UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

DECLARAÇÃO

CHARLESTON JOSÉ DA SILVA ROICE FILHO e ERICLES DAVI DE OLIVEIRA IRINEU

INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DOS COMPRIMENTOS LONGITUDINAIS NO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE CASCAS CONOIDAIS

Monografia apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso 2 do Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás.

Aprovado em: 08/04/2022.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Renata Machado Soares – EECA-UFG (Orientadora)

Prof. Dr. Zenon J G N del Prado – EECA-UFG

Prof. Dr. Arthur Alax de A. Albuquerque – EECA-UFG

Atesto que as revisões solicitadas foram feitas:

Profa. Dra. Renata Machado Soares (orientadora)

Em: 18/04/2022

OBSERVAÇÕES COMPLEMENTARES:

- **Todos os campos do presente documento são de preenchimento obrigatório, sendo os mesmos adequados a quantidade de examinadores;**
- **Após preenchido, o documento deve ser assinado por todos os examinadores e também pelo orientador do referido trabalho.**

Documento assinado eletronicamente por **Renata Machado Soares**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/04/2022, às 11:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Arthur Alax De Araujo Albuquerque**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/04/2022, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Zenon Jose Guzman Nunez Del Prado**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/04/2022, às 18:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2776815** e o código CRC **6641C54D**.

Referência: Processo nº 23070.014585/2022-31 SEI nº 2776815

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DOS COMPRIMENTOS LONGITUDINAIS NO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE CASCAS CONOIDAIS

Charleston José da Silva Roice Filho
Ericles Davi de Oliveira Irineu

GOIÂNIA, GO.
2022

Charleston José da Silva Roice Filho
Ericles Davi de Oliveira Irineu

Investigação da influência dos comprimentos longitudinais no comportamento dinâmico de cascas conoidais

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientadora: Prof. Dra. Renata Machado Soares

GOIÂNIA, GO.
2022

Charleston Jose da Silva Roice Filho
Ericles Davi de Oliveira Irineu

Investigação da influência dos comprimentos longitudinais no comportamento dinâmico de cascas conoidais

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientadora: Prof. Dra. Renata Machado Soares

Data de aprovação ____/____/_____

_____

Prof. Dra. Renata Machado Soares (Orientadora)

_____

Prof. Dr. Zenón José Guzmán Nuñez Del Prado (Examinador)

_____

Prof. Dr. Arthur Álax de A. Albuquerque (Examinador)

Avisto que as revisões solicitadas foram feitas

_____

Orientador

Em: _____/____/_____

RESUMO

Este trabalho apresenta conceitos relacionados a cascas conoidais, no tocante ao comportamento dinâmico desse elemento estrutural. São realizadas revisões de bibliografias que tratam de temas similares e relevantes para elucidar o problema em estudo. A metodologia do tratamento desse problema é consiste na utilização do programa estudantil ABAQUS®, embasado no método dos elementos finitos, para realizar a análise do comportamento dinâmico de conoides que têm seus comprimentos longitudinais variados. Obtém-se valores de frequência natural, o formato dos modos de vibração e a resposta no tempo para vibração livre amortecida de conoides de geometrias distintas. As principais considerações do trabalho foram que, quanto mais elevada for a razão entre o tamanho do bordo retilíneo apoiado em x e o vão livre em *y*, menor será a frequência natural. Além disso, a variação do comprimento longitudinal altera o formato dos modos de vibração, que é visível na tendência que a frequência natural assume em relação à variação dos comprimentos longitudinais. A respeito da resposta no tempo em vibração livre amortecida, foi destaque a dificuldade de convergência dos resultados devido à não linearidade geométrica presente nos conoides. Também foi evidenciada a necessidade de elevados carregamentos para causar vibrações que fossem visíveis no intervalo de tempo definido no processamento para cascas de dimensões maiores.

Palavras-chave: cascas conoidais, dinâmica das estruturas, elementos finitos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Estruturas de cascas. 9
Figura 1.2 - Igreja da Pampulha, Belo Horizonte, MG-Brasil. 10
Figura 1.3 - Construção: Igreja da Pampulha, Belo Horizonte, MG-Brasil. 10
Figura 1.4 - Capela Bosjes, Witzenberg, África do Sul. 11
Figura 2.1 - Sistemas de coordenadas apresentado por Gosh e Bandyopadhyay (1989) 14
Figura 3.1 - Geometria do conoide. 18
Figura 3.2 – Famílias dos elementos disponíveis no software. 19
Figura 3.3 – Forma de identificação do elemento. 20
Figura 3.4 - Discretização do elemento, casca qualquer. 20
Figura 3.5 - Casca gerada no ABAQUS®, com 41 elementos. 22
Figura 3.6 - Casca gerada no ABAQUS®, com 192 elementos. 22
Figura 3.7 - Casca gerada no ABAQUS®, com 768 elementos. 23
Figura 4.1 - Razão entre comprimentos longitudinais x Frequências naturais (Hz) para o 1º modo de vibração 27
Figura 4.2 - Razão entre comprimentos longitudinais x Frequências naturais (Hz) para o 2º modo de vibração 28
Figura 4.3 - 1º e 2º modos de vibração para as cascas, com a=4m. 30
Figura 4.4 - 1º e 2º modos de vibração para as cascas, com a=5m. 31
Figura 4.5 - 1º e 2º modos de vibração para as cascas, com a=6m. 32
Figura 4.6 – Pulso de carga unitária. 33
Figura 4.7 - Resposta no tempo em x, para casca com a=4 m. 33
Figura 4.8 - Resposta no tempo em y, para casca com a=4 m. 34
Figura 4.9 - Resposta no tempo em z, para casca com a=4 m. 34
Figura 4.10 - Resposta no tempo em x, para casca com a=5 m. 35
Figura 4.11 - Resposta no tempo em y, para casca com a=5 m. 35
Figura 4.12 - Resposta no tempo em z, para casca com a=5 m. 36
Figura 4.13 - Resposta no tempo em x, para casca com a=6 m. 36
Figura 4.14 - Resposta no tempo em y, para casca com a=6 m. 37
Figura 4.15 - Resposta no tempo em z, para casca com a=6 m. 37

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Grandezas geométricas e físicas do conoide. 21
Tabela 3.2 – Resultados de frequência natural (Hz) para análise de convergência. 23
Tabela 4.1 - Dimensões das cascas 26

LISTA DE ABREVIAÇÕES

MEF – Método dos Elementos Finitos;

F1 – Frequência natural para o primeiro modo de vibração;

F2 – Frequência natural para o segundo modo de vibração.

LISTA DE SÍMBOLOS

H_h – Altura do bordo curvo da casca conoidal;

a – Comprimento do bordo curvo da casca conoidal;

b – Comprimento do bordo retilíneo na direção *x*;

E – Módulo de elasticidade;

v – Coeficiente de Poisson;

ρ – Massa específica;

h – Espessura da casca;

S3R – Elemento triangular de três nós com seis graus de liberdade por nó e de integração reduzida;

S4 – Elemento quadrilátero de quatro nós com seis graus de liberdade por nó;

S4R – Elemento quadrilátero de quatro nós com seis graus de liberdade por nó e de integração reduzida;

β – amortecimento proporcional à rigidez.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 9
1.1 Justificativa 12
1.2 Objetivos gerais 12
1.3 Objetivos específicos 12
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 13
3. METODOLOGIA 18
3.1 Características das cascas analisadas 18
3.2 Modelagem por MEF 18
3.3 Análise de convergência 21
4. RESULTADOS 25
4.1 Parâmetros geométricos e condições de contorno 25
4.2 Frequência natural e modos de vibração 27
4.3 Resposta no tempo em vibração livre amortecida 33
5. CONCLUSÃO 39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 41
APÊNDICE A 43

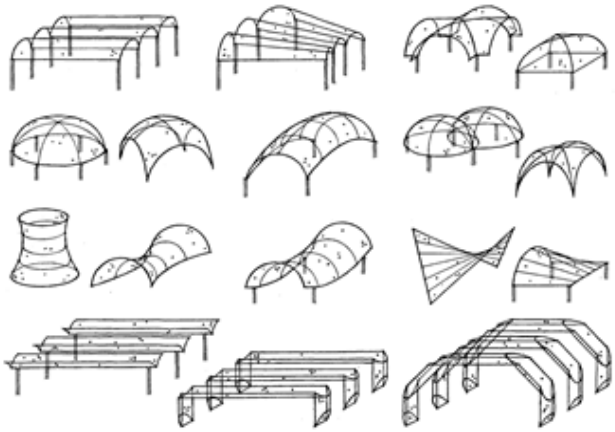
1. INTRODUÇÃO

A Mecânica das Estruturas é uma área da mecânica que analisa o comportamento de elementos estruturais ou um conjunto deles, denonimado sistema estrutural. Há vários tipos desses elementos, como vigas, pilares, barras, os quais podem ser estudados por métodos com soluções e teorias diversas. Há também elementos que possuem configurações mais complexas e demandam análises por métodos menos triviais, e esse é o caso das cascas.

Segundo Meirelles e Medrano (2005), estruturas em casca consistem em superfícies curvas e contínuas que possuem espessura muito menor que suas outras dimensões. Além disso, o comportamento delas pode ser dividido em teoria da membrana, que considera o mecanismo resistente de membrana, ou seja, resulta em solicitações de forças cisalhante e normal, e teoria da flexão, que engloba solicitações por momentos torçores, momentos fletores, esforços cortantes, normais e de cisalhamento longitudinal.

As cascas são utilizadas em vários segmentos da engenharia, como na construção de aeronaves, embarcações, reservatórios e coberturas de edificações. Além disso, são frequentemente encontradas na natureza, como em ovos e exoesqueletos de artrópodes. Elas podem possuir diversas características geométricas que as classificam diferentemente. Conforme exposto por Cavalcanti (2014), as cascas podem ser hiperbolóides, parabolóides hiperbólicos, cilindróides, conóides, entre outras classificações. Engel (2003) apresenta uma classificação para membranas, que as divide em cascas de curvas simples, cascas e cúpula, cascas em sela ou cascas lineares. A Figura 1.1 apresenta os exemplos de diferentes geometrias de cascas.

Figura 1.1 - Estruturas de cascas.



Fonte: Engel – Sistemas estruturais.

A casca conoidal, conforme Moreira (2019), é obtida pela translação de um plano diretor ao longo de uma reta diretriz, de modo que a intersecção desse plano com as diretrizes forma as geratrizes, as quais dão a geometria que forma a casca. Em muitas construções da engenharia civil com arquiteturas menos convencionais, são utilizadas estruturas em casca para compor a cobertura dessas edificações. Esse tipo de elemento é muito eficaz para vencer grandes vãos e possui elevada capacidade de carga. O formato conoidal é ainda mais vantajoso nessa aplicação, pois ele pode ser executado pela justaposição de uma série de segmentos de reta, que podem ser vigas ou barras. Assim, garante-se um menor custo de construção com fôrmas e a execução é facilitada. Esse formato permite também a entrada de luz natural e confere uma estética mais arrojada e moderna à edificação. Alguns exemplos de cascas conoidais utilizadas como coberturas de edificações são apresentadas nas Figura 1.2 a Figura 1.4.

Figura 1.2 - Igreja da Pampulha, Belo Horizonte, MG-Brasil.

Fonte: www.archdaily.com.br/br/01-83469/classicos-da-arquitetura-igreja-da-pampulha-slash-oscar-niemeyer. Acesso em: 03 abr. 2022.

Figura 1.3 - Construção: Igreja da Pampulha, Belo Horizonte, MG-Brasil.

Fonte: www.archdaily.com.br/br/01-83469/classicos-da-arquitetura-igreja-da-pampulha-slash-oscar-niemeyer. Acesso em: 03 abr. 2022.

Figura 1.4 - Capela Bosjes, Witzenberg, África do Sul.

Fonte: www.archdaily.com.br/br/877207/capela-bosjes-steyn-studio. Acesso em: 03 abr. 2022.

No entanto, podem ser necessários cálculos mais avançados para se dimensionar esse tipo de cobertura, que, muitas vezes, possuem geometrias de complexidade tão elevada que não apresentam soluções analíticas para o estudo do seu comportamento. Nesse caso, são utilizados métodos numéricos para se obter os resultados desejados de acordo com o tipo e o escopo de análise. Um método bem consolidado na análise estrutural é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Ele realiza a discretização de sistemas ou corpos contínuos em uma quantidade finita de elementos, os quais têm um número específico de nós que ajudam na sua caracterização e, de acordo com essas características, são formuladas as matrizes de rigidez. Atreladas às condições de contorno e às relações matemáticas que definem o problema a ser estudado, pode-se encontrar diversas grandezas físicas relacionadas à estabilidade da estrutura, tanto estáticas quanto dinâmicas. Exemplo disso é visível na ocorrência de vibrações forçadas em um sistema. Essas vibrações, quando causadas por excitações externas oscilatórias, ocorrem na mesma frequência que essas excitações. Assim, se essa frequência coincidir com a frequência natural do sistema, um estado de ressonância é formado, no qual se dão oscilações de elevada amplitude, e isso pode acarretar a instabilidade dinâmica desse sistema, e até o seu colapso (THOMSON, 1973).

Ademais, de acordo com Bolina, Palechor e Vásquez (2015), uma estrutura possui várias frequências naturais, porquanto ela é capaz de sofrer vibrações em diversas direções, após ser excitada por uma força. Entretanto, a de valor inferior dentre elas é a mais importante, e é chamada de fundamental. Cada uma dessas frequências naturais está relacionada a um

modo de vibração distinto, que é a forma como o sistema oscila, e, em estruturas convencionais, os modos de vibração que não estão atrelados a essa frequência natural mais baixa são considerados insignificantes.

1.1 JUSTIFICATIVA

O estudo desse problema é validado pelo fato de que há uma elevada complexidade na análise dinâmica de estruturas em cascas. Elas são amplamente utilizadas em obras da engenharia, e estudá-las pode embasar a elaboração de projetos que façam uso desse elemento estrutural e garantir maior segurança e confiabilidade para os engenheiros que desejam utilizá-lo. Além da observação quanto a geometria utilizada, a variação dos parâmetros geométricos permite a análise de diferentes formas de aplicação, possibilitando uma utilização dos dados obtidos em elementos estruturais reais. A escolha do método discreto para análise se dá pela melhor representação dos fenômenos reais quando comparadas com outros métodos que utilizam de simplificações matemáticas.

1.2 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo geral deste trabalho é verificar, através do método dos elementos finitos, a influência da variação de parâmetros geométricos de comprimento longitudinal das cascas conoidais no seu comportamento dinâmico. Para isso, objetiva-se conhecer valores de frequência natural e modos de vibração para efeito de análise de convergência do método e a sua tendência com a variação da geometria. Além disso, deseja-se verificar o comportamento dos elementos pela análise das respostas no tempo em vibração livre amortecidas.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

De maneira mais específica, intenciona-se investigar a influência das relações geométricas nas frequências naturais, nos modos de vibração e nas respostas no tempo em vibração livre amortecida da casca conoidal. Para isso será utilizado o *software* de elementos finitos ABAQUS® *Student Edition*.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresenta-se a revisão bibliográfica realizada para o estudo do tema tratado. Assim, são apresentados alguns trabalhos estudados para se conhecer o estado da arte do problema em questão e auxiliar na sua solução.

Dentre esses trabalhos, cita-se o de Estrella Júnior (1988) que fez a análise linear de cascas cilíndricas enrijecidas circunferencialmente submetidas a vibrações livres, e no tocante à instabilidade dinâmica desses elementos. Essas cascas foram dispostas de modo que estavam totalmente submersas ou preenchidas com um fluido de alta densidade, incompressível e sem viscosidade. O estudo foi feito com auxílio do método de Bolotin, que permitiu a obtenção de resultados advindos da redução das equações de Mathieu-Hill para um grau de liberdade. As equações lineares de Sanders foram usadas para descrever o comportamento da casca e a análise da instabilidade dinâmica foi feita por meio das equações de Donnell. Assim, as soluções encontradas foram no sentido de investigar os efeitos do enrijecedor, do fluido e dos parâmetros da casca nos valores de frequência natural e nas configurações modais, além da principal região de instabilidade.

Estrella Júnior (1988) detectou que a presença do fluido tem notável influência nas frequências naturais da casca cilíndrica, de modo a reduzi-las e a aproximar os valores delas. Isso foi mais evidente no caso de cascas longas e delgadas, entretanto, quanto maior o número de enrijecedores, menor foi a diminuição dessas frequências devido ao fluido. Além disso, a quantidade de enrijecedores afeta diferentemente a frequência natural para modos de vibração em que predomina a energia de flexão e os modos em que se sobressaem a energia de membrana. No primeiro, o crescimento do número desses elementos de rigidez eleva de forma considerável a frequência natural, já no segundo, ocorre um pequeno decréscimo dessa frequência. Foi utilizada uma solução baseada na teoria ortotrópica para se comparar com os resultados obtidos pela formulação do trabalho, que considerou os enrijecedores estruturas separadas, porém com a imposição de condições de compatibilidade entre eles e a casca. Essa comparação demonstrou que só há correspondência entre os valores encontrados por ambas essas formulações quando a casca possui elevada densidade de enrijecedores ou quando estes não são significativamente altos.

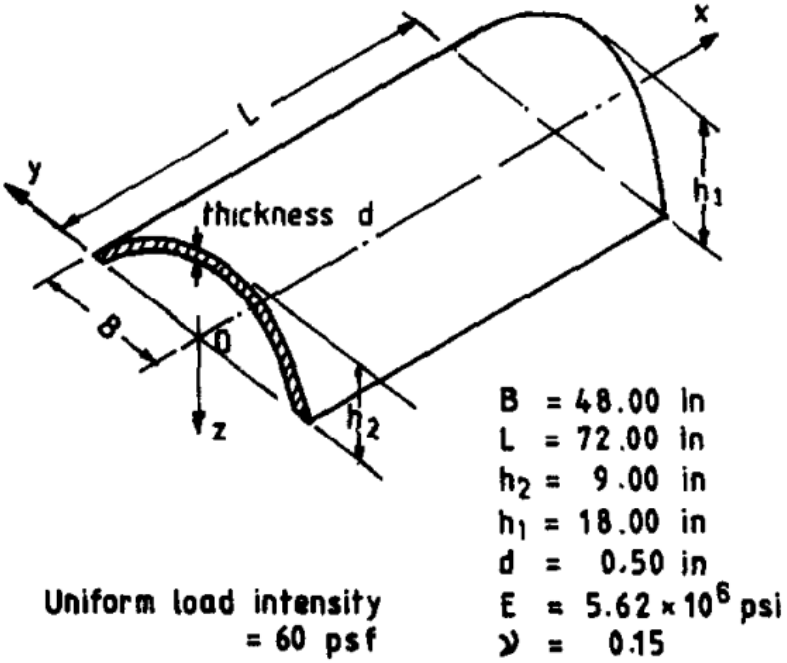
Outra consideração feita por Estrella Júnior (1988) foi de que, ao se aplicar um carregamento estático inicial na casca, a frequência natural se eleva quando essa carga é de tração, e é reduzida quando o carregamento é compressivo.

Já a respeito da instabilidade dinâmica, notou-se que, para cargas de excitação mais elevadas, a estrutura fica mais passível de sofrer ressonância, e o número de faixas de

frequência que geram essa instabilidade também cresce. Não somente a carga, mas também a frequência de excitação pode acarretar a perda de equilíbrio dinâmico na estrutura, e o valor mais crítico para essa frequência no sentido de tornar o sistema instável é de duas vezes o valor da frequência natural. Ademais, o autor percebeu que, para cascas com geometrias mais alongadas ou delgadas, surge uma quantidade maior de modos suscetíveis a sofrer ressonância paramétrica simultaneamente, que ocorre quando os valores das frequências naturais para diferentes modos se aproximam.

Já Gosh e Bandyopadhyay (1989) estudaram uma casca conoidal, apresentada na Figura 2.1, com dois bordos opostos dotados de curvatura Gaussiana negativa. Porém, em sua análise, não utilizaram o Método dos Elementos Finitos, e sim o Método de Galerkin, que é considerado mais simples e rápido na obtenção de resultados e de um comportamento preliminar que essa casca apresenta, junto às suas principais características.

Figura 2.1 - Sistemas de coordenadas apresentado por Gosh e Bandyopadhyay (1989)



Cada solução encontrada pelo Método de Galerkin foi comparada a respostas obtidas em outros trabalhos com elementos finitos. Gosh e Bandyopadhyay (1989) salientaram que os valores de deslocamentos obtidos por eles quando carregamentos foram aplicados no conoide foram compatíveis com aqueles determinados pelo MEF. Além disso, a formulação por Galerkin atingiu valores razoáveis para resultantes de tensão, ainda que ligeiramente elevados em comparação aos obtidos com elementos finitos. No entanto, observou-se que esses valores de tensão, na porção central da casca, não foram compatíveis com os obtidos via MEF. Os autores ressaltaram que isso deve-se, provavelmente, ao efeito do coeficiente de Poisson, porquanto há significativa dificuldade na escolha de funções que

atendam às condições de contorno relacionadas a tensão e que contenham o coeficiente de Poisson nas suas expressões.

Desse modo, foi atestado que, no geral, o Método de Galerkin apresenta resultados razoáveis na avaliação do comportamento do conoide com dois bordos curvos e pode ser considerado útil na elaboração preliminar de projetos desse tipo de cascas. A maior vantagem desse método é que ele demanda menores tempo e capacidade de processamento e de memória computacional. Assim, com base no que for apresentado, métodos mais sofisticados, tais como elementos finitos e faixas finitas podem ser usados para se encontrar soluções mais exatas, se necessário.

Cita-se também o trabalho de Cavalcanti (2014), que estudou a influência das condições de contorno, da curvatura e das dimensões nas frequências naturais e nos modos de vibração de cascas conoidais, com o auxílio do Método dos Elementos Finitos. Nesse estudo, nota-se que, para certos modos de vibração, à medida que a curvatura da casca aumenta, as frequências naturais também aumentam. Além disso, detectou-se que, pela comparação de cascas com curvaturas de magnitude diferentes, não houve variações consideráveis na forma modal ao longo da geratriz (eixo reto). No entanto, para um eixo curvo, as formas dos três primeiros modos de vibração sofreram mudanças significativas, de modo que o número de semiondas foi distinto de acordo com cada curvatura adotada para a casca.

Ao variar as condições de contorno, considerou-se que os bordos retilíneos e opostos estavam ambos ou engastados ou simplesmente apoiados, e os bordos curvos foram definidos de forma que estiveram com condições de contorno diferentes, que variaram entre engaste, simplesmente apoiado e livre. Detectou-se que, para o caso em que todos os bordos foram engastados, isto é, a condição de contorno mais rígida, a frequência natural foi bem mais alta em relação ao caso de condição de contorno mais flexível, com os bordos retilíneos simplesmente apoiados e os curvos livres. Isso denota que, para o caso mais flexível, há risco de surgirem fenômenos de ressonância, os quais podem acarretar vibrações indesejadas na estrutura. Cavalcanti (2014) também ressalta que essas oscilações, ao excitar modos assimétricos, podem provocar a perda de estabilidade por *snap-through*.

Ademais, foi observado pela autora que, no eixo retilíneo da casca, não houve modificação relevante nos modos de vibração com a variação das condições de contorno. Entretanto, para o eixo curvilíneo, ocorreram duas situações. Para o caso simplesmente apoiado dos bordos retilíneos, não houve variação considerável no formato dos modos de vibração quando modificou-se as condições de contorno dos bordos curvos. Já para os apoios retilíneos engastados, detectou-se uma notável diferença no formato dos modos com a variação das condições de contorno dos outros dois bordos com curvatura.

Finalmente, para diferentes valores de comprimento da casca, considerou-se esta nas situações com todos os bordos engastados, caso mais rígido, e com os bordos curvos livres e os retilíneos simplesmente apoiados, que corresponde ao caso mais flexível. Observou-se, no caso mais rígido, que, à medida que o comprimento da casca aumenta, as frequências naturais são reduzidas significativamente, para os três modos de vibração. Já na situação mais flexível, mesmo com a variação dos comprimentos, a ordem de grandeza das frequências naturais manteve-se. Cavalcanti (2014) enfatiza que, nesse caso, verificam-se frequências de vibração muito próximas, o que pode levar a um comportamento dinâmico não linear complexo, e até mesmo a ocorrência de ressonâncias internas, ou seja, dois modos de vibração com uma mesma frequência natural.

Moreira (2019) também realizou a análise do comportamento estrutural de cascas conoidais. Em seu trabalho, ele buscou uma formulação para esse elemento estrutural, de modo a considerar a não linearidade geométrica que está inerente ao problema, com o auxílio do programa comercial de elementos finitos ABAQUS®. Ele obteve os valores de carga crítica e frequência natural com seus respectivos modos de flambagem e vibração, os caminhos não lineares de equilíbrio, a relação entre frequência e amplitude de vibração, os diagramas de bifurcação e as fronteiras de escape.

Em seus estudos, ele utilizou um conoide parabólico, com dois bordos retos opostos e dois bordos curvos, de alturas variáveis e distintas. Ele observou que, nos modos de flambagem, para a análise estática linear, o deslocamento de maior magnitude foi na direção z, que corresponde à direção da elevação da casca. Entretanto, ao aumentar a altura do bordo curvo mais elevado, detectou-se um acréscimo considerável nos deslocamentos u e v, que ocorrem nas direções longitudinais da casca (x e y). Na análise estática não linear, esse aumento de altura também ocasionou alterações no caminho não linear de equilíbrio e fenômenos não lineares, como *snapthrough* e *snapback*, e um valor maior de carregamento máximo atingido. Isso levou o autor a concluir que a análise linear na obtenção da carga crítica pode ser insuficiente para se determinar a capacidade de carga da estrutura com precisão, em comparação com os resultados obtidos no estudo não linear.

Além disso, Moreira (2019) também estudou os comportamentos dinâmicos linear e não linear desse conoide. No primeiro, foram observados, assim como no estático linear, predominância dos deslocamentos em z e um aumento desses em x e y com o incremento da altura do bordo curvo mais elevado. Esse incremento também acarreta elevação da frequência natural. Ao se aplicar cargas transversais de valores distintos na estrutura, notou-se que, para maiores valores dessa carga, a frequência natural de vibração da casca conoidal se reduziu, até que se atingiu um valor nulo, ou seja, configurou-se instabilidade no sistema.

Moreira (2019) também detectou o fenômeno de *softening* na vibração livre não amortecida, esse comportamento é definido por um aumento da amplitude de vibração com a diminuição da rigidez da estrutura. Essa análise foi realizada pela relação não linear de amplitude-frequência. Ademais, na vibração forçada, saltos dinâmicos ocorreram, conjugados à perda de estabilidade da casca por meio de uma bifurcação do tipo sela, de acordo com a magnitude da frequência de excitação do carregamento e da perturbação dinâmica.

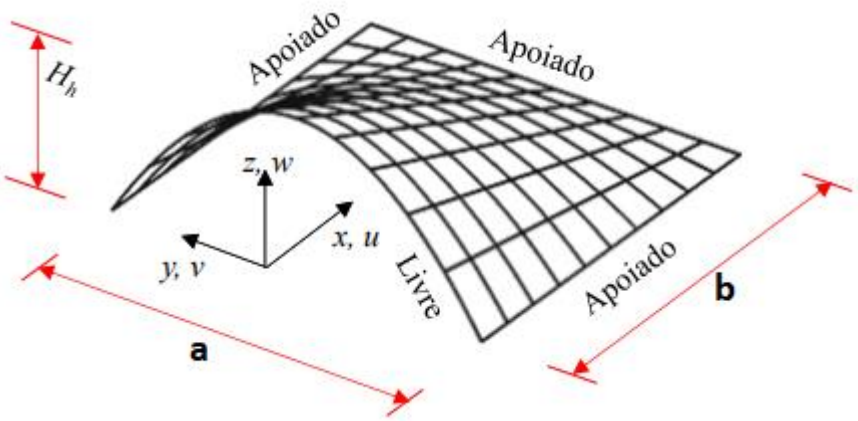
3. METODOLOGIA

Nesta seção, serão apresentados os métodos a serem utilizados para se investigar o comportamento dinâmico dos conoides cilíndricos em estudo, e também a forma que esses métodos serão aplicados no problema. Todos os resultados de frequências naturais, modos de vibração e respostas no tempo em vibração livre amortecida da casca serão obtidos por meio do *software* versão estudantil ABAQUS®. Esse programa utiliza o método dos elementos finitos para fazer as análises estruturais dos sistemas inseridos nele.

3.1 CARACTERÍSTICAS DAS CASCAS ANALISADAS

Neste item as características das cascas em estudo serão explicitadas. O *input* desses conoides será feito de modo que cada um possuirá três bordos retos simplesmente apoiados e um bordo curvo de altura *Hh* e de comprimento *a.* Os outros dois bordos retilíneos e simplesmente apoiados possuirão comprimento *b*, conforme pode ser visto na Figura 3.1. A diferença entre cada casca analisada estará no valor dos seus comprimentos longitudinais, que serão variados. O material será homogêneo, isotrópico, elástico linear com módulo de elasticidade *E,* coeficiente de Poisson *v*, massa específica *ρ* e espessura *h,* todos valores fixados evidentes na tabela 3.1. As excitações da estrutura serão feitas por carregamentos na direção transversal da superfície.

Figura 3.1 - Geometria do conoide



Fonte: Moreira (2019), adaptado.

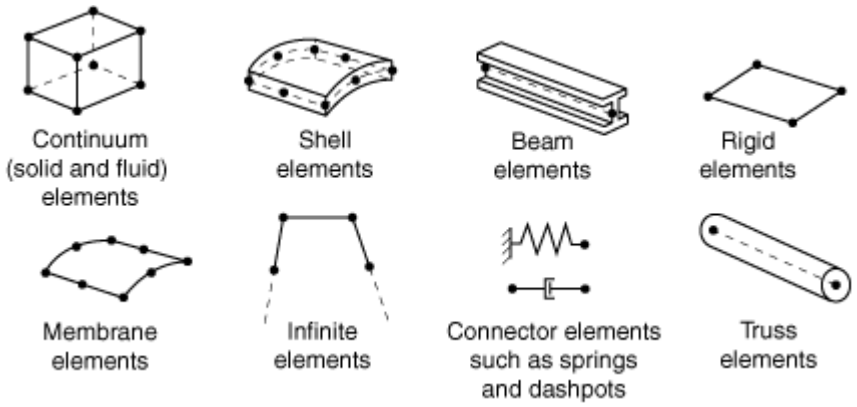
3.2 MODELAGEM POR MEF

Neste item, a modelagem do conoide pelo *software* será elucidada com maiores detalhes. As cascas em estudo serão discretizadas em elementos, cada qual formado por nós em seus vértices. Essa discretização é a principal etapa para aplicação do método dos

elementos finitos. Por meio dela, é possível analisar estruturas que, se fossem consideradas contínuas, demandariam estudos muito mais complexos e laboriosos. O *software* dispõe de diversos tipos de elementos, em que cada um é mais conveniente para análises específicas, de acordo com a modelagem e a forma do sistema em estudo.

São cinco os aspectos que caracterizam o comportamento do elemento: Família; Graus de liberdade; Número de nós; Formulação; Integração. Os aspectos definem as condições do elemento e o nomeiam, sendo que as primeiras letras do nome indicam a família do elemento, a Figura 3.2 apresenta a possíveis famílias disponíveis no *software*. Os graus de liberdade dos nós estão diretamente relacionados a família do elemento e aparecem no final nome apenas quando a análise exige o travamento de um deles. Os deslocamentos ou outros graus de liberdade são obtidos nos nós, resultados entre um ponto e outro são interpolados, portanto, o número de nós influencia na ordem de interpolação dos resultados. A formulação refere-se à teoria matemática aplicada, o software utiliza algoritmos seguindo a família do elemento. Enfim, a integração, utilizando a quadratura gaussiana o *ABAQUS*® avalia a resposta do material em vários pontos de cada elemento, com essa quantidade integração, é possível obter uma generalidade no comportamento do elemento. Em alguns elementos contínuos, a integração pode ser reduzida, sem que afete a precisão do comportamento. Por exemplo, o elemento S8R5 é uma casca com 8 nós com integração reduzida e cinco graus de liberdade por nó.

Figura 3.2 – Famílias dos elementos disponíveis no *software*.

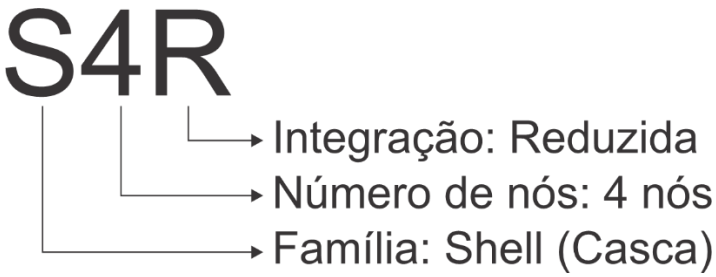


Fonte: http://130.149.89.49:2080/v2016/books/usb/default.htm?startat=pt06.html#usbechapter.

O elemento de casca *S4R* (Figura 3.3) será utilizado para o estudo do problema deste trabalho. Este elemento possui quatro nós, seis graus de liberdade por nó - três de translação e três de rotação, para *x*, *y* e *z* - e integração reduzida. Essa redução consiste em uma integração numérica com ordem inferior à necessária para integrar a matriz de rigidez de um elemento. O *S4R* exige menor custo computacional no processamento do problema do

que os demais elementos presentes na biblioteca do programa que poderiam ser utilizados na solução deste problema, e isso será evidenciado na análise de convergência.

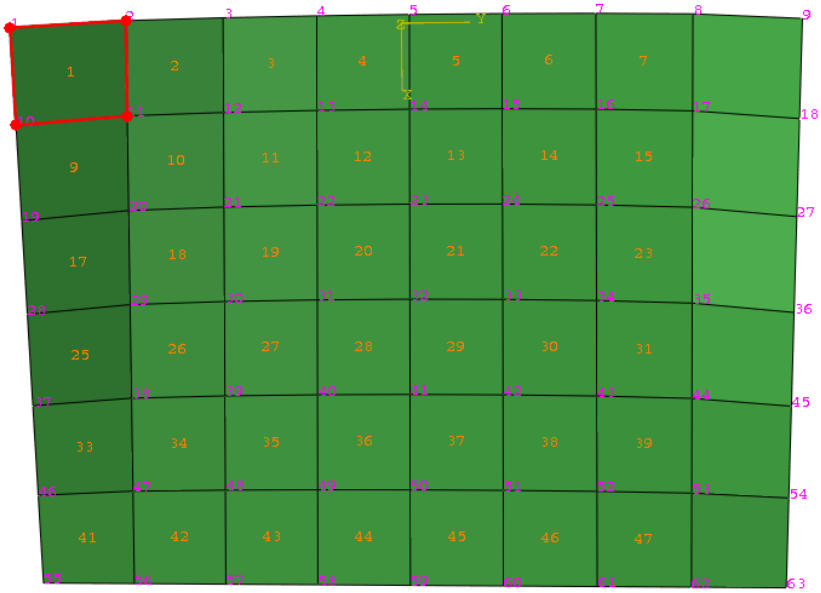
Figura 3.3 – Forma de identificação do elemento.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 3.4 apresenta os números dos nós na cor roxa e a formação do elemento em forma de quadrado, numerados na cor laranja.

Figura 3.4 - Discretização do elemento, casca qualquer.



Fonte: ABAQUS®.

A geometria, as condições de contorno, as características do material e o tipo de elemento são definidos por meio de um arquivo ".inp", que contém essas informações na linguagem de programação específica utilizada pelo compilador do ABAQUS®.

Essa geometria é descrita com coordenadas *x*, *y* e *z* de cada um dos nós que formam a casca. As coordenadas *x* e *y* são função dos comprimentos longitudinais e do comprimento de cada elemento formado pelos nós. Já a coordenada *z*, que corresponde à direção normal ao plano da casca, é função dos valores de *x* e *y*, conforme a equação 3.1, retirada de Cavalcanti (2014).

$$z = -(H_1 + \frac{(H_2 - H_1)}{b} x) * \sqrt{1 - \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}} \quad (3.1)$$

3.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Este item irá tratar dos métodos utilizados na análise de convergência do problema. Escolheu-se o elemento S4R do *ABAQUS*® com base no trabalho de Freitas (2020). Nesse estudo, foram levantadas as opções de se utilizar os elementos *S3R*, que é do tipo casca, com três nós e integração reduzida, *S4*, que também é do tipo casca e possui quatro nós e, finalmente, o *S4R*, que se diferencia do *S4* apenas por ser dotado de integração reduzida. Todos possuem nós com seis graus de liberdade, e são usados pelo *software* na implementação do MEF. Entretanto, Freitas (2020) notou que, para se utilizar o elemento *S3R*, devido à complexidade da formulação do campo de deformações com esse elemento, seria necessário um refinamento mais rigoroso da malha do conoide, o que configuraria, conforme o autor, ociosidade computacional. Assim, foram realizados testes apenas com o *S4* e o *S4R*. Nos resultados desses testes, percebeu-se uma diferença ínfima entre os valores encontrados. Porém, para o elemento com integração reduzida, o processamento necessário para o problema foi cinco vezes menor. Desse modo, fica evidente que o elemento *S4R* é o mais adequado para esse tipo de análise.

Assim, para se ilustrar uma análise de convergência, optou-se por obter resultados da frequência natural fundamental, e nela avaliar-se-á apenas o número de elementos a serem utilizados na modelagem do MEF pelo *software*, conforme a Tabela 3.2.

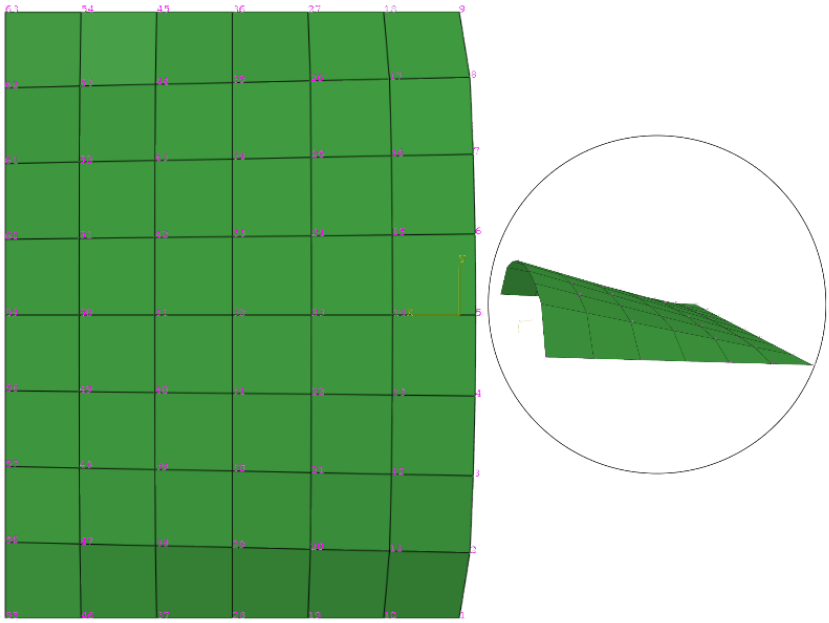
As grandezas geométricas e físicas relacionadas a essa casca estão evidenciadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Grandezas geométricas e físicas do conoide.

a (m)	b (m)	h (m)	Hh (m)	E (GPa)	*v*	ρ (kg/m³)
8	6	0,06	0	14	0,3	2548,42

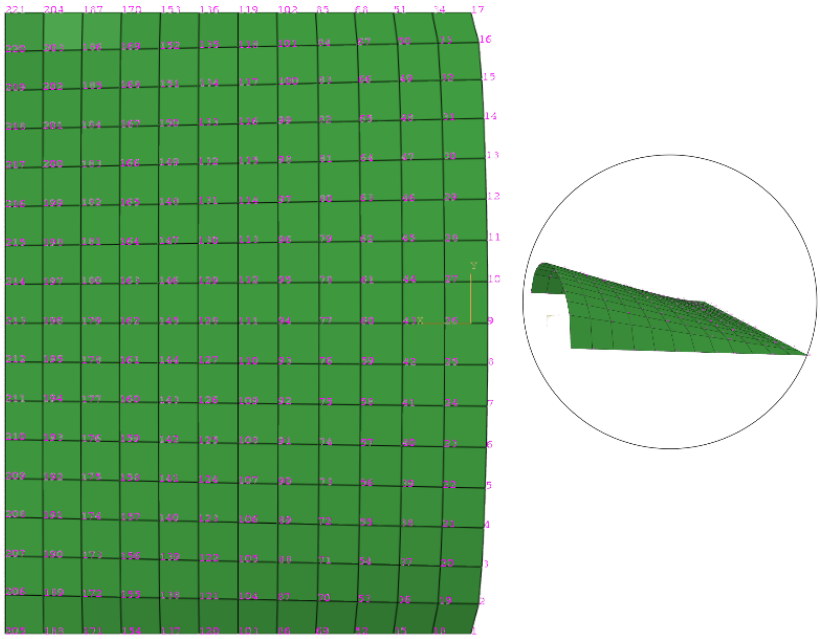
As figuras 3.5, 3.6 e 3.7 evidenciam as cascas utilizadas na análise de convergência para determinar o comprimento do elemento a ser utilizado na obtenção dos resultados esperados na investigação da influência dos comprimentos no comportamento dinâmico dos conoides.

Figura 3.5 - Casca gerada no ABAQUS®, com 41 elementos.



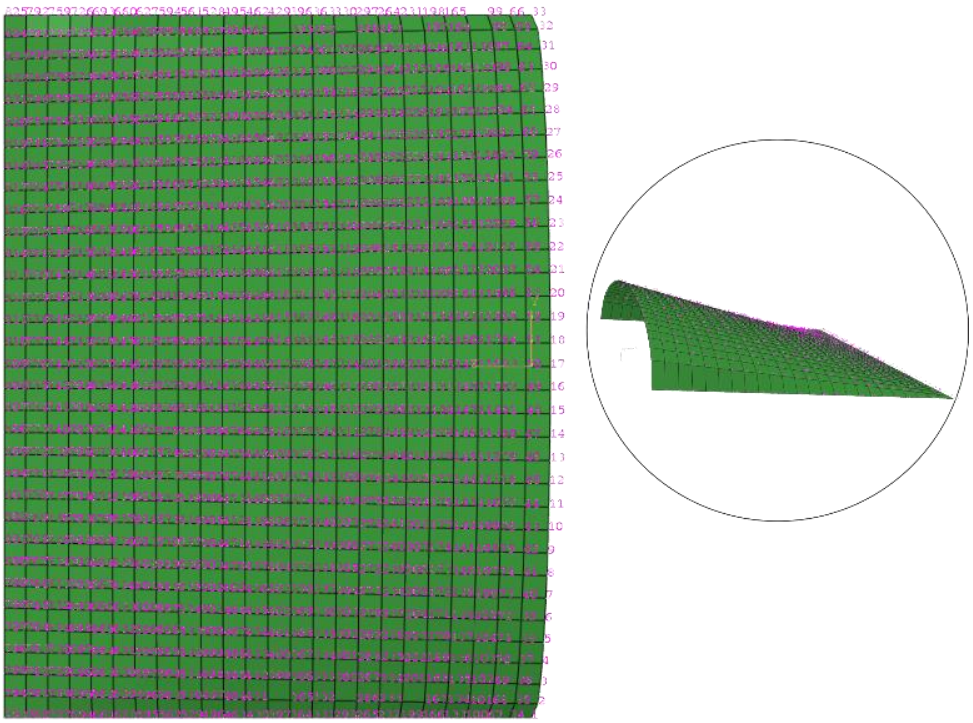
Fonte: ABAQUS®.

Figura 3.6 - Casca gerada no ABAQUS®, com 192 elementos.



Fonte: ABAQUS®.

Figura 3.7 - Casca gerada no ABAQUS®, com 768 elementos.



Fonte: ABAQUS®.

As coordenadas de cada nó foram definidas em função dos comprimentos longitudinais e do tamanho de cada elemento. Com esses três parâmetros geométricos, utilizou-se um código na linguagem GNU Octave, presente no Apêndice B, compilado pelo *software* GNU, para automatizar a geração de cada coordenada de modo a ser inserida no ABAQUS®, no formato correto que atende à linguagem interna desse programa.

Os resultados obtidos para frequência natural para três diferentes números de elementos de uma mesma casca, com as propriedades físicas presentes na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Resultados de frequência natural (Hz) para análise de convergência.

Número de elementos	Tamanho do elemento (m)	1º modo	Diferença (%)	2º modo	Diferença (%)
41	1	2,3803	-	5,5982	-
192	0,5	2,0209	15,10%	4,9422	11,72%
768	0,25	1,9466	3,68%	4,8008	2,86%

Ao comparar-se os resultados obtidos na Tabela 3.2, verifica-se que, tanto para o primeiro modo de vibração quanto para o segundo modo, a diferença percentual entre os valores obtidos para a frequência natural é pequena entre as malhas de 192 e 768 elementos. Dessa maneira, um aumento na quantidade de elementos na malha seria desnecessário, uma vez que os valores de frequência natural seriam próximos aos já obtidos com malhas menos

refinadas. Com o intuito de se obter resultados com precisão satisfatória e com um menor tempo de processamento computacional, opta-se por utilizar o modelo com uma malha que contém 768 elementos para essa geometria e uma malha com tamanho de elemento próximo a 0,25 m para as demais geometrias de casca que serão estudadas.

4. RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se os resultados obtidos através da análise linear e não linear, com o uso do MEF, como forma de obtenção dos valores que representam o comportamento dinâmico das cascas conoidais consideradas. Adotou-se as grandezas físicas e geométricas apresentadas pela Tabela 3.1 e o tamanho de elemento escolhido, de 0,25 m, as cascas foram sujeitas a variação em sua geometria (parâmetro *a* e *b*), em seu amortecimento proporcional à rigidez, β, e nas perturbações aplicadas, com o intuito de encontrar os valores de frequência natural, respostas no tempo em vibração livre amortecida das cascas e os modos de vibração. Contemplam-se ainda as comparações entre os dados obtidos para as diferentes cascas.

4.1 PARÂMETROS GEOMÉTRICOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Nessa seção, serão mostrados os parâmetros geométricos e evidenciadas as condições de contorno do problema.

Com base na metodologia aplicada na análise de convergência e com a geração das coordenadas pelo *software* GNU e inserção da malha com o elemento *S4R* pelo ABAQUS®, serão tomados os valores para cascas com diferentes dimensões, a fim de verificar os comportamentos em situações geometricamente distintas.

A espessura da casca (*h*), de 0,06 m foi mantida para todas, assim como o tamanho do elemento fornecido pela análise de convergência, de 0,25 m. As dimensões *a* e *b* foram definidas de forma a variar a razão entre elas. Assim, com a determinação do tamanho do elemento e variação das dimensões dos conoides, as malhas utilizadas possuem quantidades diferente de nós e elementos. Foram adotadas duas alturas distintas: 1,4 m e 0,4 m. A menor altura foi usada para obter as respostas no tempo. As dimensões longitudinais, com as suas respectivas frequências naturais *F1* e *F2* para os 1º e 2º modos de vibração, e o número de nós de cada casca são expostos na Tabela 4.1.

Para possibilitar a sua análise, definiu-se que as cascas estão inseridas em um sistema de coordenadas cartesianas. A direção *z* equivale à direção da altura e as direções *x* e *y* são, respectivamente, as dos comprimentos *a* e *b*. Assim, considerou-se cascas com três bordos retos e um curvo. O curvo está na direção *y*, e ele é livre, enquanto os outros são simplesmente apoiados.

Tabela 4.1 - Dimensões das cascas

a (m)	b (m)	b/a ≡ x/y	F1 (Hz)	F2 (Hz)	nº de nós
6,00	1,00	0,17	6,4374	15,2020	125
6,00	2,00	0,33	5,8521	12,2030	225
6,00	3,00	0,50	4,5603	9,8737	325
6,00	4,00	0,67	3,6760	8,6593	425
6,00	5,00	0,83	3,1094	8,0160	525
6,00	6,00	1,00	2,7399	7,6543	625
6,00	7,00	1,17	2,4930	7,4373	725
6,00	8,00	1,33	2,3240	7,2991	825
6,00	9,00	1,50	2,2054	7,2063	925
6,00	9,50	1,58	2,1594	7,1709	975
5,00	1,00	0,20	8,2459	19,5400	105
5,00	2,00	0,40	7,1329	15,3850	189
5,00	2,50	0,50	6,2562	7489,60	231
5,00	3,00	0,60	5,5266	12,6520	273
5,00	4,00	0,80	4,4900	11,3380	357
5,00	5,00	1,00	3,8638	10,6750	441
5,00	6,25	1,25	3,3924	10,2470	546
5,00	7,50	1,50	3,1173	10,0180	651
5,00	8,75	1,75	2,9485	9,8806	756
5,00	10,00	2,00	2,8396	9,5632	861
5,00	10,75	2,15	2,7922	8,8298	924
5,00	11,25	2,25	2,7659	8,3914	966
4,00	1,00	0,25	11,0410	26,6100	85
4,00	2,00	0,50	9,0710	20,4610	153
4,00	3,00	0,75	7,0238	17,1520	221
4,00	4,00	1,00	5,8125	15,7100	289
4,00	5,00	1,25	5,1130	15,0130	357
4,00	6,00	1,50	4,6969	14,6300	425
4,00	7,00	1,75	4,4385	14,3930	493
4,00	8,00	2,00	4,2704	14,2310	561
4,00	9,00	2,25	4,1560	12,9690	629
4,00	10,00	2,50	4,0749	11,5110	697
4,00	11,00	2,75	4,0152	10,3180	765
4,00	12,00	3,00	3,9698	9,3377	833
4,00	13,00	3,25	3,9342	8,5277	901
4,00	14,00	3,50	3,9055	7,8562	969

4.2 FREQUÊNCIA NATURAL E MODOS DE VIBRAÇÃO

Nesta seção, os resultados de frequência natural e dos modos de vibração de várias cascas com geometrias distintas irão ser evidenciados e analisados. A altura foi fixada em 1,4 m para todos os casos testados na obtenção de frequência natural.

Figura 4.1 - Razão entre comprimentos longitudinais x Frequências naturais (Hz) para o 1º modo de vibração

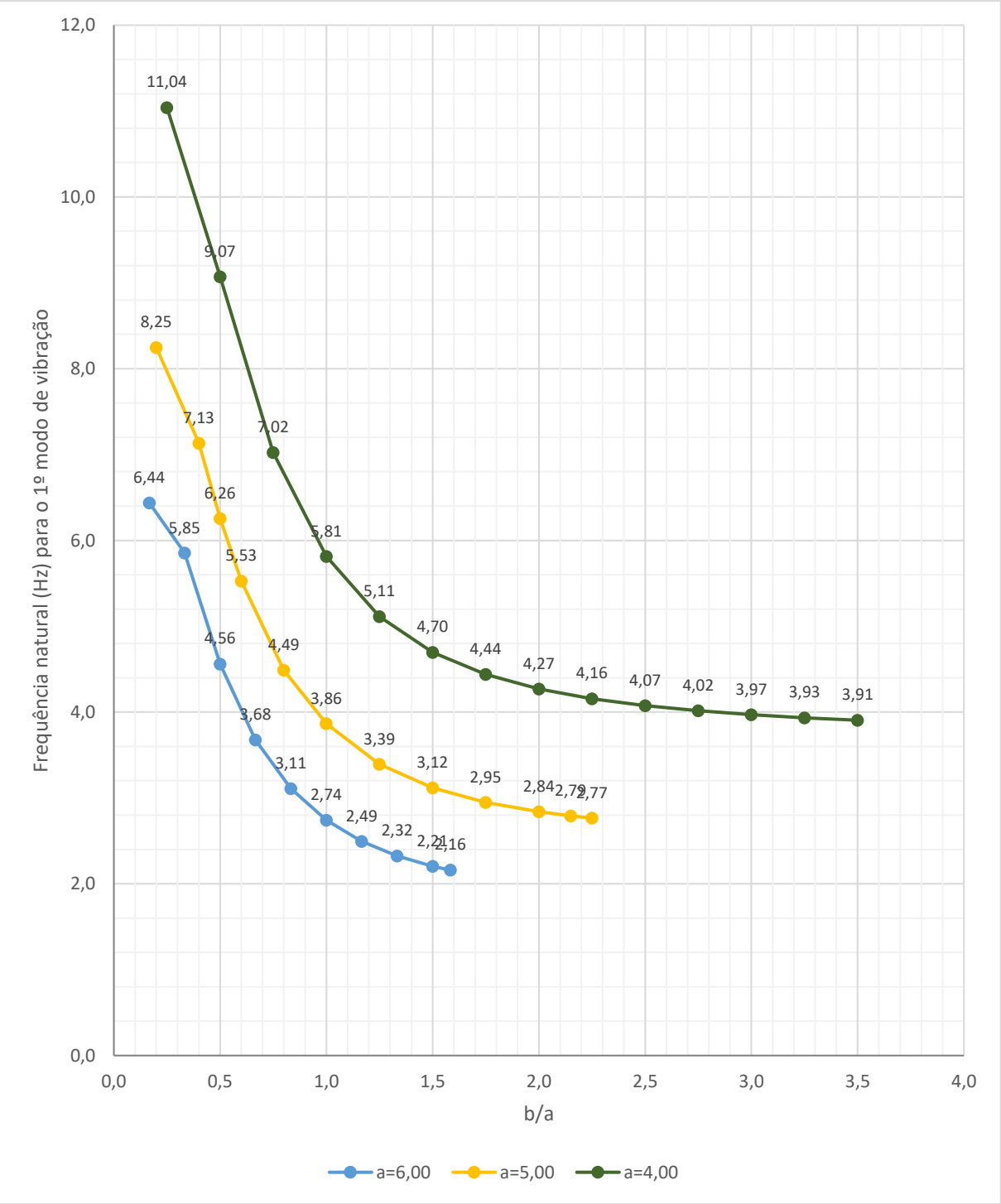
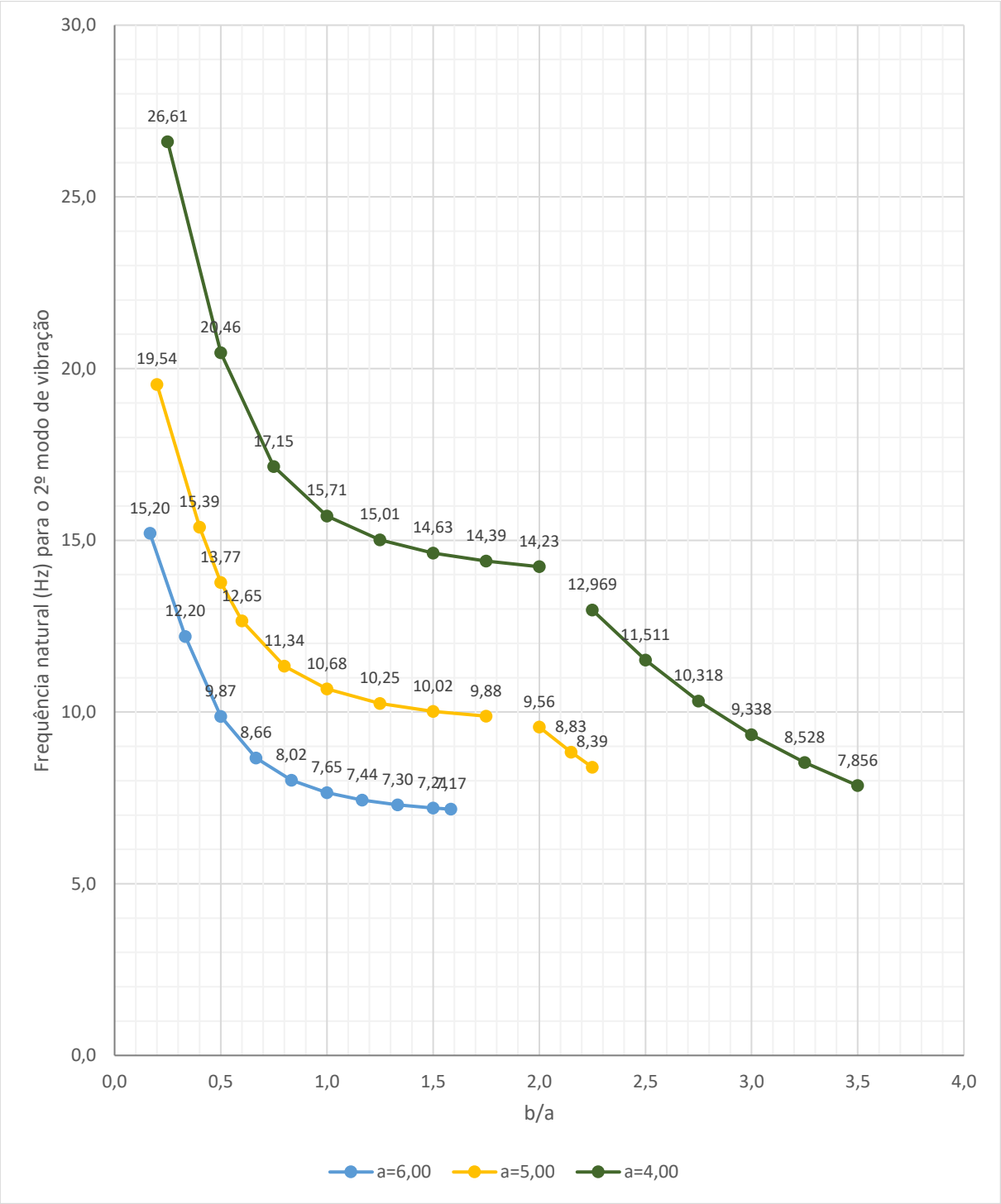


Figura 4.2 - Razão entre comprimentos longitudinais x Frequências naturais (Hz) para o 2º modo de vibração



Tanto a Figura 4.1, quanto a Figura 4.2 revelam o comportamento que as frequências naturais das cascas conoidais apresentam quando sua geometria longitudinal é variada. Enquanto o comprimento do bordo curvo livre é maior que o do reto apoiado em *x*, à medida que a relação *b/a* se eleva, isto é, a razão entre as dimensões do apoiado em *x* e do

livre cresce, a frequência natural decresce rapidamente. Já quando o lado apoiado em *x* se torna maior que o curvo, a frequência continua a diminuir, porém de forma menos acelerada. No caso em que o valor em *y*, de *a*, foi fixado em 4,00 m e também em 5,00 m, notou-se duas tendências distintas de variação dessa frequência em função dos comprimentos. O ponto de mudança para esse comportamento está entre uma razão de 2,00 e 2,25 entre esses comprimentos. Além disso, o motivo para essa nova tendência surgir é a mudança no formato dos modos de vibração das cascas, que, para uma mesma tendência, obedecem aos mesmos padrões, de acordo com a Figura 4.3, Figura 4.4 e a Figura 4.5.

A Figura 4.3 denota que os dois primeiros modos de vibração para as cascas com comprimento em *y* iguais a 6,00 metros seguem um mesmo padrão: uma semionda para o primeiro modo e duas semiondas para o segundo. Já para *a*=4,00 m e *a*=5,00 m, nota-se, na Figura 4.4 e na Figura 4.5, o mesmo padrão até que o valor de *b* se torna maior que o dobro de *a*, ou seja, até que a direção do bordo curvo livre seja igual à metade do bordo reto apoiado perpendicular no plano. Quando ela se torna menor, o formato do segundo modo de vibração muda: ele passa a ter apenas uma semionda, semelhante ao primeiro modo. Não foi possível obter cascas de *a*=6,00 m com *b/a* > 2, pois, para isso, seria necessário um valor maior ou igual a 12,00 m para *b*, o que implica mais de 1000 nós de 0,25 m na casca analisada. O *software* utilizado, na versão estudantil, não permite o processamento de elementos com um valor superior a esse de nós. No entanto, presume-se que, à medida que *b/a* se aproxime ou ultrapasse o valor de 2, o segundo modo de vibração dessa casca também se tornará igual ao primeiro.

Outro comportamento pertinente que foi observado é o fato de que, para maiores vãos livres, ou seja, valores mais elevados de *a*, a curva de frequência natural se rebaixa, o que indica uma diminuição na rigidez do sistema.

Figura 4.3 - 1º e 2º modos de vibração para as cascas, com a=4m.

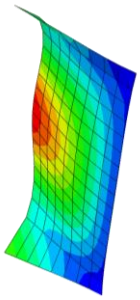
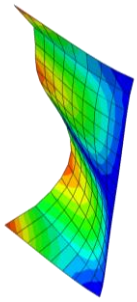
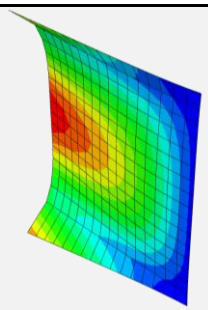
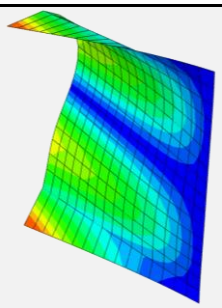
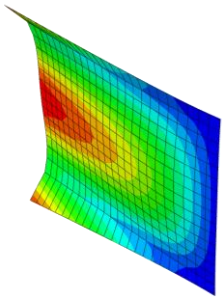
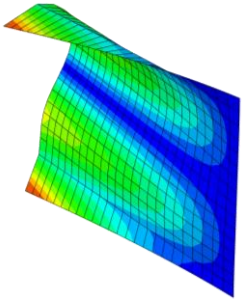
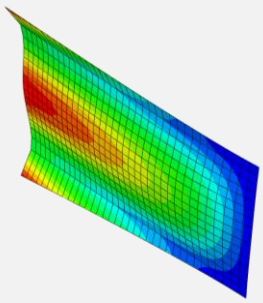
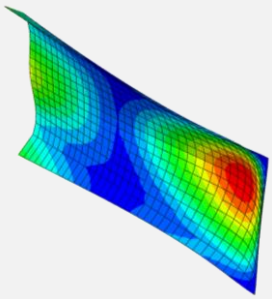
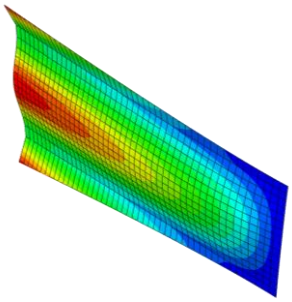
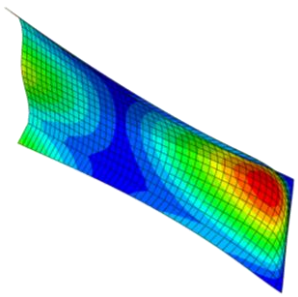
b/a	MODO 1 (Hz)	MODO 2 (Hz)
0,50	 **F1 = 9,0710**	 **F2 = 20,4610**
1,00	 **F1 = 5,8125**	 **F2 = 15,7100**
1,50	 **F1 = 4,6969**	 **F2 = 14,6300**
2,25	 **F1 = 4,1560**	 **F2 = 12,9690**
3,00	 **F1 = 3,9698**	 **F2 = 9,3377**

Figura 4.4 - 1º e 2º modos de vibração para as cascas, com a=5m.

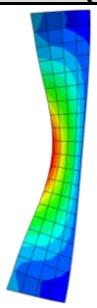
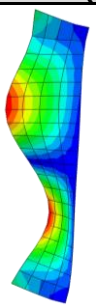
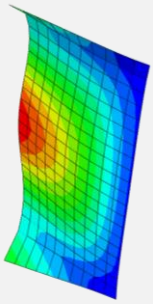
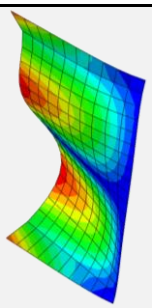
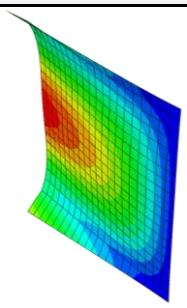
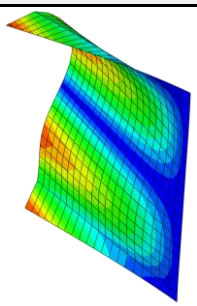
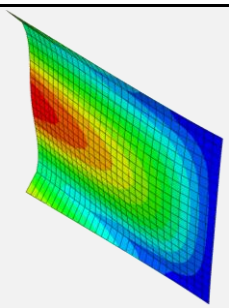
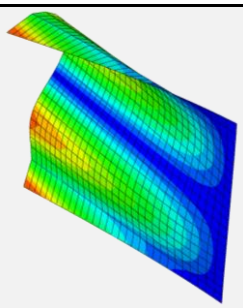
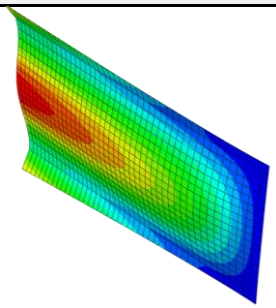
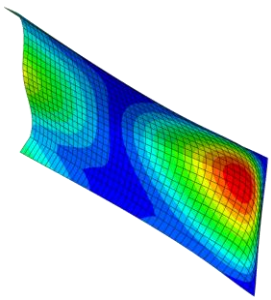
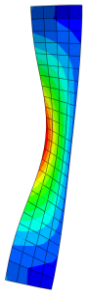
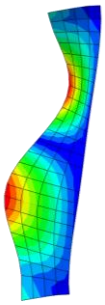
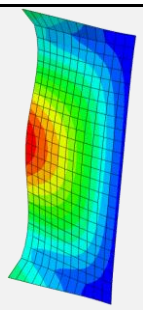
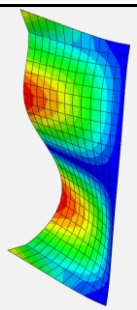
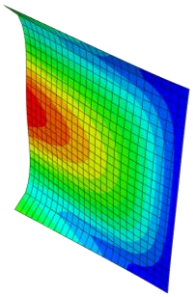
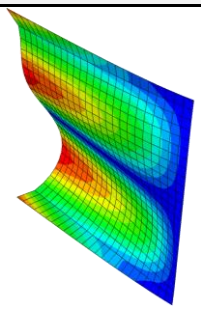
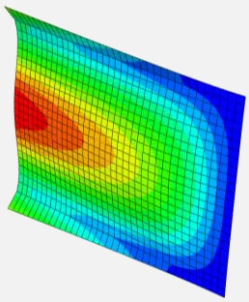
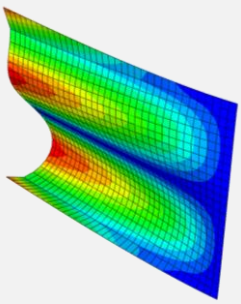
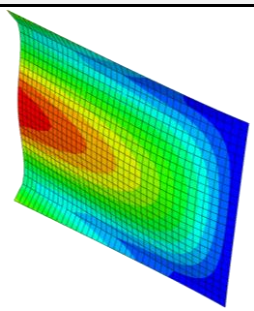
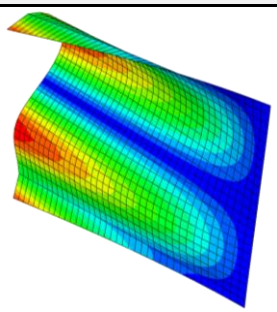
b/a	MODO 1 (Hz)	MODO 2 (Hz)
0,20	 F1 = 8,2459	 F2 = 19,5400
0,50	 F1 = 6,2562	 F2 = 7489,60
1,00	 F1 = 3,8638	 F2 = 10,6750
1,50	 F1 = 3,1173	 F2 = 10,0180
2,25	 F1 = 2,7659	 F2 = 8,3914

Figura 4.5 - 1º e 2º modos de vibração para as cascas, com a=6m.

b/a	MODO 1 (Hz)	MODO 2 (Hz)
0,17	 F1 = 6,4374	 F2 = 15,2020
0,50	 F1 = 4,5603	 F2 = 9,8737
1,00	 F1 = 2,7399	 F2 = 7,6543
1,50	 F1 = 2,2054	 F2 = 7,2063
1,58	 F1 = 2,1594	 F2 = 7,1709

4.3 RESPOSTA NO TEMPO EM VIBRAÇÃO LIVRE AMORTECIDA

Nesta seção, serão expostos e discutidos os resultados de resposta no tempo em vibração livre amortecida para cascas de comprimento a iguais a quatro, cinco e seis metros, respectivamente na Figura 4.7 à Figura 4.15, assim como na seção anterior. Os deslocamentos em *x*, *y* e *z* são nomeados U1, U2 e U3. Os nós centrais da extremidade do bordo livre foram escolhidos como domínio de análise, pois percebe-se pelos modos de vibração que essa é a região com maior magnitude de deslocamento, para todas as cascas. Para início da vibração livre, é necessário impor sobre a casca um pulso de carga, de magnitude unitária, que é removido até um processamento de 0,09999 segundos, de modo a permitir que a estrutura vibre ao longo de determinado período até o equilíbrio, conforme a Figura 4.6. O deslocamento restante se deve ao peso próprio da casca e não a forças externas.

Figura 4.6 – Pulso de carga unitária.

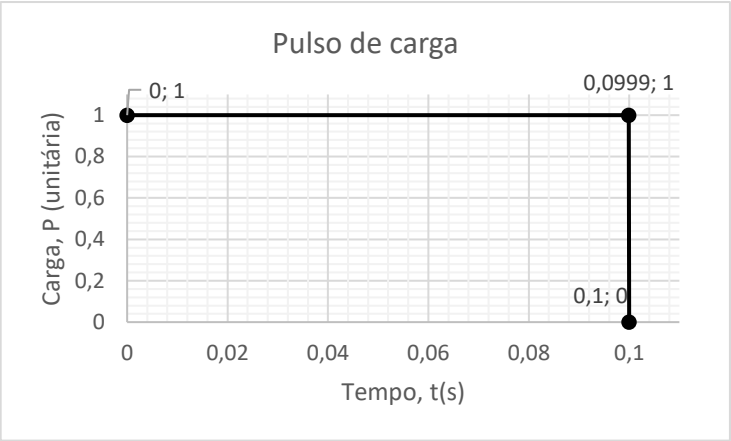


Figura 4.7 - Resposta no tempo em x, para casca com a=4 m.

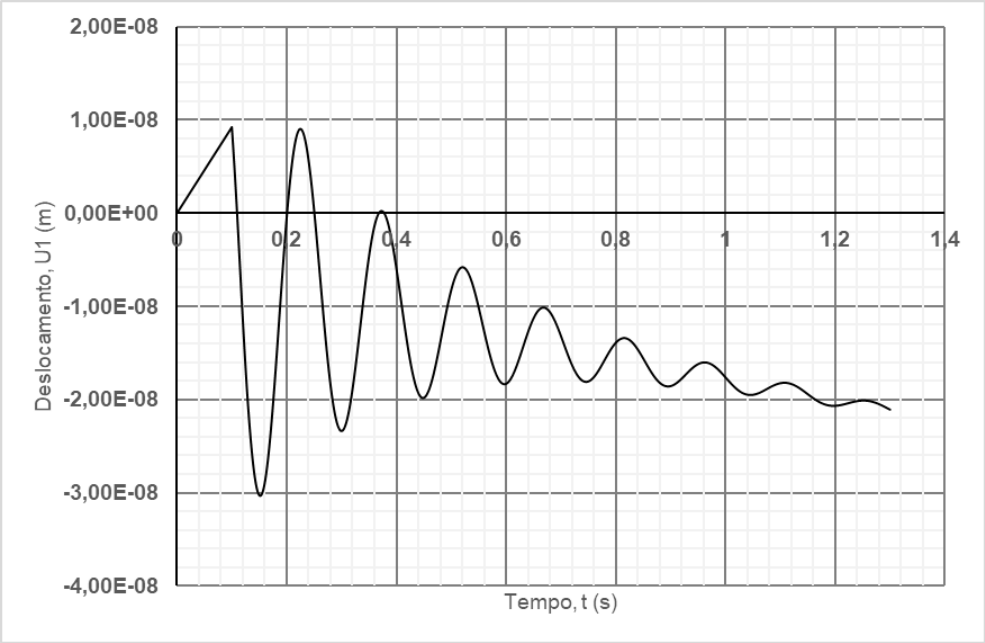


Figura 4.8 - Resposta no tempo em y, para casca com a=4 m.

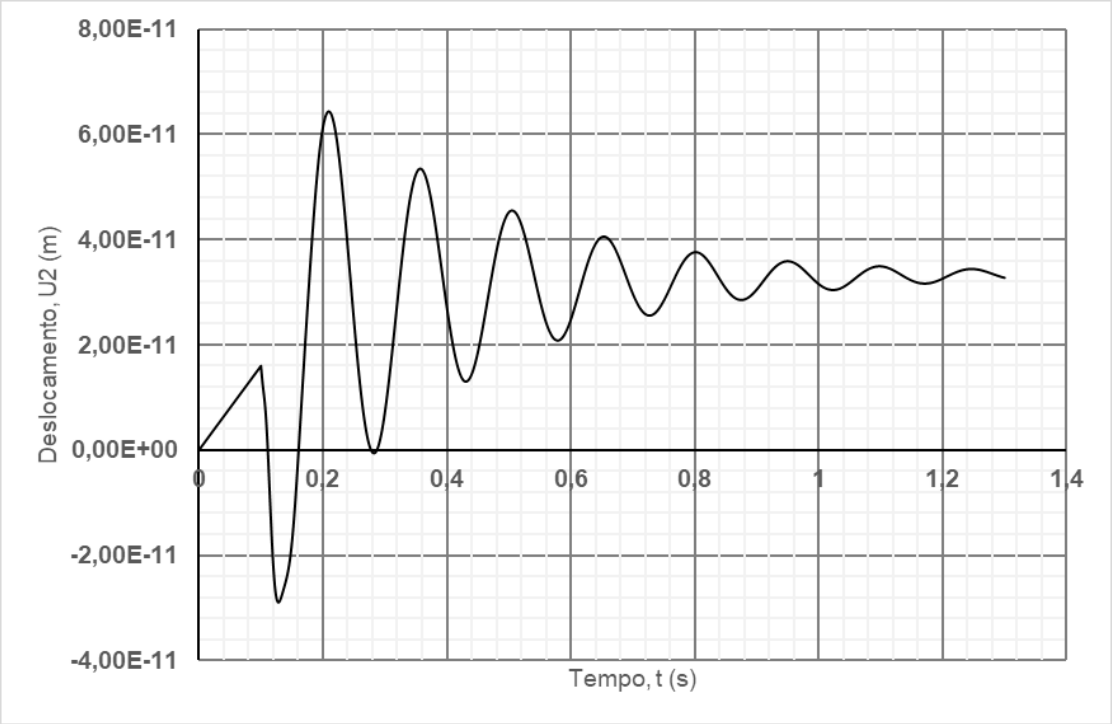


Figura 4.9 - Resposta no tempo em z, para casca com a=4 m.

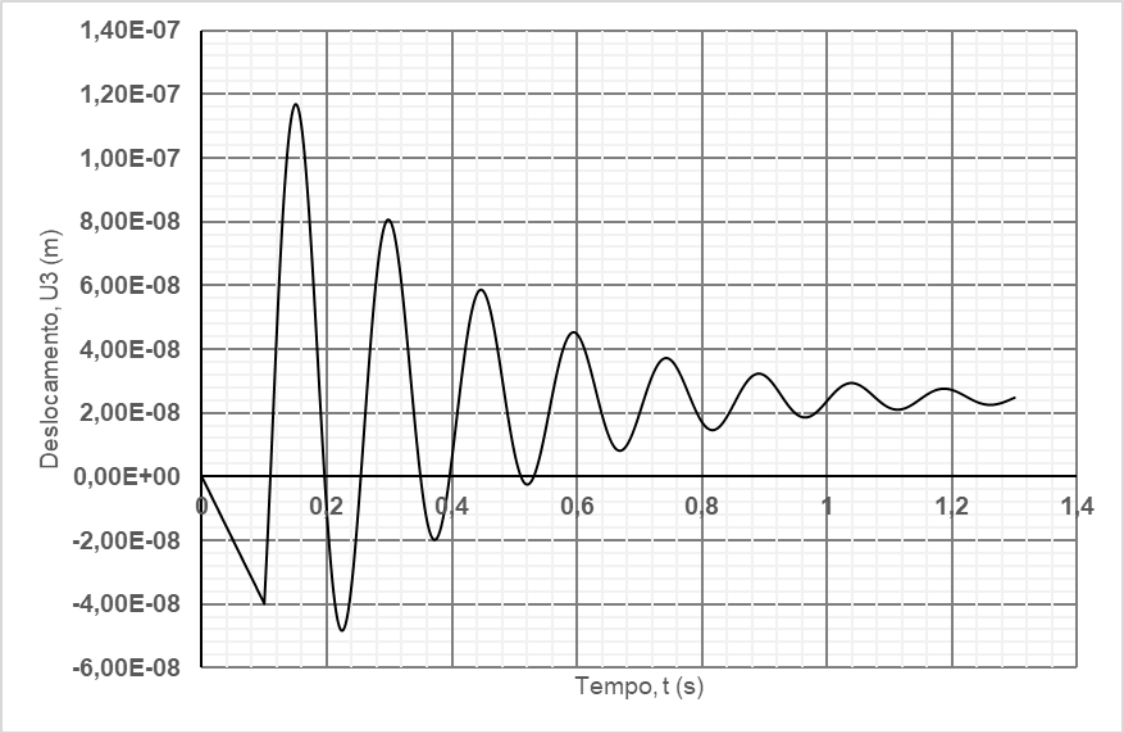


Figura 4.10 - Resposta no tempo em x, para casca com a=5 m.

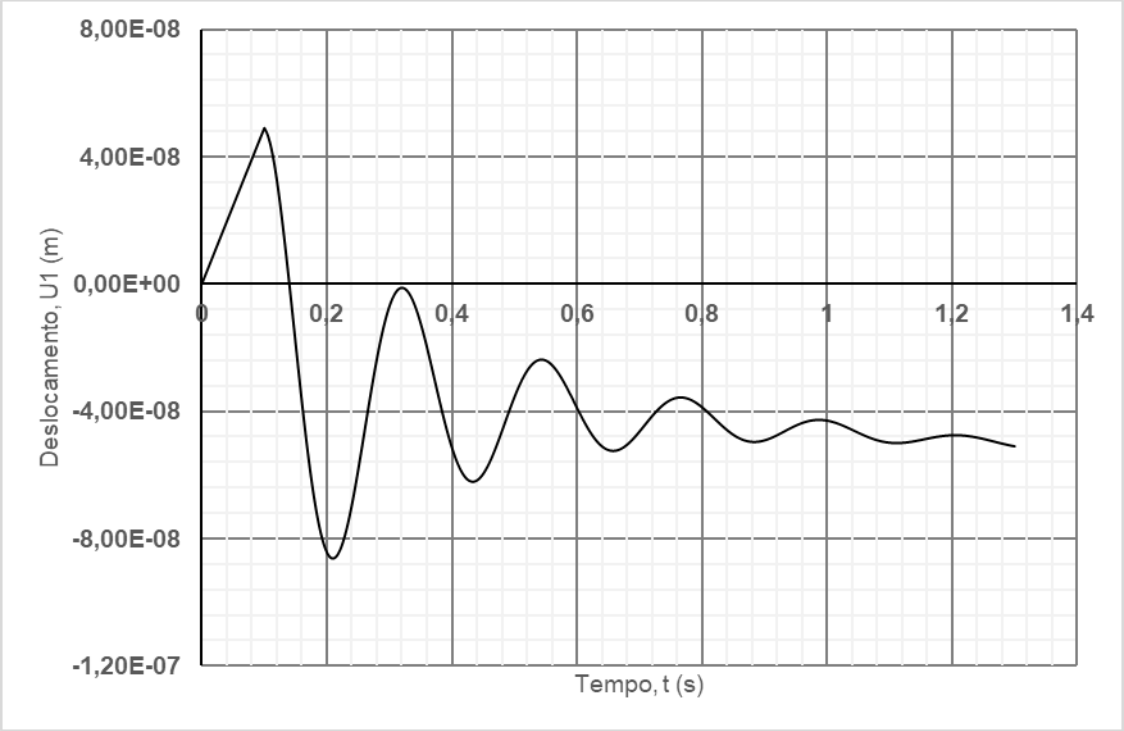


Figura 4.11 - Resposta no tempo em y, para casca com a=5 m.

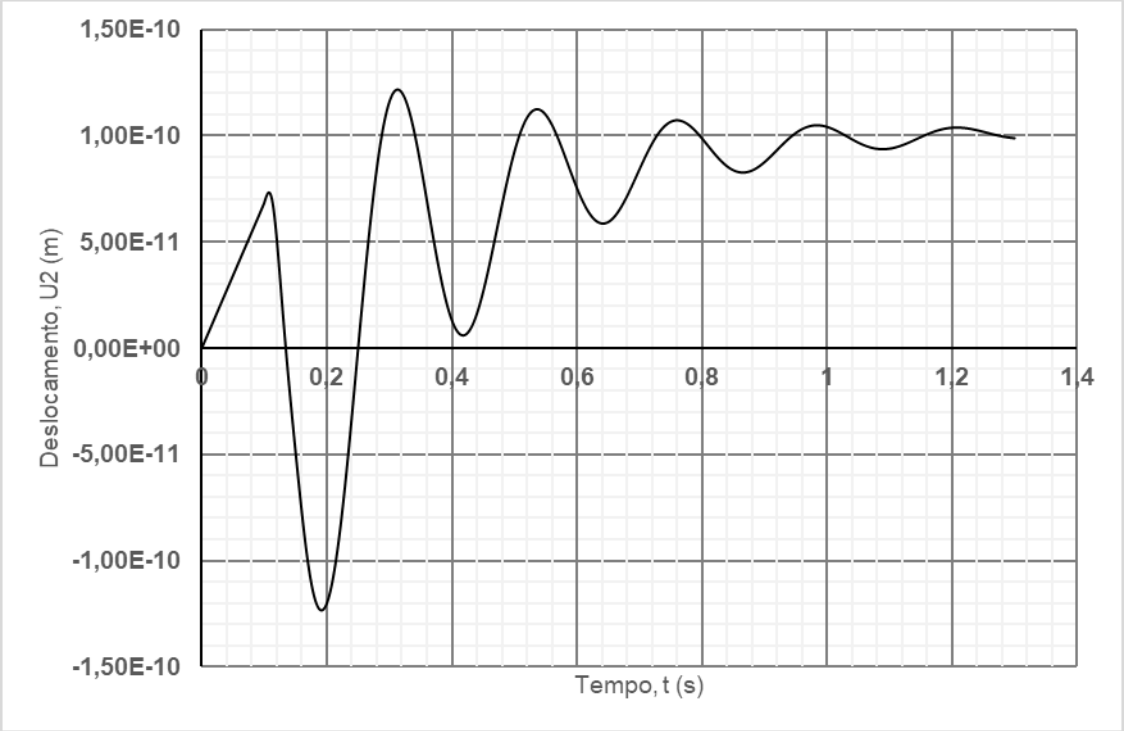


Figura 4.12 - Resposta no tempo em z, para casca com a=5 m.

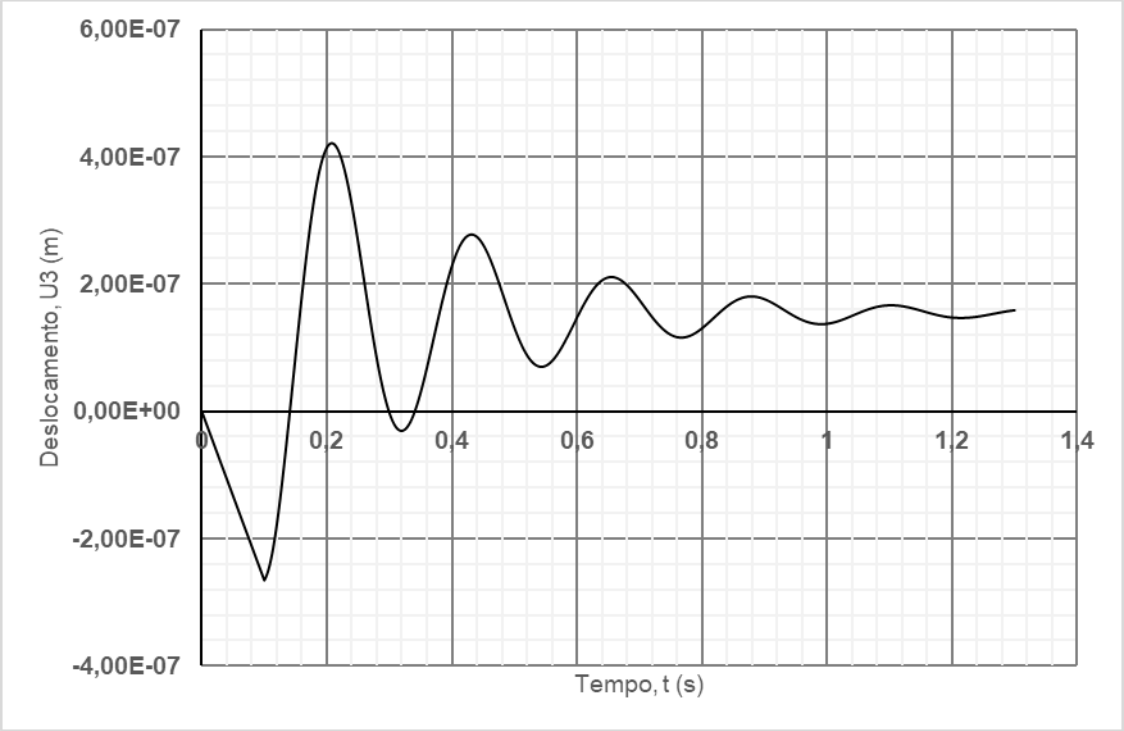


Figura 4.13 - Resposta no tempo em x, para casca com a=6 m.

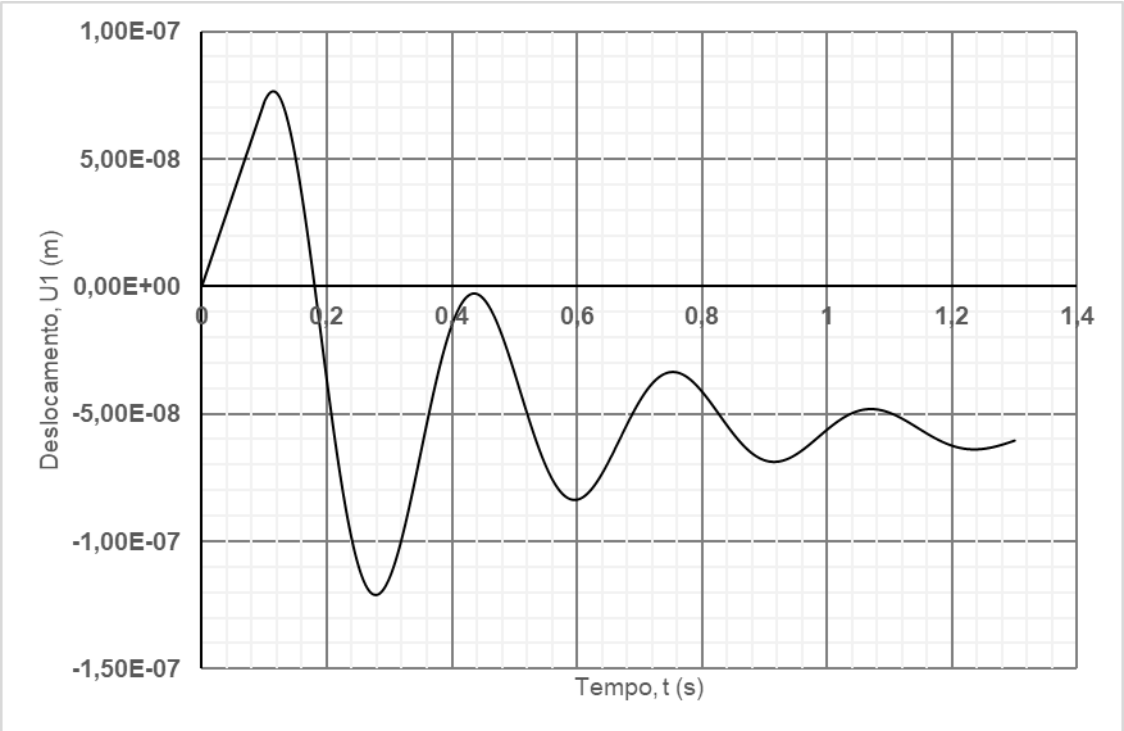


Figura 4.14 - Resposta no tempo em y, para casca com a=6 m.

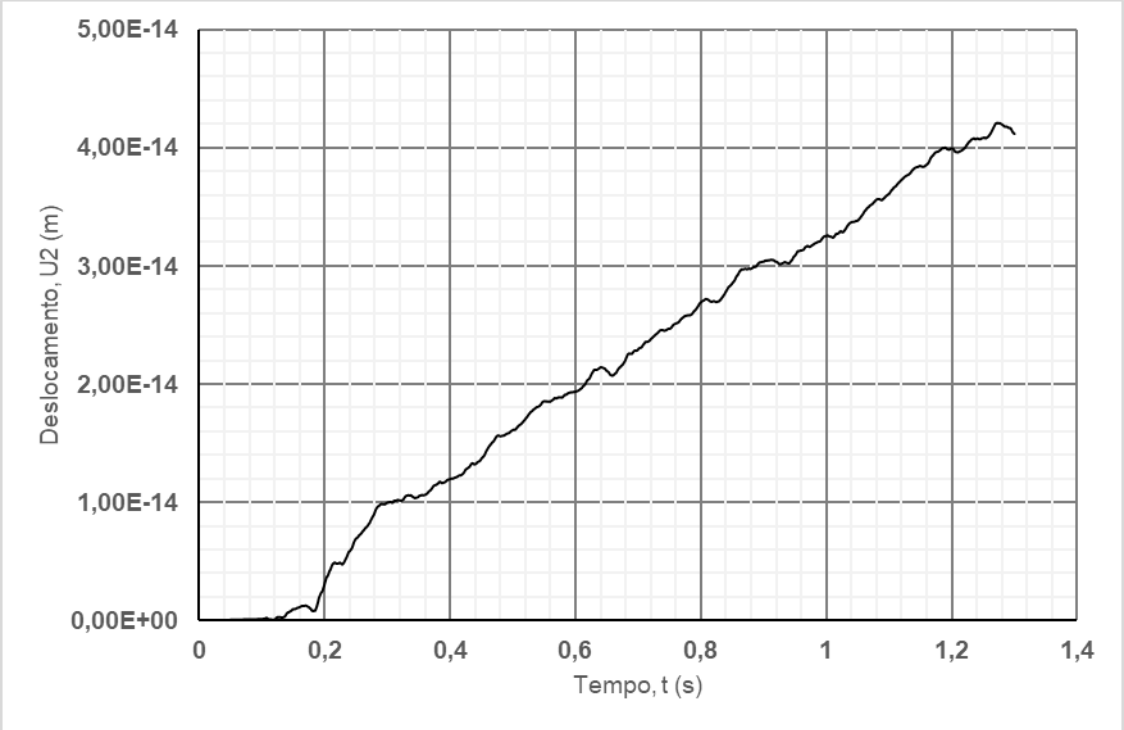
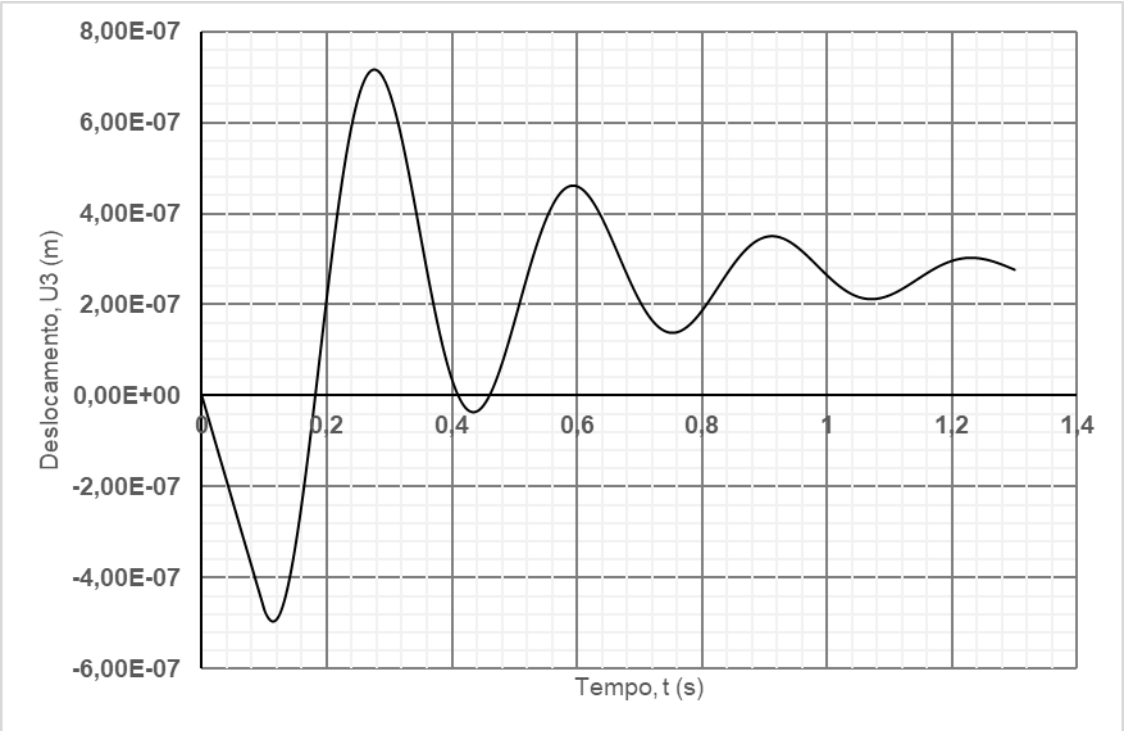


Figura 4.15 - Resposta no tempo em z, para casca com a=6 m.



As respostas no tempo foram obtidas de modo que a vibração das cascas fosse visualizada graficamente até um tempo final de 1,3 segundos. Nota-se que os pontos deslocados não retornam à sua posição original, isto é, o deslocamento converge para um valor diferente de zero, denominado deslocamento estático, devido ao peso próprio das cascas em análise.

Vários testes foram feitos com diferentes perturbações e incrementos de tempo para o processamento do problema no *ABAQUS*®. No entanto, houve grande dificuldade de se obter resultados que denotassem a dissipação da energia mecânica aplicada pela perturbação por meio de vibrações amortecidas sofridas pelas cascas. Isso ocorreu devido à elevada não-linearidade da análise dinâmica de cascas conoidais. Altas perturbações exigem menores incrementos de tempo, que, por conseguinte, demandarão maior tempo de processamento do problema pelo *software*. Já perturbações mais baixas resultam em respostas no tempo nas quais o deslocamento converge pra seu modo estático com poucas inflexões, pois sua dissipação é muito rápida e a vibração é quase interrompida instantaneamente após a casca ser excitada. Também foram variados os valores do fator de amortecimento proporcional à rigidez, conhecido como β, que é, segundo Moreira (2019), um coeficiente de Rayleigh, criador do modelo de amortecimento viscoso. Assim, a Figura 4.7 à Figura 4.15. demonstram de forma mais clara a dissipação de energia mecânica ocorrida nas cascas com as geometrias citadas.

Nota-se, primeiramente, que os deslocamentos na direção *y*, que está travada por apoios simples em dois bordos, é a menor, que varia entre as ordens de 10^{-10} e 10^{-14} metros. Além disso, o comportamento da resposta no tempo nessa direção para a casca com vão livre de 6,00 metros não foi compatível com o das outras cascas devido ao fato de ser muito pequeno, e dada a não linearidade do problema, há dificuldade de convergência de resultados nesse caso.

Para as três cascas, foram aplicadas perturbações em área, na ordem de 0,01 N/m². A vibração foi amortecida, com β na ordem de 0,001.

Além disso, percebe-se, pela análise do deslocamento U3, que, quanto maior a dimensão do bordo livre da casca, maior deverá ser a perturbação para se visualizar a dissipação da energia mecânica aplicada por ela na estrutura. Isso se dá de forma que o número de semiondas na resposta no tempo será suficiente para se realizar análises com mais acurácia do comportamento do conoide. É evidente que, quanto maior for o tamanho da casca, ela deve sofrer excitações de magnitudes mais elevadas para sofrer vibrações significativas.

Ressalta-se que o comportamento do deslocamento em *x* se assemelha ao deslocamento em *z*. O deslocamento U1 é restrito por apenas um apoio simples, e livre no bordo oposto. Já U3 é irrestrito em grande parte da casca, com exceção dos alinhamentos em que a casca se apoia em suas extremidades retas. Por isso, como esperado, U3 tende a ser superior a U1.

5. CONCLUSÃO

Neste capítulo as conclusões e considerações finais serão discorridas, assim como uma breve retomada sobre o problema.

As cascas conoidais possuem elevada complexidade geométrica, inclusive a análise do seu comportamento dinâmico, na obtenção de resultados satisfatórios, costuma demandar uma abordagem não linear. Isso implica a utilização de métodos mais intrincados e a necessidade de um tratamento computacional. No problema em estudo, com o auxílio do *software ABAQUS®*, todos os conoides descritos foram processados de modo a se obter os resultados relatados. Os valores de frequência natural e as formas dos modos de vibração demandam menos esforço computacional e, por conseguinte, são encontrados mais rapidamente. Para se encontrar resultados de respostas no tempo em vibração livre amortecida que podem ser úteis em uma análise mais profunda do comportamento dinâmico da estrutura em estudo, dada a não linearidade do problema, são necessários um tempo de processamento muito elevado e uma série de tentativas pela variação de alguns parâmetros, como a magnitude da perturbação e o fator de amortecimento de Rayleigh.

Assim, foram expostos neste trabalho gráficos que mostram o comportamento da frequência natural de diversas cascas em função da razão b/a de cada uma. Ademais, para três conoides escolhidos, os gráficos de resposta no tempo para os deslocamentos nas três direções cartesianas de cada estrutura também foram obtidos e denotados.

No tocante à frequência natural e aos modos de vibração, percebeu-se que, quanto maior for o lado apoiado que é perpendicular ao bordo curvo e este for menor, a frequência natural decresce. Assim, quando se eleva o comprimento *b*, que está somente apoiado, necessita-se de perturbações menores para excitar a estrutura. Isso evidencia uma diminuição na estabilidade do sistema. Além disso, notou-se que, quanto maior o comprimento do vão livre, menores são as frequências naturais, o que também demonstra uma tendência de diminuição na rigidez da casca em função desse parâmetro.

Já os modos de vibração foram compatíveis ao comportamento das frequências naturais, pois, quando o formato do modo se alterava, a tendência das curvas da razão b/a pela frequência natural também mudava. As cascas com vão livre de 4,00 e 5,00 metros possuíam duas semiondas no seu segundo modo de vibração enquanto *b/a* era menor que 2,00. A partir desse valor, o formato do segundo modo de vibração se tornou igual ao do primeiro modo, que é com apenas uma semionda. Isso ocorreu à medida que a dimensão da borda simplesmente apoiada perpendicular ao curvo foi acrescida.

Finalmente, as respostas no tempo para vibração livre amortecida mostraram que, para que a estrutura apresente vibrações suficientes para que a análise dessas respostas forneça informações pertinentes, deve-se aplicar perturbações de alta magnitude quando as dimensões da casca também forem elevadas. Isso inclui a altura do bordo curvo e o comprimento do vão livre. Para a casca com vão livre igual a 6,00 m, foram necessárias perturbações maiores para se obter resultados satisfatórios que para as outras cascas, ainda que na mesma ordem de grandeza que as utilizadas nas outras cascas. No trabalho de Moreira (2019), a influência da altura também é mencionada nesse empecilho. O processamento dos problemas também evidenciou o grau de complexidade que eles possuem, pois foram frequentes os casos em que o software tinha dificuldade de encontrar convergência na solução desses problemas.

De modo geral, a variação dos comprimentos longitudinais irá influenciar no formato dos modos de vibração, na magnitude da frequência natural e da perturbação necessária para o sistema apresentar vibrações duradouras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLINA, C.C.; PALECHOR, E. U. L.; VÁSQUEZ, M. P. R.; Vibrações: as frequências naturais estimada e experimental de uma estrutura. *In*: Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria. **Blucher Mathematical Proceedings**, São Paulo: Blucher, 2015. **v.1, n.1** p. 186-194. Disponível em: <http://pdf.blucher.com.br.s3-sa-east-1.amazonaws.com/mathematicalproceedings/cnmai2014/0038.pdf>. Acesso em: 01 out. 2021.

CAVALCANTI, L. V. **Análise da Estabilidade e Vibrações de Cascas Conoidais Abatidas.** 2014. 154 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

DEBONGNIE, J. F. Physical Interpretation and generalizations of Marguerre's shallow shell theory. 13 p. **Computers e Structures**, Great Britain: Pergamon Press, 1979. vl.17, p. 387-399.

ENGEL, H. **Sistemas de estructuras.** 1 ed. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 2001. 334 p.

FREITAS, J. P. X. **Análise estática estocástica de painéis cilíndricos via método dos elementos finitos.** 2020. 58 f. Monografia (Bacharelado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020.

GHOSH, B. BANDYOPADHYAY, J. N. A. Approximate bending analysis of conoidal shells using the Galerkin method. 36 p. **Computers e Structures**, Great Britain: Pergamon Press, 1990. n. 5, p. 801-805.

JÚNIOR, L. F. E. **Análise das Vibrações Livres e da Instabilidade Paramétrica de Cascas Cilíndricas Circunferêncialmente Enrijecidas em um meio Fluido.** 1988. 271p. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro

LETCH, A. **Capela Bosjes / Steyn Studio.** 2020. ArchDaily Brasil. Disponível em: <https://www.archdaily.com.br/br/877207/capela-bosjes-steyn-studio>. Acesso em: 03 abr. 2022.

MEIRELLES, C. R. M.; DINIS, H.; MEDRANO, R. H. A aplicação da modelagem em elementos finitos na concepção das cascas de concreto armado: The application of finite element modeling in the design of reinforced concrete shell. *In*: 9º Sociedad Iberoamericana de Gráfica Digital (SIGraDI 9), 2009, São Paulo. **CG Computação Gráfica**, São Paulo: 2009. 3 p. Disponível em: <http://papers.cumincad.org/data/works/att/sigradi2009_857.content.pdf>. Acesso em: 01 out. 2021.

MEIRELLES, C. R. M.; MEDRANO, R. H. Processo construtivo e expressão das cascas em concreto armado no brutalismo. *In*: X Seminário Docomomo Brasil, out. de 2013, Curitiba. **Arquitetura Moderna e Internacional: Conexões brutalistas 1955-75**, Curtiba: 2013. 11p. Disponível em: <https://docomomo.org.br/wp-content/uploads/2016/08/EST_04.pdf>. Acesso em: 28 set. 2021.

MORAIS, D. L. A. **Análise estática não-linear de cascas conoidais.** 2017. 114 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

MOREIRA, C. L. R. **Contribuições sobre as oscilações não lineares de cascas conoidais excitadas transversalmente.** 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

SIMULIA. **Abaqus Analysis User's Guide.** Abaqus 2016. Disponível em: <http://130.149.89.49:2080/v2016/books/usb/default.htm?startat=pt06.html#usbechapter>. Acesso em: 01 abr. 2022.

SOUZA, M. H. **Clássicos da Arquitetura: Igreja da Pampulha / Oscar Niemeyer**. 2012. ArchDaily Brasil. Disponível em: <https://www.archdaily.com.br/br/01-83469/classicos-da-arquitetura-igreja-da-pampulha-slash-oscar-niemeyer>. Acesso em: 03 abr. 2022.

THOMSON, W. T. & DAHLEH, M. D. **Theory of Vibrations with Applications.** 5th ed., Printice Hall, New Jersey, 1997. 534pp.

VASCONCELOS, R. P. **Dinâmica de estruturas.** Curso de dinâmica estrutural do Mestrado em Engenharia Civil. 2003. Notas de aula. Intituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janiero.

VIZOTTO, I. **Geração computacional de formas livres de estruturas em casca.** 1993. 1v. (paginação irregular). Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecanica, Campinas, [SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/264277>. Acesso em: 18 set. 2021.

APÊNDICE A

Algoritmo de geração de dados de entrada, código na linguagem GNU Octave.

```
a = input("Insira o valor do comprimento de a");
b = input("Insira o valor do comprimento de b");
dl = input("Insira o tamanho do elemento");
Hl = 0;
Hh = 1.4;
na = a / dl + 1;
nb = b / dl + 1;
N = na * nb;

n = 1;
x = 0;
y = - a / 2;
z = 0;
k = 0;
S = zeros(N, 4);
aux = zeros(1,nb);

for i = 1:nb
  aux(i) = na*i + 1;
endfor

while n <= N
  S(n, 2) = x;
  S(n, 3) = y;
  S(n, 4) = -Hh*(1-((1-Hl/Hh)*x/b))*(1-((y^2)/((a/2)^2)))^(1/2);
  for j = 1:nb
   if n == aux(1,j)
     x = x + dl;
   endif
  endfor
  S(n, 2) = x;
  if y != (a / 2)
   y = y + dl;
  else
   y = - (a / 2);
  endif
  S(n, 1) = n;
```

```
  n = n + 1;
endwhile

#coordenadas
for i = 1:N
  printf("%d,%.3f,%.3f,%f\n", S(i,1), S(i, 2), S(i, 3), S(i, 4));
endfor

#linhay1
printf("linha y1\n");
for i = 1:na
  printf("%d,", i);
endfor

printf("\n");

#linhay2
printf("linha y2\n");
for i = 1:(na)
  printf("%d,", N - (na - i));
endfor

printf("\n");

#element
printf("element\n");
printf("1,1,2,%d,%d\nlinha x1\n1,", na + 2, na + 1);

#linhax1
for i = 1:nb-1
  printf("%d,", aux(1,i));
endfor

printf("\n");

#elgen
printf("elgen\n1,%d,1,1,%d,%d,%d", a / dl, b / dl, na, a / dl);

printf("\n");

#linhax2
printf("linha x2\n");
for i = 1:nb
```

```
  printf("%d,", aux(1,i) - 1);
endfor

printf("FIM \n");
```