Genética: doenças recessivas autossômicas

Existem muitas doenças genéticas governadas por hereditariedade autossômica nas quais um gene normal A domina um gene anormal a O genótipo AA é um indivíduo normal, o genótipo Aa é um portador da doença, mas não é por ela afetado e o genótipo aa é afetado pela doença.

Exemplo 8.1: Suponha que um criador de animais tenha uma população portadora de uma doença recessiva autossômica. Suponha também que os animais afligidos pela doença não sobrevivem até a maturidade. Uma maneira possível para o criador controlar uma tal doença é sempre cruzar uma fêmea independente do seu genótipo, com um macho normal. Desta maneira, todos os futuros descendentes terão os dois pais normais(um cruzamento AA-AA)ou um pai normal e uma mãe portadora (um cruzamento AA - Aa). Não pode haver cruzamentos AA-aa, pois animais do genótipo aa não chegam a maturidade. Neste tipo de programa de cruzamentos, não haverá descendentes futuros doentes, embora ainda haja portadores em gerações futuras. Vamos determinar a fração de portadores nas gerações futuras. Para isso, considere

Modelagem: Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, considere: $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$

$$a_n = \text{ fração de plantas do genótipo } AA \text{ na } n-\text{ésima geração;}$$

$$b_n = \text{ fração de plantas do genótipo } Aa\text{(portadores) na } n-\text{ésima geração;}$$

Como cada descendente tem pelo menos um dos pais normais, podemos considerar este programa de cruzamento controlados como um de cruzamento constante com o genótipo AA. Assim, a transição de distribuição de genótipo de uma geração para seguinte é governada pela equação:

$$X_n = MX_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ onde } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Conhecendo a distribuição inicial X_0, a distribuição de genótipos na $n-$ésima geração é dada por

$$X_n = M^n X_0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Fazendo diagonalização de M temos:

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Como $a_0 + b_0 = 1$, obtemos para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_n = 1 - (\frac{1}{2})^n b_0; \qquad b_n = (\frac{1}{2})^n b_0. \tag{19}$$

Assim, quando n tende a infinito, resulta $a_n \to 1$ e $b_n \to 0$, de modo que, no limite não haverá mais portadores na população.

Também podemos observar que: como

$$b_n = (\frac{1}{2})^n b_0 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} b_0 = \frac{1}{2} b_{n-1},$$

então a fração de portadores em cada geração é metade da geração de portadores na geração precedente.

Referências

[1] A. Howard; C. Rorres. “Álgebra linear com aplicações”. Bookman, 2006.

[2] Boldrini, J.L; Costa, S.I.R. e Figueiredo, V.L. ; Wetzler, H.G. “Álgebra linear”. São Paulo, Harper e Row do Brasil, 1986.

[3] Callioli, C.A. ; Domingues, H.H.; Costa, CF. “Álgebra Linear e Aplicações”. São Paulo, Editora Atual, 1990.

[4] Lipschutz, S. “Ágebra Linear”. São Paulo, Makron Books, 1994.

[5] Lima, E.L. “ Álgebra linear”. Rio de Janeiro, Impa, 1999.

[6] D. Poole. “Álgebra linear”São Paulo, Thomsom Learning, 2006.

[7] http://www.virtual.epm.br/cursos/genetica/htm/defini.htm

[8] Griffiths A.J.F. “Introdução à Genética”Rio de Janeiro, Guanabara Koogan, 2006.

Minicurso 3

Métodos Matemáticos Aplicados à Física

Resumo: O minicurso trata-se de dois métodos aplicados à Física em que um deles representa a classe de métodos analíticos e o outro a classe de métodos numéricos. A definição de limite de um sequência é exposta para resolver o Paradoxo de Zenon e introduzir a importância o cálculo diferencial na Mecânica Newtoniana. Depois disso, o Método de Diferenças Finitas é descrito para a obtenção de soluções numéricas da equação de advecção linear através dos métodos Upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff e Beam-Warming, com o intuito de mostrar as dificuldades e preocupações em análise numérica.

Etnomatemática e Documentários: uma perspectiva de reflexão sobre a realidade

Roberto Barcelos Souza

O Mini curso *"Etnomatemática e Documentários: uma perspectiva de reflexão sobre a realidade"* foi idealizado e planejado como uma intervenção possível no contexto de formação de professores que ensinam Matemática para abordar o Programa Etnomatemática e Documentários no campo da Educação Matemática. O Mini curso resulta num espaço destinado a estimular a reflexão dos participantes sobre o Programa Etnomatemática, de modo que eles mesmos possam constituir suas visões dentro de seu contexto sociocultural, no sentido de que o Programa Etnomatemática é um meio para realizar releituras do mundo, do outro (individuo), levando em consideração o seu contexto sociocultural, seja do educando, seja da comunidade escolar, seja de etnias, seja dos problemas da humanidade e dos diferentes saberes e fazeres.

Além das discussões teóricas e pedagógicas, o mini curso busca abranger os próprios saberes e problemas relacionados ao contexto escolar, do trabalho, entre outros. Deste modo, procura evidenciar as vivências e experiências que os participantes apresentam nestes contextos. A intenção é estimular a análise de questões práticas e da realidade, tais como: o contexto sociocultural; a postura do professor de matemática perante o educando e a realidade; o encontro intercultural. Para tanto, faz uso dos aspectos funcionais de produções documentarias para elucidar esses contextos e discussões.

O mini curso, portanto, assenta-se em duas vertentes: o Programa Etnomatemática como abordagem teórica para indagar/investigar situações com referência à realidade (contexto sociocultural) e refletir sobre esse contexto sociocultural do ponto de vista da prática de sala de aula e de encontros interculturais; e a outra vertente, os documentários, foi adotada com a intenção de oportunizar as vivências nestes contextos socioculturais. Assim, o propósito do mini curso é envolver os participantes nos vídeos documentários, num segundo momento, estimular a reflexão sobre a realidade representada e suas "problemáticas". Por fim, o mini curso busca elucidar que um meio para motivar e desafiar os participantes sobre temas que abarcam o Programa Etnomatemática é o documentário. Se o programa Etnomatemática busca realizar releituras do mundo, o documentário surge como um caminho para que essa releitura seja representada.

Alguns Problemas Interessantes na Teoria da Probabilidade

Fabiano F. T. dos Santos (IME-UFG)

Neste mini-curso, o objetivo principal é apresentar alguns problemas clássicos envolvendo os conceitos de probabilidade clássica e de probabilidade geométrica. O cálculo da probabilidade da ocorrência de um evento sob a luz da probabilidade clássica, nada mais é do que o quociente entre o número casos favoráveis e o número de casos possíveis. Nesse contexto, serão apresentados alguns conceitos e exemplos preliminares e em um segundo momento, resolveremos em detalhes o *problema da concidência de aniversários* e o *problema do amigo oculto*. Na resolução do primeiro, recorreremos à propriedade $P(A) = 1 - P(A^c)$, onde A é um evento aleatório associado a um espaço amostral Ω e A^c é o seu complementar. A resolução do segundo problema exigirá um pouco mais de trabalho, pois será necessário discorrer sobre permutações caóticas, sem porém, resolver a equação de recorrência que dá a fórmula para o número de tais permutações num conjunto com n objetos.

A segunda parte do mini-curso diz respeito à probabilidade geométrica. Quando se fala neste conceito, é porque estamos lidando com um espaço amostral infinito e não-enumerável, como, por exemplo, um intervalo, uma região do plano ou uma região do espaço e, neste caso, a probabilidade clássica não pode ser utilizada. Para problemas com essa peculiaridade, o cálculo de probabilidades é feito através do quociente entre o volume n-dimensional da região favorável e o volume n-dimensional do espaço amostral (por volume n-dimensional, entenda: comprimento, se $n = 1$; área, se $n = 2$; volume, se $n = 3$ etc). Serão abordados dois problemas simples; o primeiro consiste no cálculo da probabilidade de acertar a *mosca* em um alvo; o segundo, envolve a seguinte questão: "dividindo-se aleatoriamente um segmento de comprimento L em três partes, qual a probabilidade de que esses três segmentos sejam os lados de um triângulo?".

BREVE TRAJETÓRIA DA ÁLGEBRA ESCOLAR NO ENSINO SECUNDÁRIO DO LICEU DE GOIÁS (1847 – 1907)

Viviane Barros Maciel – CAJ/UFG

Palavras-chave: História da matemática escolar. Liceu de Goiás. Trajetória da Álgebra escolar. Livros didáticos de álgebra. Ensino secundário em Goiás.

Introdução

Este artigo tem como objetivo principal mostrar como saberes relativos à Álgebra circularam e foram apropriados pelo Liceu de Goiás, primeira instituição pública de ensino secundário da Província de Goiás, referenciados pelo Colégio Pedro II, modelo de ensino secundário para o país, no período compreendido entre 1856 a 1918. Este estudo faz parte de uma pesquisa maior, em que se buscou analisar não só a trajetória da Álgebra, mas, também, da Aritmética e da geometria, neste mesmo período.

Para esta pesquisa foi necessário buscar por fontes que pertenceram ao arquivo escolar do Liceu como: provas, livros de matrículas de alunos e de frequência de professores, memórias da instituição, regulamentos, entre outros, de modo reverso, ou seja, do presente para o passado, problematizando-as (questionando-as) e utilizando para isto meio de um método crítico (BLOCH, 2002). Também se fez necessária a análise dos livros didáticos de Álgebra que circularam pelo Liceu (VALENTE, 2010; CHOPPIN, 2004). Tais fontes são importantes, pois constituem peças centrais no estudo das apropriações da matemática escolar. Para utilizarmos a noção de apropriação, no sentido proposto por Chartier (1991) temos que levar em consideração a distância existente entre o que se impunha ao Liceu, pelo Colégio Pedro II, em termos de leis, reformas e programas de ensino e em que medida tudo isto era absorvido pela cultura escolar (CHERVEL, 1990) deste.

Desse modo, faremos um breve percurso da Álgebra escolar, no Liceu de Goiás, sem perder de vista as relações desta instituição com o Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, observando pontos de aproximação e distanciamentos entre o que se propunha no global e o que era apropriado pelo local, constituindo, assim, a cultura escolar *glocal*. Local e global em relação, fazendo surgir o *glocal* (CHARTIER apud VALENTE, 2010), um lugar privilegiado para o estudo destas apropriações.

A Álgebra escolar nos planos de estudos, nos livros e nos exames

O Liceu de Goiás, primeiro estabelecimento de instrução pública secundária da Província de Goiás, foi criado em 1846, permanecendo como um dos principais ensinos secundários de Goiás até a mudança desta instituição goiana para nova capital de Goiás, Goiânia, em 1937. O Liceu teve seus primeiros Estatutos instituídos por lei e aprovados em 1850. Nele constava a disciplina de Aritmética e Geometria que desde a criação do Liceu, em 1847, esteve ocupada pelo mesmo professor de matemática, Vicente Moretti Foggia, até 1868 quando este se aposenta. Neste ano, conforme o Memorial Histórico do Liceu, esta disciplina se desdobrou em duas, a saber, uma de Contabilidade e outra de Geometria.

Vale ressaltar que a cadeira de Contabilidade compreendia conteúdos de Aritmética (quatro operações com números inteiros, fracionários, complexos, razões e proporções) e *Álgebra* (elementos de Álgebra), além dos sistemas usados de escrituração mercantil e financeira. Com relação esta cadeira, não permaneceu por muito tempo nos planos de estudo do Liceu e em 1872 foi suprimida dos mesmos.

Segundo Valente (2007), conhecimentos de Álgebra passaram a ser cobrados nos exames de preparatórios do Colégio Pedro II somente a partir de 1854 (até então havia a cobrança de Aritmética e Geometria) e para quem pleiteasse ingressar nas faculdades de medicina. Mesmo assim, segundo o Decreto 1.387 de 28 de abril deste ano, os conteúdos de Álgebra eram limitados até equações de 1º grau. (VALENTE, 2007, p.168).

Somente na Reforma Cruz[1], a Álgebra foi ressaltada nos planos de estudo, quando a disciplina apareceu com a rubrica *Aritmética, Metrologia*[2]*, Álgebra e Geometria*, que seria ensinada nos Cursos Comercial (com uma cadeira de Escrituração Mercantil e Legislação Comercial) e no Curso Normal (com uma cadeira de Pedagogia), conforme novo regulamento.

No advento da República após a Reforma Benjamim Constant[3], nota-se o espaço conquistado pelas matemáticas no plano de estudos. Em 1897, especificamente, o plano do Liceu de Goiás contava com as disciplinas de Português; Inglês; Geografia e História; Aritmética; Álgebra, Geometria e Trigonometria; Francês e Latim.

---

[1] Reforma Cruz, de 12 de abril de 1884.

[2] Nota-se a inclusão da Metrologia até no nome da disciplina que revela a preocupação que se tinha na época em disseminar o sistema métrico decimal, instituído oficialmente pela lei imperial n.1.157, de 26 de junho de 1862. Somente em 1872, o imperador passou aos municípios a tarefa de fiscalização dos pesos e medidas utilizados

[3] Decreto de 8 de novembro de 1890.

A partir de 1904, todos os esforços do Secretário de Instrução Pública, João Alves, giraram em torno do processo de equiparação[4]. Para que o Liceu conseguisse se equiparar, deveria modelar o plano de estudos com os do Ginásio Nacional (Colégio Pedro II após o final do Império), no Rio de Janeiro, o que ocorre por meio do Decreto nº 1590 de 8 de janeiro de 1906. No plano de estudos aparece a rubrica Matemática Elementar, não que esta fosse uma disciplina específica, mas apenas uma rubrica adotada para as disciplinas, Aritmética, Álgebra e Geometria, conforme, o Regulamento do Liceu e Escola Normal - 1906.

Além da trajetória da álgebra nos planos de estudo, vale destacar a importância das atas de exames, dos livros didáticos e provas realizadas por alunos como fontes para pesquisa, pois podem trazer informações como os conteúdos privilegiados pelos professores (pontos), quem foi o professor da disciplina e o examinador, quantos e quais foram os alunos que prestaram exames, os resultados obtidos pelos mesmos e em que medida autores dos livros didáticos se apropriavam do que era estabelecido com relação aos conteúdos e aspectos metodológicos prescritos nas reformas.

Em uma das atas analisadas, de exame oral de Álgebra, realizado por dois candidatos em 10 de janeiro de 1899. Um deles sorteou o tema do *Problema dos Correios*[5] *e sua discussão*, ou *problema dos postilhões*. Este se trata de um problema clássico de Álgebra que, geralmente, era ensinado logo após a introdução de equações de primeiro grau, com uma e duas incógnitas e desigualdades de primeiro grau. A indicação deste aparece, explicitamente, nos programas de ensino do Colégio Pedro II, pela primeira vez, em 1877, depois em 1879, 1915, 1919,e de acordo com Alvarez (2004) afirma que o problema dos correios continuou presente nas aulas do período compreendido entre 1931 a 1937.

Com relação à circulação dos livros didáticos, o livro *Elementos de Álgebra*, de José Augusto da Cunha, apesar de não fazer parte dos indicados pelos programas de ensino do Colégio Pedro II, conforme Beltrame (2000), este circulou no Liceu em 1898. Um vestígio

---

[4] O título II, do decreto Federal nº 3.890 1º de janeiro de 1901, responsável por aprovar o Código dos Institutos Oficiais de Ensino Superior e Secundário, Art. 370, afirmava que "Os institutos equiparados terão [teriam] o direito de conferir aos seus alunos os grau que concedem [concediam] os estabelecimentos federais, uma vez que eles tenham obtido as aprovações exigidas pelos regulamentos destes para a obtenção dos mesmos graus". O Liceu se equipara em 1907, por meio do Decreto 6.636 de 05 de setembro.

[5] Problema dos Correios: *"Dois móveis partem no mesmo instante, sendo um da estação B e outro de A, seguindo ambos para S. O primeiro percorre 7 Km por hora e o outro 5 Km por hora. A distância AB é de 6 Km. A que distância da estação A o primeiro deve encontrar o segundo?*" (ROXO; SOUZA; THIRÉ (1936, p.70-71) *apud* ALVAREZ, 2004, p.85).

desta circulação é o nome de um aluno do Liceu de Goiás presente na contracapa com a data especificada. No Colégio Pedro II, utilizava-se o compêndio de José Adelino Serrasqueiro.

Com relação às provas de alunos encontradas, datadas de 1906, estas apresentavam três questões:

> *1ª Questão – Resolver a seguinte equação pelo método de redução ao mesmo coeficiente.5x – 3y = 13 e 2x + 4y = 26.*
> *2ª Questão – Quantos são os métodos de eliminação em álgebra. Regra para aplicação de cada um.*
> *3ª Questão – Dividir 32 em duas partes taes, que seja igual a 6 a soma dos quocientes que resultam dividindo a primeira parte por 6 e segunda por 5.*

Tanto nas provas de Geometria, quanto nas de Álgebra, também notamos a ênfase nas demonstrações o que contrariava, em parte, o exposto no artigo 9º, do regulamento de 1901, em vigor nesta época.

A primeira questão da prova de Álgebra (figura 1) foi resolvida por dois alunos da mesma maneira. Na resolução, os alunos conseguiram reduzir as equações ao mesmo coeficiente, no caso “10x”, porém, ambos acabaram esquecendo de mudar o sinal do termo independente, para efetuar a subtração dos termos de uma equação pelos termos da outra. Assim, acabaram encontrando um valor diferente para y, a saber, y = 6 (sendo este incorreto), e, ainda, não tentaram descobrir o valor da outra incógnita (x). A solução do sistema de equações deveria ser o par ordenado (5,4), um sistema determinado, de uma única solução.

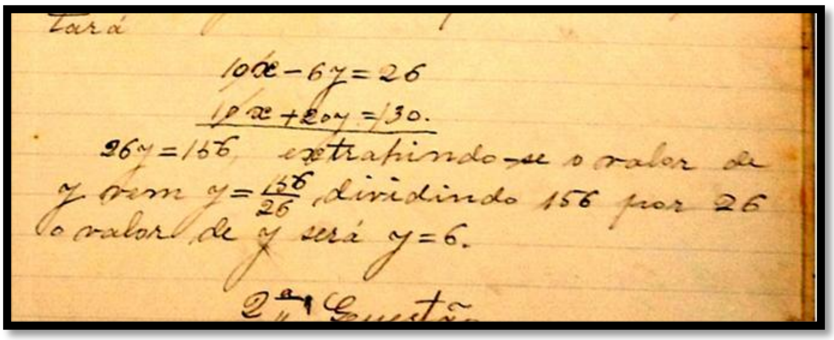

Figura 1. Primeira questão da Prova Escrita de Álgebra.
Fonte: Arquivo Histórico Estadual, Caixas de Goiás – 1906, Goiânia – GO.

Na segunda questão, referente aos “métodos de eliminação em Álgebra” e “regra de aplicação de cada um”, os alunos deram como resposta que são quatro os métodos de eliminação: por substituição; por redução ao mesmo coeficiente (ou método da adição e