Sistemas Dinâmicos Suaves $\times$ Sistemas Dinâmicos Descontínuos

Tiago de Carvalho
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências,
UNESP, Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube 14-01,
CEP 17033-360, Bauru, SP, Brazil.
E-mail: tcarvalho@fc.unesp.br,

Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-IME,
Universidade Federal de Goiás, Campus Samambâia,
CEP 74001-970, Caixa Postal 131, Goiânia, GO, Brazil.
E-mail: djtonon@mat.ufg.br.

RESUMO

Categoria 1: Propostas para minicursos

Nos últimos anos o Departamento de Matemática da UNESP de S.J. do Rio Preto ganhou notoriedade nacional, e até internacional, em uma área de pesquisa denominada atualmente *Sistemas dinâmicos descontínuos.* Neste contexto, o objetivo desse mini-curso é apresentar, de maneira sucinta e intuitiva, aos alunos de graduação interessados em prosseguir seus estudos a nível de pós-graduação nesta área e com um conhecimento mínimo em equações diferenciais ordinárias, um paralelo entre a teoria clássica de sistemas dinâmicos suaves e a recente, e ainda em construção, teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Tentaremos fazer com que os espectadores sintam as principais diferenças entre essas duas teorias e principalmente, tentar responder à pergunta: "Por que estudar sistemas dinâmicos descontínuos?"

Na primeira parte do mini-curso trataremos de alguns resultados clássicos sobre sistemas de equações diferenciais suaves. Começaremos estudando sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t}, \ldots, \dfrac{\partial x_n}{\partial t}\right)^T$.
Mostraremos que a solução do sistema linear (1) com condição inicial $x(0) = x_0$ é dada por $x(t) = e^{At}x_0$, onde $e^{At} \in M_n(\mathbb{R})$ que pode ser calculada em termos dos autovalores e autovetores da matriz A. Daremos o comportamento do sistema em termos destes.
Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

onde $f : E \to \mathbb{R}^n$ é uma função não-linear e E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Mostraremos que sobre certas condições sobre a função f, o sistema não-linear (2) tem uma única solução passando por cada ponto $x_0 \in E$. Em geral, não será possível resolver o sistema (2), porém, realizaremos o estudo qualitativo de sua solução, o que nos fornecerá informações importantes sobre sua dinâmica. Para este estudo, apresentaremos o teorema de Hartman-Grobman, que mostra que na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico x_0, o sistema não-linear (2) tem a mesma estrutura qualitativa do sistema linear $\dot{x} = Ax$, onde $A = Df(x_0)$. Ainda com o objetivo de fazer o estudo qualitativo da solução e obtermos o máximo possível de informações acerca da dinâmica do sistema (2), apresentaremos o teorema da Variedade Estável.

Na segunda metade do curso apresentaremos alguns aspectos da recente teoria de sistemas dinâmicos descontínuos. Teoria essa que tem tido um crescente desenvolvimento devido em grande parte à sua aplicabilidade em outros ramos da ciência, como: engenharia, biologia, física, entre outros. Apresentaremos a definição de sistemas descontínuos seguindo a convenção estabelecida por Filippov.

Afim de ilustrarmos a riqueza da dinâmica nesse contexto, consideremos especificamente uma família de campos descontínuos em $\mathbb{R}^3$ e faremos um estudo detalhado descrevendo alguns aspectos diferenciados de sua dinâmica.

Por fim, abordaremos alguns pontos chaves da teoria como estabilidade estrutural e estabilidade assintótica e de Lyapunov em sistemas descontínuos.

Palavras-chave: *Sistemas dinâmicos descontínuos, formas normais, bifurcações, estabilidade estrutural*

Referências

[1] Andronov A.A., Vitt A.A. e Khaikin S.E., *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, U.K., **1966**.

[2] Chillingworth, *The Teixeira singularity or: Stability and Bifurcation for a discontinuous vector field in R3 at a double-fold point: DRAFT*, To appear.

[3] Colombo A., Bernardo M. di, Fossas E. e Jeffrey M. R., *Teixeira singularities in 3D switched feedback control systems*, Systems and Control Letters, submited, Junho de 2009.

[4] Jeffrey M.R., *Two-folds in nonsmooth dynamical systems*, I.F.A.C., Chaos09 proceedings, Queen Mary, Junho de 2009.

[5] Jeffrey M.R. and Colombo A., *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. Volume 8, Issue 2, pp. 624-640,(2009).

[6] Koslova V.S., *Roughness of a discontinuous system*, Vestnik Moskovskogo Universiteta Seriya 1 Matamatika Mekhanika, vol.**5**, 1984, 16-20.

[7] Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S. e Gragnani A., *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Int. Journal Bif. and Chaos, vol. **13**, número 8, 2003.

[8] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1991.

[9] Sotomayor J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[10] Filippov A. F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, vol. **18** of Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.

[11] Sotomayor J. and Teixeira M. A., *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, Lect. Notes in Math., **331**, Springer Verlag, (1988),169-195.

[12] Teixeira M. A., *Stability conditions for discontinuous vector fields*, J. Diff. Eq., **V 88**,(1990),15-29.

[13] Teixeira M. A., *Perturbation theory for non-smooth systems*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, 2009.

[14] Teixeira M. A., *Generic bifurcations in manifolds with boundary*, J. Diff. Eq., **Vol. 25**,(1977),65-89.

[15] Teixeira M. A., *Generic bifurcations of certain singularities*, Bollettino U.M.I., **Vol. 16-B**,(1979),238-254.

[16] Vishik S. M., *Vector Fields near the boundary of a manifold*, Vestnik, Moskov, Univ. Serv. I, Mat. Meh., **27**,1(1972),21-28.