Exercício 1. O topo de uma escada foi apoiada no topo de um edifício de $15m$ de altura com suas bases afastadas $8m$ de distância uma da outra. Determine o comprimento dessa escada.

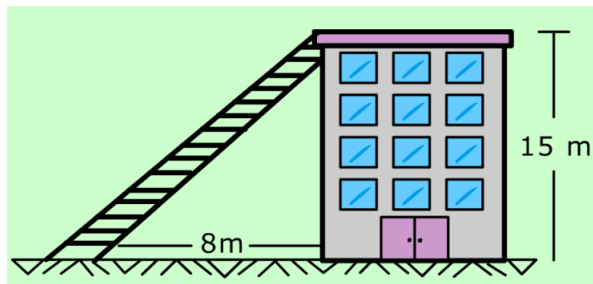


Figura E.1: <http://www2.ime.unicamp.br/ma225/2016Tarefa4-GrupoA.pdf>

Exercício 2. Em um triângulo \triangle_{ABC} , retângulo em \hat{A} , a medida de um cateto é $30cm$ e a medida da altura, em relação ao vértice A , \overline{AH} é $24cm$. Calcule a medida da hipotenusa e do outro cateto.

Exercício 3. Uma certa fazenda, localizada numa planície de um grande estado brasileiro, tem frente para uma estrada retilínea, cuja conservação é feita pelos próprios funcionários da fazenda. O escritório fica a $480m$ de distância dessa estrada e, à beira da estrada, a $800m$ de distância desse escritório, foi construída uma grande guarita de concreto, onde seguranças contratados pelo fazendeiro fazem o trabalho de guardar a propriedade. Com o objetivo de servir alimentação ao pessoal que trabalha tanto no escritório quanto na guarita, o proprietário contratou a construção de um refeitório, também a beira da estrada, localizado a igual distância da guarita e do escritório. Qual a distância, em metros, do refeitório ao escritório?

Exercício 4. Durante um incêndio num edifício os bombeiros utilizaram uma escada de $40m$ para atingir a janela de um apartamento. A escada estava apoiada a $1m$ do

chão, sobre o caminhão dos bombeiros que se encontrava $24m$ afastado do edifício. Qual é a altura do apartamento em relação ao chão?

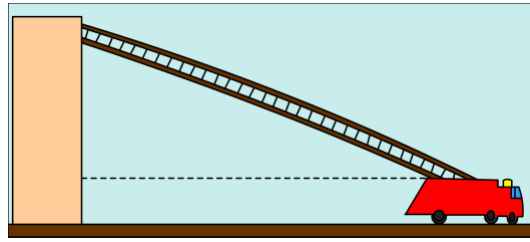


Figura E.2: <http://www2.ime.unicamp.br/ma225/2016Tarefa4-GrupoA.pdf>

Exercício 5. Determine as medidas de x e h indicadas na figura.

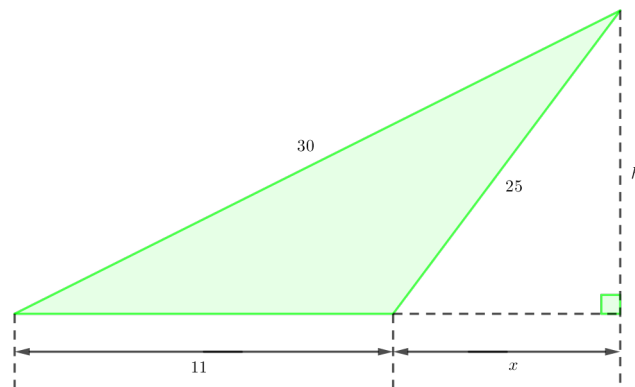


Figura E.3: *Compilação do autor*

Exercício 6. Deve ser demarcado um terreno na forma de triângulo retângulo com $600m^2$ de área, cujo maior lado mede $50m$. Quantos metros lineares de muro serão necessários para cercar esse terreno?

- a) $190m$
- b) $150m$
- c) $130m$
- d) $120m$
- e) $110m$

Exercício 7. Uma torre tem $60m$ de altura, a uma certa hora do dia produz uma sombra de $12m$ de comprimento. Um homem de $1,8m$ de altura nesta mesma hora produzirá uma sombra de aproximadamente quantos cm ?

Exercício 8. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede $14cm$ e um dos catetos mede $2\sqrt{38}cm$. Determine a medida do outro cateto.

Exercício 9. O portão de entrada de uma casa tem $5m$ de comprimento e $2m$ de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o ponto C ?

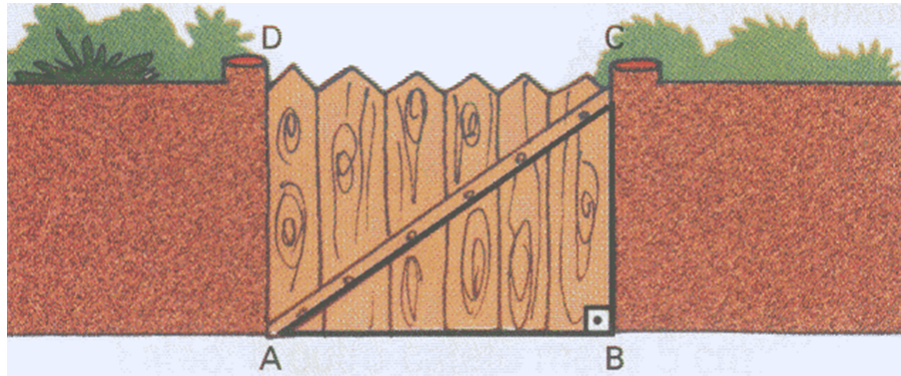


Figura E.4: <https://pt-static.z-dn.net/files/d80/fc88a8afd461309bae1f107541b42345.doc>

Exercício 10. Uma árvore foi quebrada pelo vento e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura da árvore antes de se quebrar era de $9m$, e sabendo que a ponta da parte quebrada está a $3m$ da base da árvore, qual a altura do tronco que restou em pé?

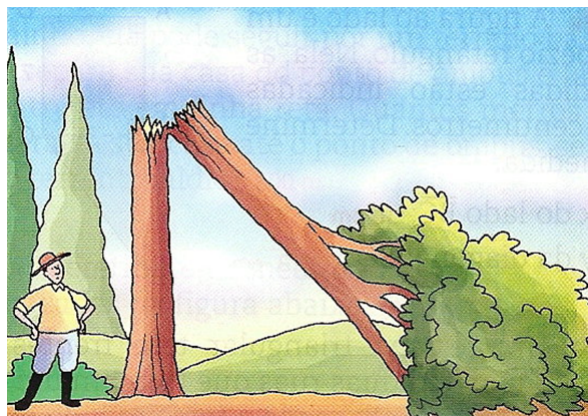


Figura E.5: <https://pt-static.z-dn.net/files/d80/fc88a8afd461309bae1f107541b42345.doc>

Plano de aula 2

| | |
|-------------|---|
| Professor: | Matheus Timóteo de Oliveira |
| Orientador: | Alacyr José Gomes |
| Disciplina: | Matemática |
| Série: | 9º Ano Ensino Fundamental |
| Tema: | Software Matemático e Geometria Plana |
| Conteúdo: | Relações Métricas no Triângulo Qualquer |
| Duração: | 05 horas aulas |

F.1 Objetivos

F.1.1 Geral

Utilizar softwares matemáticos e recursos algébricos para demonstrar e comprovar conceitos de relações métricas em um triângulo qualquer.

F.1.2 Específicos

1. Realizar a demonstração das relações métricas em um triângulo qualquer.
2. Utilizar ferramentas algébricas e o GeoGebra para realizar demonstrações.
3. Interpretar situações que envolvam o uso das relações.

F.2 Conteúdo Programático

1. Relações Métricas no Triângulo Qualquer.
2. Lei dos Senos.

3. Lei dos Cossenos.

F.3 Metodologia

O conteúdo será ministrado por meio de aulas práticas e expositivas, estimulando o diálogo, pensamento crítico e a construção do conhecimento pelos próprios alunos através da resolução de problemas.

F.4 Recursos Didáticos

1. Quadro branco;
2. Pincéis;
3. Lista de exercícios;
4. Computador;
5. Software GeoGebra.

F.5 Avaliação

A avaliação será realizada através de exercícios de classe que também irão enriquecer o tema e fornecer exemplos e aplicações. Além disso, será feita uma atividade avaliativa no final das aulas para verificação de aprendizagem.

Lista de Exercícios 2

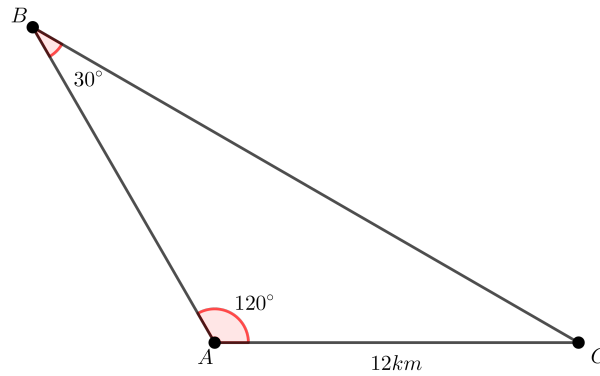
Exercício 1. Num triângulo retângulo, um dos ângulos internos é de 30° e a hipotenusa mede 2cm a mais do que o menor cateto. O comprimento da hipotenusa é, em cm :

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) $4\sqrt{3} + 6$

Exercício 2. Um terreno possui o formato triangular e a medida de dois de seus lados são $\overline{AB} = \sqrt{13}m$ e $\overline{BC} = 4m$. Determine a medida do lado \overline{AC} , sabendo que $\hat{ACB} = 60^\circ$.

- a) $1m$
- b) $2m$
- c) $3m$
- d) $\frac{3}{2}m$
- e) $\frac{5}{2}m$

Exercício 3. Os vértices do triângulo a seguir representam a localização de três cidades. Sabendo que a distância entre as cidades A e C é de 12km , determine a distância entre as cidades B e C .



- a) $15km$
- b) $12\sqrt{2}km$
- c) $12\sqrt{3}km$
- d) $\frac{12}{15}km$
- e) $25km$

Exercício 4. Um relógio que está no monumento de uma praça foi construído com o ponteiro maior (dos minutos) medindo $5m$ e o ponteiro menor (das horas) medindo $3m$. Exatamente às 14 horas a distância entre as extremidades dos dois ponteiros é de:

- a) $\sqrt{8}m$
- b) $\sqrt{15}m$
- c) $4m$
- d) $\sqrt{17}m$
- e) $\sqrt{19}m$

Exercício 5. Calcule o seno do maior ângulo de um triângulo cujos lados medem $8m$, $12m$ e $16m$.

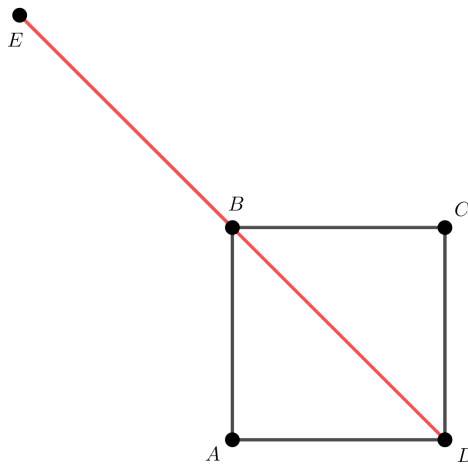
- a) $\frac{\sqrt{10}}{4}$
- b) $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

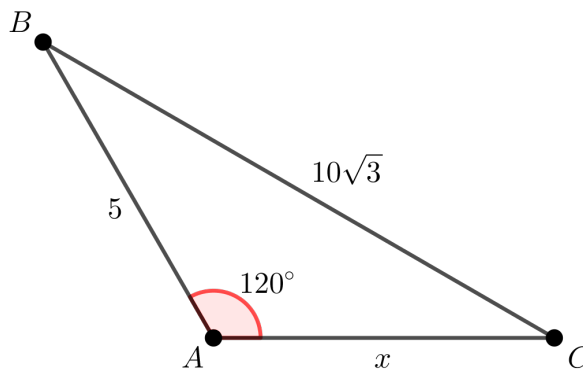
e) $\sqrt{15}$

Exercício 6. Dois lados de um terreno triangular medem, respectivamente, $\sqrt{61}m$ e $10m$. Sabendo que o ângulo formado entre esses lados é de 60° , qual é a medida do terceiro lado desse terreno?

Exercício 7. Considere que o quadrado $ABCD$ abaixo quem tem lados de comprimento igual a $2cm$, e que B é o ponto médio do segmento \overline{DE} . Encontre a distância entre os pontos A e E .



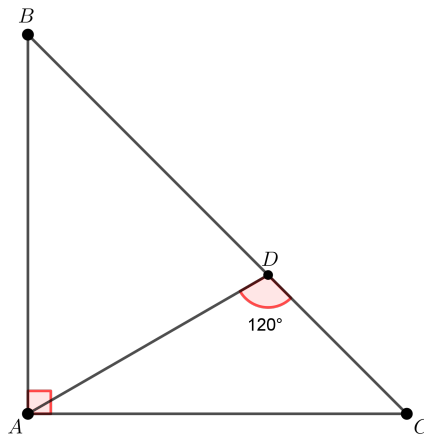
Exercício 8. Analisando o triângulo $\triangle ABC$ a seguir, determine o valor de $x^2 + 5x$.



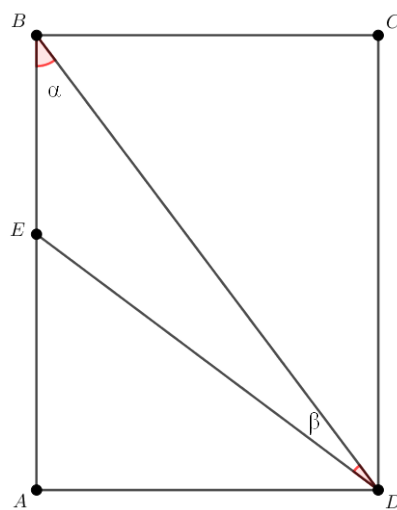
- a) 200
- b) 225
- c) 250
- d) 275

e) 300

Exercício 9. O triângulo retângulo a seguir é isósceles, determine a medida de \overline{BD} .



Exercício 10. O retângulo $ABCD$ a seguir possui perímetro igual a 56cm , tem $\overline{BC} = 12\text{cm}$ e $\overline{BE} = 7\text{cm}$. Determine o valor de $\sin \beta$.



- a) $\frac{24}{25}$
- b) $\frac{7}{25}$
- c) $\frac{7}{5}$
- d) $\frac{31}{25}$
- e) 31