$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Temos que a equação característica de $A$ é: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Dessa forma, segue os autovalores com o seus repectivos autovetores associados:

$$\lambda_1 = 2, \quad X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 = 1, \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Observe que $\{X_1, X_2, X_3\}$ é $L.I.$

$$\text{Portanto } A \text{ é diagonalizável e } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 4.2**: Encontre a matriz $P$ que diagonaliza $A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Solução:** Temos que a equação característica de $A$ é: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Dessa forma, segue os autovalores com o seus repectivos autovetores associados:

$$\lambda_1 = 1, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Observe que $\{X_1, X_2\}$ não é $L.I$ em $\mathbb{R}^3$, assim $A$ não é diagonalizável.

**Exemplo 4.3**: Dados $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, Dados $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ e

$$X_n = MX_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Encontre uma formúla explícita para $X_n$ para todo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

**Solução:**

Usaremos a diagonalização de operadores para encontrar um fórmula explícita para $X_n$. Temos que a equação característica de $M$ é:

$$\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = (\frac{1}{2}) - \lambda \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\frac{1}{2} - \lambda) \left\{ (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{2} - \lambda) - \frac{1}{8} \right\} - \frac{1}{4}\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\frac{1}{2} - \lambda) \left\{ \frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\frac{1}{2} - \lambda) \left\{ -\lambda + \lambda)^2 \right\} = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{2} - \lambda)(\lambda - 1)\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Para encontrarmos os autovetores associados a

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 1\frac{1}{2},$$

basta resolvermos os sistemas

$$MX = \lambda_i X, \quad i = 1, 2, 3$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e considerarmos uma das suas soluções não nulas.

Resolvendo dos sistemas temos:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 0, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_3 = 1, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Observe que

$$\{X_1, X_2, X_3\}$$

é $L.I.$ Portanto $M$ é diagonalizável. Dessa forma,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $M = PDP^{-1}$ e daí

$$M^n = PD^nP^{-1}.$$

Temos que

$$X_n = M^n X_0$$

então

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0.$$

Segue do método de Gauss-Jordan o cálculo da matriz inversa de $P$ :

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{L_3 \to L_1 + L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{L_3 \to L_2 + L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{L_1 \to 2L_1 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{L_2 \to -2L_2 + L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{4}L_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{4}L_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Portanto $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$,

Dessa forma,

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$, onde:

$$a_n = \frac{1}{4}(a_0 + b_0 + c_0) + (\frac{1}{2})^{n+1}](a_0 - c_0) \tag{1}$$

$$b_n = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 + c_0) \tag{2}$$

$$c_n = \frac{1}{4}(a_0 + b_0 + c_0) - (\frac{1}{2})^{n+1}(a_0 - c_0) \tag{3}$$

**Exercício**: Dados $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ e

$$X_n = MX_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Encontre uma formúla explícita para $X_n$ para todo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

**Exercício**: Dados $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ e

$$X_n = MX_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Encontre uma formúla explícita para $X_n$ para todo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

**Exercício**: Dados $M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$ e

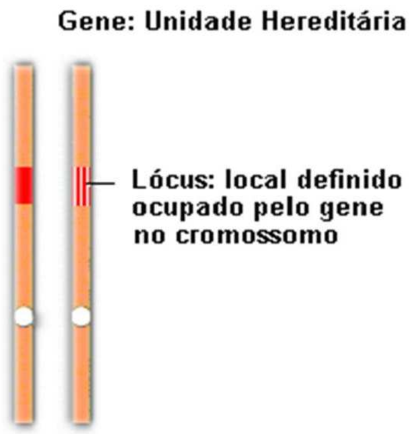
$$X_n = MX_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Encontre uma formúla explícita para $X_n$ para todo $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

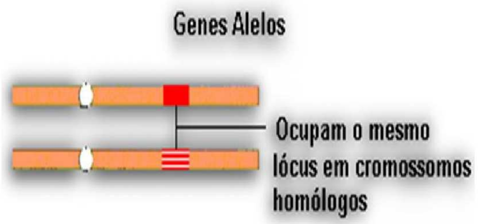
## Genética: algumas definições

Genótipo e Fenótipo: O genótipo de uma pessoa é a sua constituição genética. O fenótipo é a expressão observável de um genótipo como um caracter morfológico, bioquímico ou molecular.

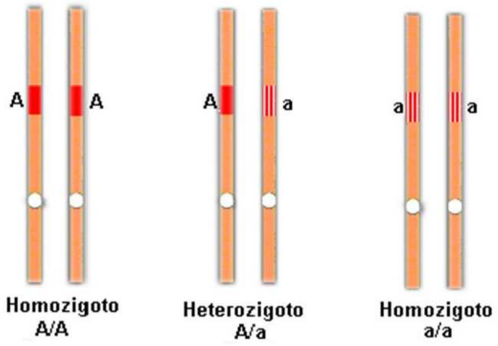
Locus Gênicos: Os cromossomos existem aos pares nas células somáticas. Cada gene ocupa um lugar definido no cromossomo. Esse lugar definido é denominado locus gênico.



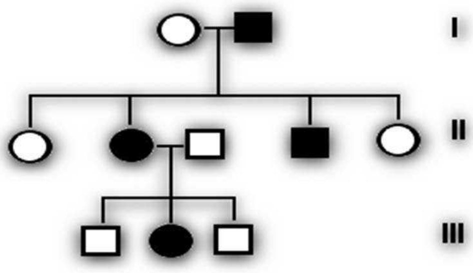

Genes Alelos: Os genes que ocupam o mesmo locus em cromossomos homólogos são denominados genes alelos.




Homozigotos e Heterozigotos: Os genes alelos não são necessariamente idênticos. Quando nas células de um indivíduo os genes alelos para um determinado caráter não são idênticos, o indivíduo é denominado heterozigoto para o caráter denominado pelo par de genes. Quando os genes alelos são idênticos, o indivíduo é denominado homozigoto para aquele caráter.

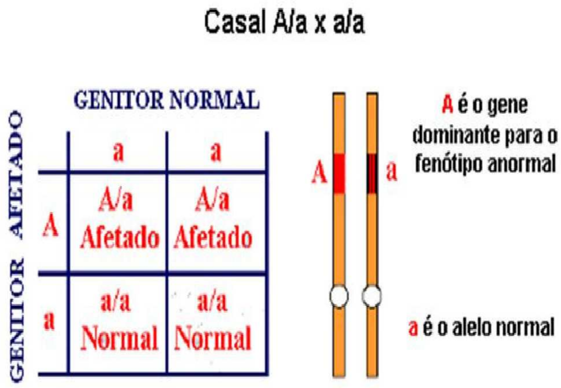



Herança autossômica dominante: Na herança autossômica dominante um fenótipo é expressado da mesma maneira em homozigotos e heterozigotos. Toda pessoa afetada em um heredograma possui um genitor afetado, que por sua vez possui um genitor afetado, e assim por diante.



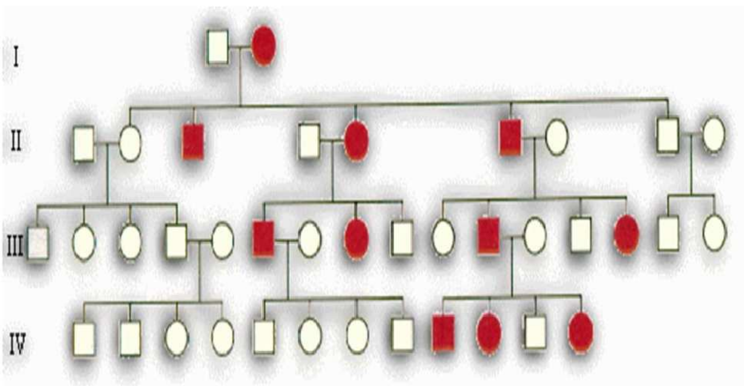

Critérios da Herança Autossômica Dominante:

- O fenótipo aparece em todas as gerações, e toda pessoa afetada tem um genitor afetado;
- qualquer filho de genitor afetado tem um risco de 50 por cento de herdar o fenótipo;
- familiares fenotipicamente normais não transmitem o fenótipo para seus filhos. Homens e Mulheres têm a mesma probabilidade de transmitir o fenótipo aos filhos de ambos os sexos.



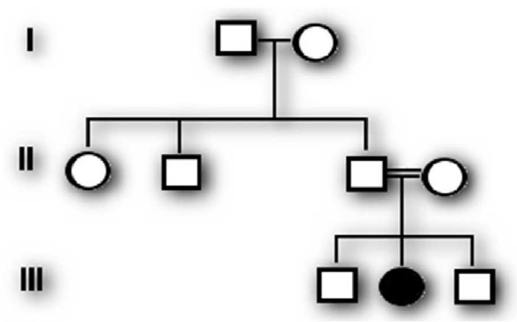

<u>Exemplo de Herança Autossômica Dominante</u> - Doença de Huntington (DHq): é uma doença neurodegenerativa fatal de herança autossômica dominante caracterizada por movimentos involutários e demência progressiva. O aparecimento da doença se dá entre os 30-50 anos de idade sendo 38 a idade média de aparecimento.

Heredograma de uma família com Doença de Huntington




<u>Herança Autossômica Recessiva</u>: os distúrbios autossômicos recessivos expressam-se apenas em homozigotos, que, portanto, devem ter herdado um alelo mutante de cada genitor. O risco de seus filhos receberem o alelo recessivo de cada genitor, e serem afetados é de 1/4. A maioria dos genes dos distúrbios autossômicos recessivos estão presentes em portadores

dos genes. Eles podem ser transmitidos nas famílias por numerosas gerações sem jamais aparecer na forma homozigótica. A chance de isto acontecer é aumentada se os pais forem aparentados. A consanguinidade dos genitores de um paciente com um distúrbio genético é uma forte evidência em favor da herança autossômica recessiva daquela afecção.




Critérios da Herança Autossômica Recessiva:

- o fenótipo é encontrado tipicamente apenas na irmandade do probando e o fenótipo salta gerações;
- o risco de recorrência para cada irmão do probando é de 1 em 4;
- os pais do índivíduo afetado, em alguns casos são consanguíneos;
- ambos os sexos têm a mesma probabilidade se serem afetados.

Exemplo de Herança Autossômica Recessiva - Fibrose Cística: doença autossômica recessiva caracterizada por doença pulmonar crônica, insuficiência pancreática exócrina, aumento da concentração de cloreto no suor. O defeito básico é uma mutação do gene que codifica a proteína reguladora da fibrose cística, provavelmente envolvida no transporte de ânions através da membrana celular.

# Genética: características hereditárias

- Investigaremos a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações calculando potência de matrizes;