Introdução às Bifurcações Unidimensionais

Marina T. Mizukoshi
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás,
74001-970, Goiânia, GO
E-mail: mtuyako@gmail.com

RESUMO

Palavras-chave: *Sistemas Dinâmicos, Bifurcações, Parâmetro, Aplicações.*

Muitas aplicações levam a equações que dependem das características dos parâmetros envolvidos na modelagem. O Problema do Valor Inicial para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem dependendo de um vetor de parâmetros $\mu \in \mathbb{R}^m$ pode ser escrito como

$$x' = f(x, \mu), x(0) = x_0 \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor estado e μ é o vetor de parâmetros e $f_\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1, isto é, contínua com derivada primeira contínua.

Em aplicações é importante determinar um conjunto mínimo de parâmetros sobre o qual o problema depende e saber quais são as características mais importantes sobre os mesmos. Note que (1) depende continuamente do parâmetro μ e que mesmo partindo das mesmas condições iniciais, o fluxo segue por caminhos diferentes para cada conjunto de parâmetros.

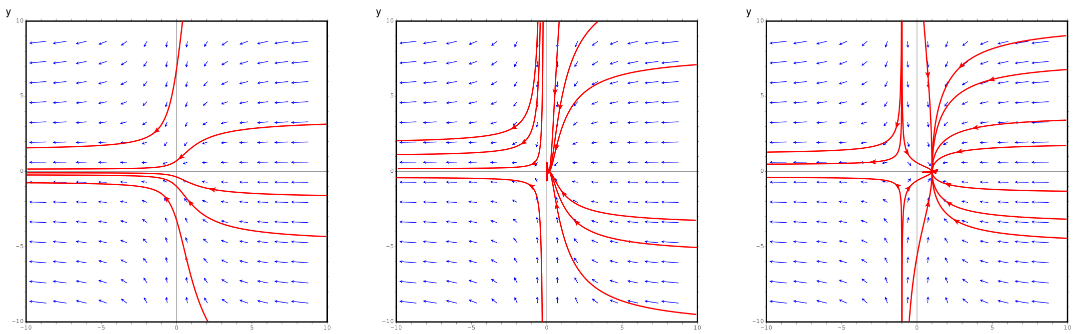

Figura 1: Trajetórias soluções do sistema dinâmico $x' = \mu x - x^2, y' = -y$, para $\mu = -1, \mu = 0, \mu = 1$, respectivamente.

Dado o sistema dinâmico (1), diz-se que f gera um fluxo local $\varphi_t : A \to \mathbb{R}^n$, onde $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ é uma função suave definida para todo $x \in A \in \mathbb{R}^n$ e $t \in (a, b) \in \mathbb{R}$. Aqui, a função deverá satisfazer as seguintes condições:

(a) $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = x_0$;

(b) $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0) = \varphi_{t+s}(x_0)$.

Para o caso tempo discreto, equações à diferença, tem-se

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), \tag{2}$$

onde $n > 0, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x_n \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}^+$. Neste caso, dado a condição inicial x_0 a evolução (ou órbita) do sistema é obtido por se calcular a composta sucessiva da aplicação f, isto é,

$x_o, f(x_0), f(f(x_0)) = f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(f(x_0)) = f^n(x_0), \ldots$.A forma de representar a evolução do sistema consiste em desenhar um ponto para cada instante, com abcissa igual à n e ordenada igual à x_n. Outro tipo de diagrama que será muito útil para analisar os sistemas discretos em uma dimensão é o diagrama de degraus. Além disso, tem-se o diagrama de órbitas que mostra de forma compacta o comportamento de um sistema dinâmico, em função do valor de um parâmetro. Para cada valor do parâmetro, dentro de um intervalo que admita soluções divergentes, calculam-se vários pontos da solução do sistema, e eliminam-se alguns pontos no início para eliminar qualquer estado transitório inicial.

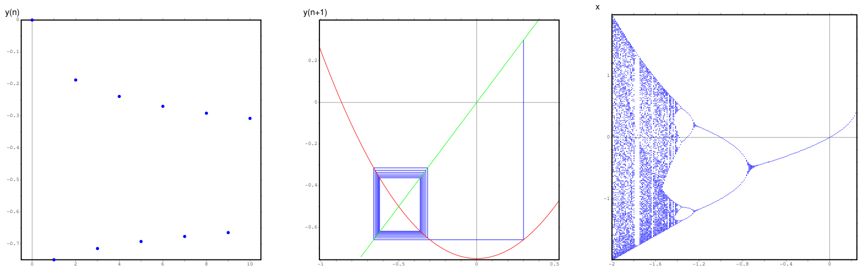

Figura 2: A evolução e o diagrama de degraus para $x_{n+1} = -3/4 + x_n^2$. O diagrama de órbitas para $x_{n+1} = a + x_n^2, a \in [-2, 0.25]$.

A teoria de bifurcação se refere à mudanças no comportamento qualitativo das soluções de (1) ou (2) quando o parâmetro μ é variado. Em geral, em um sistema dinâmico, pelo menos um dos parâmetros poderá variar. Assim, um ponto fixo (sistema discreto) , ou mais comumente, equilíbrio para sistemas contínuos, poderá mudar de estabilidade, fazendo com que uma solução periódica surja ou um novo equilíbrio possa aparecer, tornando o equilíbrio anterior instável [4]. O valor do parâmetro na qual estas mudanças ocorrem é conhecido como "valor de bifurcação´´ e o parâmetro que é variado é conhecido como parâmetro de bifurcação. A seguir apresenta-se as noções básicas relativas ao estudo das soluções constantes tanto para (1) como para (2).

Um ponto x^*é denominado um ponto de equilíbrio para (1) se $\frac{dx}{dt} = f(x^*) = 0$, isto é, $\varphi_t(x^*) = x^*$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para (1), x^* é denominado ponto fixo ou de equilíbrio se $x_n^* = f(x^*), \forall n \in Z$, ou $(x^* = f^m(x^*), \forall m \in Z)$.Para (1) diz-se que x^* é estável se todos os autovalores da matriz jacobiana do campo f no ponto de equilíbrio possuem parte real negativa e para o caso discreto se todos os autovalores possuírem modulo menores que 1. Um ponto de equilíbrio de (1) é denominado hiperbólico se todos os autovalores da matriz jacobiana não estiverem sobre o eixo imaginário, enquanto que para (2) os autovalores não deverão estar sobre o círculo unitário.

A análise de bifurcações de sistemas dinâmicos não-lineares podem ser difíceis, principalmente se ele depender de muitos parâmetros. O tipo de bifurcação mais simples que existe é a bifurcação de equilíbrio ou estático. Neste caso, o estudo corresponde à compreensão das soluções dependendo do parâmetro

Aqui serão discutidos as bifurcações a um parâmetro que podem ser: (i) estáticas (todos os ramos de bifurcação obtidos são de equilíbrios) - bifurcação sela nó (ou dobra), transcrítica e pitchfork (ou forquilha). A bifurcação pitchfork é possível em sistemas dinâmicos com uma inversão ou simetria de reflexão. (ii) dinâmicas (estabelece conexão entre equilíbrio e o movimento periódico) - na teoria matemática, a bifurcação conhecida como de Hopf ou bifurcação de Poincaré-Andronov-Hop em homenagem a Henri Poincaré, Eberhard Hopf e Aleksandr Andronov, é uma bifurcação local que ocorrerá, por exemplo, em sistemas bidimensionais a um parâmetro satisfazendo as seguintes condições: (a) os autovalores da matriz jacobiana do campo vetorial do sistema dinâmico calculado em um ponto fixado são funções que dependem do parâmetro e são imaginários puros; e (b)condição de transversalidade - a derivada do autovalor em relação ao parâmetro é não nula. Neste caso, um foco estável torna-se instável quando o parâmetro é variado, e um atrator torna-se um ciclo limite. Um ciclo limite é uma solução periódica assintoticamente estável a qual pode ser esboçada como uma curva fechada no espaço de fase.

O comportamento de um sistema dinâmico discreto unidimensional pode ser extremamente complexo. O biólogo May estudou o comportamento da aplicação logística $x_{n+1} = \mu(1 - x_n)$ e através da análise do mesmo neste minicurso será observado o surgimento do comportamento caótico [6] , ou seja, para um determinado valor de parâmetro, o estado do sistema passa por muitos valores distintos em um intervalo, sem parecer obedecer nenhuma regra. Uma outra bem conhecida ilustração da complexidade dos sistemas dinâmicos discretos é a estrutura fractal dos conjuntos de Julia para sistemas dinâmicos complexos obtidas pela iteração das funções racionais $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Para o caso contínuo unidimensional o comportamento qualitativo da dinâmica é determinado pelo seu equilibrio e sua estabilidade, então toas as bifurcações são associadas às bifurcações de equilibrio.

Para a boa compreensão deste minicurso o mesmo estará dividido da seguinte maneira:

(a)seção 1: introdução ao estudo da teoria qualitativa [?] das equações diferenciais para $n \leq 2$,bem como a análise de uma equação à diferença de primeira ordem;

(b) seção 2: introdução à teoria de bifurcações à um parâmetro, incluindo os métodos gráficos utilizando o software Wxmaxima [8] ou matlab;

(c) seção 3: estudo de alguns modelos utilizando a teoria de bifurcação. Pretende-se estudar o comportamento de alguns modelos bidimensionais do tipo presa-predador proposto, por exemplo, por May [2] e o de Michich e outros [5], onde os indivíduos presas atraem os predadores e através da utilização de um modelo agregado verifica-se que ocorre uma bifurcação de Hopf. O modelo de Brusselator para reações químicas e entre outros.

Referências

[1] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, “Dynamical Systems, Differential Equations, maps and chaotic behaviour´´, Chapman & Hall, London, 1992. Sciences”, SIAM, Philadelphia, 1993.

[2] E. Beltrami, “Mathematics for Dynamic Modeling", Academic Press, United Kingdom, 1987.

[3] D. G. de Figueiredo e A. F. Neves, “Equações Diferenciais Aplicadas", Coleção Matemática Universitária, IMPA, RJ, 1997.

[4] D. W. Jordan and P. Smith, "Nonlinear Ordinary Differential Equations - An Introduction for Scientists and Engineers,"Oxford University Press, New York, 2007.

[5] P. Magal and S. Ruan, “Structured Population Models in Biology and Epidemiology", Lecture Notes in Mathematics, Mathematical Biosciences, Springer- Verlag, New York, 2008.

[6] J. D. Murray, "Mathematical Biology - An Introduction,"v.1, Springer, New York, 2002.

[7] P. N. N. Tu, “Dynamical Systems, An Introduction with Applications in Economics and Biology, Springer-Verlag", New York, 1992.

[8] J. E. Villate, "Introdução aos Sistemas Dinâmicos, Uma Abordagem Prática com Máxima", Creative Comuns, São Francisco, 2006.