Introdução Matemática ao Modelo de Ising e a Transição de Fase

Leandro Chiarini **Leandro Cioletti*** **Filipe Fernandes**

Departamento de Matemática - Universidade de Brasília,
70910-900, Brasília,DF
E-mail: chiarini@mat.unb.br, cioletti@mat.unb.br skyywayy@hotmail.com

RESUMO

O Modelo de Ising

Em 1920, o físico Wilhelm Lenz, com o objetivo de estudar a transição de fase de materiais ferromagnéticos, propôs um modelo matemático a seu aluno de doutorado Ernst Ising. Este modelo, veio mais tarde a ser conhecido como o Modelo de Ising. Em um primeiro momento, não pareceu ser relevante para estudos do fenômeno pois, os cálculos explícitos obtidos por Ising, no caso unidimensional, mostravam que tal modelo não era adequado para lidar com o fenômeno de transição de fase. Este fato fez Ising concluir erroneamente que o modelo não deveria ser relevante para estudo deste fenômeno, mesmo em dimensões mais altas. Porém mais tarde Pieirls mostrou que Ising estava errado é que este modelo, previa sim a transição de fase em dimensão maior ou igual que dois. Esta descoberta ficou conhecida na literatura como argumento de Pieirls e a prova não envolve cálculos explícitos como os obtidos por Ising e sim um brilhante argumento geométrico. Por muito tempo acreditou-se que seria impossível realizar os cálculos feitos por Ising em dimensão dois. Porém, alguns anos depois em 1944 o Físico-Químico Lars Onsagers, mostrou usando técnicas de álgebra multilineares e representações de operadores como encontrar explicitamente a função de partição do modelo de Ising em dimensão dois. O cálculo explicito desta função permite compreender todas as propriedades importantes do modelo e foi de fato isto que Ising fez em dimensão um. Este trabalho foi considerado um resultado tão profundo e inovador que Onsager recebeu o prêmio nobel por tal descoberta.

Com o passar do tempo o Modelo de Ising começou a despertar atenção na comunidade matemática. A extrema dificuldade de se obter a forma explicita da função de partição em dimensões mais altas, motivou o desenvolvimento de técnicas matemáticas poderosas para o estudo rigoroso do fenômeno de transição de fase. Por suas contribuições nesta área Wendelin Werner e Stanislav Smirnov em 2006 e 2010, respectivamente receberam o mais prestigiado prêmio dado a jovens pesquisadores em matemática que é a **Medalha Fields**.

O objetivo deste mini-curso é dar um introdução matemática, para um público amplo, sobre o modelo de Ising e mostrar algumas das suas propriedades bem como apresentar a definição matemática de transição de fase e um teorema importante neste estudo, o chamado Teorema de Lee-Yang. O mini-curso deverá ser acessível a todos que tenha conhecimentos básicos de probabilidade e análise. Apesar do caráter introdutório do mini-curso os estudantes com conhecimentos um pouco mais avançados poderão desfrutar, durante alguns comentários, de um passeio belíssimo pela teoria da medida, análise funcional, análise complexa, combinatória, probabilidade e etc...

Palavras-chave: *Mecânica Estatística,Física-Matemática, Probabilidade, Medida, Modelo de Ising, Transição de Fase.*

*bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

Referências

[1] R. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* 1° Ed. Wiley-Interscience; 1995.

[2] R. Bhattacharya and E.C. Waymire: *A basic Course in Probability Theory.* Universitext. Springer-Verlag; 2007.

[3] A. Bovier: *Lecture notes Gibbs measures and phase transitions - part 1.* Diponível em http://www-wt.iam.uni-bonn.de/ bovier/files/note1.pdf, acessado em 12/06/2012.

[4] L. Cioletti: *Introdução o à Teoria das Medidas de Gibbs.* Diponível em http://www.mat.unb.br/cioletti/Expository-Articles/Notas-ITMG-02-03.pdf, acessado em 29/01/2012.

[5] P. Cupertino: *O Teorema de Lee-Yang, (2004)*, http://www.mat.ufmg.br/ lima/artigos/lee yang.pdf, acessado em 20/01/2013.

[6] G.B. Folland: *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications.* Pure and Applied Mathematics (New York) (Second ed.). New York: John Wiley & Sons Inc; 1999.

[7] H.-O. Georgii: *Gibbs Measures and Phase Transitions(Second Edition).* De Gruyter Studies in Mathematics; 9. Walter de Gruyter & Co; 2011.

[8] R. B. Israel: *Convexity in the theory of lattice gases.* Princeton Series in Physics. Princeton Univ. Press, Princeton; 1979.

[9] G. Keller: *Equilibrium States in Ergodic Theory.* Student Texts; vol 42. Cambridge University Press; 1998.

[10] O.E. Lanford: *Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics.* Lecture notes in physics, vol. 20, Springer-Verlag; 1973.

[11] F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen: *A course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures.* Disponível em http://www.math.wisc.edu/ seppalai/ldp-book/rassoul-seppalainen-ldp.pdf, acessado em 29/01/2012.

[12] M. Reed and B. Simon: *Functional Analysis.* (Methods of Modern Mathematical Physics) (vol 1). Academic Press; 1981.

[13] W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* 3° Ed. McGraw-Hill Science; 1986.

[14] O. Sarig: *Lecture Notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov Shifts*; 2009. Disponível em http://www.wisdom.weizmann.ac.il/ sarigo/TDFnotes.pdf, acessado em 29/01/2012.