

Uma Curva de G. de Rham e os Números Diádicos *

Guilherme Henrique de Paula Reis
(e-mail: `guilherme.dwg@gmail.com`)

Goiânia, 03 de Setembro de 2010

Resumo

Neste trabalho analisaremos um caso particular de uma classe de curvas inicialmente estudada por Georges de Rham [1]. Através do processo de trissecção obteremos a partir de um quadrado uma sequência de polígonos que converge para uma curva convexa C . Provaremos algumas propriedades dessa sequência e a partir dos números diádicos obteremos uma parametrização para a curva C . Com o uso de sequências auxiliares concluiremos que a curva limite C possui derivada contínua em todos os pontos e obteremos uma expressão para sua derivada em termos de frações contínuas.

1 Introdução

O que fazemos quando temos um pedaço de papel quadrado, uma tesoura e precisamos obter uma figura geométrica como um círculo? Começaremos fazendo cortes em cada ponta na direção diagonal. Haverá ainda pontas. Então, com cortes menores cortaremos as pontas restantes. Em cada etapa deste processo estaremos mais próximos da figura geométrica desejada. E se repetirmos este processo infinitas vezes? Será que estaremos próximos de obter uma figura geométrica sem pontas? A estas perguntas pretendemos dar respostas neste trabalho.

Essa classe de curvas é estudada na matemática aplicada e na computação gráfica com a necessidade de aproximar objetos suaves (arredondados) por objetos retilíneos

*Instituto de Matemática e Estatística, UFG, Campus Samambaia- C.P. 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil. Iniciação Científica orientada pelo Professor Ronaldo A. Garcia (e-mail: `ragarcia@mat.ufg.br`).

e objetos retílineos por suaves. Há também um grande interesse da matemática pura em estudar propriedades dessa curvas e suas possíveis generalizações além do interesse em áreas mais específicas como sistemas dinâmicos. Como referências veja [4], [6] e [7].

2 Trissecção de um Polígono

Nesta seção estudaremos uma sequência obtida pela iteração da função trissecção. Considere um polígono P formado por n lados. Em cada lado desse polígono destacamos os pontos que o dividem em três segmentos de igual comprimento. O polígono P' é obtido através do polígono P unindo estes pontos conforme a figura 1.

Definição 2.1. *A este processo que a partir do polígono P se obtém o polígono P' chamamos de trissecção.*

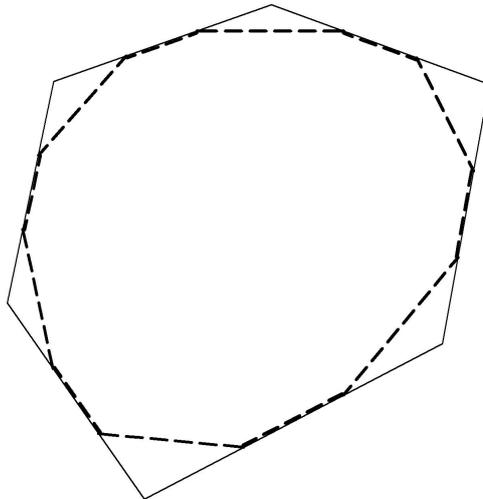


Figura 1: Trissecção de um polígono P

Baseando-se em [1] consideraremos o caso particular em que o polígono inicial P_0 é um quadrado. Por trissecção obtemos o polígono P_1 através de P_0 e então, pelo mesmo processo, obtemos P_2 através de P_1 . Repetindo este processo indefinidamente obtemos a sequência $(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots)$.

Dado um lado de P_n destacamos os pontos A e B que o dividem em três segmentos iguais. Unindo A e B obtemos um lado de P_{n+1} contido no lado destacado de P_n .

Como o ponto médio M do lado destacado de P_n está entre A e B , i.e, o ponto M está no segmento formado por A e B , concluímos que o ponto médio deste lado de P_n é também ponto médio do lado de P_{n+1} . Procedendo deste modo, concluímos que o ponto médio M do lado de P_n é o ponto médio do lado de P_{n+k} , contido no lado destacado de P_n , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2. *Unindo os pontos médios dos lados consecutivos de P_n obtemos um polígono que chamaremos de Q_n conforme a figura 2. Os triângulos formados por Q_n e P_n serão chamados de triângulos de ordem n .*

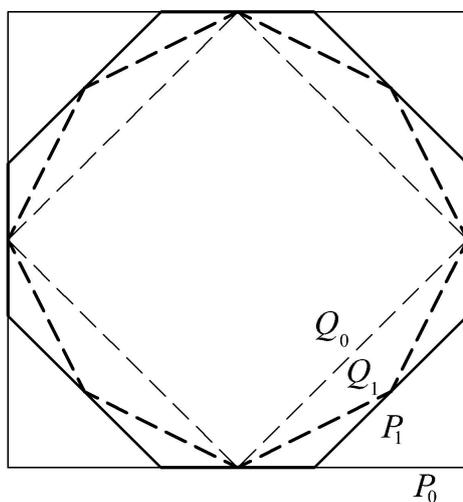


Figura 2: Os Polígonos P_0, Q_0, P_1 , e Q_1

Proposição 2.1. *O polígono P_{n+k} está contido nos triângulos de ordem n para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Observe que o polígono P_{n+1} é obtido através de P_n por trisseção. Assim, os lados de P_{n+1} são divididos em dois tipos. Fazem parte do primeiro tipo os lados de P_{n+1} que são obtidos a partir dos lados de P_n unindo os pontos que dividem o lado de P_n em três segmentos iguais. Estes estão contidos nos triângulos de ordem n pois, obviamente, os lados de P_n também estão. O segundo tipo de lados de P_{n+1} a serem considerados são aqueles construídos unindo pontos de lados consecutivos de P_n . Os pontos unidos de dois lados consecutivos pertencem ao mesmo triângulo de ordem n . Como um triângulo é um conjunto convexo, segue que esses lados também estão contidos nos triângulos de ordem n . O argumentos indutivo segue essas observações. \square

Sejam M_0 e M_1 dois vértices consecutivos de Q_0 , i.e, pontos médios de dois lados consecutivos de P_0 . Considere um sistema de coordenadas onde o ponto M_0 coincide com a origem e o ponto M_1 tem coordenada $(1, 1)$. Deste modo, convencionamos que o polígono P_0 tem o comprimento do lado igual a 2. Veja a figura 3. Enquanto usarmos este sistema de coordenadas, olharemos nossos polígonos apenas dentro da região formada pelo triângulo de vértices M_0 , M_1 e $(1, 0)$.

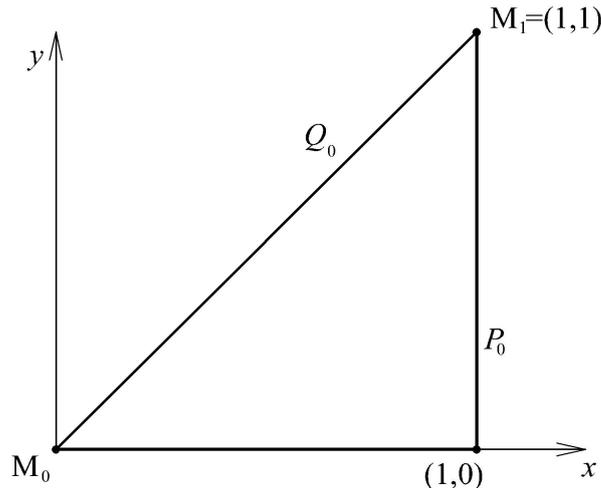


Figura 3: Os eixos de coordenadas e os pontos M_0 , M_1 e $(1, 0)$.

Proposição 2.2. *O polígono P_n possui $2^n + 1$ lados.*

Demonstração. Indução sobre n . Para $n = 0$ temos que P_0 possui $2^0 + 1 = 2$ lados, como na figura 3. Suponhamos, por hipótese de indução, que o polígono P_n possui $2^n + 1$ lados. Como sabemos, os lados de P_{n+1} são obtidos pela trissecção de P_n . Isto é, divide-se cada lado de P_n em três segmentos iguais, apagam-se os segmentos extremos e então une-se os vértices dos segmentos consecutivos restantes formando P_{n+1} . Como estamos considerando o polígono P_n somente na região do triângulo formado pelos pontos M_0 , M_1 e $(1, 0)$, cada lado de P_n origina um novo lado à esquerda com exceção do lado que contém o ponto M_0 . Assim, P_{n+1} possui $2 \cdot (2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 1$ lados. Pelo princípio de indução a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Corolário 2.1. *O polígono Q_n possui $2^n + 1$ vértices.*

Demonstração. Basta observar que Q_n é obtido unindo os pontos médios dos lados consecutivos de P_n . \square

Citamos anteriormente que os pontos médios dos lados de P_n são também pontos médios dos lados de P_{n+k} . Deste modo, os vértices de Q_n também são vértices de Q_{n+k} com $k \in \mathbb{N}$. Em particular, como M_0 e M_1 pertencem a Q_0 , estes pontos pertencem a Q_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isto, definiremos uma maneira natural de ordenar os vértices de cada Q_n . Basta considerarmos o ponto M_0 como o nosso ponto “inicial” em cada polígono Q_n e a partir dele, percorrendo Q_n da esquerda para direita, temos uma sequência para os vértices. Por exemplo, na figura 4, os pontos A_1 , A_2 e A_3 são o primeiro, o segundo e o terceiro vértice do polígono Q_2 depois de M_0 , respectivamente.

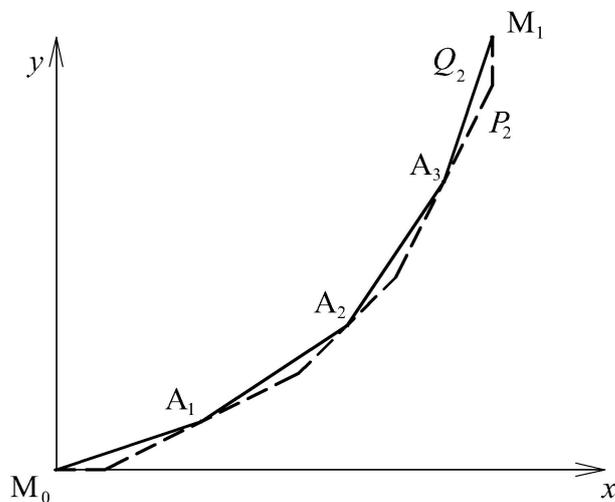


Figura 4: A Ordenação em Q_2 .

Proposição 2.3. *O h -ésimo vértice de Q_n é o $2^k h$ -ésimo vértice de Q_{n+k} depois de M_0 .*

Demonstração. Como sabemos, os vértices de Q_n são os pontos médios de cada lado de P_n . O polígono P_{n+1} é obtido por trisseção a partir de P_n de tal modo que entre cada ponto médio de P_n é criado um ponto médio exclusivo de P_{n+1} . Assim, o número de pontos entre o h -ésimo vértice de Q_n (depois de M_0) e o M_0 dobra quando olhamos este ponto de Q_n como um ponto de Q_{n+1} . Isto é, o h -ésimo vértice de Q_n depois de M_0 é o $2h$ -ésimo vértice de Q_{n+1} depois de M_0 . Como o número de vértices criados em Q_{n+k} em cada etapa de construção da sequência é o dobro da etapa anterior podemos concluir a afirmação. \square

Definição 2.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $l(P_n)$ como o comprimento do maior lado do polígono P_n .*

Proposição 2.4. $l(P_n) < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} l(P_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.

Demonstração. Indução sobre n . Para $n = 2$, temos que P_2 é obtido através de P_1 por trissecção. Isto é, divide-se cada lado de P_1 em três segmentos de igual comprimento, excluem-se os segmentos extremos e une-se os vértices dos segmentos médios restantes consecutivos. Assim, os segmentos excluídos e acrescentados formam triângulos. Pela desigualdade triangular segue então que os segmentos de P_2 que não estão contidos em algum segmento de P_1 são menores que

$$\frac{1}{3}l(P_1) + \frac{1}{3}l(P_1) = \frac{2}{3}l(P_1).$$

Para os segmentos de P_2 que estão contidos em algum segmento de P_1 temos que o comprimento destes segmentos é igual a $\frac{1}{3}l(P_1) < \frac{2}{3}l(P_1)$. Logo, $l(P_2) < \frac{2}{3}l(P_1)$.

Por hipótese de indução, a proposição vale para P_n . Isto é, $l(P_n) < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} l(P_1)$. Pela trissecção e pela desigualdade triangular temos que os segmentos de P_{n+1} que não estão contidos em algum segmento de P_n são menores que

$$\frac{1}{3}l(P_n) + \frac{1}{3}l(P_n) = \frac{2}{3}l(P_n) < \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} l(P_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n l(P_1).$$

Para os segmentos de P_{n+1} que estão contidos em algum segmento de P_n temos que o comprimento destes segmentos é igual a $\frac{1}{3}l(P_n) < \frac{2}{3}l(P_n) < \left(\frac{2}{3}\right)^n l(P_1)$.

Conseqüentemente, $l(P_{n+1}) < \left(\frac{2}{3}\right)^n l(P_1)$. Assim, pelo princípio de indução, a proposição é verdadeira. \square

Corolário 2.2. $l(Q_n) < (2/3)^{n-1}l(P_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.

Demonstração. Observe que os vértices de Q_n ligam os pontos médios consecutivos de cada lado de P_n . Pela desigualdade triangular, $l(Q_n) < \frac{1}{2}l(P_n) + \frac{1}{2}l(P_n) = l(P_n) < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} l(P_1)$. \square

Corolário 2.3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} l(Q_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} l(P_n)$. Além disso, as sequências $(l(Q_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(l(P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ são decrescentes.

Demonstração. Basta observar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2/3)^{n-1}l(P_1) = 0$. \square

Corolário 2.4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(T_n) = 0$ onde $A(T_n)$ é a área de um triângulo de ordem n .

Demonstração. Isto segue do fato de que os lados de um triângulo de ordem n são formados por lados de P_n e Q_n . \square

Neste momento estamos prontos para mostrar a convergência da sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Recordemos algumas definições que podem ser vistas em [8]. Dados um conjunto fechado e limitado $F \subset \mathbb{R}^2$ e um ponto $a \in \mathbb{R}^2$ definimos a distância de F a a por $d(F, a) = \inf\{|x - a|; x \in F\}$. Definimos a faixa de raio $\varepsilon > 0$ em torno de F pelo conjunto $U(F, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2; d(F, y) < \varepsilon\}$. Assim, dados dois conjuntos fechados e limitados $F, G \subset \mathbb{R}^2$, definimos a distância de Hausdorff entre F e G por $D(F, G) = \inf\{\varepsilon; F \subset U(G, \varepsilon) \text{ e } G \subset U(F, \varepsilon)\}$. Seja \mathcal{H} a coleção de todos os subconjuntos fechados e limitados em \mathbb{R}^2 . Por [8] temos que o D define uma métrica em \mathcal{H} e que o espaço métrico (\mathcal{H}, D) é completo, i.e., toda sequência de Cauchy é convergente.

Proposição 2.5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = C$.

Demonstração. Pelos corolários 2.3 e 2.4, dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os triângulos de ordem n estão contidos nas faixas $U(P_n, \varepsilon/2)$ e $U(Q_n, \varepsilon/2)$. Pela proposição 2.1 o polígono P_{n+k} está contido nos triângulos de ordem n para todo $k \in \mathbb{N}$. Conseqüentemente, o polígono P_{n+k} está contido na faixa $U(P_n, \varepsilon/2)$. Como P_{n+k} está na região delimitada por Q_n e P_n , a faixa $U(P_{n+k}, \varepsilon/2)$ contém os limites da faixa $U(Q_n, \varepsilon/2)$ em direção a P_n . Reciprocamente, a faixa $U(P_{n+k}, \varepsilon/2)$ contém os limites da faixa $U(P_n, \varepsilon/2)$ em direção a Q_n . Logo, as faixas $U(P_{n+k}, \varepsilon/2)$ contêm P_n . Isto é, $D(P_{n+k}, P_n) < \varepsilon/2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, dados $k, p \in \mathbb{N}$ temos que

$$D(P_{n+k}, P_{n+p}) \leq D(P_{n+k}, P_n) + D(P_{n+p}, P_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto, a sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como o espaço métrico (\mathcal{H}, D) é completo segue que a esta sequência converge para um conjunto limitado e fechado que denotamos por C . \square

Proposição 2.6. *O ponto médio de um lado de P_n é um ponto da curva limite C .*

Demonstração. Seja M o ponto médio de um lado de P_n . Como mostramos anteriormente, M pertence a P_{n+k} para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere a sequência constante igual a M que converge para o ponto M . Uma das propriedades da convergência na métrica de Hausdorff da sequência $(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots)$ à curva limite C é que toda sequência convergente de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $x_n \in P_n$ converge para um ponto a que pertence à curva limite C [8]. Logo, o ponto M está em C . \square

Definição 2.4. *Seja C^* o conjunto dos pontos da curva limite C que são vértices de Q_n , i.e, pontos médios de lados de P_n , para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 2.7. *Seja T^n a região formada pela união dos triângulos de ordem n . Então a curva limite C é a intersecção dos T^n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pela proposição 2.5 e por [8], a curva limite C é o fecho do conjunto dos pontos b tal que $b = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k$ com $y_k \in P_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $a \in C$ tal que $a = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ com $x_k \in P_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ temos que a ainda é limite da sequência $(x_k)_{k \geq n}$. Cada triângulo de ordem n é um conjunto fechado e então a união finita T^n destes triângulos é um conjunto fechado. Pela proposição 2.1 cada x_k com $k \geq n$ está contido em T^n . Logo, $a = \lim_{k \geq n} x_k$ pertence a T^n . Como $n \in \mathbb{N}$ foi dado arbitrariamente, podemos concluir que $a \in \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k$.

Se o ponto $a \in C$ não é limite de uma sequência de pontos $x_k \in P_k$ então $a = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$ onde $a_k \in C$ com $a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{k_n}$ onde $x_{k_n} \in P_n$ e mostramos que dado $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_k \in T^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como T^n é um conjunto fechado, segue que $a \in T^n$. Assim, $C \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k$.

Para a recíproca, seja $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k$. Pelos corolários 2.3 e 2.4, dado $k \in \mathbb{N}$ existe um triângulo de índice $n_k \in \mathbb{N}$ contendo x que está contido na bola de centro x e raio $\frac{1}{k}$. Dois dos vértices deste triângulo de índice n_k são pontos de Q_{n_k} , i.e, são pontos de C^* . Seja $x_k \in C^*$ um desses pontos. Assim, construímos uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos de C^* com $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$. Como $C^* \subset C$ e C é um conjunto fechado, temos que $x \in C$. Ou seja, $\bigcap_{k=0}^{\infty} T^k \subset C$. Consequentemente, podemos concluir que $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^k$. \square

Corolário 2.5. *Seja C_n a região delimitada por P_n e Q_0 para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a região delimitada por Q_0 e C é igual a $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.*

Demonstração. Basta observar que cada C_n é a união das regiões delimitadas por Q_0 e C , e por C e P_n . \square

Proposição 2.8. *Cada C_n é um conjunto convexo.*

Demonstração. Indução sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0$, temos que C_0 é a região delimitada por Q_0 e P_0 que é o triângulo de ordem 0 e então é um conjunto convexo. Suponhamos, por hipótese de indução, que C_n é um conjunto convexo. Ora, P_{n+1} é obtido através de P_n por trissecção. Então C_{n+1} é subconjunto de C_n obtido excluindo triângulos de C_n . Assim, C_{n+1} também é convexo. \square

Corolário 2.6. *A região delimitada por Q_0 e C é um conjunto convexo.*

Demonstração. Segue da proposição anterior e do corolário 2.5 pois uma intersecção arbitrária de conjuntos convexos ainda é um conjunto convexo. \square

Proposição 2.9. *O conjunto C^* é denso na curva limite C .*

Demonstração. Sejam dados $c \in C$ e $\varepsilon > 0$. Pela proposição 2.7 os triângulos de ordem n contêm o ponto c para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelos corolários 2.3 e 2.4 existe $m \in \mathbb{N}$ tal que o triângulo de ordem m que contém o ponto c está contido na bola de centro c e raio ε . No entanto, dois dos vértices deste triângulo são pontos de Q_m , i.e, estão em C^* . Logo, a bola de centro a e raio ε contém pontos de C^* . \square

Proposição 2.10. *O conjunto $A = \{p/2^n ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$ é denso na reta.*

Demonstração. Queremos mostrar que todo intervalo da forma (a, b) com $a < b$ possui elementos do conjunto A . Sabemos que a sequência $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(b-a)} < 2^{n_1}$. Considere o conjunto $B = \{p \in \mathbb{Z}; b \cdot 2^{n_1} \leq p\}$. Como \mathbb{Z} é um conjunto ilimitado superiormente temos que B é um conjunto não-vazio de números inteiros e é limitado inferiormente por $b \cdot 2^{n_1}$. Pelo princípio da boa ordenação aplicado a \mathbb{Z} , B possui um elemento $p_0 \in \mathbb{Z}$ mínimo.

Afirmamos que $(p_0 - 1)/2^{n_1}$ está em (a, b) . Ora, p_0 é o elemento minimal de B nos diz que $p_0 - 1$ não está em B . Logo, $(p_0 - 1)/2^{n_1} < b$. Suponhamos por contradição que $(p_0 - 1)/2^{n_1}$ não pertença a (a, b) . Assim temos,

$$\frac{p_0 - 1}{2^{n_1}} \leq a < b \leq \frac{p_0}{2^{n_1}}$$

e isto implica que

$$b - a \leq \frac{p_0 - (p_0 - 1)}{2^{n_1}} = \frac{1}{2^{n_1}}.$$

Portanto, $\frac{1}{b-a} \geq 2^{n_1}$ contradizendo nossa escolha de n_1 . Consequentemente, $\frac{p_0 - 1}{2^{n_1}} \in (a, b)$ e então podemos concluir que o conjunto A é denso na reta. \square

O conjunto A definido na proposição 2.10 é chamado o conjunto dos números diádicos, i.e, são os números racionais cujo denominador é uma potência de 2.

Definição 2.5. *Definimos o conjunto D como o conjunto dos números diádicos do intervalo $[0, 1]$. Isto é, $D = A \cap [0, 1]$.*

Definimos a correspondência $M : D \longrightarrow C^* \subset \mathbb{R}^2$ dada por $M(0)=M_0$, $M(1)=M_1$ e $M(h/2^n)$ é o h -ésimo vértice de Q_n depois de M_0 . Veja a figura 5.

Proposição 2.11. *A correspondência M é bem-definida. Isto é, M é uma função.*

Demonstração. Dados $\frac{h}{2^n}, \frac{p}{2^m} \in D$ com $\frac{h}{2^n} = \frac{p}{2^m}$, queremos mostrar que

$$M\left(\frac{h}{2^n}\right) = M\left(\frac{p}{2^m}\right).$$

1º Caso: $n = m$. Neste caso temos $h = p$ e nada há a fazer.

2º Caso: $n < m$. Então $m - n > 0$ e $\frac{h}{2^n} = \frac{2^{m-n}h}{2^{m-n}2^n} = \frac{2^{m-n}h}{2^m} = \frac{p}{2^m}$ implica que $p = 2^{m-n}h$. Ora, $M\left(\frac{p}{2^m}\right)$ é o $2^{m-n}h$ -ésimo vértice de Q_m e pela proposição 2.3 é o h -ésimo vértice de $Q_{m-(m-n)} = Q_n$, isto é, $M\left(\frac{h}{2^n}\right) = M\left(\frac{p}{2^m}\right)$, como queríamos.

3º Caso: $m < n$. Análogo ao anterior. □

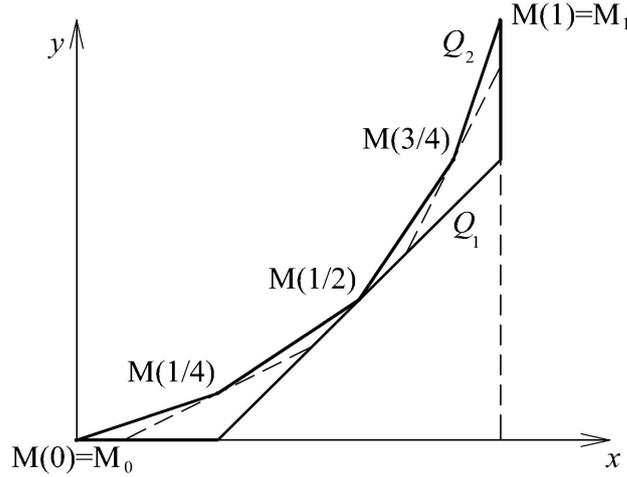


Figura 5: A Função M .

Observe que $M(1/4)$ tem coordenadas $(3/9, 1/9)$, $M(1/2)$ tem coordenadas $(2/3, 1/3)$ e $M(3/4)$ tem coordenadas $(8/9, 6/9)$. Assim, as funções coordenadas de M são ambas diferentes da identidade.

Proposição 2.12. *A função $M : D \longrightarrow C^*$ é uma bijeção.*

Demonstração. Um ponto $A \in C^*$ é um ponto da curva limite C que pertence a Q_n para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $A=M_0$ ou $A=M_1$ então $A=M(0)$ ou $A=M(1)$, respectivamente. Caso contrário, pela ordenação estabelecida, existem $k, m \in \mathbb{N}$ tal que A é o k -ésimo

vértice de Q_m depois de M_0 e então $A=M(k/2^m)$. Como o ponto $A \in C^*$ foi dado arbitrariamente, podemos concluir que M é sobrejetiva.

Dados $h/2^m, p/2^n \in D$ suponhamos que $M(h/2^m)=M(p/2^n)$. Queremos mostrar que $h/2^m = p/2^n$. Como $M(h/2^m)=M(p/2^n)$ temos pela proposição 2.3 que $M(p/2^n)$ é o $2^k h$ -ésimo vértice de Q_{m+k} para algum $k \in \mathbb{N}$. Isto é, $p = 2^k h$ e $2^n = 2^{m+k}$. Logo,

$$\frac{p}{2^n} = \frac{2^k h}{2^{m+k}} = \frac{h}{2^m}.$$

Consequentemente, $h/2^m = p/2^n$ e então podemos concluir que M é injetiva. Ou seja, M é uma bijeção. \square

Proposição 2.13. *A função $M : D \rightarrow C^*$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Pelo corolário 2.3, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l(Q_{n_0}) < \varepsilon$. Tome $\delta = 1/2^{n_0}$. Então dados $h/2^m, p/2^n \in D$ com $|h/2^m - p/2^n| < \delta$ temos que $M(h/2^m)$ e $M(p/2^n)$ são vértices consecutivos de Q_{n_0+k} para algum $k \in \mathbb{N}$. Assim, $|M(h/2^m) - M(p/2^n)| \leq l(Q_{n_0+k}) < l(Q_{n_0}) < \varepsilon$. Consequentemente, M é uniformemente contínua. \square

Proposição 2.14. *A função M se estende continuamente a uma função $\overline{M} : [0, 1] \rightarrow C$ e \overline{M} assim definida é uniformemente contínua e sobrejetiva.*

Demonstração. Sabemos que toda função uniformemente contínua possui uma única extensão contínua ao fecho do seu domínio [9]. Então seja $\overline{M} : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ esta extensão contínua de M ao fecho de D .

Pela proposição 2.10 o conjunto dos números diádicos é denso na reta. Assim, o conjunto dos números diádicos do intervalo $[0, 1]$ é denso nesse intervalo. Isto é, $\overline{D} = [0, 1]$. Além disso, afirmo que $\overline{M}([0, 1]) = C$.

Dado $y \in C$ temos que existe uma sequência $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos de C^* com $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y$ pois $y \in C = \overline{C^*}$ (corolário 2.9). Ora, $y_k \in C^*$ implica que $y_k = \overline{M}(x_k)$ com $x_k \in [0, 1]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. A sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência que converge para um ponto de $[0, 1]$ pois este conjunto é compacto. Assim, passando a uma subsequência, se necessário, podemos admitir que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ com $x \in [0, 1]$. \overline{M} é contínua nos diz que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \overline{M}(x_k) = \overline{M}(x)$. Pela unicidade do limite, segue que $\overline{M}(x) = y$, i.e, $y \in \overline{M}([0, 1])$. Como $y \in C$ foi dado arbitrariamente, podemos concluir que $C \subset \overline{M}[0, 1]$.

Para mostrarmos que $M([0, 1]) \subset C$ primeiramente vamos lembrar que pela proposição 2.5 C é um conjunto fechado e limitado. Dado $a \in [0, 1]$ temos que existe uma sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos de D com $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a$ pois $a \in \overline{D} = [0, 1]$. Então $\lim_{k \rightarrow +\infty} \overline{M}(a_k) = \overline{M}(a)$ pois \overline{M} é contínua. Assim, $\overline{M}(a) \in \overline{C} = C$ pois $\overline{M}(a_k) \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\overline{M}[0, 1] \subset C$. Logo, $\overline{M}[0, 1] = C$ como queríamos demonstrar. \square

Apesar de termos construído uma nova função \overline{M} a partir de M , denotaremos esta função por M .

Corolário 2.7. *A função $M: [0, 1] \rightarrow C$ é bijetiva.*

Demonstração. Pela proposição 2.14 basta mostrarmos que M é injetiva. Sejam dados $x, y \in [0, 1]$ com $M(x) = M(y)$. Do fato de que $\overline{D} = [0, 1]$ existem sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $x_k, y_k \in D$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y$. Assim, $\lim_{k \rightarrow +\infty} M(x_k) = M(x)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} M(y_k) = M(y)$.

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existem $m, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}$ e $k \geq k_0$ implica que $M(x_k)$ e $M(y_k)$ estão contidos no interior do triângulo de ordem m que contém o ponto $M(x) = M(y)$. Logo, x_k e y_k são pontos de C^* e estão entre vértices consecutivos de Q_m sempre que $k \geq k_0$, i.e., $|x_k - y_k| \leq \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Além disso, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ e $|y - y_k| < \frac{\varepsilon}{3}$ quando $k \geq k_1$. Tome $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$. Então $k \geq k_2$ implica que

$$|x - y| \leq |x - x_k| + |x_k - y_k| + |y - y_k| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi dado arbitrariamente, segue que $x = y$. Assim, M é injetiva. \square

3 A Derivada nos Pontos de C

Após ter obtido algumas propriedades da curva C construiremos sequências auxiliares para estudar as derivadas nos pontos dessa curva. Sejam $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$ os vetores da base canônica de \mathbb{R}^2 . Os lados de P_0 considerados como vetores no sentido anti-horário de percurso são $2\vec{i}$, $2\vec{j}$, $-2\vec{i}$ e $-2\vec{j}$.

Para obter os lados de P_1 , dividimos cada lado de P_0 em três segmentos iguais e excluimos os extremos. Assim, P_1 contém $(2/3)\vec{i}$, $(2/3)\vec{j}$, $-(2/3)\vec{i}$ e $-(2/3)\vec{j}$. Entre cada lado de P_1 , que estão contidos em P_0 , une-se os vértices extremos dos lados consecutivos. Vetorialmente, isso significa que somamos os vetores consecutivos

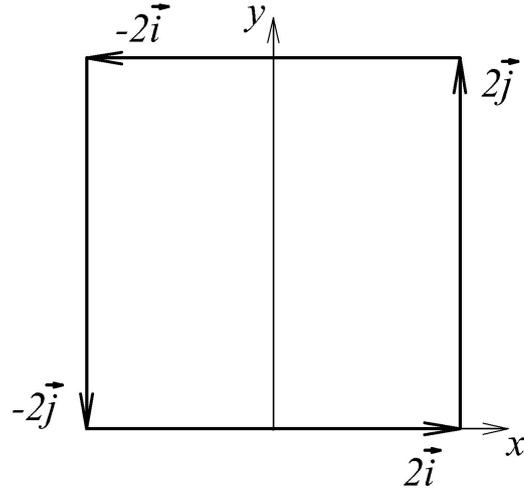


Figura 6: Percurso de P_0

excluídos de P_1 . Isto é, os vetores que faltam para completar P_1 são $(2/3)(\vec{i} + \vec{j})$, $(2/3)(-\vec{i} + \vec{j})$, $(2/3)(-\vec{i} - \vec{j})$ e $(2/3)(\vec{i} - \vec{j})$. Assim, os lados de P_1 considerados como vetores no sentido horário de percurso são $(2/3)\vec{i}$, $(2/3)(\vec{i} + \vec{j})$, $(2/3)\vec{j}$, $(2/3)(-\vec{i} + \vec{j})$, $-(2/3)\vec{i}$, $(2/3)(-\vec{i} - \vec{j})$, $-(2/3)\vec{j}$, e $(2/3)(\vec{i} - \vec{j})$ conforme a figura 7.

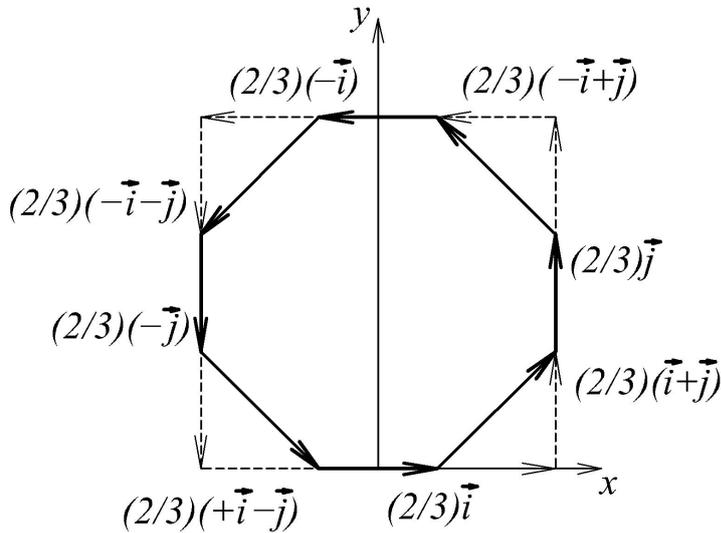


Figura 7: Percurso de P_1

Para cada $n \in \mathbb{N}$ desconsideramos os vetores de P_n que possuem componentes negativas e multiplicamos estes vetores por $3^n/2$. Deste modo, obtemos uma sequência de vetores que será designada por Π_n . As sequências Π_0 , Π_1 , Π_2 e Π_3 são:

$$\begin{array}{cccccccc}
\Pi_0 : & \vec{i} & & & & & & \vec{j} \\
\Pi_1 : & \vec{i} & & & \vec{i} + \vec{j} & & & \vec{j} \\
\Pi_2 : & \vec{i} & 2\vec{i} + \vec{j} & & \vec{i} + \vec{j} & & \vec{i} + 2\vec{j} & \vec{j} \\
\Pi_3 : & \vec{i} & 3\vec{i} + \vec{j} & 2\vec{i} + \vec{j} & 3\vec{i} + 2\vec{j} & \vec{i} + \vec{j} & 2\vec{i} + 3\vec{j} & \vec{i} + 2\vec{j} & \vec{i} + 3\vec{j} & \vec{j}
\end{array}$$

Pelas observações acima, i.e, pelo processo de trisseccão, temos que os termos da sequência Π_{n+1} são obtidos a partir de Π_n mantendo os termos de Π_n e acrescentando entre cada dois vetores consecutivos \vec{a} e \vec{b} de Π_n a soma $\vec{a} + \vec{b}$.

Proposição 3.1. *As componentes dos vetores dos termos da sequência Π_n são números inteiros.*

Demonstração. Basta observar que cada termo da sequência Π_n é um termo da sequência Π_0 ou é obtido através de somas sucessivas dos termos de Π_0 . \square

Proposição 3.2. *A área do paralelogramo construído sobre dois vetores consecutivos de Π_n é igual à unidade.*

Demonstração. Isto é verdade para Π_0 pois os vetores \vec{i} e \vec{j} formam um quadrado de lado igual à unidade. Suponhamos, por hipótese de indução, que afirmação é verdadeira para Π_n . Observe que dados dois vetores \vec{a} e \vec{b} temos que os paralelogramos formados por \vec{a} e \vec{b} , \vec{a} e $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ e \vec{b} têm a mesma área. Por outro lado, dois vetores consecutivos de Π_{n+1} são da forma \vec{x} e $\vec{x} + \vec{y}$ onde \vec{x} e \vec{y} são vetores consecutivos de Π_n . Logo a afirmação também é verdadeira para Π_{n+1} . Pelo princípio de indução, a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Proposição 3.3. *As componentes de cada vetor de Π_n são números inteiros primos entre si.*

Demonstração. Sejam $x\vec{i} + y\vec{j}$ e $z\vec{i} + w\vec{j}$ dois vetores consecutivos de Π_n . Pela proposição 3.2 a área do paralelogramo formado por estes vetores é a unidade, i.e, $|xw - yz| = 1$. Logo, $xw - yz = 1$ ou $yz - xw = 1$. Em todo caso, temos que $\text{mdc}(x, y) = 1$ e $\text{mdc}(z, w) = 1$. \square

Proposição 3.4. *Se o coeficiente angular de uma lado de P_n é igual à fração irredutível $\frac{b}{a}$ então as projeções deste lado sobre os eixos x e y são iguais a $\frac{2a}{3^n}$ e $\frac{2b}{3^n}$, respectivamente.*

Demonstração. Seja $\frac{2}{3^n}(c\vec{i} + d\vec{j})$ o vetor que representa um lado do polígono P_n . Assim, o vetor $c\vec{i} + d\vec{j}$ é um termo da sequência Π_n e a fração $\frac{d}{c}$ é o coeficiente angular desse lado. Pelo item 3.3 temos que $\text{mdc}(c, d) = 1$. Ora, se $\frac{b}{a}$ é o coeficiente angular desse lado com $\text{mdc}(a, b) = 1$ temos da igualdade $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ que $b = d$ e $a = c$ pois $\text{mdc}(c, d)$ também é 1. \square

Chamamos de sequência de Brocot de índice n , denotada por B_n , a sequência cujos termos são os coeficientes angulares dos vetores que são termos da sequência Π_n . Assim, as sequências B_0, B_1, B_2 e B_3 são:

$$\begin{aligned}
 B_0 &: \frac{0}{1} && && && && \frac{1}{0} \\
 B_1 &: \frac{0}{1} && && \frac{1}{1} && && \frac{1}{0} \\
 B_2 &: \frac{0}{1} && \frac{1}{2} && \frac{1}{1} && \frac{2}{1} && \frac{1}{0} \\
 B_3 &: \frac{0}{1} && \frac{1}{3} && \frac{1}{2} && \frac{2}{3} && \frac{1}{1} && \frac{3}{1} && \frac{1}{0}
 \end{aligned}$$

Proposição 3.5. *A sequência B_{n+1} é obtida a partir de B_n mantendo os termos de B_n e acrescentando entre dois termos consecutivos $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ de B_n o termo $\frac{b+d}{a+c}$.*

Demonstração. Sejam $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ dois termos consecutivos de B_n . Pela proposição 3.4 temos que $a\vec{i} + b\vec{j}$ e $c\vec{i} + d\vec{j}$ são dois termos consecutivos da sequência Π_n . Deste modo, como vimos anteriormente, o vetor $(a+c)\vec{i} + (b+d)\vec{j}$ é um termo da sequência Π_{n+1} que está entre os termos $a\vec{i} + b\vec{j}$ e $c\vec{i} + d\vec{j}$. Então, pela regra de formação da sequência B_{n+1} temos que $\frac{b}{a}, \frac{b+d}{a+c}$ e $\frac{d}{c}$ são três termos consecutivos desta sequência. \square

Proposição 3.6. *Sejam $\frac{f}{e}$ uma fração de B_n , $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ as frações vizinhas de $\frac{f}{e}$ em B_n , i.e, o termo $\frac{f}{e}$ está entre os termos $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ de B_n . Então $\frac{f}{e} = \frac{b+d}{a+c}$.*

Demonstração. Os termos pertencentes à sequência B_n que não pertencem a B_{n-1} são escritos através dos seus termos vizinhos conforme a proposição 3.5 e então a afirmação é verdadeira caso $\frac{f}{e}$ pertença a B_n e não pertença a B_{n-1} .

Seja $\frac{f}{e}$ um termo de B_n que também pertence a B_{n-1} mas não pertence a B_{n-2} . Pela proposição 3.5 $\frac{f}{e} = \frac{b+d}{a+c}$ onde $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ pertencem a B_{n-2} e são termos vizinhos

de $\frac{f}{e}$ em B_{n-1} . Deste modo, $\frac{b+f}{a+e}$, $\frac{f}{e}$ e $\frac{d+f}{c+e}$ são termos consecutivos em B_n conforme ilustração abaixo.

$$\begin{array}{l} B_{n-2} : \frac{b}{a} \qquad \qquad \qquad \frac{d}{c} \\ \\ B_{n-1} : \frac{b}{a} \qquad \qquad \frac{f}{e} = \frac{b+d}{a+c} \qquad \frac{d}{c} \\ \\ B_n : \frac{b}{a} \quad \frac{b+f}{a+e} \quad \frac{f}{e} = \frac{b+d}{a+c} \quad \frac{f+d}{e+c} \quad \frac{d}{c} \end{array}$$

Ora,

$$\frac{b+f}{a+e} + \frac{d+f}{c+e} = \frac{b+d}{a+c} + \frac{f}{e} + \frac{f}{e} = \frac{f}{e} + \frac{f}{e} + \frac{f}{e} = \frac{f}{e}$$

Observe que os objetos acima somados são coeficientes angulares. Logo, a afirmação vale para este caso.

Se $\frac{f}{e}$ é um termo de B_n que pertence tanto a B_{n-1} quanto a B_{n-2} então supomos por hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para B_k com $k < n$ e o argumento acima é repetido. \square

Proposição 3.7. *Sejam $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ duas frações consecutivas de B_n . Então $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{1}{ac}$ onde o significado aritmético é o usual.*

Demonstração. De fato, pela proposição 3.3 temos que $ad - bc = 1$. \square

Proposição 3.8. *O numerador ou o denominador de todas as frações de B_n que não pertencem a B_{n-1} são maiores que $n - 1$.*

Demonstração. A prova será por indução sobre n , o índice da sequência de Brocot B_n . Temos que o único termo de B_1 que não pertence a B_0 é a fração $\frac{1}{1}$ cujo numerador e denominador são maiores que $0 = 1 - 1$. Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que os termos de B_{n-1} que não pertencem a B_{n-2} possuem numerador ou denominador maior que $n - 2$. Pela proposição 3.5, na construção de B_n todo termo $\frac{b}{a}$ que não pertence a B_{n-1} é da forma $\frac{b}{a} = \frac{d+f}{c+e}$ onde $\frac{d}{c}$ e $\frac{f}{e}$ pertencem a B_{n-1} . Afiramos que exatamente um dos termos $\frac{d}{c}$ ou $\frac{f}{e}$ não pertence a B_{n-2} . Ora, como os termos $\frac{d}{c}$ e $\frac{f}{e}$ originaram o termo $\frac{b}{a}$ podemos concluir que eles são termos consecutivos da sequência B_{n-1} . No entanto, com excessão da sequência B_0 , os termos da sequência B_n que não pertencem a B_{n-1}

ocorrem alternadamente. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que o termo $\frac{f}{e}$ pertencente à sequência B_{n-1} não pertence à sequência B_{n-2} . Assim, por hipótese de indução temos que $\max\{f, e\} > n - 2$.

Por outro lado, com exceção do primeiro e do último termo de B_{n-1} todos os demais termos possuem numeradores e denominadores maiores que 1. Assim, podemos concluir que $\max\{f + d, c + e\} > n - 1$, ou seja, $\max\{b, a\} > n - 1$. Se $\frac{b}{a}$ é o segundo termo de B_n , com $n \geq 1$, prova-se por indução que $b = 1$ e $a = n$. Pela simetria dos coeficientes angulares temos que o penúltimo termo da sequência B_n é a fração $\frac{n}{1}$. Em todo caso, a afirmação é verdadeira. □

Proposição 3.9. *A diferença entre dois termos consecutivos de B_n , ambos menores que 1, é menor ou igual a $\frac{1}{n}$.*

Demonstração. Sejam $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ termos consecutivos de B_n ambos menores que 1. Assim, os denominadores são maiores que os respectivos numeradores. Como argumentamos na proposição 3.8, podemos supor que o termo $\frac{b}{a}$ não pertence a B_{n-1} . Novamente pela proposição 3.8 temos que $a > n - 1$, i.e., $a \geq n$. Além disso, $c \geq 1$. Logo, lembrando a proposição 3.3, temos que $\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{ad - bc}{ca} = \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{n}$. □

Proposição 3.10. *O ângulo entre dois lados consecutivos de P_n é menor ou igual a $\arctan \frac{1}{n}$.*

Demonstração. Sejam m_1 e m_2 os coeficientes angulares de dois lados consecutivos de P_n . Pela simetria de P_n basta consideramos o caso em que $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq 1$. Sejam $m_1 = \tan \alpha$ e $m_2 = \tan \beta$. Então, pela proposição 3.9

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \leq m_2 - m_1 \leq \frac{1}{n}$$

donde, $0 < \beta - \alpha \leq \arctan \frac{1}{n}$. □

Dados dois pontos $x, y \in [0, 1]$ denotaremos por $\text{inc}(M(x), M(y))$ o coeficiente angular do segmento $\overline{M(x)M(y)}$. Caso exista, a derivada de M no ponto $x \in [0, 1]$ será o limite dos coeficientes angulares $\text{inc}(M(x), M(y))$ quando y tende a x e não o vetor que seria obtido da fórmula clássica $\lim_{y \rightarrow x} \frac{M(y) - M(x)}{y - x}$. Observe que essa nova definição é equivalente à definição clássica visto que $\lim_{y \rightarrow x} \text{inc}(M(x), M(y))$ será o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto $M(x)$ que tem a direção do vetor

(não-nulo) $\lim_{y \rightarrow x} \frac{M(y) - M(x)}{y - x}$. Diremos que a curva limite C possui derivada no ponto $a \in C$ se a função M possui derivada no ponto $M^{-1}(a)$.

A função M definida sobre os números diádicos possui uma ordenação no seguinte sentido: se $x, y, z \in D$ com $x < y < z$ então percorrendo a curva C da direita para a esquerda o ponto $M(y)$ está entre os pontos $M(x)$ e $M(z)$. Como M se estende continuamente e bijetivamente ao intervalo $[0, 1]$ esta propriedade é preservada. No corolário 2.6 mostramos que a região acima da curva C é um conjunto convexo. Então, veja a figura 8, valem as fórmulas: se $x, y, z \in [0, 1]$ com $x < y < z$ então

$$inc(M(x), M(y)) \leq inc(M(x), M(z)) \leq inc(M(y), M(z)).$$

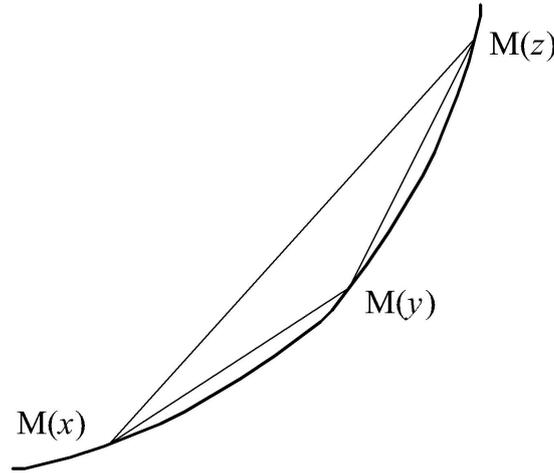


Figura 8: Secantes na curva convexa C

Proposição 3.11. *A curva limite C possui derivadas laterais em todos os seus pontos.*

Demonstração. Seja $x \in [0, 1)$. Definimos $g : (x, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(y) = inc(M(x), M(y))$. Sejam dados $y, z \in (x, 1)$ com $y < z$. Então

$$g(y) = inc(M(x), M(y)) \leq inc(M(x), M(z)) = g(z)$$

mostrando assim que a função g é monótona não-decrescente. Pela geometria da curva C temos que $0 \leq inc(M(x), M(y)) = g(y)$ para todo $y \in (x, 1)$. Logo, g é limitada inferiormente. Isto é, o conjunto $\{g(y); y \in (x, 1)\}$ é limitado inferiormente. Seja $L = \inf\{g(y); y \in (x, 1)\}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $g(y_0) \in (x, 1)$ tal que $g(y_0) <$

$L + \varepsilon$. Tome $\delta = y_0 - x > 0$. Então, $0 < y - x < \delta$ implica que $y < y_0$ e então $L \leq g(y) \leq g(y_0) < L + \varepsilon$. Logo, $|g(y) - L| < \varepsilon$. Consequentemente, a derivada lateral à direita $\lim_{y \rightarrow x^+} g(y) = \lim_{y \rightarrow x^+} \text{inc}(M(x), M(y)) = L$ existe. De modo análogo mostramos que todo ponto $x \in (0, 1)$ possui derivada lateral à esquerda. O ponto $x = 1$ é especial e será considerado posteriormente. \square

Recordamos que C^* é o conjunto dos pontos da curva limite C que são pontos médios dos lados de P_n para algum n . De outro modo, o conjunto C^* é a imagem através de M do conjunto dos números diádicos D . Um outro detalhe: $\lim_{y \rightarrow x^+} \text{inc}(M(x), M(y)) = L$ existe se, e somente se, para toda sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $x < y_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{inc}(M(x), M(y_n)) = L$.

Proposição 3.12. *As derivadas laterais da curva C nos pontos de $M(x) \in C^*$ coincidem com o coeficiente angular do lado de P_n cujo ponto médio é $M(x)$.*

Demonstração. Seja $M(x)$ o ponto médio de um lado de P_n . Considere a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \in D$ e $M(y_n)$ é o vértice consecutivo à direita de $M(x)$ em P_n . Então, pelo corolário 2.3, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n) = M(x)$. Pela figura 9 à esquerda temos que $\theta \leq \arctan \text{inc}(M(x), M(y_n)) \leq \Omega_n = \phi_n + \theta$ onde θ é a inclinação do lado de P_n que contém $M(x)$. Pela proposição 3.10 temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n + \theta = \theta$. Logo, pelo teorema do confronto $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \text{inc}(M(x), M(y_n)) = \theta$. Consequentemente, a derivada lateral à direita no ponto $M(x)$ coincide com o coeficiente angular do lado de P_n que contém $M(x)$. Do mesmo modo, usando a figura 9 à direita, mostramos que a derivada lateral à esquerda no ponto $M(x)$ coincide com o coeficiente angular do lado de P_n que contém $M(x)$. \square

Corolário 3.1. *A curva C possui derivada nos pontos de C^* .*

Demonstração. Da proposição anterior, as derivadas laterais coincidem nesses pontos. \square

Corolário 3.2. $\lim_{y \rightarrow 1^-} \text{inc}(M(1), M(y)) = +\infty$.

Demonstração. Observe que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \text{inc}(M(0), M(y)) = 0$. Pela simetria da curva C e pelas propriedades da sequência de Brocot segue o resultado. \square

Caso exista, denotaremos a derivada da função M por $m(t)$ no ponto $t \in [0, 1]$. Denotaremos a derivada lateral à direita (resp. à esquerda) por $m(t^+)$ (resp. $m(t^-)$).

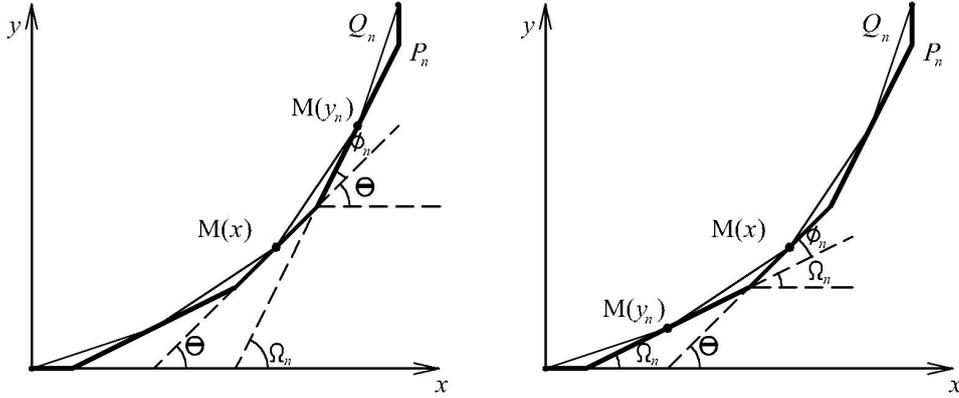


Figura 9: Derivada nos pontos médios

Proposição 3.13. *As derivadas laterais nos pontos de C coincidem. Em outras palavras, a curva C possui derivada em todos os pontos.*

Demonstração. Na proposição 3.12 e em seu corolário, mostramos que a curva C possui derivada nos pontos de C^* . Seja dado $M(x) \in C - C^*$. Pela proposição 2.7 o ponto $M(x)$ pertence aos triângulos de ordem $n + k$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, x não é vértice de nenhum destes triângulos pois não está em C^* .

Considere as sequências $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tais que $M(x_{n_k})$ é o vértice à esquerda de $M(x)$ e $M(y_{n_k})$ é o vértice à direita de $M(x)$ no triângulo de ordem $n + k$ que contém $M(x)$. Isto é, $x_{n_k} < x < y_{n_k}$ para todo k e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. Pela convexidade da curva C temos que

$$m(x_{n_k}) \leq inc(M(x), M(x_{n_k})) \leq inc(M(x), M(y_{n_k})) \leq m(y_{n_k})$$

donde

$$0 \leq inc(M(x), M(y_{n_k})) - inc(M(x), M(x_{n_k})) \leq m(y_{n_k}) - m(x_{n_k}).$$

Observe que pela proposição 3.12, $m(y_{n_k}) - m(x_{n_k})$ é exatamente a tangente do ângulo formado por dois lados consecutivos de P_{n+k} . Pela proposição 3.10 temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} m(y_{n_k}) - m(x_{n_k}) = 0$. Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{inc}(M(x), M(y_{n_k})) - \text{inc}(M(x), M(x_{n_k})) = m(x^+) - m(x^-) = 0.$$

Assim, as derivadas laterais no ponto x coincidem, i.e, a curva C possui derivada no ponto $M(x)$. \square

Deste modo fica bem definida uma função $m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada ponto $t \in [0, 1]$ associa a derivada $m(t)$ da curva C .

Proposição 3.14. *A função $m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Pela proposição 3.10, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que a tangente do ângulo formado por dois lados consecutivos de P_n é menor que ε . Tome $\delta = \frac{1}{2^{n_0}}$. Dados $x, y \in [0, 1]$ temos que $|x - y| < \delta$ implica que $M(x)$ e $M(y)$ estão entre dois vértices consecutivos de Q_n com $n \geq n_0$. Pela convexidade da curva C segue que $|m(x) - m(y)| < \varepsilon$. \square

Seja t um número real do intervalo $[0, 1]$. Então t possui uma representação na base 2. Isto é, existem $a_i \in \{0, 1\}$ tal que

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Separaremos a representação binária de t em blocos de dígitos 0's e em blocos de dígitos 1's como abaixo

$$t = 0, \underbrace{11 \dots 1}_{k_1 \text{ vezes}} \underbrace{00 \dots 0}_{k_2 \text{ vezes}} \underbrace{11 \dots 1}_{k_3 \text{ vezes}} \underbrace{00 \dots 0}_{k_4 \text{ vezes}} 011 \dots$$

podendo ser $k_1 = 0$.

Da fórmula $x + \dots + x^n = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ colocamos

$$s_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{k_1+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} = 0, \underbrace{11 \dots 1}_{k_1 \text{ vezes}}.$$

Daí, $t = s_1 + (t - s_1)$ implica que

$$t = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_1+k_2} \underbrace{11 \dots 1}_{k_3} \underbrace{00 \dots 0}_{k_4} 011 \dots$$

Pondo $s_2 = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_1+k_2} \underbrace{11 \dots 1}_{k_3}$ temos que

$$s_2 = \sum_{j=k_1+k_2+1}^{k_1+k_2+k_3} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \sum_{i=1}^{k_3} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \left(1 - \frac{1}{2^{k_3}}\right) = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} - \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3}}$$

Logo,

$$t = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} - \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3}} + 0, \underbrace{00000 \dots 000}_{k_1+k_2+k_3+k_4} \underbrace{11 \dots 1}_{k_5} 00 \dots$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} t &= 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} - \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3+k_4}} - \dots \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{(\sum_{j=1}^i k_j)}} \quad (*) \end{aligned}$$

No que se segue, denotaremos a fração contínua

$$a = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

por

$$a = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$$

Teorema 3.1. *Se o parâmetro t é dado pelo desenvolvimento em $(*)$, então denotando por $\frac{B_n}{A_n} = \langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle$ e convencionando que $A_0=0$, $A_{-1}=1$, $B_0=1$ e $B_{-1}=0$ temos que o coeficiente angular $m(t)$ da tangente à curva limite C no ponto $M(t)$ é dada pela fração contínua $m(t) = \langle k_1, k_2, k_3, \dots \rangle$.*

Demonstração. Sejam $t_0 = 1$ e $t_{-1} = 0$ e $t_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{2^{\sum_{j=1}^i k_j}}$. Afirmamos que o coeficiente angular $m(t_n)$ da reta tangente à curva limite C no ponto $M(t_n)$ é igual a

$$m(t_n) = \frac{B_n}{A_n}.$$

A prova desta afirmação será por indução sobre n . Para $n = -1$, a tangente no ponto $M(t_{-1}) = M(0)$ é dada por $m(0) = \frac{B_{-1}}{A_{-1}} = \frac{0}{1}$ como de fato o é pela proposição 3.12. A afirmação também é verdadeira para $n = 0$ pois $t_0 = 1$ e a tangente no ponto $M(1)$ é dada por $m(1) = \frac{B_0}{A_0} = \frac{1}{0}$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que a fórmula é verdadeira para $1, 2, \dots, n-1$. Queremos provar que ela é verdadeira para n . Por hipótese,

$$m(t_{n-2}) = \frac{B_{n-2}}{A_{n-2}} \quad e \quad m(t_{n-1}) = \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}.$$

Para abreviar, pomos $k = k_1 + \dots + k_{n-1}$. Temos que

$$t_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2^{\sum_{j=1}^i k_j}} \quad e \quad t_{n-2} = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1)^i}{2^{\sum_{j=1}^i k_j}}$$

multiplicando ambas as equações por 2^k temos

$$2^k t_{n-1} = 2^k + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i 2^{k - \sum_{j=1}^i k_j}$$

e

$$2^k t_{n-2} = 2^k + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i 2^{k - \sum_{j=1}^i k_j}.$$

Portanto, $2^k t_{n-1}$ e $2^k t_{n-2}$ são números inteiros pois $k - \sum_{j=1}^i k_j \geq 0$. Além disso, $2^k t_{n-1} - 2^k t_{n-2} = (-1)^{n-1}$. Logo, $M(t_{n-1})$ e $M(t_{n-2})$ são vértices consecutivos de Q_k e $M(t_{n-1})$ precede ou sucede $M(t_{n-2})$ conforme n seja ímpar ou par, respectivamente. Por outro lado, $t_n = t_{n-1} + \frac{(-1)^n}{2^{k+k_n}}$ donde $2^{k+k_n} t_n - 2^{k+k_n} t_{n-1} = (-1)^n$. Logo, $M(t_n)$ e $M(t_{n-1})$ são vértices consecutivos de Q_{k+k_n} e $M(t_n)$ precede ou sucede $M(t_{n-1})$ conforme n seja par ou ímpar, respectivamente. Assim, em todo caso, $M(t_n)$ está entre $M(t_{n-1})$ e $M(t_{n-2})$ e $M(t_{n-1})$ e $M(t_n)$ são vértices consecutivos de Q_{k+k_n} .

Pelas propriedades da sequência de Brocot estabelecidas anteriormente, nós temos que $m(t_n)$ é obtido através de $m(t_{n-1})$ e $m(t_{n-2})$ através de somas sucessivas no sentido aritmético dos coeficientes angulares. Como $m(t_{n-1})$ e $m(t_n)$ são termos vizinhos da sequência B_{k+k_n} segue que essas somas são:

$$\frac{B_{n-1} + B_{n-2}}{A_{n-1} + A_{n-2}}, \quad \frac{2B_{n-1} + B_{n-2}}{2A_{n-1} + A_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{k_n B_{n-1} + B_{n-2}}{k_n A_{n-1} + A_{n-2}}$$

de modo que

$$m(t_n) = \frac{k_n B_{n-1} + B_{n-2}}{k_n A_{n-1} + A_{n-2}}.$$

Pelas propriedades de construção das frações contínuas [10] segue que

$$B_n = k_n B_{n-1} + B_{n-2} \quad e \quad A_n = k_n A_{n-1} + A_{n-2}$$

e assim a afirmação é verdadeira.

Para o caso geral, se t é um número diádico então o desenvolvimento em (*) é finito e assim o teorema é verdadeiro pela afirmação anterior. Se t não é um número diádico então $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$. Pela continuidade da derivada da curva C temos que $m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(t_n)$. Logo,

$$m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{A_n} = \langle k_1, k_2, k_3, \dots \rangle$$

como queríamos demonstrar. □

Até este momento mostramos que a curva C possui derivada em todos os pontos e que a derivada varia de modo contínuo. Isto é, a curva C é de classe C^1 . Caberia indagar se esta curva é de classe C^k com $k > 1$ ou mesmo, para os mais otimistas, se esta curva é de classe C^∞ . No entanto, mostraremos que esta não possui derivada segunda em todos os seus pontos.

Considere a transformação linear $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $S(x, y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{y}{3} \right)$. Sabemos que S é linear e leva conjunto convexo em conjunto convexo. Em particular, S leva segmento de reta em segmento de reta. Observe que na base canônica de \mathbb{R}^2 a matriz da aplicação linear S é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

de modo que na base canônica a aplicação S iterada n vezes $S^n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem como matriz

$$S^n = \begin{bmatrix} 1/3^n & n/3^n \\ 0 & 1/3^n \end{bmatrix}$$

Assim, enunciamos a

Proposição 3.15. *A transformação linear S^n leva o triângulo de ordem 0 no triângulo de ordem n cujo um dos vértices é o ponto M_0 .*

Demonstração. A prova será por indução sobre n . Para $n = 1$ temos que os triângulos de ordem 0 e de ordem 1 são dados como na figura 10. Ora, $S(0, 0) = (0, 0)$, $S(1, 1) = (2/3, 1/3)$ e $S(1, 0) = (1/3, 0)$ de modo que o segmento de reta que une os pontos M_1 e Y é levado no segmento que une os pontos $M(1/2)$ e X . Observe que esta relação permanece para os respectivos segmentos de cada

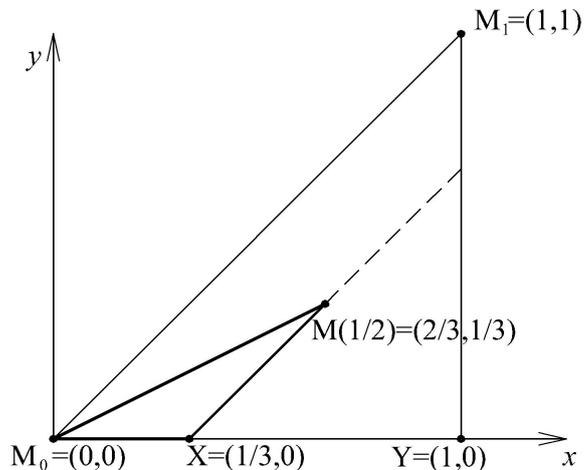


Figura 10: Triângulos de ordem 0 e 1.

triângulo. Assim, S leva o triângulo de vértice M_0 , Y e M_1 no triângulo de vértices M_0 , X e $M(1/2)$. Assim, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para n . Assim, os vértices do triângulo de ordem n que contém M_0 são dados por $S^n(0, 0) = (0, 0)$, $S^n(1, 1) = ((1+n)/3^n, 1/3^n)$ e $S^n(1, 0) = (1/3^n, 0)$ como na figura 11. A partir do triângulo n podemos, através do processo de trisseção, construir o triângulo de ordem $n + 1$.

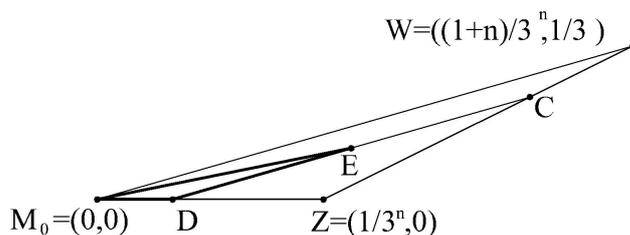


Figura 11: Os triângulos de ordem n e $n+1$.

Considere o segmento de origem em W e ponto final em Z parametrizado por $(1 - t)((1 + n)/3^n, 1/3^n) + t(1/3^n, 0)$ com $t \in [0, 1]$. Então o ponto C é obtido com

$t = 1/3$, i.e, $C = ((3 + 2n)/3^{n+1}, 2/3^{n+1})$. Além disso, $D = (1/3^{n+1}, 0)$. Como E é o ponto médio do segmento de extremos C e D temos que $E = ((2 + n)/3^{n+1}, 1/3^{n+1})$.

Por outro lado, $S((1 + n)/3^n, 1/3^n) = ((2 + n)/3^{n+1}, 1/3^{n+1}) = S^{n+1}(1, 1)$ e $S(1/3^n, 0) = (1/3^{n+1}, 0) = S^{n+1}(1/3, 0)$. Ou seja, S^{n+1} leva o triângulo de ordem 0 que contém M_0 no triângulo de ordem $n + 1$ que contém M_0 . Pelo princípio de indução, a afirmação é verdadeira para todo n .

□

Através da sequência $(S^n(1, 1))_{n \in \mathbb{N}}$ mostraremos que o raio de curvatura da curva C no ponto $M_0 = (0, 0)$ é zero.

Considere o único círculo L_n que contém os pontos $M_0, ((1 + n)/3^n, 1/3^n) \in C$ e que é tangente à reta tangente no ponto M_0 . Observe que esta reta tangente coincide com o eixo x . Assim, o centro deste círculo está no eixo y e é da forma $(0, R_n)$ onde R_n é o seu raio.

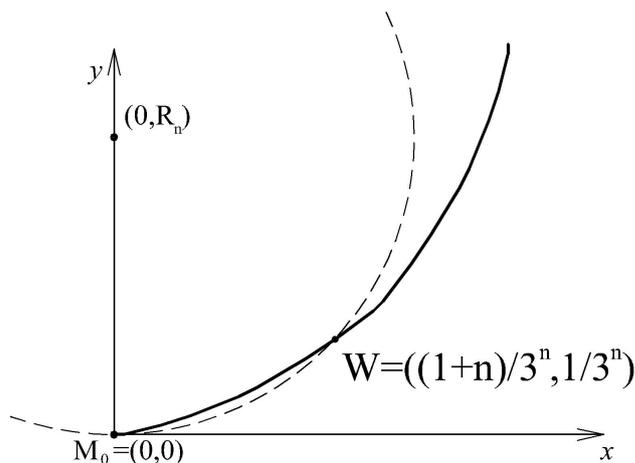


Figura 12: O círculo L_n .

Disto temos que R_n satisfaz

$$\left(\frac{1+n}{3^n}\right)^2 + \left(R_n - \frac{1}{3^n}\right)^2 = R_n^2$$

daí temos que

$$R_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

e então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

Fazendo n tender a $+\infty$ temos que L_n tende ao círculo osculador de C no ponto M_0 . Assim, o raio de curvatura de C no ponto M_0 é igual 0. Mostrando que C possui curvatura igual a $+\infty$ no ponto M_0 . Conseqüentemente, a curva C não possui derivada segunda neste ponto.

4 Conclusão

Através de ferramentas matemáticas como topologia e análise, baseando-se em [1], mostramos que o processo de trissecção aplicado indefinidamente a um quadrado originará uma seqüência de polígonos que converge na métrica de Hausdorff a uma curva convexa C . Com o auxílio dos números diádicos do intervalo $[0, 1]$ exibimos uma parametrização para esta curva.

Analisando os lados de cada polígono obtido pela trissecção do quadrado provamos propriedades que nos permitiram concluir que a curva C possui derivada contínua em todos os seus pontos e obtemos uma expressão para a derivada em termos de frações contínuas. Assim C é de classe C^1 . Ao final concluimos que esta curva não é de classe C^2 . Uma pergunta natural: qual é melhor classe de C ? Isto é, C é Hölder de classe $C^{1+\alpha}$ com $\alpha > 0$?

A teoria de curvas de classe C^1 que não são de classe C^2 possuem uma extensa literatura [11].

Consideramos o processo de trissecção com as proporções $(1/3, 1/3, 1/3)$. Neste caso a curva limite também pode ser obtida por auto-similaridade [2] e [5]. Em [3] estudou-se casos mais gerais onde o processo de trissecção é feito com proporções (α, β, γ) onde $\alpha + \beta + \gamma = 1$. No entanto, dependendo das relações entre estas proporções tem-se que a curva limite não possui sequer derivada de primeira ordem em um conjunto de medida nula.

Referências

- [1] G. DE RHAM, *Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane*, Revue de Mathématiques Élémentaires, II 4,5 (1947), 678-689.

- [2] G. DE RHAM, *Sur les courbes limites de polygones obtenus par trisection*, Enseignement Math. 5 (1959), 29-43.
- [3] G. DE RHAM, *Sur une courbe plane*, J. Math. Pures Appl, 35 (1956), 25-42.
- [4] G. E. FARIN, *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*, Academic Press, San Diego 1997.
- [5] K. KAWAMURA, *On the classification of self-similar sets determined by two contractions on the plane*, J. Math. Kyoto Univ. 42-2 (2002), 255-286.
- [6] P. NIKITIN, *The Hausdorff dimension of the harmonic measure on the de Rham curve*, Proc. Sem. St.-Petersburg Inst. Math. (POMI) **283** (2001), 206-222. (Russian)
- [7] V. YU. PROTASOV, *On the regularity of de Rham curves*, Izv. Math. **68**:3 (2004), 567-606.
- [8] J. R. MUNKRES, *Topology*, 2nd, Prentice Hall(2000).
- [9] E. L. LIMA, *Curso de Análise vol. 1*, 12ed., Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2009).
- [10] C. G. T. A. MOREIRA, *Frações contínuas, representação de números e aproximações*, Revista Eureka, número 3, 44-55 (1998).
- [11] A. D. ALEXANDROV E YU. G. RESHETNYAK, *General theory of irregular curves*, Kluwer Academic Publishers (1989).