- Examinaremos a hereditariedade de características de animais ou plantas;

- vamos supor que a característica herediária sob consideração seja governada por um conjunto de dois genes, que denotamos por A e a;

- Cada indivíduo de cada sexo possue dois destes genes e os possíveis pares são: AA, Aa e aa. Este par de genes é chamado genótipo do indivíduo;

- exemplo: nas bocas-de-leão, um conjunto de dois genes controla a cor da flor. O genótipo AA produz flores vermelhas, o genótipo Aa produz flores roxas e o genótipo aa produz flores brancas;

- exemplo: nos humanos a cor dos olhos é controlada por hereditariedade autossômica. Os genótipos AA e Aa tem olhos castanhos e o genótipo aa tem olhos azuis;

- para caso como estes, dizemos que A domina o gene a, ou então que o gene a é recessivo em relação ao gene A, pois o genótipo Aa apresenta caractéristica externa igual ao genótipo AA;

- explicaremos a maneira pela qual os genes dos pais são passados para seus descendentes nos dois tipos de hereditariedade;

- construiremos modelos matriciais que dão os prováveis genótipos dos descendentes em termos dos genótipos dos pais e usaremos estes modelos matriciais para acompanhar a distribuição genotípica de uma população através de sucessivas gerações;

- a configuração populacional futura pode ser projetada aplicando álgebra matricial às taxas, especificadas por faixas etárias, de nascimento e mortalidade da população;

- A evolução a longo prazo da população depende de uma matriz de projeção que contém parâmetros demográficos da população.

Genética: hereditariedade autossômica

- Na hereditariedade autossômica, um indivíduo herda um dos genes de cada par de genes dos seus pais para formar o seu particular par;
- Pelo que sabemos e uma questão de sorte qual dos dois genes os pais passam aos filhos:

- Assim se um dos pais é do genótipo Aa é igualmente provável que o descendente herde o gene A ou o gene a daquele genitor.
- se um dos pais é do genótipo aa e o outro é do genótipo Aa, o descendente sempre receberá com igual probabilidade, ou um gene A ou um gene a do genitor Aa. Consequentemente, cada descendente terá chances de ser do genótipo Aa ou aa.

Genótipo dos descendentes	Genótipo dos pais					
	AA - AA	AA - Aa	AA -aa	Aa- Aa	Aa - aa	aa -aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Genética: distribuição dos genótipos numa população

Exemplo 7.1: Suponha que um agricultor tem uma grande população de plantas consistindo de alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos AA, Aa e aa. O agricultor deseja implementar um programa de criação na qual cada planta da população é sempre fertilizada por um planta o genótipo AA. Queremos deduzir uma expressão para a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações.

Modelagem: Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, considere:

$$a_n = \text{ fração de plantas do genótipo } AA \text{ na } n-\text{ésima geração;}$$

$$b_n = \text{ fração de plantas do genótipo } Aa \text{ na } n-\text{ésima geração;}$$

$$c_n = \text{ fração de plantas do genótipo } aa \text{ na } n-\text{ésima geração.}$$

$$a_0, b_0, c_0 : \text{ especificam a distribuição inicial dos genótipos.}$$

Observe que:

Genótipo dos descendentes	Genótipo dos pais		
	AA - AA	AA - Aa	AA -aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1
aa	0	0	0

Segue da tabela anterior, que a distribuição de genótipos em cada geração a partir da distribuição da geração precedente é dada pelas seguintes equações:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \tag{4}$$
$$b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} \tag{5}$$
$$c_n = 0 \tag{6}$$

Observe que primeira destas três equações afirma que todos os descendentes de uma planta do genótipo AA serão do tipo AA neste programa de criação e metade dos descendentes de um planta do genótipo Aa será do tipo AA.

Podemos escrever as equações (1), (2) e (3) na forma matricial como:

$$X_n = MX_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots, \tag{7}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Observe que as colunas da matriz M são iguais as colunas da tabela anterior. Segue de (4) que:

$$X_n = MX_{n-1} = M^2X_{n-2} = M^3X_{n-3} = \cdots = M^nX_0.$$

Conseqüentemente, se encontrarmos uma expressão explícita para M^n, podemos usar (4), para encontrar uma expressão explícita para X_n.

Para encontrarmos uma expressão explícita para M^n, primeiro vamos diagonalizar M, ou seja, procuraremos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D, tais que $M = PDP^{-1}$.

observe que, com esta diagonalização teremos:

$$M^n = PD^nP^{-1}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}.$$

A diagonalização de M é obtida encontrando os autovalores e os autovetores correspondentes. São estes:

$$\text{Autovalores: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0.$$

$$\text{Autovetores associados: } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P = [X_1|X_2|X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - (\frac{1}{2})^n b_0 - (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ (\frac{1}{2})^n b_0 + (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, então temos para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_n = 1 - (\frac{1}{2})^n b_0 - (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \tag{8}$$
$$b_n = (\frac{1}{2})^n b_0 + (\frac{1}{2})^{n-1} c_0 \tag{9}$$
$$c_n = 0 \tag{10}$$

Como $(\frac{1}{2})^n$ tende a 0, quando n tende a infinito, então $a_n \to 1$; $b_n \to 0$; $c_n = 0$, quando $n \to \infty$.

Isto mostra que no limite todas as plantas da população serão do genótipo AA.

Exemplo 7.2: Suponha que um agricultor tem uma grande população de plantas consistindo de alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos AA, Aa e aa. O agricultor deseja implementar um programa de criação na qual cada planta da

população é sempre fertilizada por um planta do genótipo seu próprio genótipo. Dessa forma, os posíveis genitores são: AA-AA, Aa-Aa, aa-aa. Queremos deduzir uma expressão para a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações.

Modelagem: Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$ considere:

$$a_n = \text{ fração de plantas do genótipo } AA \text{ na } n-\text{ésima geração;}$$

$$b_n = \text{ fração de plantas do genótipo } Aa \text{ na } n-\text{ésima geração;}$$

$$c_n = \text{ fração de plantas do genótipo } aa \text{ na } n-\text{ésima geração.}$$

$$a_0, b_0, c_0 : \text{ especificam a distribuição inicial dos genótipos.}$$

Genótipo dos descendentes	Genótipo dos pais AA - AA	Aa - Aa	aa -aa
AA	1	$\frac{1}{4}$	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	$\frac{1}{4}$	0

Usando a notação do exemplo anterior,

$$X_n = MX_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \tag{11}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, X_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Observe que as colunas da matriz M são iguais as colunas da tabela anterior. Temos que,

$$X_n = MX_{n-1} = M^2X_{n-2} = M^3X_{n-3} = \cdots = M^nX_0.$$

Vamos encontrar uma expressão explícita para M^n. Assim, encontraremos uma expressão explícita para X_n.

Para encontrarmos uma expressão explícita para M^n, primeiro vamos diagonalizar M. Para isso, procuraremos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D, tais que $M = PDP^{-1}$.

A partir daí teremos: $M^n = PD^nP^{-1}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}.$$

A diagonalização de M é obtida encontrando os autovalores e os autovetores correspondentes. São estes:

$$\text{Autovalores: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Autovetores associados: } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } P = [X_1|X_2|X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_n = a_0 + [\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}]b_0 \tag{12}$$

$$b_n = (\frac{1}{2})^n b_0 \tag{13}$$

$$c_n = c_0 + [\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}]b_0 \tag{14}$$

Como $(\frac{1}{2})^n$ e $(\frac{1}{2})^{n+1}$ tende a 0, quando n tende a infinito, então $a_n \to a_0 + \frac{1}{2}b_0$; $b_n \to 0$; $c_n \to c_0 + \frac{1}{2}b_0$; quando $n \to \infty$.

Logo, fertilizando cada planta com uma planta do seu próprio genótipo produz uma população que no limite contém somente genótipos AA e aa.

Exemplo 7.3: Suponha que um pecuarista tem uma fazenda de criação de bovinos, cuja distribuição de todos os três possíveis genótipos são: AA, Aa e aa. O pecuarista deseja implementar um programa de criação na qual animal da fazenda é sempre fertilizada pelo reprodutor do genótipo Aa. Dessa forma, os posíveis genitores são: AA-Aa, Aa-Aa, Aa-aa. Deduza as fórmulas que descrevem os genótipos dos animais gerados na $n-$ésima geração. Também encontre o limite d distribuição genotípica quando n tende a infinito.

Modelagem: Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$ considere:

$a_n =$ fração de plantas do genótipo AA na $n -$ ésima geração;

$b_n =$ fração de plantas do genótipo Aa na $n -$ ésima geração;

$c_n =$ fração de plantas do genótipo aa na $n -$ ésima geração.

$a_0, b_0, c_0 :$ especificam a distribuição inicial dos genótipos.

Genótipo dos descendentes	Genótipo dos pais		
	AA - Aa	Aa - Aa	aa -Aa
AA	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
aa	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Usando a notação do exemplo anterior,

$$X_n = MX_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, \tag{15}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, X_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}, X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Observe que as colunas da matriz M são iguais as colunas da tabela anterior. Temos que,

$$X_n = MX_{n-1} = M^2X_{n-2} = M^3X_{n-3} = \cdots = M^nX_0.$$

Vamos diagonalizar diagonalizar M, ou seja, procuraremos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D, tais que $M = PDP^{-1}$ Segue daí,

$$M^n = PD^nP^{-1}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}.$$

A diagonalização de M é obtida encontrando os autovalores e os autovetores correspondentes. São estes:

$$\text{Autovalores: } \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1.$$

$$\text{Autovetores associados: } X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P = [X_1|X_2|X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -10 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_n = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^{n+1}](a_0 - c_0) \tag{16}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \tag{17}$$

$$c_n = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})^{n+1}(a_0 - c_0) \tag{18}$$

Como $(\frac{1}{2})^n$ e $(\frac{1}{2})^{n+1}$ tende a 0, quando n tende a infinito, então $a_n \to \dfrac{1}{4}$; $b_n \to \dfrac{1}{2}$; $c_n \to \frac{1}{4}$.