Introdução

Função geradora é uma das ferramentas da Análise Combinatória para enumerar estruturas ou configurações discretas. Questões enumerativas aparecem com freqüência em Estatística, Física, Química, Biologia, etc. Este método de contagem teve origem a partir dos trabalhos A. Moivre (1667-1754), tendo sido aplicada por L.Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números.

Definição de série formal: Um polinômio é uma expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Uma *série formal* é expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \ldots,$$

onde $a_i, \forall i \geq 0$ com $i \in \mathbb{Z}$ são chamados de *coeficientes* das potências de x^i. Dadas as séries formais,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots,$$

dizemos que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_n = b_n, \forall n \geq 0$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Propriedades de série formal: Somas e produtos de duas séries formais quaisquer são definidos analogamente a somas e produtos entre polinômios. Por exemplo, considere:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots,$$

assim

$$Af(x) + Bg(x) = (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + \ldots.$$

Portanto os coeficientes de x^r, da série formal, $Af(x) + Bg(x)$ são da forma $Aa_r + Bb_r \forall r \in I\!N$.

No caso do produto de séries formais, temose

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)x^3 + \cdots +$$

$$(a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \cdots + a_0b_k)x^k + \ldots.$$

Assim os coeficientes de x^k, da série formal, $f(x)g(x)$ são da forma $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_k b_{k-i}, \forall k \in I\!N$.

Uma observa ção para as séries formais:

Sabemos que para $|x| < 1$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, quando

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Em cálculo, dada uma série de funções, estamos preocupados em saber para quais valores de x, $f(x)$ converge. No contexto de séries formais estaremos interessados somente no cálculo dos coeficientes destas funções e não necessitaremos atribuir valores numéricos a variável x. Neste contexto vamos manipular tais séries sem nenhuma preocupação com a convergência.

Séries Formais e Recorrências Lineares

Vejamos uma primeira aplicação das séries formais, vamos determinar uma fórmula explícita para a sequência definida por:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \text{ para } n \geq 0.$$

Observe que

$$6a_n - 5a_{n+1} + a_{n+2} = 0, \text{ para } n \geq 0.$$

A idéia é considerar a série formal

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Multiplique $f(x)$ por $-5x$ e em seguida $6x^2$, assim,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

$$-5xf(x) = -5a_0 x - 5a_1 x^2 - 5a_2 x^3 + \ldots.$$

$$6x^2 f(x) = 6a_0 x^2 + 6a_1 x^3 + \ldots.$$

Somando as equações acima, os coeficientes de x^n, $n \geq 2$, anulam-se e ficamos com

$$(1 - 5x + 6x^2)f(x) = a_0 + a_1 x - 5a_0 x \Leftrightarrow$$

$$1 - 5x + 6x^2)f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2}.$$

Observe que $1-5x+6x^2=(1-2x)(1-3x)$ e que é razoável procurar constantes a e b tais que

$$\frac{a}{1-2x}+\frac{b}{1-3x}=\frac{x}{1-5x+6x^2}\Leftrightarrow\frac{(a+b)-(3a+2b)x}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{x}{1-5x+6x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} a+b & =0 \\ 3a+2b & =-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow a=-1 \text{ e } b=1.$$

Logo

$$f(x)=\frac{x}{1-5x+6x^2}=\frac{1}{1-3x}-\frac{b}{1-2x}=$$
$$(1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\dots)-(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\dots)=$$
$$=(3^0-2^0)+(3^1-2^1)x+(3^2-2^2)x^2+(3^3-2^3)x^3+\dots.$$

Assim, o coeficiente de x^n em $f(x)$ é $3^n-2^n=a_n$.

Vamos descrever através de um exemplo simples um procedimento que pode ser aplicada com sucesso em uma grande variedade de situações.

Consideremos a seguinte relação de recorrência:

$$\left\{\begin{array}{lll} a_0= & 1 & \\ a_n= & 3a_{n-1} & +1 \end{array}\right..$$

Os primeiros termos desta seqüência são

$$1,4,13,40,\dots.$$

Em alguns casos, raros, é possível conjecturar uma fórmula explícita para a_n a partir da simples observação dos primeiros termos. Quando isto é possível pode-se tentar a prova por indução.

O ideal, quanto se esta lidando com uma relação de recorrência, é a obtençãode uma fórmula que forneça o valor de a_n como uma função de n. O procedimento que fornecemos faz uso do conceito de séries formais para determinar e um fórmula explícita para a_n, para isto, escreva

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Multiplicando a relação de recorrência por x^n obtemos

$$a_n x^n = 3a_{n-1}x^n + x^n$$

Somando os dois lados para $n \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Segue daí

$$f(x) - a_0 = 3xf(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

Com essas observações e sabendo que $a_0 = 1$ podemos resolver $f(x)$ obtendo

$$f(x) - 3xf(x) = 1 + \frac{x}{1-x},$$

ou seja

$$f(x)(1-3x) = \frac{1}{1-x}.$$

Portanto

$$f(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-x)}$$

Agora vamos decompor $f(x)$ em frações parciais, este método é visto em cálculo quando se estuda a resolução de integrais de funções racionais. Ou seja,

$$\frac{1}{(1-x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x}$$

para que esta igualdade seja válida, A e B devem, portanto, satisfazer os sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B = & 1 \\ 3A + B = & 0 \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{cases} A = & -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{3}{2} & \end{cases}.$$

Portanto

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-3x}.$$

Mas as séries para essas duas funções são conhecidas:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

colocando x^n em evidência, temos a solução:

$$a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

Problema 1: Use séries formais para encontrar uma fórmula explícita para a sequência

$$\begin{cases} F_0 = & 0 & \\ F_1 = & 1 & \\ F_n = & F_{n-1} \quad +F_{n-2} & \text{para } n \geq 2 \end{cases}.$$

Está é a célebre sequência de Fibonacci;

Consideremos a seguinte série formal:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n,$$

onde

$$\begin{cases} F_0 = & 0 & \\ F_1 = & 1 & \\ F_n = & F_{n-1} \quad +F_{n-2} & \text{para } n \geq 2 \end{cases}.$$

Multiplicando cada membro da equação de recorrência por x^n temos:

$$F_n x^n = F_{n-1}x^n + F_{n-2}x^n.$$

Somando a equação acima para $n \geq 2$ resulta em

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n =$$

$$x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} =$$

$$x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Podemos escrever a equação acima como

$$f(x) - F_0 - F_1 x = x(f(x) - F_0) + x^2 f(x).$$

Substituindo os valores, especificados na relação de recorrência que descreve os números de Fibonacci, de F_0 e F_1, e colocando $f(x)$ em evidência, obtemos

$$(1 - x - x^2) f(x) = x,$$

portanto

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

O último passo consiste em desenvolver $f(x)$ em série de potências, o coeficiente de x^n, neste série será F_n.

Calculando as raízes do polinômio no denominador de $f(x)$, e lembrando que

$$(x - a) = -a(1 - \frac{x}{a}),$$

podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{x}{(1 - \frac{x}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})(1 - \frac{x}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}})} =$$

$$\frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x}$$

As constantes A e B são calculadas de modo que a igualdade acima seja verdadeira, ou seja,

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x} =$$

$$\frac{A(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)+B(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)}{(1-\frac{x}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}})(1-\frac{x}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}})}=$$

$$\frac{(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A-\frac{1+\sqrt{5}}{2}B)x+A+B}{1-x-x^2}$$

Para que os polinômios nos numeradores das frações acima sejam iguais para todo x é necessário e suficiente que os coeficientes das potências de x nos polinômios sejam iguais, o que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}A & - & \frac{1+\sqrt{5}}{2}B & =1 \\ A & + & B= & 0 \end{cases}.$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} A= & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ B= & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Substituindo os valores de A e B e desenvolvendo os termos obtemos

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n x^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n x^n.$$

Colocando x^n em evidência obtemos a fórmula desejada:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,\ \text{para } n\geq 0$$

Séries Formais e a Generalização do Teorema Binomial

Teorema 1 (Teorema Binomial): Dados x número real e n um número natural, tem-se que

$$(1+x)^n=1+\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}x^3+\cdots+\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}x^i+\cdots+x^n.$$

Teorema 1 (Teorema Binomial Generalizado): Seja u um número real arbitrário. Então:

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} x^r, \tag{1}$$

onde

$$\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}, & \text{se} \quad r > 0 \\ \\ 1, & \text{se} \quad r = 0 \end{cases}.$$

O número $\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix}$ é chamado **coeficiente binomial generalizado**.

Demonstração: Consideramos a função $f(x) = (1+x)^u$, onde u é um número real arbitrário. Podemos considerar a expansão de $f(x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$. Dessa forma,

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}x^r + \ldots.$$

Denotando,

$$\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}, & \text{se} \quad r > 0 \\ \\ 1, & \text{se} \quad r = 0 \end{cases}.$$

temos

$$(1+x)^u = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} x^n.$$

Observamos que quando u é um inteiro positivo temos o Teorema binomial (já conhecido), pois $\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = 0$ se $n > u$. $\square$

Corolário: O coeficiente de x^p na expansão de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n$$

é igual a $\begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$.

Demonstração: Temos que:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^n =$$

$$= (\frac{1}{1-x})^n = (1-x)^{-n}.$$

Fazendo $u = -n$ e substituindo $-x$ em x do Teorema Binomial obtemos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -n \\ r \end{pmatrix} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -n \\ r \end{pmatrix} (-1)^r x^r \tag{2}$$

Observamos que o coeficiente de x^p em (2) é dado por (vamos escrevê-lo de maneira conveniente):

$$\begin{pmatrix} -n \\ p \end{pmatrix} (-1)^p =$$

$$= \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} =$$

$$= \frac{-n(-1)(n+1)(-1)(n+2)\ldots(-1)(n+p-1)(-1)^p}{p!} =$$

$$= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(-1)^p}{p!} =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(n-1)!}{p!(n-1!)} =$$

$$= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots 1}{p!(n-1!)} =$$

$$\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}.$$

□

Séries Formais e Contagem

Outra aplicação das séries formais é ajudar a contar. Neste contexto, as séries formais recebe o nome de *funções geradoras.* A idéia geral e a seguinte , o expoente de x quantifica alguma propriedade em que estamos interessados, como por exemplo, o comprimento de uma sequência, uma solução inteira de uma determinada equação, com coeficientes inteiros, cuja soma é igual a n, a quantidade de objetos em uma gaveta, etc. Se para cada situação exemplificada associarmos tal potência de x e somarmos estas potências, o coeficiente de x^n será, respectivamente, o termo da sequência na posição n, o número de soluções inteiras de uma determinada equação, o número de caixas com n objetos, etc.

Por exemplo, consideramos a seguinte situação: queremos encontrar o número de soluções inteiras da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

onde as variáveis x_1 e x_2 pertencem ao conjunto $\{2, 3, 4\}$ e a variável x_3 pertencem ao conjunto $\{5, 6, 7, \}$.

Para isso vamos considerar os seguintes polinômios:

$$\begin{cases} p_1(x) = & (x^2 + x^3 + x^4) \\ p_2(x) = & (x^2 + x^3 + x^4) \\ p_3(x) = & (x^5 + x^6 + x^7) \end{cases}$$

Fazendo o produto desses polinômios podemos observar (vamos escrever de maneira conveniente para podermos listar as soluções):

$$p_1(x)p_2(x)p_3(x) = \begin{cases} x^{2+2+5} + x^{2+2+6} + x^{2+2+7} \\ x^{2+3+5} + x^{2+3+6} + x^{\mathbf{2+3+7}} \\ x^{2+4+5} + x^{\mathbf{2+4+6}} + x^{2+4+7} \\ x^{3+2+5} + x^{3+2+6} + x^{\mathbf{3+2+7}} \\ x^{3+3+5} + x^{\mathbf{3+3+6}} + x^{3+3+7} \\ x^{\mathbf{3+4+5}} + x^{3+4+6} + x^{3+4+7} \\ x^{4+2+5} + x^{\mathbf{4+2+6}} + x^{4+2+7} \\ x^{\mathbf{4+3+5}} + x^{4+3+6} + x^{4+3+7} \\ x^{4+4+5} + x^{4+4+6} + x^{4+4+7} \end{cases}$$

Observemos que no expoente de x aparecem exatamente os valores que as variáveis x_1, x_2 e x_3 podem assumir. Os valores em negrito que aparecem no expoente de x são as soluções para o problema.

De acordo com o problema queremos os valores, tais que a soma dê 12, dessa forma a resposta do problema é o coeficiente de x^{12}.

Temos que:

$$p_1(x)p_2(x)p_3(x) = (x^2 + x^3 + x^4)^2(x^5 + x^6 + x^7) =$$

$$x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15} \tag{3}$$

Portanto a equação possui 7 soluções inteiras com as restrições dadas. Observamos que o polinômio dado em (3) nos fornece também respostas para outros problemas, temos que o