O Triedro de Frenet para curvas no espaço Euclidiano e no espaço de Minkowski

Luciana Ávila Rodrigues
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília,
70910-900, Brasília-DF
E-mail: luavila@mat.unb.br

Fábio Nunes da Silva
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
70910-900, Brasília-DF
E-mail: fabionunesdasilva@gmail.com

RESUMO

Neste mini-curso, faremos uma introdução à teoria local de curvas no espaço Euclidiano R^3, e no espaço de Minkowski R^3_1. O objetivo principal é demonstrar as fórmulas de Frenet para curvas nestes dois espaços e obter algumas aplicações. Este mini-curso é destinado à alunos de graduação em matemática e tem como pré-requisitos conhecimentos básicos de Cálculo 1.

Iniciamos o Capítulo 1 com o estudo da teoria clássica de curvas parametrizadas diferenciáveis no espaço Euclidiano. Quando o vetor tangente da curva é um vetor não nulo, chamamos a curva parametrizada diferenciável de *curva regular*. Na seção 1.2, consideramos uma curva regular e mostramos que sempre é possível reparametrizá-la pelo comprimento de arco, isto é, reparametrizar de tal forma que o vetor tangente da parametrização seja sempre unitário. Para curvas deste tipo, definimos a *curvatura* da curva e um referencial ortonormal do R^3 chamado de *triedro de Frenet*. Cada par do triedro de Frenet determina um plano que são chamados de *plano normal, plano osculador e plano retificante*. Definimos também a *torção* da curva que fornece aplicações interessantes. Em seguida, na seção 1.3, deduzimos as chamadas *fórmulas de Frenet* e na seção 1.4 fornecemos algumas aplicações destas fórmulas.

No Capítulo 2 obtemos resultados análogos quando consideramos a teoria local das curvas no espaço de Minkowski. Na seção 2.1, definimos o *espaço de Minkowski,* R^3_1*,* como sendo o espaço Euclidiano 3-dimensional, R^3, munido da forma bilinear simétrica não degenarada,

$$< u, v >_1 = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3. \tag{1}$$

A forma bilinear $<, >_1$ é chamada *métrica de Minkowski.*

Assim, considerando um vetor $v \in R^3_1$, este vetor é chamado:

- *tipo tempo*, se $< v, v >_1 < 0$,
- *tipo espaço*, se $< v, v >_1 > 0$, ou v é um vetor nulo,
- *tipo luz*, se $< v, v >_1 = 0$, e $v \neq 0$.

Na seção 2.2, consideramos curvas parametrizadas diferenciáveis em R^3_1. Assim, de acordo com a classificação dos vetores tangentes da curva, chamamos a curva de:

- *curva tipo tempo*, se o vetor tangente é tipo tempo,

- *curva tipo espaço*, se o vetor tangente é tipo espaço,
- *curva tipo luz*, se o vetor tangente é tipo luz.

No espaço de Minkowski nem sempre é possível definir a curvatura e a torção de uma curva regular, logo a definição destes conceitos será feita levando em consideração a classificação da curva. Além disso, na seção 2.3, vamos deduzir o triedro de Frenet para cada um destes tipo de curva. Deduziremos também, as equações de Frenet e estudaremos algumas aplicações na seção 2.4.

Palavras-chave: *Curvas parametrizadas, Espaço de Minkowski, Triedro de Frenet*

Referências

[1] M. P. Do Carmo, "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies", SBM, 2005.

[2] W. Kuhnel, B. Hunt. "Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds". Second Edition, A.M.S. 2005.

[3] R. Lopez, "Differential Geometry of curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space", arXiv:0810.3351v1[math.DG.], 2008.

[4] F. N. Silva, "Superfícies Regradas Desenvolvíveis Tipo Tempo e Tipo Espaço no Espaço de Minkowski", Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática-UnB, 2013.

[5] K. Tenenblat, "Introdução à Geometria Diferencial", Segunda Edição. Blucher, 2008.