Ferramentas Combinatórias na Resolução de Problemas

Andréia Cristina Ribeiro **Elen Viviani Pereira da Silva**
Campus de Paranaíba, Fundação Universidade Federal do Mato Grosso do Sul,
79500-000, Paranaíba, MS
E-mail: andreia.ribeiro@ufms.br, elen.silva@ufms.br

RESUMO

O objetivo deste minicurso será apresentar algumas ferramentas de contagem e resolver alguns problemas utilizando argumentos elementares relativos a Matemática Discreta. Os tópicos principais a serem abordados serão: Funções Geradoras, Princípio da Casa do Pombos e Princípio de Inclusão e Exclusão.

Não há pré-requisitos para fazer o minicurso. As aulas serão distribuídas da seguinte maneira:

Primeira Aula: Serão abordados problemas que envolvem a seleção de objetos onde a repetição é permitida para a introdução do conceito de Função Geradora:

Definição: Se a_r, para $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$, é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária para este problema é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots . \tag{1}$$

Em seguida serão apresentados problemas de partições de números inteiros positivos para aplicação de funções geradoras, apresentando os seguintes resultados da Tabela 1.

Seguem alguns dos problemas que serão abordados nesta aula:

Problema 01: De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos diferentes sem que nenhum quarto fique vazio?

Problema 02: Qual o número de triângulos não-semelhantes de perímetro 100 e lados inteiros?

Problema 03: Suponha uma caixa contendo quatro bolas, sendo duas amarelas, uma branca e uma cinza. Quantas são as possibilidades de retirarmos uma ou mais bolas desta caixa?

Problema 04: De quantas maneiras diferentes podemos escolher 12 latas de cerveja se existem 5 marcas diferentes?

Problema 05: Mostre que o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.

Função Geradora	Para a sequência das partições de n em partes que são:
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k+1})$	ímpares distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k+1})}$	ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k})}$	pares
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k})$	pares distintos
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^3})$	cubos distintos
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{k^3})}$	cubos
$\prod_{p \text{ primo}}\frac{1}{(1-x^{p})}$	primos

Tabela 1: Funções Geradoras.

Problema 06: Mostre que o número de partições de n tendo k como maior parte é igual ao número de partições com exatamente k partes.

Problema 07: Mostre que o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.

Segunda Aula: Incialmente apresentaremos o Princípio da Casa do Pombos e sua generalização:

Princípio da Casa dos Pombos: Se n + 1 pombos são colocados em n casas, então pelo menos uma casa conterá dois ou mais pombos.

Generalização do Princípio da Casa dos Pombos: Se $nk + 1$ pombos são colocados em n casas, então pelo menos uma casa conterá $k + 1$ ou mais pombos.

Em seguida vamos trabalhar alguns belos problemas de existência.

Problema 08: Mostre que em São Paulo existem pelo menos duas mulheres com a mesma quantidade de fios de cabelo na cabeça.

Problema 09: Mostrar, que, dentre 9 pontos quaisquer de um cubo de aresta 2, existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância menor do que ou igual a $\sqrt{3}$ um do outro.

Problema 10: Numa festa com n pessoas há pelo menos duas que possuem o mesmo número de conhecidos na festa.

Os problemas seguintes foram retirados das provas da OBM(Olimpíada Brasileira de Matemática).

Problema 11: Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \cdots, 2n\}$, então dois desses números são primos entre si.

Problema 12: Prove que se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \cdots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.

Terceira Aula: Nesta aula vamos obter uma fórmula que nos forneça o número total de elementos na união de um número finito de conjuntos finitos conhecido como o Princípio de Exclusão e Exclusão. Seguem alguns problemas de aplicação.

Problema 13: Determine o número de funções sobrejetoras entre conjuntos finitos.

Problema 14: Determine o número de permutações caóticas de n objetos distintos.

Problema 15: Quantas são as permutações das letras da palavra $PROPOR$ nas quais não existem letras consecutivas iguais?

Problema 16: Numa classe de 30 crianças, 20 estudam português, 14 estudam inglês e 10 estudam francês. Se 8 crianças não estudam nenhuma destas 3 línguas e nenhuma estuda as 3 línguas, quantas crianças estudam inglês e francês?

Problema 17: Uma urna contém 7 bolas brancas, 8 bolas vermelhas, 4 amarelas e 6 pretas. De quantas maneiras podemos retirar 6 bolas desta urna?

Quarta Aula: Nesta aula faremos um fechamento com aplicações de somas combinatórias apresentadas através dos coeficientes binomiais e Triângulo de Pascal. Segue algumas aplicações.

Problema 18: Mostre combinatorialmente a identidade $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

Problema 19: Prove a identidade $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Problema 20: Prove a identidade $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

Problema 21: Prove a identidade de Lagrange $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Palavras-chave: *Identidades Combinatoriais, Ferramentas Combinatórias, Resolução de Problemas, Partições*

Referências

[1] G.E. Andrews, K. Eriksson , " Integer Partition", Cambridge University Press, 2004.

[2] G.E. Andrews (1976), "The Theory of Partitions", Cambridge, England: Cambridge University Press.

[3] E. L. Lima, P.C.P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado " A Matemática do Ensino Médio", Vol 02, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

[4] J. P.O. Santos, M. P. Mello, I. T. C. Murari " Introdução à Análise Combinatória", Editora Unicamp, 2002.

[5] R.R. Steffenon, " Identidades Combinatórias e Princípio da Casa do Pombos", Bienal de Matemática, SBM, 2012.

[6] " Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)", disponível em $<$ *http://www.obmep.org.br/provas.htm* $>$, último acesso dia 03/06/2013.