O mini curso 1, intitulado, “Livros Didáticos e Arquivos Escolares: o que podem revelar sobre a matemática escolar?”, teve por objetivo mostrar o quanto fontes de pesquisa pertencentes aos arquivos escolares de uma instituição de ensino, e livros didáticos que possam ter circulado nela podem oferecer ao pesquisador importantes caminhos para estudos inseridos no campo da história da educação matemática. Como referencial teórico, os principais destaques foram para André Chervel, do campo da história das disciplinas escolares; Alain Choppin, e as principais funções do livro didático que este apresenta; Marc Bloch, e o que ensina sobre o ofício do historiador e Roger Chartier e a noção de representação e apropriação. O mini curso também visou alertar sobre a importância de conservação e digitalização destes arquivos, bem como, principais cuidados que devemos ter com os mesmo, além de divulgar *sites* contendo leis e documentos governamentais oficiais e grupo de estudo que possuem acervos de arquivos escolares e livros didáticos, como o GHEMAT (Unifesp/SP). Como exemplo, a ministrante mostrou como arquivos e livros foram importantes para o estudo da circulação e apropriação da matemática escolar no Liceu de Goiás, referenciada no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, no período compreendido entre 1856 a 1918, trabalho que desenvolveu no Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Universidade Federal da Grande Dourados - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias - Curso de Matemática

Aplicações de Diagonalização de Matrizes

www.ufgd.edu.br/facet/matematica
irenecraveiro@ufgd.edu.br

Introdução

O tema abordado para este minicurso é a resolução de problemas ligados com outras formas de conhecimentos, em particular, conceitos de genética ensinados no Ensino Médio. O objetivo é estabelecer uma ligação entre teoria de matrizes e o alguns conceitos de genética vistos no Ensino Médio. Nesses modelos matriciais aplicados em genética aparecem matrizes cujos autovalores e autovetores interessam calcular. Dessa forma, faz-se necessário desenvolvermos a parte teórica de diagonalização de matrizes. Para isso, é necessário saber o que acontece quando temos uma matriz M de dimensão n, um vetor não nulo v e um número real λ, tal que $Mv = \lambda v$, para estes casos dizemos que v é autovetor associado ao autovalor λ da matriz M. Os autovalores de M são as raízes do polinômio característico $det(M - \lambda I)$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Assim, matrizes de ordem n tem autovalores reais, desde que $det(M - \lambda I) = 0$ tenha solução no conjunto dos números reais. Para cada autovalor λ temos um autovetor associado e quando é possível obter n autovetores de M linearmente independentes, então M é diagonálizável e podemos escrever $M = PDP^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal contento os autovalores de M e as colunas de P são autovetores de M apropriados . De posse destes conceitos, veremos que potências de matrizes diagonalizáveis são calculadas com facilidade se conhecemos seus autovalores.

Autovetores e autovalores

Dada uma matriz quadrada A estamos investigndo a existência de vetores não nulos v, tais que o vetor Av seja múltiplo de v. Esta questão é fundamental na Álgebra Linear.

Definição 2.1: Considere A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é chamado <u>autovalor</u> de A, se existe um vetor não nulo v, tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de um <u>autovetor</u> de A correspondente a λ.

Dada uma matriz A $n \times n$, queremos encontrar os autovalores de A, para isso, suponha $Ax = \lambda x$; onde x é um vetor não nulo e λ um escalar. Observe que:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0_{n\times n} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0_{n\times n},$$

onde $0_{n\times n}$ é a matriz nula de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. A equação $(\lambda I - A)x = 0_{n\times n}$ tem uma solução não nula, se e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) : \underline{\text{polinômio característico}} \text{ de } A$$
$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 : \underline{\text{equação característica}}.$$

Observe que os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfazem $\det(\lambda I - A) = 0$ são autovalores de A;

Para encontrar os autovalores associados a λ basta resolver o sistema $Ax = \lambda x$ e escolher uma solução não nula, x.

Exemplo 2.1: Encontre os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$.

Solução: Agora vamos calcular a equação característica de A, para isso,

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix}.$$

Segue da expansão em cofatores [1], que:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & \lambda - 8 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 17) - 4 = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4.$$

Logo basta resolver: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$. Assim, os autovalores de A são: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Teorema 2.1: Sejam A uma matriz de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) λ é autovalor de A;

b) O sistema $(\lambda I - A)x = 0_{n\times 1}$ de equações tem soluções não nulas;

c) Existe um vetor não-nulo x, tal que $Ax = \lambda x$;

d) λ é uma solução da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$.

O cálculo dos autovalores

Dado de entrada: matriz A de ordem n.

1 - Calcule a matriz $\lambda I - A$, onde λ é uma variável real;

2 - Calcule $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;

3 - Encontre t, onde t é o grau de p, observe que $t \leq n$;

4 - Encontre as raízes do polinômio p, ou seja, resolva $p(\lambda) = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$: Para $j = 1$ até t faça:

4.1 $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}; p(\lambda_j) = 0$? Se 4.1 é falsa, então A não possui autovalores. Caso contrário, repita o passo 4.1 novamente;

4.2 liste os λ_j.

O cálculo dos autovetores

Inicialmente, temos que calcular os autovalores de A que já vimos como proceder, na seção anterior;

Se a matriz A não possui autovalor, não há o que fazer. Senão, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t; t \leq n$ os autovalores de A, associados aos λ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, t$,

Dado de entrada: matriz A de ordem n.

1 - Calcule a matriz $\lambda I - A$, onde λ é uma variável real;

2 - Calcule $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;

3 - Encontre t, onde t é o grau de p, observe que $t \leq n$;

4 - Encontre as raízes do polinômio p, ou seja, resolva $p(\lambda) = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$: Para $j = 1$ até t faça:

   4.1 $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}; p(\lambda_j) = 0$? Se 4.1 é falsa, então A não possui autovalores, consequentemente A não possui autovetor. Caso contrário, repita o passo 4.1 novamente;

   4.2 liste os λ_j.

5 - Equanto $j = 1$ até t faça:

   5.1 Encontre as soluções não nulas do sistema $Ax = \lambda_j x$;

   5.2 liste as soluções X_j associadas à λ_j.

6 - Liste $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Estes são autovetores de A, associados à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$, respectivamente.

O Problema da Diagonalização (versão matricial)

Dada uma matriz A de ordem n, existe uma matriz invertível P, tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos que P é invertível e $P^{-1}AP = D$ ou seja $AP = PD$.

Agora, seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Queremos encontrar

$$P = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

tais que $P^{-1}AP = D$ ou seja $AP = PD$. Supondo que existem tais matrizes temos:

$$\begin{bmatrix} y & w \\ -x & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\lambda_1 & z\lambda_2 \\ y\lambda_1 & w\lambda_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} y = & x\lambda_1 \\ w = & z\lambda_2 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{rl} -x = & y\lambda_1 \\ -z = & w\lambda_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow y = -y\lambda_1^2 \text{ e } w = -w\lambda_2^2$$

$$\Leftrightarrow y(1 + \lambda_1^2) = 0 \text{ e } w(1 + \lambda_2^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ e } w = 0.$$

Mas, $y = 0$ e $w = 0$ implica que $\det P = 0$ e P não é invertível, o que é uma contradição.

Definição 4.1: Seja A uma matriz de ordem n. Dizemos que A é <u>diagonalizável</u> se existe uma matriz P invertível, tal que a $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Se existe a matriz P, dizemos que P <u>diagonaliza</u> A.

Teorema 4.1: Seja A uma matriz de ordem n, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é diagonalizável;

b) A tem n autovetores linearmente independente.

Demonstração: $(a \Rightarrow b)$ Suponha que A é diagonalizável. Logo existe uma matriz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

invertível, tal que $P_{-1}AP = D$, onde $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$AP = PD \Leftrightarrow$$

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \lambda_3 p_{13} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \lambda_3 p_{23} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \lambda_3 p_{n3} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n,$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}, \dots, p_n = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n1} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix}$$

são as sucessivas colunas de P.

$(b \Rightarrow a)$ Suponha que A tenha n autovetores linearmente independentes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são autovetores de A com autovalores associados e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e seja

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

a matriz cujos vetores coluna são: $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Os vetores coluna de AP são: $Ap_1, Ap_2, \ldots, Ap_n$. Mas,

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Ap_n = \lambda_n p_n,$$

de modo que

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \lambda_3 p_{13} & \ldots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \lambda_3 p_{23} & \ldots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \lambda_3 p_{n3} & \ldots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD,$$

onde D é a matriz diagonal com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na diagonal principal.

Como os vetores-coluna de P são linearmente independentes, P é invertível, assim $P^{-1}AP = D$, ou seja A é diagonaliável.

<u>PROCEDIMENTO:</u>

<u>Dado de entrada</u>: matriz A de ordem n.

1 - Calcule a matriz $\lambda I - A$, onde λ é uma variável real;

2 - Calcule $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;

3 - Encontre t, onde t é o grau de p, observe que $t \leq n$;

4 - Encontre as raízes do polinômio p, ou seja, resolva $p(\lambda) = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$: Para $j = 1$ até t faça:

   4.1 $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}; p(\lambda_j) = 0$? Se 4.1 é falsa, então A não possui autovalores, consequentemente A não possui autovetor. Caso contrário, repita o passo 4.1 novamente;

   4.2 liste os λ_j.

5 - Equanto $j = 1$ até t faça:

   5.1 Encontre as soluções não nulas do sistema $Ax = \lambda_j x$;

   5.2 liste as soluções X_j associadas à λ_j.

6 - Liste $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Estes são todos os autovetores de A, associados à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$, respectivamente.

7 - verifique se é possível escolher

$$X_1, X_2, \ldots, X_n.$$

autovetores de A, associados à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$, de maneira que o conjunto

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

seja linearmente independente. Caso não seja possível, então A não é diagonalizável, caso contrário:

8 - Forme a matriz P com os vetores-coluna $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

9 - A matriz $P^{-1}AP$ é a matriz diagonal D com entradas na diagonal principal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Exemplo 4.1: Encontre a matriz P que diagonaliza A, onde