É fácil ver que o coeficiente procurado é

$$4^9 - 4 \times 3^9 + 6 \times 2^9 - 4.$$

$\square$

**Aplicação 4:** Existem 10 caixas idênticas de presentes. Cada uma deve ser embrulhada com uma única cor e se dispõe-se de papéis de cor vermelha, azul, verde e amarela. O papel vermelho permite que se embrulhe no máximo duas caixas e com o azul se pode embrulhar no máximo 3. Escrever a função geradora ordinária associada com o problema de encontrar o número de maneiras de se embrulhar dez caixas.

**Solução:**

Observemos que o problema não impõe restrições para os papéis verde e amarelo, enquanto para o papel vermelho permite que se embrulhe no máximo duas caixas e o azul permite que se embrulhe no máximo 3 caixas, dessa forma a função geradora para esse problema é:

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)\frac{1}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x^3}{1-x} \times \frac{1-x^4}{1-x} \times \frac{1}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^3)(1-x^4)}{(1-x)^4}.$$

A resposta para o problema é o coeficiente de $x^{10}$ em

$$= \frac{(1-x^3)(1-x^4)}{(1-x)^4} = (1-x^3-x^4+x^7)(1-x)^{-4}.$$

$$(1-x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -4 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n x^n.$$

Portanto o coeficiente de $x^{10}$ é:

$$(-1)^{10} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} (-1)^7 - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} (-1)^6 + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} (-1)^3 =$$

$$\begin{pmatrix} 4+10-1 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+7-1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+6-1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4+3-1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$286 - 120 - 168 + 40 = 326 - 288 = 38$$

$\square$

**Aplicação 5:** Encontrar a função geradora ordinária para se calcular o número de soluções em inteiros não negativos da equação

$$2x + 3y + 4z + 5w = r.$$

**Solução:**

Fazendo

$$x_1 = 2x$$

$$y_1 = 3y$$

$$z_1 = 4z$$

$$w_1 = 5w,$$

temos que o problema é equivalente em encontrarmos as soluções da equação

$$x_1 + y_1 + z_1 + w_1 = r,$$

onde

$$x_1 \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$y_1 \in \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$z_1 \in \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$$

$$w_1 \in \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}.$$

Portanto, a função geradora para esse problema é:

$$f(y) = (1 + y + y^2 + y^4 + y^6 + \dots) \times (1 + y^3 + y^6 + y^9 + y^{12} + \dots) \times$$

$$(1 + y^4 + y^8 + y^{12} + y^{16} + \dots) \times (1 + y^5 + y^{10} + y^{15} + y^{20} + \dots) =$$

$$\frac{1}{1 - y^2} \times \frac{1}{1 - y^3} \times \frac{1}{1 - y^4} \times \frac{1}{1 - y^5} \tag{7}$$

e a resposta para o problema é o coeficiente de $y^r$ em (7). $\square$

**Aplicação 6:** Determine o número de $n-$uplas cujos elementos pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, k\}$ nas quais cada um dos números de $1, 2, 3, \ldots, k$ aparece pelos menos uma vez.

**Solução:**

Observamos inicialmente, que cada um dos números $1, 2, 3, \ldots, k$ ocorre pelo menos uma vez e a ordem dos números retirados é relevante. Dessa forma a função geradora exponencial para este problema é:

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)^k$$

e, a resposta, o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ nesta função. Observamos que este coeficiente é o mesmo se tomarmos

$$(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots)^4 = (e^x - 1)^k.$$

Temos que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \left( \begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) (-1)^i e^{x(k-i)}.$$

Considerando a expansão em série de Taylor da função $e^{x(k-i)}$ temos

$$e^{x(k-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(k-i)^n x^n,$$

substituindo essa expressão em $(e^x - 1)^k$ :

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left( \begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) (k-i)^n \frac{x^n}{n!}$$

Daí concluímos que o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ é

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left( \begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) (k-i)^n.$$

$\square$

**Aplicação 7:** Encontrar o número de soluções em inteiros da equação

$$x + y + z + w = 25,$$

onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 8.

**Solução:**

Temos que a função geradora que controla cada uma das variáveis $x_1$, $y_1$, $z_1$, e $w_1$ é

$$x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8.$$

Portanto a função geradora para este problema é:

$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 =$$

$$= x^{12}(\frac{1 - x^6}{1 - x})^4.$$

Dessa forma, o problema resume-se em calcular o coeficiente de $x^{13}$ em

$$(\frac{1 - x^6}{1 - x})^4 \tag{8}$$

Para isso, observamos que:

$$(1 - x^6)^4 = 1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}.$$

Segue do Teorema binomial generalizado que:

$$(1 - x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} x^n (-1)^n$$

Portanto o coeficiente de $x^{13}$ em (7) é:

$$\binom{-4}{13} - 4\binom{-4}{7} + 6\binom{-4}{1} =$$

$$\binom{4+13-1}{13} - 4\binom{4+7-1}{7} + 6\binom{4+1-1}{1} =$$

$$\binom{19}{13} - 4\binom{10}{7} + 6\binom{4}{1} = 104$$

$\square$

**Aplicação 8:** Numa competição cada um dos quatro juizes deve atribuir notas de 1 a 6 para cada participante. Para ser finalista um participante deve ter no mínimo 22 pontos. Encontrar o número de maneiras que os juízes têm para atribuir notas de modo que um participante seja finalista.

**Solução:**

O problema resume-se em resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22,$$

onde

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{4, 5, 6\}.$$

Pois se algum juiz atribuir nota 3 ou menor o total 22 nunca será atingido.

Temos que a função geradora para esse problema é:

$$(x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^{16}(1 + x + x^2)^4.$$

Dessa forma o problema resume-se em encontrar o coeficiente de $x^6$, $x^7$, $x^8$ em $(1+x+x^2)^4$, pois para ser finalista, um participante deve ter no mínimo 22 pontos e como as notas variam de 1 a 6 então o participante pode ter no máximo 24 pontos.

Observamos que:

$$(1 + x + x^2)^4 = 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 18x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8. \tag{9}$$

Temos que os coeficiente de $x^6$, $x^7$ e $x^8$ em (9) são 10,4 e 1, respesctivamente. Portanto a resposta para o problema é:

$$10 + 4 + 1 = 15$$

$\square$

**Aplicação 9:** Quantas soluções possui a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r$$

se cada variável é igual a 0 ou 1.

**Solução:**

Temos que o polinômio $x^0 = 1$ controla a presença dos $0's$ e $x^1 = x$ controla a presença dos 1's. As variáveis $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$. Então a função geradora para o problema é:

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \tag{10}$$

e o coeficiente de $x^r$, $\binom{n}{r}$ em (10) é a solução para o problema. $\square$

**Aplicação 10:** Encontrar o número de maneiras de se distribuir 11 laranjas e 6 peras para 3 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 3 laranjas e no máximo 2 pêras.

**Solução:**

Primeiramente vamos distribuir as 11 laranjas para as 3 crianças de acordo com o problema, feito isso, distribuimos as peras para as 3 crianças de acordo com as restrições. Segue do princípio multiplicativo que a resposta para o problema é:

o número de maneiras de distribuirmos as 11 laranjas para as 3 crianças×

o número de maneiras de distribuirmos as 6 peras para as 3 crianças.

O problema de distribuir as 11 laranjas para as 3 crianças com a restrição dada resume-se em resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \text{onde } x_i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

A função geradora para esse problema é:

$$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^3 = x^9 (\frac{1 - x^6}{1 - x})^3 \tag{11}$$

Queremos o coeficiente de $x^{11}$ em (11), para issso basta calcularmos o coeficiente de $x^2$ em

$$(\frac{1 - x^6}{1 - x})^3.$$

Temos que:

$$(1 - x^6)^3 = 1 - 2x^6 + 2x^{12} - x^{18},$$

e segue do Teorema binomial generalizado que:

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \begin{array}{c} -3 \\ n \end{array} \right) (-1)^n x^n.$$

Observamos que só há uma mmaneira de distribuirmos as 6 peras para as 3 crianças de acordo com as restrições do problema.

Portanto a resposta para o problema é:

$$\left( \begin{array}{c} -3 \\ 2 \end{array} \right) (-1)^2 = \left( \begin{array}{c} 3+2-1 \\ 2 \end{array} \right) = 6.$$

$\square$

**Aplicação 11:** Uma companhia telefônica adquire 9 computadores idênticos. De quantas maneiras ela pode distribuir estes 9 computadores para quatro diferentes escritórios de forma que cada um receba pelo menos um novo computador?

**Solução:**

O problema resume-se em resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \text{onde } x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Logo a função geradora para o problema é:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 =$$

$$x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 =$$

$$x^4(\frac{1-x^6}{1-x})^4 \tag{12}$$

A resposta para o problema é o coeficiente de $x^5$ em (12). Temos que

$$(1-x^6)^4 = 1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^8 + x^{24}$$

e

$$(1-x)^{-4} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \begin{array}{c} -4 \\ j \end{array} \right) (-1)^j x^j.$$

Portanto a resposta para problema é

$$\binom{-4}{5}(-1)^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56.$$

□

**Considerações Finais**

Esta apresentação foi baseada na bibiografia [1]. Muitos exemplos e aplicações foram retirados de [1], sendo que algumas aplicações são exercícios propostos da respectiva bibliografia.

# Referências


[1] J.P. Santos, M. P. Mello e I. T. C. Murari. Introdução à Análise Combinatória, 3ª Edição. Editora da Unicamp 2002.

[2] C.L. Liu . Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-hill, New York 1968

[3] R.P. Stanley. Enumerative Combinatorics, Vol I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49. Cambrige Univesity Press, New York, 1997.

[4] R.P. Stanley. Enumerative Combinatorics, Vol II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49. Cambrige Univesity Press, New York, 1997.

[5] MacMahon A.P. “Combinatory Analysis”, volume 2. Cambridge University Press, London, 1918.

IDENTIDADE DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Admur Severino Pamplona[1]
Universidade Federal de Mato Grosso
Campus Universitário do Araguaia

Com o propósito de compreender as formas e condições em que se dá a formação da identidade e o processo de organização do trabalho do Professor de Matemática da Educação Básica, a palestra se pautou na descrição e análise de ações de ensino, extensão e pesquisa desenvolvidas no curso Licenciatura em Matemática da UFMT/CUA e com professores da Educação Básica. No âmbito do ensino, foram destacados o uso das narrativas de aprendizagem e um modelo de estágio supervisionado considerado diferente do usual. Quanto à extensão, o foco foi dois programas de formação continuada no qual também os licenciandos possuem papel de protagonistas, pois participam não só como alunos – como os professores em exercício – mas também ministram oficinas sobre assuntos diversos, sobretudo com o uso de mídias diversas. Destacaram-se ainda as pesquisas desenvolvidas, pelo autor e seus orientandos. As análises dessas ações ocorram a partir da perspectiva teórica de uma "identidade situada na prática" desenvolvida na Teoria Social da Aprendizagem (Wenger, 1998, 2001) na qual se tem a "Comunidade de Prática" como conceito central. Assumindo que o conjunto dos Professores de Matemática da Educação Básica, juntamente com os estudantes da Licenciatura em Matemática, forma a Comunidade de Prática dos Educadores Matemáticos, passamos a analisá-los nessa perspectiva teórica. A análise buscava responder as questões: *"Como se dá a constituição da identidade do Educador Matemático?" ou, "Como, onde e quando adquirimos os conhecimentos, assumimos os papeis, internalizamos valores e normas que nos identificam como grupo profissional?"*

[1] Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (1988), mestrado em Estatística pela Universidade Estadual de Campinas (1997) e doutorado em Educação (Educação Matemática) pela Universidade Estadual de Campinas (2009). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal de Mato Grosso/CUA, onde atua desde 1989. Tem experiência na área de Formação de Professor de Matemática, com ênfase nas seguintes áreas: Formação de Professor, Educação Matemática, Educação Estatística, Licenciatura em Matemática, Identidade Profissional do Professor de Matemática, Narrativas e Comunidades de Prática.

## Como utilizar exemplos reais no ensino e ensinar modelação matemática

**Resumo:** A Matemática é a rainha das ciências e é fundamental na compreensão, controle e previsão de sistemas. Nesta palestra vamos 1) Definir quais são os passos úteis para a modelação matemática em geral 2) estudar formas de representar um problema que existe na realidade 3) Representar a solução de uma maneira compreensiva. 1)-3) serão estudadas através de exemplos de modelos matemáticos e se tivermos tempo dois, três ou quatro exemplos. O primeiro exemplo que utilizamos vem de radioterapia de tumores, em que o problema consiste em como emitir radiação suficiente para matar as células do tumor e ao mesmo tempo minimizar os efeitos negativos para o corpo. O segundo exemplo trata de como fazer um mapa da extensão de um rio (atualmente o rio Tejo em Portugal). O terceiro exemplo é como fazer um mapa das características do uso da terra, com vários métodos de classificação de imagens de um satélite. A quarta seria como construir um quarto, no qual será colocada uma máquina de radiação, de modo a minimizar a radiação que penetra e sai das paredes em um hospital que trata câncer.