Jogos Combinatórios e Números Surreais

Ralph C. Teixeira

Departamento de Matemática Aplicada - Universidade Federal Fluminense
24020-140, Niterói, RJ
E-mail: ralph@mat.uff.br

RESUMO

0.1 Motivação

Vamos jogar NIM? Em uma mesa, há n pilhas de palitos, com $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ palitos, respectivamente. Você e um amigo alternam suas jogadas; na sua vez, você pode escolher a pilha que quiser, e retirar o número (positivo) de palitos que desejar daquela pilha (na vez dele, ele é que escolhe, é claro). Quem tirar o último palito ganha. Como determinar a estratégia vencedora para este jogo (em função de $x_1, x_2, ..., x_n$)?

NIM é um exemplo de jogo combinatório – jogos sequenciais nos quais ambos os jogadores têm informação completa (em particular, jogos combinatórios não têm o elemento de sorte). Outros exemplos famosos de jogos combinatórios são o jogo da velha, damas, reversi (ou othello), xadrez, hex e go. Jogos que não são combinatórios incluem "par ou ímpar", pôquer (e praticamente todos os jogos de baralho), gamão (e praticamente todos os jogos com dados) e futebol (e praticamente todos os esportes).

Resolver um jogo combinatório significa determinar quem o vence (supondo que ambos os jogadores jogam sempre da melhor maneira possível) e qual a estratégia vencedora (se houver) a cada lance. Em teoria, todo jogo combinatório pode ser "facilmente" resolvido por um algoritmo simples que analisa completamente a sua árvore de opções.

0.2 Jogos Combinatórios

Informalmente, um *jogo* é:

1. Um conjunto de *posições*, uma das quais é destacada como a *posição inicial* do jogo;
2. Um conjunto de *jogadores* que realizarão os lances (vide a seguir) do jogo;
3. Um conjunto de *regras*, que determinam:
   (a) Todos os *lances* permitidos aos jogadores (um lance é um movimento de uma posição do jogo para outra);
   (b) Todas as *posições terminais* (nas quais o jogo termina, dependendo de quem joga a seguir);
   (c) Uma quantidade de *pontos* a ser atribuída a cada jogador em cada posição terminal (que, na maioria dos casos será 1 ponto para os vencedores e 0 pontos para os perdedores)

Um *jogo combinatório* é um **jogo sequencial com informação completa**, isto é, jogos onde os jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento. Em particular, "informação completa"significa que o elemento de sorte/azar/probabilidade não pode estar presente no jogo, nem pode haver "cartas escondidas"ou algo do gênero.

Por exemplo, *Jogo da Velha*, *Xadrez*, *Damas* e *Go* são jogos combinatórios (quando há empate, pressuponha meio ponto para cada jogador); mas *Gamão*, *Ludo* e quaisquer jogos com dados não são (pois não há informação completa devido à aleatoriedade dos dados). Praticamente qualquer jogo de baralho (*Buraco*, *Canastra*, *Pôquer*, *Truco*, etc.) não é um jogo combinatório (o fato de você não saber as cartas dos outros jogadores exclui "informação completa"; aliás, o simples fato das cartas serem embaralhadas de maneira desconhecida já faz com que o jogo não seja combinatório). *Par ou Ímpar*, *Dois ou Um (Zerinho ou Um)*, *Dedanha* também não são jogos combinatórios porque os jogadores jogam simultaneamente. Esportes como *Futebol*, *Vôlei*, etc. não tem regras bem definidas (um dos problemas é que os lances permitidos dependem da habilidade dos jogadores) e também não são jogos combinatórios.

Note-se que o número de jogadores pode ser 1 (como nas clássicas *Paciências*, que tipicamente não são jogos combinatórios, ou no *Resta-Um*, que é um jogo combinatório) ou até mesmo 0 (como no fascinante e riquíssimo *Life*, de John Conway, onde todos os movimentos são pré-determinados, não há escolha nem fim). Isto dito, neste mini-curso nos limitaremos a jogos de 2 jogadores: L (de Leitor, azuL, Left, você) e R (Ralph, veRmelho, Right, eu). Não se surpreenda portanto se a maioria dos exemplos favorecer o jogador R.

É comum também considerar apenas jogos em que o número de posições é finito – mas boa parte da teoria que discutiremos se aplicam a jogos infinitos, desde que o jogo garantidamente termine em um número finito de lances (considere o jogo em que L escolhe um número real, e em seguida R escolhe um número real – quem escolher o maior número ganha; há uma infinidade de escolhas para L e R, mas o jogo garantidamente termina em apenas 2 lances).

Enfim, trabalharemos apenas com jogos que têm a *Regra Normal*: se a partir de uma posição o jogador prestes a realizar seu lance descobrir que ele não tem lances válidos, então esta posição é terminal e este jogador será imediatamente declarado *perdedor*. Note que isto não é uma restrição forte – por exemplo, se declararmos que, no Xadrez, o jogador que sofreu Xeque-Mate não tem lances válidos, esta condição é automaticamente satisfeita. Ajustes semelhantes podem ser feitos no seu jogo combinatório favorito para que ele tenha tal *Regra Normal* ("quem não pode jogar, perde"). Isto dito, a teoria a ser apresentada só é verdadeiramente útil se o seu jogo pode ser dividido em componentes menores (o que *não é* uma característica do Xadrez).

0.3 O Minicurso

Neste minicurso, apresentaremos o início da teoria dos jogos combinatórios (capítulos iniciais de "Winning Ways"), que procura analisar tais jogos usando ferramentas potencialmente mais poderosas que a simples análise direta de suas árvores.

Começaremos introduzindo o jogo Hackenbush ("desmata-mata") para apresentar os conceitos básicos da teoria; cada posição deste jogo define um número (por um processo similar à construção dos reais via cortes de Dedekind). Veremos como computar e somar tais números. Vale a pena notar que esta construção engloba os números reais e vários outros, levando ao conjunto dos números surreais (incluindo números infinitesimais e infinitos, que serão apenas citados neste minicurso).

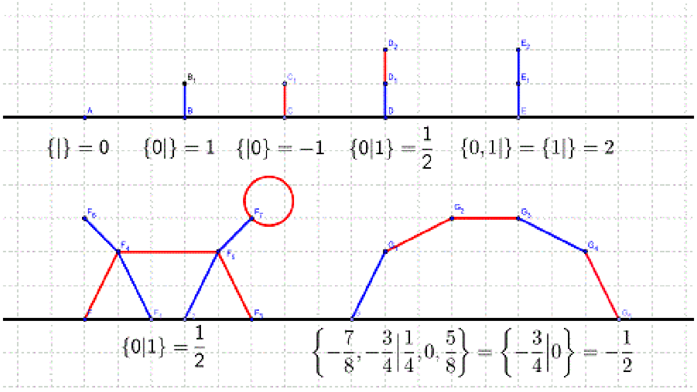

Figura 1: Hackenbush e seus valores

Em seguida, passaremos a analisar Jogos Imparciais como o NIM. As posições deste jogo levam à construção dos nímeros (denominados *1, *2, *3, ...). Aprenderemos a somá-los e utilizá-los para resolver rapidamente vários jogos imparciais de dois jogadores – frequentemente sem a necessidade de computadores! Enfim, apresentaremos o Teorema de Sprague-Grundy: "Todo jogo normal imparcial finito (com dois jogadores) é equivalente a um nímero".

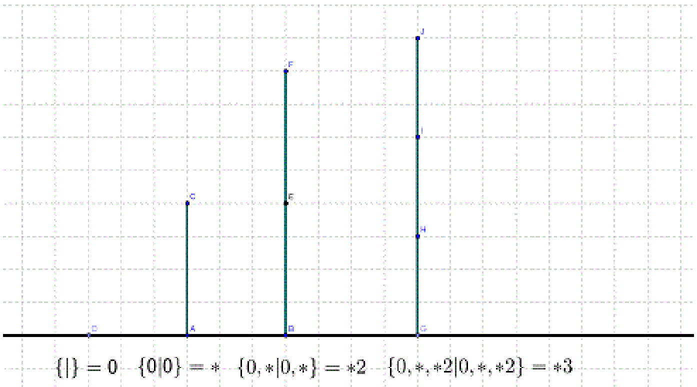

Figura 2: Os primeiros nímeros

A programação aproximada é:

0.3.1 Aula 1: Motivação e Notação

Árvores e estratégias vencedoras; Blue-Red Hackenbush e seus valores numéricos; Jogos positivos, negativos, nulos – e "difusos"; Troncos

0.3.2 Aula 2: Formalização e Exemplos

Jogos combinatórios: um grupo abeliano; Calculando $\{a, b, c, ...|d, e, f, ...\}$ – a Regra da Simplicidade; Números Surreais; Parece 0.9999..., mas não é 1

0.3.3 Aula 3: Jogos Imparciais

Green Hackenbush (e NIM); Nímeros e suas somas; Princípio do Menor Excluído; Teorema de Sprague-Grundy; Aplicações: jogos de palitos e Wyt Queens

0.4 Referências

[1] Elwyn Berlekamp, John Conway, Richard Guy, "Winning Ways for Your Mathematical Plays", Vol.1, Academic Press, 2001.

[2] John Conway, "On Numbers and Games", A K Peters, 2000