coeficiente de x^{14} é igual a 3, dessa forma, existem, com as restrições dadas, somente três soluções para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14.$$

Na realidade, o polinômio dado em (3) gera o número de soluções para todas as equações $x_1 + x_2 + x_3 = m$, $m \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Nesse caso, a função geradora para esse problema é:

$f(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 0x^6 + 0x^7 + 0x^8 + x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15} + 0x^{16} + 0x^{17} + \dots.$

Um outro exemplo, semelhante ao anterior é Determinar o número de maneira de escrever n como soma de termos $1, 2, 3$, sem levar e conta a ordem dos termos. A idéia não é tentar obter este número para um valor particular de n. Vamos obter todos os números de uma só vez. Para isto, escrevemos a função geradora que é a soma das potências x^s para cada soma s :

$$f(x) = x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^2 + x^{1+1+1} + x^{1+2} + x^3 + \dots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

x^0 corresponde à soma sem nenhum termos, de modo que, por exemplo, o coeficiente de x^3 é o número de maneiras de escrever 3 como a soma não ordenada de termos 1,2,3. Aparentemente, obter $f(x)$ é uma tarefa mais facil do que a inicial. Mas observe que cada termo de $f(x)$ é o produto de um termo da forma $x^{\text{ somas de 1's}}$, um termo da forma $x^{\text{ somas de 2's}}$, um termo da forma $x^{\text{ somas de 3's}}$, logo

$$\begin{gathered} f(x) = (x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \dots)\times \\ (x^0 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \dots)\times \\ (x^0 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \dots) \Leftrightarrow \end{gathered}$$

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}.$$

O problema agora é encontrar o coeficiente de x^n na expansão de $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x^2} \times \dfrac{1}{1-x^3}$.

Vamos explicar as vantagens de um outro tipo de função geradora por meio do seguinte exemplo.

Exemplo 1: Dispondo de três tipos diferentes de livros

$$a, b, c$$

de quantos modos diferentes podemos retirar quatro livros colocando-os em ordem na estante, sendo que o livro a pode ser retirado no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e c no máximo duas vezes.

Solução:

Primeiramente consideramos a função geradora, vista nos exemplos anteriores que nos fornecerá as possíveis escolhas (com as restrições impostas), mas sem dar importância para a ordem. Para isso, faremos algumas observações, uma delas é dar a lista das possíveis escolhas dos três tipos de livros com as condições imposta pelo problema, sem ordená-los, de início.

- Maneiras de tirarmos 1 livro do tipo a, b, ou c : a, b, ou c;
- Maneiras de tirarmos 2 livros dentre os três tipos a, b e c : bb, ab; bc, ac, cc;
- Maneiras de tirarmos 3 livros dentre os três tipos a, b e c : bbb, abb, acc, bbc, abc, bcc;
- Maneiras de tirarmos 4 livros dentre os três tipos a, b e c : $abbb$, $bbbc$, $abbc$, $bbcc$, $abcc$;
- Maneiras de tirarmos 5 livros dentre os três tipos a, b e c : $abbbc$, $bbbcc$, $abbcc$;
- Maneiras de tirarmos 6 livros dentre os três tipos a, b e c : $abbbcc$.

Nesse momento, associamos o polinômio $P(x) = 1 + ax$ os livros do tipo a. Os livros livros do tipo b associamos o polinômio $Q(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3$. E finalmente os livros do tipo c, o polinômio $S(x) = 1 + cx + c^2x^2$.

A partir daí, vamos interpretar cada polinômio da seguinte forma: $P(x)$, $Q(x)$ e $S(x)$ respectivamente:

- em $P(x)$, o termo ax significa que um livro do tipo a foi escolhido;
- em $P(x)$, o termo $x^0 = 1$ nenhum livro do tipo a foi escolhido;

- em $Q(x)$, o termo $x^0 = 1$ nenhum livro do tipo b foi escolhido;
- em $Q(x)$, o termo bx significa que um livro do tipo b foi escolhido;
- em $Q(x)$, o termo b^2x^2 significa que dois livros do tipo b foram escolhidos;
- em $Q(x)$, o termo b^3x^3 significa que três livros do tipo b foram escolhidos.

$S(x)$ é interpretado da mesma forma.Cada um desses polinômios controla a presença de um determinado tipo de livro.

Observamos que:

$$P(x)Q(x)S(x) = (1 + ax)(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)(1 + cx + c^2x^2) =$$

$$\begin{gathered}
1 + (a + b + c)x + (b^2 + ab + bc + ac + c^2)x^2 + \\
(b^3 + ab^2 + ac^2 + b^2c + abc + bc^2)x^3 + \\
(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2)x^4 + \\
(ab^3c + b^3c^2 + ab^2c^2)x^5 + ab^3c^2x^6
\end{gathered}$$

Podemos concluir que:

- o coeficiente de x é a lista de todas as possíveis escolhas de um só livro;
- o coeficiente de x^2 de todas as possíveis escolhas de dois livros;
- o coeficiente de x^3 é a lista de todas as escolhas de 3 livros;
- e assim por diante...

Vamos nos limitar as listas de todas as possíveis escolhas de 4 livros com as restrições impostas anteriormente, o coeficiente de x^4 produz a lista de tais escolhas, mas os livros não estão ordenados, notamos que existem 5 maneiras de retirar 4 livros sem colocá-los em ordem. Nosso próximo passo é ordená-los e observar alguns características que irão possibilitar a definição de função geradora exponencial, para isso consideramos:

- quando retiramos ab^3, isto é, um livro a e 3 livros b poderemos ordená-los de $\dfrac{4!}{1!3!}$ maneiras diferentes. Isto é um caso de permutação com repetição;

- os quatro livros ab^2c podem ser ordenados de $\dfrac{4!}{1!2!1!}$ maneiras distintas;
- os quatro livros b^2c^2 podem ser ordenados de $\dfrac{4!}{2!2!}$ maneiras diferentes;
- e assim por diante ....

Observemos que o termo ab^3x^4 surgiu do produto $(ax)(b^3x^3)$; gostarímos de ter obtido o fator $\dfrac{4!}{1!3!}$, multiplicando ab^3x^4. Na realidade gostaríamos de obter:

- $\dfrac{4!}{1!3!}ab^3$; $\dfrac{4!}{3!1!}b^3c$;
- $\dfrac{4!}{1!2!1!}ab^2c$; $\dfrac{4!}{2!2!}b^2c^2$;
- $\dfrac{4!}{1!1!2!}abc^2$.

Ou seja,

$$(\frac{4!}{1!3!}ab^3 + \frac{4!}{3!1!}b^3c + \frac{4!}{1!2!1!}ab^2c + \frac{4!}{2!2!}b^2c^2 + \frac{4!}{1!1!2!}abc^2)x^4.$$

Com esta observação, vamos alterar os polinômios que "controlam"a presença de cada tipo de livro, introduzindo no coeficiente de x^n o fator $\dfrac{1}{n!}$. Feito isto, obtemos:

$$(1 + \frac{a}{1}x)(1 + \frac{b}{1!}x + \frac{b^2}{2!}x^2 + \frac{b^3}{3!}x^3)(1 + \frac{c}{1!}x + \frac{c^2}{2!}x^2) =$$

$$\left\{\begin{array}{c}
1+\\
(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!})x+\\
(\frac{b^2}{2!}+\frac{ab}{1!1!}+\frac{bc}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{c^2}{2!})x^2+\\
(\frac{b^3}{3!}+\frac{ab^2}{1!2!}+\frac{ac^2}{1!2!}+\frac{b^2c}{2!1!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{bc^2}{1!2!})x^3+\\
(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!})x^4+\\
(\frac{ab^3}{1!3!1!}+\frac{b^3c^2}{3!2!}+\frac{ab^2c^2}{1!2!2!})x^5+\\
\frac{ab^3c^2}{1!3!2!}x^6.
\end{array}\right.$$

Observamos que o coeficiente de x^4 é

$$(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}), \tag{4}$$

que ainda não é exatamente o que desejamos. Então se multiplicarmos e dividirmos (4) por 4! obtemos a seguinte expressão:

$$(ab^3\frac{4!}{1!3!}+b^3c\frac{4!}{3!1!}+ab^2c\frac{4!}{1!2!1!}+abc^2\frac{4!}{1!1!2!})\frac{1}{4!}.$$

Logo o número procurado, tomando-se $a=b=c=1$, será o coeficiente de $\frac{x^4}{4!}$ na expansão de:

$$(1+\frac{x}{1!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}) =$$

$$
\begin{cases}
1+ \\
(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!})x+ \\
(\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!})\frac{x^2}{2!}+ \\
(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{1!2!})\frac{x^3}{3!}+ \\
(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!})\frac{x^4}{4!}+ \\
(\frac{5!}{1!3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!2!2!})\frac{x^5}{5!}+ \\
\frac{6!}{1!3!2!}\frac{x^6}{6!}.
\end{cases}
$$

Com as restrições impostas podemos retirar 5 livros de 3 maneiras diferentes, ab^3c, b^3c^2 e ab^2c^2. Sabemos que os 5 livros ab^3c podem ser ordenados de $\frac{5!}{1!3!1!}$ maneiras diferentes, b^3c^2 de $\frac{5!}{3!2!}$ e ab^2c^2 de $\frac{5!}{1!2!2!}$. A soma deste três números é dada diretamente pelo coeficiente de $\frac{x^5}{5!}$ no produto acima.

Nesse contexto chamamos a série de potências

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \ldots$$

como a *função geradora exponencial* da seqüência $(a_r)_{r\in \boldsymbol{N}}$. Utilizamos séries formais desse tipo quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem é irrelevante, utilizamos, como já vimos em vários exemplos, a série formal,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_rx^r + \ldots$$

e nesse caso a chamamos de *função geradora ordinária.*

Exemplo 2: Achar a função geradora exponencial para se encontrar o número de seqüências de k letras ($k \leq 6$) formadas pelas letras a, b e c, onde a letra a ocorre no máximo uma vez a letra b no máximo duas vezes e a letra c no máximo 3 vezes.

Solução:

Observamos que a ordem neste caso é importante pois a seqüência (a, b) é diferente da (b, a). Então devemos considerar a função geradora exponencial:

- a função geradora que controla a presença da letra a, é

$$1 + x;$$

- a função geradora que controla a presença da letra b, com a restrição imposta é:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!};$$

- a função geradora que controla a presença da letra c com a restrição imposta é

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Portanto

$$(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!})(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}) =$$
$$1 + 3x + 4x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \frac{10}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}x^6$$

é a função geradora para o problema.

Como estamos interessados na sequência dos coeficientes de $\frac{x^r}{r!}$ devemos reescrever este polinômio na forma:

$$1 + 3\frac{x}{1!} + 8\frac{x^2}{2!} + 19\frac{x^3}{3!} + 80\frac{x^4}{4!} + 60\frac{x^5}{5!} + 120\frac{x^6}{6!}.$$

Como as possíveis maneiras de retirarmos 2 letras são: ab, ac, bc, cc, e bb, isto é 8 maneiras diferentes de retirarmos 2 letras e ordená-las. Como pode ser visto na função geradora exponencial, 8 é o coeficiente de $\frac{x^2}{2!}$.

Exemplo 3: De quantas maneiras podemos selecionar $3n$ letras de um conjunto de $2n$ a's, $2n$ b's e $2n$ c's?

Solução:

Como a ordem não é importante (estamos fazendo apenas uma seleção) e qualquer uma das três n letras pode ser retirada até $2n$ vezes, a resposta à nossa pergunta é o coeficiente de x^{3n} em

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n})^3 = (\frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x})^3 =$$
$$(1 - x^{2n+1})^3(1-x)^{-3} = (1 - 3x^{2n+1} + 3x^{4n+2} - x^{6n+3})(1-x)^{-3}.$$

Como

$$(1-x)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -3 \\ r \end{pmatrix} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \begin{pmatrix} -3 \\ r \end{pmatrix} x^r,$$

concluímos que o coeficiente de x^{3n} é igual a:

$$(-1)^{3n}\begin{pmatrix} -3 \\ 3n \end{pmatrix} - 3(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -3 \\ n-1 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{pmatrix} -n \\ r \end{pmatrix} = (-1)^{r}\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix},$$

assim

$$(-1)^{3n}\begin{pmatrix} -3 \\ 3n \end{pmatrix} - 3(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -3 \\ n-1 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{3n}(-1)^{3n}\begin{pmatrix} 3+3n-1 \\ 3n \end{pmatrix} - 3(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n-1-1 \\ n-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3n+2 \\ 3n \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3n+2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3n(n+1)+1$$

Mais Aplicações

Aplicação 1: Encontrar o número de maneiras de se obter um total de 15 pontos ao se jogar simultaneamente, quatro dados diferentes.

Solução:

O problema resume-se em resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \text{onde } x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Dessa forma a função geradora para o prolema é dada por:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^4(1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 =$$

$$x^4(\frac{1-x^6}{1-x})^4 \tag{5}$$

A resposta para o problema é o coeficiente de x^{15} em (5), o que equivale encontrarmos o coeficiente de x^{11} em

$$(\frac{1-x^6}{1-x})^4.$$

Temos que

$$(1-x^6)^4 = 1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}$$

e

$$(1-x)^{-4} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-4}{j} (-1)^j x^j.$$

Portanto a resposta para o problema é:

$$\binom{-4}{11}(-1)^{11} - 4\binom{-4}{5}(-1)^5 = \binom{4+11-1}{11} - 4\binom{4+5-1}{5} =$$

$$\binom{14}{11} - 4\binom{8}{5} = 140$$

$\square$

Aplicação 2: Representantes de três institutos de pesquisa devem formar uma comissão de 9 pesquisadores. De quantos modos se pode formar esta comissão sendo que nenhum instituto deve ter maioria absoluta no grupo?

Solução:

O problema resume-se em resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

onde x_1, x_2, x_3 representa os institutos de pesquisa, sendo que as soluções desta, são as maneiras que podemos formar comissão dos pesquisadores.

O fato de não ter maioria absoluta exclui possibidades do tipo $(5, 4, 0)$. Estamos interessados em soluções somente do tipo, $(4, 3, 2)$. Dessa forma temos:

$$x_1 \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$x_2 \in \{1, 2, 3, 4\},$$

$$x_3 \in \{1, 2, 3, 4\},$$

e a função geradora para o problema é:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4)^3 = x^3(1 + x + x^2 + x^3)^3 = x^3(\frac{1-x^4}{1-x})^3. \tag{6}$$

A resposta para o problema é o coeficiente de x^9 em (6). Para isso basta calcularmos o coeficiente de x^6 em $(\frac{1-x^4}{1-x})^3$. Segue do Teorema Binomial Generalizado que:

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -3 \\ n \end{pmatrix} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Temos que:

$$(1-x^4)^3 = 1 - 3x^4 + 3x^8 - x^{12}.$$

Portanto o coeficiente de x^6 em (6) é:

$$(-1)^6 \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+6-1 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3+2-1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

$\square$

Aplicação 3: De quantas maneiras podemos acomodar 9 pessoas em 4 quartos sem que nenhum quarto fique vazio?

Solução:

Observamos inicialmente, que nenhum quarto poderá receber mais do que 6 pessoas, uma vez que nenhum deles poderá ficar vazio. Usamos função geradora exponencial, pois os quartos são diferentes e a ordem das pessoas dentro de um quarto não nos importa. A função geradora para este problema é, portanto,

$$f(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!})^4$$

e, a resposta, o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ nesta função. Observamos que este coeficiente é o mesmo se tomarmos

$$(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \dots)^4 = (e^x - 1)^4,$$

uma vez que as potências extras acrescentadas não contribuem para o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$. Como

$$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1.$$