DANILO BORGES CAVALCANTI

FORMULAÇÃO HÍBRIDA EM OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA PARA OBTENÇÃO DE CAMINHOS DE FORÇA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Monografia apresentada no Trabalho de Conclusão de Curso 2 do Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás.

Aprovado em: 02 / 12 / 2019.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida– Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Daniel Lima de Araújo – Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Janes Cleiton Alves de Oliveira– Universidade Federal de Goiás

Atesto que as revisões solicitadas foram feitas:

Profa. Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida

Em: 04 / 12 / 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

FORMULAÇÃO HÍBRIDA EM OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA PARA OBTENÇÃO DE CAMINHOS DE FORÇA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

DANILO BORGES CAVALCANTI

GOIÂNIA
2019

DANILO BORGES CAVALCANTI

FORMULAÇÃO HÍBRIDA EM OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA PARA OBTENÇÃO DE CAMINHOS DE FORÇA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Monografia apresentada na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II do Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás.

Orientadora: Dra. Sylvia Regina Mesquita de Almeida

GOIÂNIA
2019

RESUMO

A aplicação de modelos de Escoras e Tirantes em estruturas de concreto armado possui como principal dificuldade de aplicação a etapa de concepção do modelo. Deste modo, como forma de se realizar uma geração automática de modelos de escoras e tirantes, tem-se utilizado abordagens em otimização de topologia, com destaque o Método da Densidade (MD) e o Método da Estrutura Base (MEB). Contudo, ambos apresentam desvantagens quando utilizados com esta finalidade, haja vista que o MD fornece soluções que não são práticas do ponto de vista construtivo e o MEB fornece soluções com caminhos de força limitados à estrutura base adotada. Este trabalho, portanto, estuda e implementa uma abordagem híbrida de otimização de topologia para obtenção de caminhos de força em estruturas de concreto que possam ser utilizados em modelos de escoras e tirantes. No primeiro método implementado, estuda-se a influência do posicionamento da armadura nos caminhos de força no concreto, onde elementos de barra pré-definidos representando as barras de aço são adicionados ao tradicional método de densidade, este foi denominado como Método da Densidade Reforçado (MDR). O segundo modelo implementado é baseado na abordagem proposta por Gaynor, Guest e Moen (2013), na qual se utiliza uma malha de elementos de barra conectada à malha de elementos contínuos e tanto as densidades dos elementos contínuos quanto as áreas das barras integram o vetor das variáveis de projeto em um único processo de otimização. Os resultados obtidos pelo MDR mostram que a presença de barras possui influência na determinação dos caminhos de força. Os resultados obtidos pelo MH evidenciam a aplicabilidade da formulação proposta e também a necessidade de adaptação do processo de filtragem para uso deste método.

Palavras-chave: Otimização de topologia. Escoras e tirantes. Métodos híbridos.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Análise de uma viga-parede de dimensões 1200x800 mm. (a) Tensões principais. (b) Modelo de escoras e tirantes correspondente 21
Figura 2.1 - Exemplo da aplicação do coeficiente de penalização (p): (a) problema; (b) domínio estendido; (c) solução para $p = 1$; (d) solução para $p = 2$; (e) solução para $p = 3$; (f) solução para $p = 4$. 28
Figura 2.2 - Instabilidade numérica do tipo tabuleiro de xadrez. 30
Figura 2.2 – Representação esquemática do fator de peso do filtro de sensibilidade. 31
Figura 2.3 - Exemplo de aplicação do Método da Estrutura Base. (a) Domínio de projeto; (b) Grade de nós; (c) Estrutura base; (d) Solução do MEB sem aplicação do filtro no final; (e) Topologia extraída com filtro aplicado no valor de 0.056549; (f) Topologia extraída com filtro aplicado no valor de 0.15 34
Figura 3.1 - Diagramas tensão-deformação para o concreto e para o aço para MDR 38
Figura 3.2 - Fluxograma MD tradicional 38
Figura 3.3 - Fluxograma de implementação do Método da Densidade Reforçado. 39
Figura 3.4 - Montagem da matriz de rigidez da estrutura. 40
Figura 3.5 - Malha híbrida: estrutura base gerada a partir de uma grade de 2x2 e conectividade 2, e malha de elementos de densidade 8x8 42
Figura 3.6 - Renumeração dos nós que definem a estrutura base considerando a malha com elementos de densidade. (a) Nós originais da geração da estrutura base. (b) Nós que definem as barras após a renumeração. 43
Figura 3.7 – Diagramas tensão-deformação para o concreto e para o aço para MH 43
Figura 3.8 - Sistema de eixos adotado e representação gráfica do cálculo de tensões principais através do Círculo de Mohr 46
Figura 3.9 - Variação da função objetivo com a aplicação do filtro. 49
Figura 3.10 - Fluxograma do método da bissecção aplicado no fim do processo de otimização após k iterações, com a técnica do Filtro Máximo (adaptado pelo autor). (SANDERS; RAMOS JR.; PAULINO, 2017) 49
Figura 4.1 – Viga com dimensões de 2L x L 51
Figura 4.2 – Solução pelos métodos clássicos: (a) Grade de nós para geração da estrutura base; (b) Estrutura base; (c) Solução pelo MEB; (d) Solução pelo MD 52

Figura 4.3 – Solução topológica pelo MEB, com utilização de uma estrutura base gerada com uma grade de nós de 2x2 e grau de conectividade 1. 52
Figura 4.4 - Soluções obtidas pelo MD clássico com: (a) Modelo de material linear; (b) Modelo de material bilinear 53
Figura 4.5 – Aplicação do MDR: (a) Configuração de reforço 01; (b) Solução obtida com uso da configuração de reforço 01; (c) Configuração de reforço 02; (d) Solução obtida com uso da configuração de reforço 02 54
Figura 4.6 - Exemplo 01: (a) Problema estrutural (b) Domínio de projeto; (c) Malha híbrida 56
Figura 4.7 - Solução topológica utilizada para validação do Exemplo 01.....56
Figura 4.8 - Exemplo 01 - Soluções topológicas pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico. (b) Modelo de material ortotrópico.....57
Figura 4.9 – Influência do valor de Amáx na solução topológica final: (a) Solução final sem aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 0,002; (b) Solução final após aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 0,002; (c) Solução final sem aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 2; (d) Solução final após aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 2. 58
Figura 4.10 - Exemplo 02: (a) Domínio de projeto; (b) Malha híbrida 60
Figura 4.11 - Exemplo 02 - Soluções topológicas pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo. 61
Figura 4.12 - Exemplo 03: (a) Domínio de projeto; (b) Malha híbrida 62
Figura 4.13 - Exemplo 03 - Soluções topológicas pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo. 62
Figura 4.14 - Exemplo 04: (a) Domínio de projeto para viga parede maciça; (b) Malha híbrida para viga parede maciça; (c) Domínio de projeto para viga parede com presença de furo e recorte; (d) Malha híbrida para viga parede com presença de furo e recorte 64
Figura 4.15 - Exemplo 04 - Soluções topológicas da viga parede maciça pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico

anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo. 65
Figura 4.16 - Exemplo 04 - Soluções topológicas da viga parede com furo e recorte pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo. 66
Figura 4.17 - Exemplo 04 - Soluções topológicas da viga parede com furo e recorte pelo método híbrido com modelos de material isotrópico e ortotrópico para diferentes valores de filtro 67

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Distribuição de material entre os elementos tracionados e comprimidos..... 54
Tabela 4.2 - Parâmetros utilizados no algoritmo para aplicação do Método Híbrido..... 55
Tabela 4.3 – Distribuição de material entre os elementos contínuos e os elementos de barra..... 60

LISTA DE ABREVIATURAS

FO	- Função Objetivo
MD	- Método da Densidade
MDR	- Método da Densidade Reforçado
MEB	- Método da Estrutura Base
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MET	- Modelos de Escoras e Tirantes
MH	- Método Híbrido
OC	- Optimality Criteria
OT	- Otimização de Topologia
SIMP	– Solid Isotropic Material with Penalization

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Romanos:

A	- Vetor das áreas das seções transversais dos elementos
A_i	- Área da seção transversal do elemento j
A_{min}	- Área mínima admissível para as barras;
A_{max}	- Área máxima admissível para as barras;
An	- Vetor das áreas das seções transversais normalizadas
An_i	- Área normalizada do elemento i
An_{min}	- Limite inferior normalizado das áreas das barras
c	- Flexibilidade média da estrutura
C^k	- flexibilidade média na iteração k;
C^{k-1}	- flexibilidade média na iteração k-1;
C_{Tol}	- parâmetro de tolerância para variação da flexibilidade média;
$\mathbf{D_s}$	- Matriz constitutiva elástica do material sólido
$\mathbf{D_{el}}$	- Matriz constitutiva elástica do elemento
E	- Módulo de Elasticidade;
E_1	- Módulo de Elasticidade na direção principal 1;
E_2	- Módulo de Elasticidade na direção principal 2;
f	- Funcional genérico
fr	- Funcional regularizado
F	- Vetor de forças nodais
$\mathbf{F}_{Top}$	- Vetor dos forças nodais associado à topologia extraída
Hj	- Fator de convolução
K	- Matriz de rigidez da estrutura base;
$\mathbf{K}s_{el}$	- Matriz de rigidez do material sólido
$\mathbf{K}_{el}$	- Matriz de rigidez do elemento de estado plano ou sólido *el*
$\mathbf{K}_i$	- Matriz de rigidez do elemento de barra *i*
$\mathbf{K}_i^0$	- Matriz de rigidez básica para um elemento de barra *i*.
$\mathbf{K}_{Top}$	- Matriz de rigidez associada à topologia extraída
L_i	- Comprimento do elemento de barra *i*

NR - Norma residual de equilíbrio

p - Coeficiente de penalização das densidades intermediárias

$r_{i\,j}$ - Distância do centro do elemento *i* ao centro do elemento *j*

r_{min} - Raio de atuação do filtro

Tol - Tolerância

$\mathbf{U}$ - vetor dos deslocamentos nodais

$\mathbf{U}_i$ - Vetor dos deslocamentos nodais relativo ao elemento *i*

$\mathbf{U}_{Top}$ - Vetor dos deslocamentos nodais associado à topologia extraída

$\mathbf{U}_p$ - Parcela particular do vetor dos deslocamentos nodais

$\mathbf{U}_h$ - Parcela homogênea do vetor dos deslocamentos nodais

$\mathbf{V}$ - Vetor dos volumes dos elementos

$\mathbf{V}_{el}$ - Volume de material relativo ao elemento finito *el*

$\mathbf{V}_{max}$ - Volume máximo final a ser atingido

VC - função de restrição de volume

Símbolos Gregos:

α_f - Valor do filtro

α_f^+ - limite superior do valor de filtro no método da bissecção;

α_f^- - limite inferior do valor de filtro no método da bissecção;

α_f^{eq} - valor do filtro que preserva o equilíbrio da estrutura;

λ - Parâmetro de regularização de Tikhonov

ν - Coeficiente de Poisson

ν_1 - Coeficiente de Poisson na direção principal 1

ν_2 - Coeficiente de Poisson na direção principal 2

Π - Potencial de energia do sistema

Π_R - Potencial de energia regularizado do sistema

θ - Ângulo da orientação do sistema principal de deformações

ρ - Densidade relativa de material

$\boldsymbol{\rho}$ - Vetor com as densidades de cada elemento finito

ρ_{el} - Densidade relativa do elemento finito

ρ_{el}^{min} - Limite inferior da restrição dos valores de densidade admissíveis

ρ_{el}^{max} - Limite superior da restrição dos valores de densidade admissíveis

σ_{el} - Tensão do elemento de estado plano ou sólido *el*

σ_i - Tensão do elemento barra *i*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 21
1.1 OBJETIVOS 23
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO 24
2 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA 25
2.1 MÉTODO DA DENSIDADE 25
2.1.1 Modelo SIMP 27
2.1.2 Análise de sensibilidade 29
2.1.3 Filtro de sensibilidade 30
2.2 MÉTODO DA ESTRUTURA BASE (*GROUND STRUCTURE*) 32
2.2.1 Formulação elástica clássica 32
2.2.2 Identificação de topologias em equilíbrio 35
3 MÉTODOS IMPLEMENTADOS PARA OBTENÇÃO DE CAMINHOS DE FORÇA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO 37
3.1 MÉTODO DA DENSIDADE REFORÇADO 37
3.2 MÉTODO HÍBRIDO 41
3.2.1 Malha híbrida 42
3.2.2 Propriedades dos materiais 43
3.2.3 Modelos de material 44
3.2.1.1 Modelo de material isotrópico 44
3.2.1.2 Modelo de material ortotrópico 44
3.2.4 Formulação implementada 46
3.3 FILTRO MÁXIMO AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO 48
4 RESULTADOS 51
4.1 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS CLÁSSICOS 51
4.2 MÉTODO DA DENSIDADE REFORÇADO 53
4.3 MÉTODO HÍBRIDO 55
4.3.1 Exemplo 01: Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão 55
4.3.2 Exemplo 02: Pilar comprimido 60
4.3.3 Exemplo 03: Consolo 61

4.3.4 Exemplo 04: Viga parede com furo e recorte.....63

5 CONCLUSÕES.....69

REFERÊNCIAS.....71

APÊNDICE A.....73

APÊNDICE B.....79

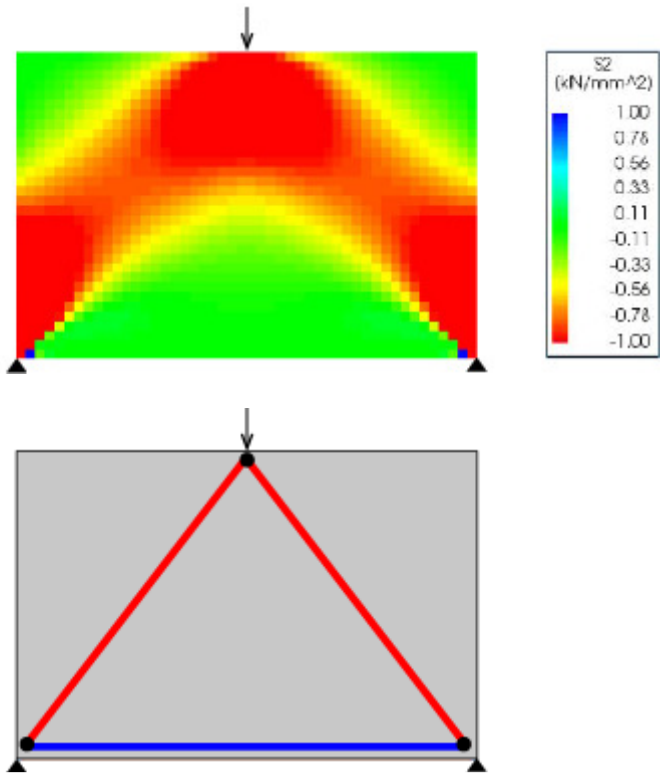
CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Em estruturas de concreto armado que não satisfazem as hipóteses de Bernoulli para o dimensionamento, um caminho alternativo comumente adotado para o dimensionamento é a utilização de Modelos de Escoras e Tirantes (MET), uma evolução da analogia da treliça de Ritter e Mörsch. Tais modelos baseiam-se na utilização de uma treliça idealizada que corresponda ao caminho percorrido pelas forças nessa região. Um dos meios para obtenção do caminho de forças que serve de base para os modelos de escoras e tirantes é a análise do fluxo de tensões no interior da estrutura. No entanto, é válido destacar que nem sempre esse procedimento indica com clareza o caminho das forças. A título de ilustrar esse procedimento, apresentam-se na Figura 1.1 as tensões principais na direção 2 em uma viga parede, obtidas com a utilização do programa DIANA®, em sua versão 10.1, e seu modelo de escoras e tirantes correspondente.

Figura 4.1 – Análise de uma viga-parede de dimensões 1200x800 mm. (a) Tensão principal na direção 2; (b) Modelo de escoras e tirantes correspondente

a.

b.



Fonte: Gerada pelo autor

Há vários outros métodos para indicar o caminho de forças em estruturas de concreto armado, cada qual conduzindo a uma treliça diferente. Todas essas soluções representam um limite inferior da carga de colapso da estrutura contínua de concreto armado. Com os avanços computacionais, toma corpo a busca por processos que automatizem a obtenção do caminho de forças e sua obtenção utilizando de algoritmos de otimização passa a ser um desdobramento natural.

Em um problema de otimização estrutural, busca-se obter a estrutura que apresente o melhor desempenho, o qual pode ser avaliado de forma matemática, através de uma função de um conjunto de variáveis que são relacionadas ao comportamento da estrutura, as variáveis de projeto. O processo de otimização, portanto, tem por finalidade obter o ponto onde essa função atinge seu valor mínimo ou máximo, dentro de uma região do espaço das variáveis de projeto que respeitam as restrições impostas pelo projeto, denominada região viável (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

A otimização de topologia (OT) é um campo da otimização aplicável para a obtenção de leiautes estruturais que consiste na obtenção de uma distribuição ótima de material em uma região do espaço pré-definida, denominada domínio estendido. O trabalho seminal de Bendsoe e Kikuchi (1988) apresentou a técnica de otimização de uma estrutura contínua como meio de obter a forma da estrutura sem a necessidade de utilizar otimização de forma. O desenvolvimento dessa proposta resultou nos atuais métodos baseados na densidade, no qual o problema a ser resolvido é a distribuição de uma densidade relativa em um domínio estendido geralmente discretizado por uma malha de elementos finitos. A fim de se melhorar a distribuição de material, essa malha é mais refinada do que uma malha obtida em um estudo de convergência para realização da análise estrutural.

Outra abordagem bastante difundida para obtenção de soluções topológicas é o Método da Estrutura Base (*Ground Structure Method*), o qual teve origem com os trabalhos propostos por Mitchell (1904)[1] e Maxwell (1890)[2] (*apud* OHSAKI, 2011). Trata-se de uma extensão do processo de otimização de dimensões cujas variáveis de projeto são as áreas das seções

[1] MITCHELL, A. G. M. The limits of economy in frame structures. **Philosophical Magazine** Sect. 6,8(47), p. 589-597, 1904.

[2] MAXWELL, J. C. On reciprical figures, frames, and diagrams of forces. **Sientific Papers 2**, p. 161-207, 1890.

transversais das barras de uma treliça altamente interconectada com nós fixos definidos no domínio de projeto. A topologia final é definida em um processo de eliminação das barras finas da estrutura base final. Embora o método da estrutura base permita a obtenção de soluções topológicas, ele não é um processo de otimização de topologia no sentido estrito. Recentemente, técnicas para filtragem de soluções topológicas em equilíbrio durante o processo de otimização (RAMOS JR; PAULINO, 2016 e SANDERS; RAMOS JR; PAULINO, 2017) promovem a transição do método da estrutura base para o campo da otimização de topologia.

Com a finalidade de aplicar uma abordagem em otimização de topologia para a obtenção de caminhos de força em estruturas de concreto armado, Gaynor, Guest e Moen (2013) propuseram um método híbrido de otimização de topologia. Nessa proposta, elementos de barra permitem um posicionamento mais simples das barras de aço, indo a favor do processo construtivo e fornecendo de forma direta a área de aço necessária para sustentar o carregamento definido. Já elementos planos associados a densidades de material permitem uma melhor definição do fluxo percorrido pelas forças no interior do concreto pelo fato de não ser limitado, como o Método da Estrutura Base, pelas orientações das barras.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho consiste na implementação do modelo híbrido de otimização de topologia baseado na proposta de Gaynor, Guest e Moen (2013) para a obtenção automática dos caminhos de força que servem de base para modelos de escoras e tirantes e implementar melhorias na extração da topologia final.

Para dar sustentação ao trabalho proposto são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Adicionar elementos de barra pré-definidos representando as barras de aço ao tradicional método de densidade, gerando a abordagem aqui denominada Método da Densidade Reforçado;
- Implementação do método híbrido com modelo de material isotrópico;
- Implementação do método híbrido com modelo de material ortotrópico, de forma semelhante à proposta de Gaynor, Guest e Moen (2013);

- Implementação do filtro máximo ao final do processo de otimização.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado em 5 capítulos. No Capítulo 1 foram apresentados o tema e os objetivos do trabalho. No Capítulo 2 apresenta-se a revisão da literatura sobre o tema, abordando os métodos de densidade e da estrutura base. No Capítulo 3 apresentam-se os métodos implementados, primeiramente o método da densidade reforçado e, posteriormente, o método híbrido. No Capítulo 4 são apresentados e analisados os resultados obtidos envolvendo a aplicação dos métodos da densidade e da estrutura base, assim como os resultados obtidos com o método de densidade reforçado e com o método híbrido. No Capítulo 5, apresentam-se as conclusões finais, com base na análise dos resultados obtidos.

CAPÍTULO 2
REVISÃO DA LITERATURA SOBRE OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA

Papadrakis *et al*. (1996) definem otimização de topologia como uma ferramenta para auxiliar o projetista a selecionar uma topologia adequada através da remoção ou da redistribuição de material em um domínio estrutural. Com o avanço das aplicações de OT, diferentes abordagens foram propostas e utilizadas. Este trabalho aborda a junção dos conceitos básicos de dois métodos, o Método da Densidade e o Método da Estrutura Base aplicados ao problema de minimização da flexibilidade média, para a formação de um método híbrido capaz de representar os comportamentos típicos do concreto e o do aço para determinação do caminho de forças em estruturas de concreto armado. Este capítulo, portanto, apresenta a base conceitual sobre o Método da Densidade e o Método da Estrutura Base que fundamentam a metodologia empregada neste trabalho.

2.1 MÉTODO DA DENSIDADE

O problema a ser solucionado utilizando o método da densidade consiste na distribuição ótima de material em um determinado espaço geométrico denominado domínio estendido, mantendo-se constante o volume total de material. A densidade relativa de material, ρ, representa a relação entre o volume de material presente em cada região do domínio estendido e o volume dessa região. Assim, a densidade ρ pode assumir os valores 1 (sólido) ou 0 (vazio).

A função objetivo do problema de otimização deve representar uma característica que descreva o comportamento global da estrutura. Neste trabalho, adota-se a flexibilidade média da estrutura (c) como função objetivo e o problema pode ser descrito na forma (2.1).

$$
\begin{aligned}
&Obter: && \rho \\
&Que\ minimiza: && c(\rho) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U}(\rho) \\
&Tal\ que: && \mathbf{K}(\rho)\,\mathbf{U} = \mathbf{F} \\
& && \int \rho\, d\Omega = V_{max} \\
& && \rho(x)\ \epsilon\ [0,1]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

O problema descrito em (2.1) com distribuição de variáveis feita de forma discreta, leva a um problema matemático mal condicionado, com a presença de mínimos locais e dependência de malha (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Bendsoe (1989) propôs a relaxação do problema permitindo que a variável de projeto ρ possa assumir valores entre 0 e 1.

Na aplicação a problemas práticos, a análise estrutural é feita com uso de métodos numéricos, tal como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Deste modo, o domínio de projeto é discretizado com uma malha de elementos finitos, na qual cada elemento será associado a uma variável de projeto ρ_{el}. A propriedade mecânica do material relativa à rigidez é relacionada à densidade de material presente em cada elemento. Deste modo, a matriz constitutiva elástica é calculada conforme a equação (2.2).

$$\mathbf{D}_{el} = f(\rho_{el})\,\mathbf{D}_s \tag{2.2}$$

Onde:

$\mathbf{D}_s$ - Matriz constitutiva elástica do material sólido;

ρ_{el} - Densidade relativa do elemento finito;

$\mathbf{D}_{el}$ - Matriz constitutiva elástica do elemento;

f - Função que relaciona a densidade à rigidez.

Haja vista que nesta formulação as propriedades do material não sofrerão alterações no interior do elemento, pode-se calcular a matriz de rigidez do elemento como:

$$\mathbf{K}_{el} = f(\rho_{el})\,\mathbf{K}_{s_{el}} \tag{2.3}$$

Onde:

$\mathbf{K}_{sel}$ - Matriz de rigidez do material sólido;

$\mathbf{K}_{el}$ - Matriz de rigidez do elemento.

Como é proposto solucionar o problema de análise estrutural pelo MEF, para evitar a singularidade da matriz de rigidez durante o processo de otimização, assume-se um valor mínimo de densidade positivo e suficientemente pequeno. Deste modo, não haverá um elemento com rigidez nula associado a um grau de liberdade. Consequentemente, o problema descrito em (2.1) é reescrito na forma (2.4).

$$
\begin{aligned}
&Obter: && \boldsymbol{\rho} \\
&Que\ minimiza: && c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \\
&Tal\ que: && \sum_{\rho\,\epsilon\,\Omega} \rho_{el}\, V_{el} = V_{max} \\
& && 0 < \rho_{el}^{min} \le \rho_{el} \le 1, \qquad el = 1, \ldots, nel \\
&Com: && \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\,\mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Onde:

ρ - vetor com as densidades de cada elemento finito;

V_{el} - volume de material relativo ao elemento finito *el*;

V_{max} - volume máximo final a ser atingido;

ρ_{el}^{min} - limite inferior da restrição dos valores de densidade admissíveis;

K - matriz de rigidez da estrutura;

U - vetor de deslocamentos nodais;

F - vetor de forças nodais da estrutura.

Devido à relaxação dos valores de densidade, o problema apresentado em (2.4) apresenta soluções com densidades intermediárias, fenômeno conhecido como escala cinza (*gray scale*). Uma forma de contornar este problema consiste na utilização de modelos que penalizem as densidades intermediárias, tornando-as pouco interessantes durante o processo de otimização. Neste trabalho será utilizado o Modelo SIMP (do inglês *Solid Isotropic Material with Penalization*).

2.1.1 Modelo SIMP

O modelo de SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), proposto separadamente por Bendsoe (1989) e por Zhou e Rozvany (1991), promove uma penalização nos valores de densidades intermediárias de modo que suas contribuições à rigidez do material sejam

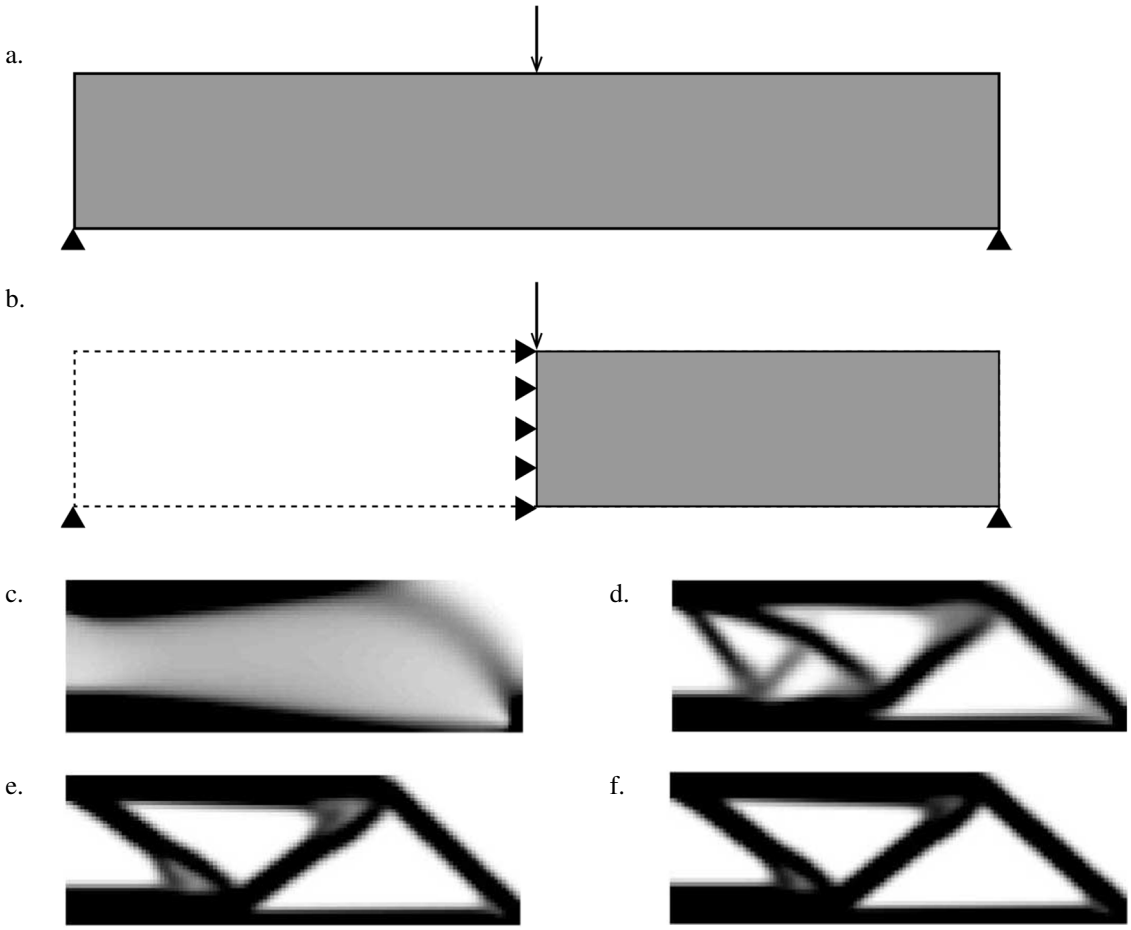
limitadas. Assim, o gasto de material com densidades intermediárias é diminuído na solução topológica final, facilitando sua aplicação na prática. A equação (2.5) descreve o modelo, com aplicação no MEF.

$$\mathbf{K}_{el} = \rho_{el}^{p}\, \mathbf{K}_{s_{el}} \tag{2.5}$$

Onde, p é o coeficiente de penalização das densidades intermediárias.

Conforme apresentado por Bendsoe e Sigmund (2004), é recomendado a utilização de $p \geq 3$. A Figura 2.1 ilustra as soluções obtidas com a aplicação de diferentes coeficientes de penalização. Devido a presença de simetria no eixo vertical central da viga, o domínio estendido, Figura 2.1 (b), é referente apenas a uma das metades da viga, como forma diminuir o sistema de equações na etapa de análise estrutural.

Figura 5.1 - Exemplo da aplicação do coeficiente de penalização (p): (a) problema; (b) domínio estendido; (c) solução para p = 1; (d) solução para p = 2; (e) solução para p = 3; (f) solução para p = 4.



Fonte: Gerada pelo autor

2.1.2 Análise de sensibilidade

A análise da sensibilidade, expressa pela diferenciação da função objetivo e das funções de restrição em relação às variáveis de projeto, fornece a direção de maior acréscimo da função objetivo (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Para o problema de minimização da flexibilidade média da estrutura, a sensibilidade da função objetivo pode ser calculada através da equação (2.6).

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \tag{2.6}$$

Considerando a equação de equilíbrio (2.7) e a simetria da matriz de rigidez:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})\, \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \tag{2.7}$$

Tem-se:

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})^{\mathrm{T}}\, \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \tag{2.8}$$

Derivando-se a equação (2.7) em relação à variável de projeto ρ_i, tem-se (2.9):

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i}\, \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = 0 \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) em (2.8), obtém-se (2.10):

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = -\, \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i}\, \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \tag{2.10}$$

Uma vez que a matriz de rigidez da estrutura é constituída por montagem das matrizes de rigidez dos elementos, fornecida pela equação (2.5) para o modelo SIMP, a derivada da matriz de rigidez da estrutura $\mathbf{K}$ em relação à densidade ρ_i fornece (2.11):

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \rho_i} = p\, \rho_i^{p-1}\, \mathbf{K}_{s_i} \tag{2.11}$$

Deste modo, a sensibilidade da função objetivo é calculada pela equação (2.12):

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = -p\, \rho_i^{p-1}\, \mathbf{U}_i(\boldsymbol{\rho})^{\mathrm{T}}\, \mathbf{K}_{s_i}\, \mathbf{U}_i(\boldsymbol{\rho}) \tag{2.12}$$

Onde, **U***i* é o vetor de deslocamentos nodais do elemento *i*.

Sendo a restrição de volume apresentada em (2.4) descrita pela equação (2.13):

$$VC(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}\, \mathbf{V} - V_{max} \tag{2.13}$$

Onde **V** é o vetor que contém os volumes dos elementos.

Derivando-se a equação (2.13) em relação à variável de projeto ρ_i, tem-se (2.14):

$$\frac{\partial VC(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = V_i \tag{2.14}$$

Onde V_i é o volume do elemento *i*.

A sensibilidade das restrições laterais assume os valores –1, 0 ou 1, dependendo se associada à restrição relativa ao limite inferior (–1 ou 0) ou da restrição relativa ao limite superior (1 ou 0).

2.1.3 Filtro de sensibilidade

O problema descrito em (2.4) é sujeito a instabilidades numéricas como dependência de malha, soluções em tabuleiro de xadrez e soluções em ilha. A Figura 2.2 apresenta um exemplo de instabilidade numérica do tipo de tabuleiro de xadrez. Bendsoe e Sigmund (2004) destacam o filtro para a sensibilidade (SIGMUND, 2001) como uma forma altamente eficiente para evitar tais problemas de instabilidades numéricas.

Figura 2.2 - Instabilidade numérica do tipo tabuleiro de xadrez.

Fonte: Gerada pelo autor

O método proposto é uma relação heurística que modifica a sensibilidade da função objetivo relativa a cada elemento através de uma média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos dentro de um determinado raio fixo estabelecido pelo projetista. A equação (2.15) apresenta a modificação proposta na sensibilidade:

$$\frac{\widehat{\partial c(\boldsymbol{\rho})}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j=1}^{N} H_j} \cdot \sum_{j=1}^{N} H_j \, \rho_j \, \frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_j} \tag{2.15}$$

Onde:

i - Índice da densidade com sensibilidade alterada;

j - Índice da densidade do elemento vizinho contido no raio;

$\frac{\widehat{\partial c(\boldsymbol{\rho})}}{\partial \rho_i}$ - Sensibilidade da função objetivo corrigida;

$\frac{\partial c}{\partial \rho_i}$ - Sensibilidade analítica da função objetivo calculada pela equação (2.12);

H_j - Fator de convolução (peso associado às densidades), calculado pela equação (2.16).

$$H_j = \frac{r_{min} - r_{i\,j}}{r_{i\,j}} \tag{2.16}$$

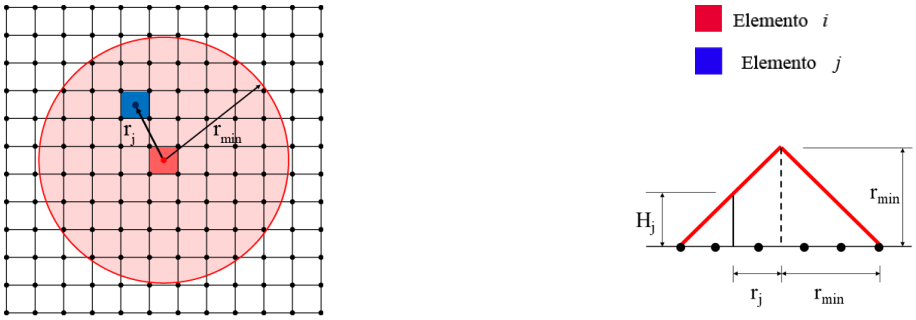
Onde:

r_{min} - raio de atuação do filtro;

$r_{i\,j}$ - distância do centro do elemento i ao centro do elemento j.

A Figura 2.3 apresenta a ideia do filtro de sensibilidade e de como é determinado o fator de convolução.

Figura 2.6 – Representação esquemática do fator de peso do filtro de sensibilidade.



Fonte: Pantoja (2012), adaptada pelo autor

2.2 MÉTODO DA ESTRUTURA BASE (*GROUND STRUCTURE*)

O Método da Estrutura Base (*Ground Structure Method*) é uma abordagem de otimização de dimensões utilizada para obtenção de soluções topológicas. O método consiste em, a partir de uma treliça altamente interconectada (estrutura base), eliminar as barras que não contribuem significativamente para a função objetivo. Nessa abordagem, as variáveis de projeto são as áreas das barras.

2.2.1 Formulação elástica clássica

Este trabalho aborda o Método da Estrutura Base para minimização da flexibilidade média da estrutura. A utilização da flexibilidade média para estes problemas é conveniente por dois fatores principais: em primeiro lugar pela flexibilidade ser uma função convexa das variáveis de projeto; em segundo lugar pelo fato de que, em uma treliça com flexibilidade mínima, as barras possuem o mesmo nível de tensão (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Além disso, é especialmente interessante neste trabalho pois também é utilizada no método de densidade apresentado no item 2.1 deste capítulo, o que se coaduna com a construção do método híbrido, descrito no Capítulo 3. Assim, o problema é descrito conforme apresentado na equação (2.17):

$$
\begin{aligned}
&Obter: && \mathbf{A} \\
&Que\ minimiza: && c(\mathbf{A}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U}\,(\mathbf{A}) \\
&Tal\ que: && \sum_{i=1}^{N_b} L_i\,A_i \le V_{max} \\
& && A_{min} < A_i < A_{max} \\
&com: && \mathbf{K}(\mathbf{A})\,\mathbf{U}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Onde:

A - vetor com as áreas das barras;

c - flexibilidade média da estrutura base;

U - vetor dos deslocamentos nodais;

K - matriz de rigidez da estrutura base;

L_i - comprimento do elemento de barra *i*;

A_i - área da seção transversal do elemento de barra *i*;

V_{max} - volume máximo da estrutura;

A_{min} - área mínima admissível para as barras;

A_{max} - área máxima admissível para as barras;

A sensibilidade da função objetivo é obtida pelo mesmo procedimento descrito no item 2.1.2 e é expressa pela equação (2.18):

$$\frac{\partial c(\mathbf{A})}{\partial A_i} = -\,\mathbf{U_i}(\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{A})}{\partial A_i}\,\mathbf{U_i}(\mathbf{A}) \tag{2.18}$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser escrita na forma apresentada na equação (2.19):

$$\mathbf{K_i}(A_i) = A_i\,\mathbf{K}_i^0 \tag{2.19}$$

Onde:

$\mathbf{K}_i$ - Matriz de rigidez do elemento de barra *i*;

A_i - área da seção transversal da barra *i*;

$\mathbf{K}_i^0$ - Matriz de rigidez básica para um elemento de barra *i*.

Deste modo, a sensibilidade da função objetivo é calculada pela equação (2.20), a partir da equação (2.10):

$$\frac{\partial c(\mathbf{A})}{\partial A_i} = -\,\mathbf{U}_i(\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{K}_i^0\,\mathbf{U}_i(\mathbf{A}) \tag{2.20}$$

A derivada da restrição de volume em relação à área das barras é calculada pela equação (2.21)

$$\frac{\partial VC(\mathbf{A})}{\partial A_i} = L_i \tag{2.21}$$

Assim como na formulação do MD, apresentada no item 2.1, a sensibilidade das restrições laterais assume os valores –1, 0 ou 1, dependendo se associada à restrição relativa ao limite inferior (–1 ou 0) ou à restrição relativa ao limite superior (1 ou 0).

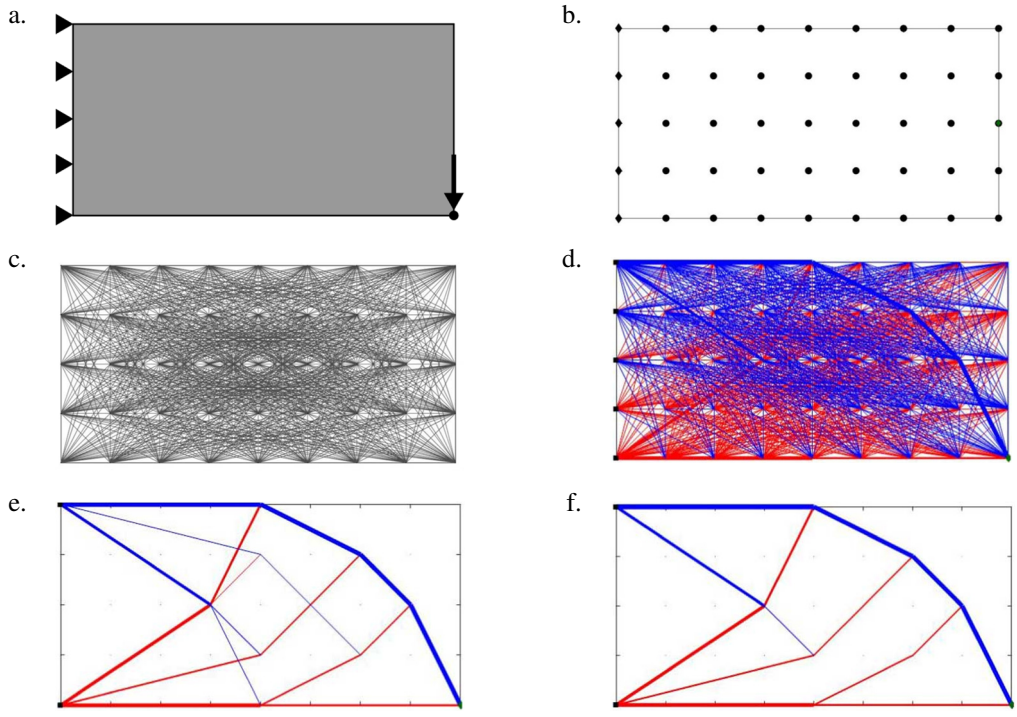
A definição dos membros que permanecerão na topologia final é dada segundo o critério de filtragem final, apresentado em (2.22) (RAMOS JR.; PAULINO, 2016):

$$\frac{A_i}{max(\mathbf{A})} \geq \alpha_f \tag{2.22}$$

Onde, α_f é um valor adimensional menor que 1, geralmente adotado na ordem de 0,01, e *Ai* é a área da barra *i*

A Figura 2.4 apresenta um exemplo de aplicação da formulação elástica do MEB. A Figura 2.4(a) apresenta o problema estrutural e o domínio de projeto. Partindo de uma grade fixa de nós, ilustrada na Figura 2.4(b), é definida a estrutura base com um número finito de barras, conforme ilustrado na Figura 2.4(c). Sobre esta, realiza-se o processo de otimização, cujo resultado é apresentado na Figura 2.4(d). A partir do resultado da otimização das áreas das seções transversais das barras, a solução topológica é obtida com a aplicação de um filtro sobre a estrutura base, o qual elimina as barras mais finas. A Figura 2.4(e) apresenta a topologia obtida com um valor de filtro igual a 0,056549, e a Figura 2.5(f) apresenta a topologia obtida com a aplicação do filtro com um valor de 0,15. Logo, pode-se destacar o fato que o valor do filtro aplicado possui grande influência sobre a solução obtida e também pode promover a remoção de barras finas presentes na solução que são necessárias ao equilíbrio da estrutura.

Figura 2.7 - Exemplo de aplicação do Método da Estrutura Base. (a) Domínio de projeto; (b) Grade de nós; (c) Estrutura base; (d) Solução do MEB sem aplicação do filtro no final; (e) Topologia extraída com filtro aplicado no valor de 0.056549; (f) Topologia extraída com filtro aplicado no valor de 0.15



Fonte: Gerada pelo autor

Destaca-se que Ramos Jr. e Paulino (2016) propuseram a aplicação de um filtro com verificação do equilíbrio da topologia extraída durante o processo de otimização.

2.2.2 Identificação de topologias em equilíbrio

Conforme ressalta Ohsaki (2011), as soluções obtidas com o método da estrutura base muitas vezes resultam em soluções não realistas pela presença de nós instáveis ou então membros muito finos. Como forma de verificar se a topologia final extraída está ou não em equilíbrio, Ramos Jr e Paulino (2016) propuseram um procedimento baseado na regularização de Tikhonov aplicada ao funcional de energia total, o qual é definido pela equação (2.23):

$$\Pi(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{K}\,\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F} \tag{2.23}$$

A minimização do funcional de energia (2.23) da topologia extraída fornece o sistema de equações apresentado em (2.24)

$$\mathbf{K}_{Top}\,\mathbf{U}_{Top} = \mathbf{F}_{Top} \tag{2.24}$$

Onde:

$\mathbf{K}_{Top}$ - é a matriz de rigidez associada à topologia extraída;
$\mathbf{U}_{Top}$ - é o vetor de deslocamentos associado à topologia extraída;
$\mathbf{F}_{Top}$, - o vetor de forças associado à topologia extraída.

A solução geral do problema (2.24), apresentada em (2.25), possui duas parcelas, uma parcela particular, $\mathbf{U}_p$, e uma parcela homogênea, $\mathbf{U}_h$. A solução particular está associada a modos não nulos de energia, sendo de grande relevância no processo de otimização, haja vista que assume valores específicos. Em contrapartida, a parcela referente à solução homogênea está relacionada a deslocamentos de corpo rígido, os quais não promovem incrementos de energia de deformação interna na estrutura, podendo assumir infinitas configurações.

$$\mathbf{U}_{Top} = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_h \tag{2.25}$$

A regularização de Tikhonov para um funcional genérico *f* é definida em (2.26). A partir deste ponto o subscrito "*Top*" será omitido nas equações a seguir, com a finalidade de facilitar a notação.

$$f_r(\mathbf{U}) = f(\mathbf{U}) + \lambda\, \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{U} \tag{2.26}$$

Sendo que o parâmetro de regularização de Tikhonov (λ) é um número positivo pequeno.

Aplicando a regularização de Tikhonov ao funcional de energia total (2.26), obtém-se a equação (2.27):

$$\Pi_R(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{K}\, \mathbf{U} - \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{F} + \frac{\lambda}{2}\, \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{U} \tag{2.27}$$

Minimizando o funcional (2.27) em relação ao vetor de deslocamentos, obtém-se (2.28), e consequentemente, a solução particular do problema, apresentada em (2.29)

$$\frac{\partial \Pi_R(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = 0 \longrightarrow \mathbf{K}\, \mathbf{U} - \mathbf{F} + \lambda\, \mathbf{U} = 0 \longrightarrow (\mathbf{K} + \lambda\, \mathbf{I})\, \mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{2.28}$$

$$\mathbf{U}_p = (\mathbf{K} + \lambda\, \mathbf{I})^{-1}\mathbf{F} \tag{2.29}$$

Se a estrutura estiver em equilíbrio, a solução particular apresentada em (2.29) será também solução do sistema apresentado em (2.24). Assim, considera-se que o equilíbrio da estrutura é satisfeito se o valor da norma residual satisfazer ao expresso na equação (2.30).

$$NR = \frac{\left\|\mathbf{K}\, \mathbf{U}_p - \mathbf{F}\right\|}{\|\mathbf{F}\|} \leq Tol \tag{2.30}$$

Onde, *Tol* corresponde à tolerância de verificação de equilíbrio da topologia extraída.

CAPÍTULO 3
MÉTODOS IMPLEMENTADOS PARA OBTENÇÃO DE CAMINHOS DE FORÇA EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Este capítulo apresenta a metodologia adotada para as implementações computacionais realizadas neste trabalho. Primeiro, apresenta-se o Método da Densidade Reforçado, no qual barras são inseridas na malha de elementos finitos que discretiza o domínio estendido no método da densidade. Neste caso, as áreas das seções transversais das barras são parâmetros do problema de otimização. Posteriormente, apresenta-se o método híbrido baseado na proposta de Gaynor, Guest e Moen (2013), contudo com diferenças na implementação. Por fim, apresenta-se o Filtro Máximo, proposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017) que será utilizado no método híbrido após o processo de otimização para eliminar as barras finas, promovendo uma melhoria na obtenção da topologia final.

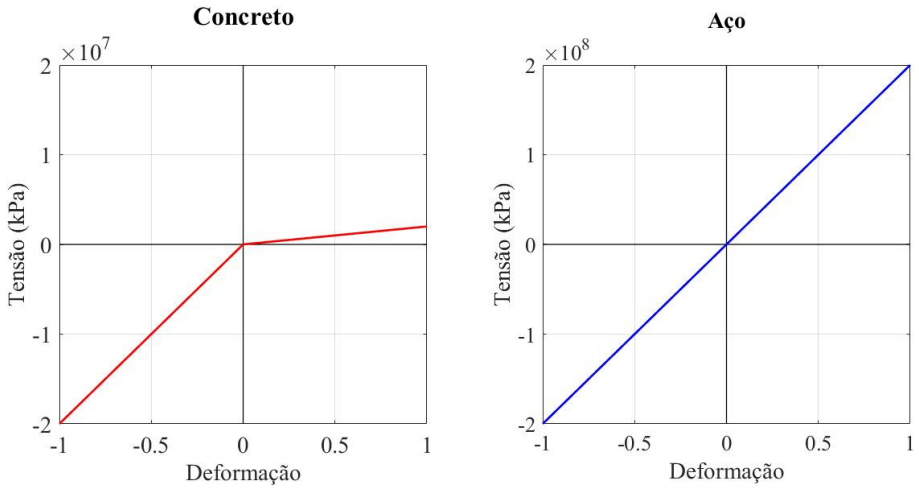
3.1 MÉTODO DA DENSIDADE REFORÇADO

O Método da Densidade Reforçado (MDR) tem o objetivo de avaliar a influência da presença de barras de aço com área e posições pré-determinadas na formação dos caminhos de força no interior do concreto. Deste modo, para o desenvolvimento do método, assume-se que os elementos finitos de estado plano ou sólidos utilizados no Método da Densidade representam o concreto e os elementos de barra representam o reforço em aço. A combinação de elementos contínuos e discretos é uma proposta já realizada em outros trabalhos, entretanto com outras finalidades, tal como apresentado por Stromberg *et al*. (2011), onde foi aplicada uma técnica integrada de otimização de topologia a fim de obter o leiaute estrutural do sistema de contraventamento externo de edifícios altos.

Define-se um modelo de material bilinear para o concreto e linear para o aço. Para este, é definido um módulo de elasticidade à tração e à compressão de 210 GPa. Para o concreto, é definido um módulo de elasticidade à compressão de 24 GPa e um módulo de elasticidade à tração reduzido (2,00 GPa). A rigidez não nula à compressão do concreto é considerada a fim

de evitar problemas de instabilidade numérica, tal como singularidades na matriz de rigidez global da estrutura. Os modelos do concreto e do aço estão apresentados na Figura 3.1.

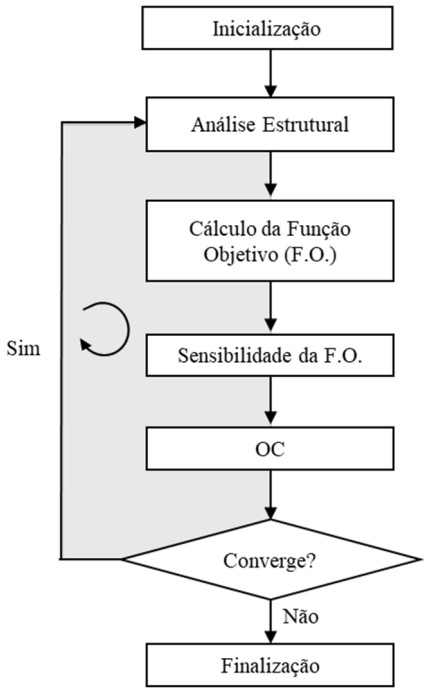
Figura 3.1 - Diagramas tensão-deformação para o concreto e para o aço para MDR



Fonte: Gerada pelo autor

Uma vez que o concreto, representado pelos elementos de estado plano ou sólidos, tem o módulo de elasticidade determinado em função do estado de tensão do elemento, é necessário que se façam alterações no algoritmo convencional do MD, o qual é ilustrado na Figura 3.2.

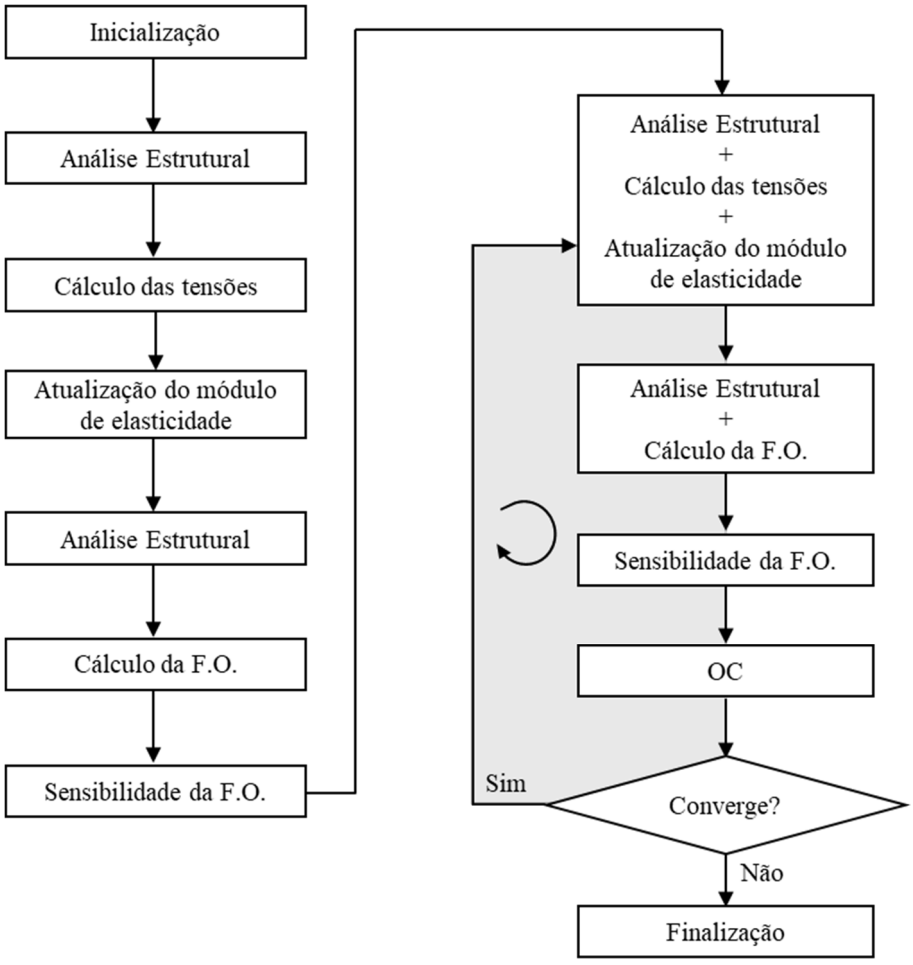
Figura 3.2 - Fluxograma MD tradicional



Fonte: Gerada pelo autor

Para a consideração do modelo de material bilinear para o concreto, o algoritmo exige que se realize a rotina de análise estrutural em dois momentos. Primeiro, a análise estrutural é feita para identificar os elementos de densidade em estado de tensão de tração, a fim de atualizar seus módulos de elasticidade. Segundo, é realizada a análise novamente para que o cálculo da função objetivo seja feito com os módulos de elasticidade atualizados. Essas modificações são apresentadas na Figura 3.3. Para que na primeira iteração do laço de otimização já se tenha realizado a alteração do módulo de elasticidade dos elementos tracionados, os valores iniciais da sensibilidade da função objetivo devem ser calculados antes de se iniciar a otimização.

Figura 3.3 - Fluxograma de implementação do Método da Densidade Reforçado.



Fonte: Gerada pelo autor

A fim de incorporar a contribuição da rigidez do reforço proveniente das barras, a montagem da matriz de rigidez da estrutura passa a incluir os termos das matrizes de rigidez das barras presentes, conforme a equação (3.1). Vale destacar que o somatório indicado diz respeito à operação de montagem da matriz de rigidez da estrutura.

$$\mathbf{K} = \sum_{el=1}^{nelemsD} \mathbf{K}_{el}(\rho_{el}, \sigma_{el}) + \sum_{b=1}^{nBarras} \mathbf{K}_i(A_i, \sigma_i) \tag{3.1}$$

Onde:

$\mathbf{K}$ - matriz de rigidez da estrutura;

$\mathbf{K}_{el}$ - matriz de rigidez do elemento de estado plano ou sólido de interpolação linear, após influência da densidade do elemento e alteração do módulo de elasticidade;

ρ_{el} - densidade do elemento de estado plano ou sólido *el*;

σ_{el} - tensão do elemento de estado plano ou sólido *el*

$\mathbf{K}_i$ - matriz de rigidez do elemento de barra *i*;

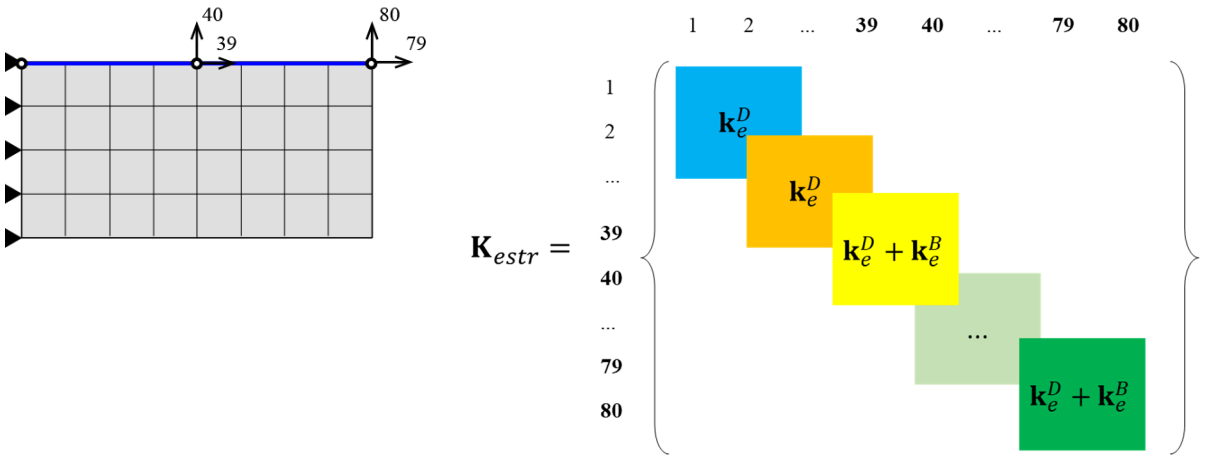
A_i - área do elemento de barra *i;*

σ_i - tensão do elemento de barra *i;*

É importante destacar que a utilização de elementos contínuos de interpolação linear para o Método da Densidade é justificada pelo fato de que a malha de elementos finitos é mais refinada do que o necessário, caso seja realizado um estudo de convergência de malha, uma vez que o objetivo é obter a melhor distribuição de material ao longo do domínio. Deste modo não é necessária a utilização de elementos finitos de mais alta ordem para interpolação do campo de deslocamentos.

A Figura 3.4 ilustra o processo de montagem da matriz de rigidez considerando elementos de barra e elementos de estado plano.

Figura 3.4 - Montagem da matriz de rigidez da estrutura.



Fonte: Gerada pelo autor

É válido destacar que as sensibilidades da função objetivo e da restrição de volume são calculadas pelas mesmas equações do MD tradicional, conforme apresentado nas equações (2.12) e (2.14) do item 2.1.2, sendo que as barras incorporadas como reforço não são consideradas no cálculo da restrição de volume.

3.2 MÉTODO HÍBRIDO

Gaynor, Guest e Moen (2013) apresentam uma metodologia para criação de um modelo híbrido de otimização de topologia a fim de obter a visualização dos caminhos de força no interior de estruturas de concreto armado. Uma vez que, neste modelo, as áreas das barras passam a ser variáveis de projeto, como ponto fundamental, tem-se que a otimização da distribuição das densidades sobre os elementos de estado plano ou sólidos e a otimização das áreas dos elementos de barras são realizadas em um mesmo ciclo de otimização. Além disso, o concreto e o aço estão compostos uma única restrição de volume de material. Deste modo, a formulação do modelo híbrido, apresentada por Gaynor, Guest e Moen (2013) é dada por (3.2):

$$
\begin{aligned}
&Obter: && \mathbf{A}, \boldsymbol{\rho} \\
&Que\ minimiza: && c(\mathbf{A}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U} \\
&Tal\ que: && \sum_{i=1}^{N_b} L_i\, A_i + \sum_{el=1}^{N_{el}} \rho_{el}\, V_{el} \leq V_{max} \\
&com: && 0 \leq A_i \\
& && \rho^{min} \leq \rho_{el} \leq 1 \\
&e && \mathbf{K}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma_c}, \boldsymbol{\sigma_b})\,\mathbf{U} = \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Onde:

A - vetor com as áreas das barras;

ρ - vetor com as densidades dos elementos de estado plano;

c - flexibilidade média da estrutura;

$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$ - vetor de forças nodais da estrutura;

U - vetor dos deslocamentos nodais da estrutura;

K - matriz de rigidez da estrutura;

L_i - comprimento do elemento de barra *i*;

A_i - área da seção transversal do elemento de barra *i*;

ρ_{el} - densidade do elemento de estado plano *el*;

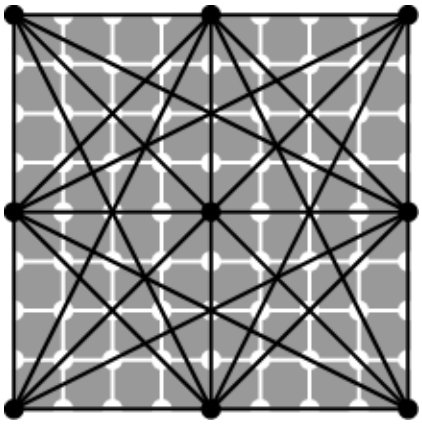
V_{el} - volume do elemento de estado plano *el*;

V_{max} - volume máximo final a ser atingido.

3.2.1 Malha híbrida

A malha híbrida de elementos é obtida através da incorporação das barras da estrutura base na malha composta pelos elementos de estado plano ou sólidos, sendo a vinculação entre os elementos feita apenas em seus nós compartilhados. É importante que o espaçamento dos nós que compõem os elementos de densidade seja menor que o espaçamento dos nós que determinam as barras, a fim de que se evite a formação de singularidades. A Figura 3.5 apresenta um exemplo de malha híbrida, na qual a malha de elementos de estado plano possui 8 elementos na direção x e 8 elementos na direção y, enquanto a malha utilizada para geração da estrutura base é de 2 elementos em x e 2 elementos em y, com um grau de conectividade 2.

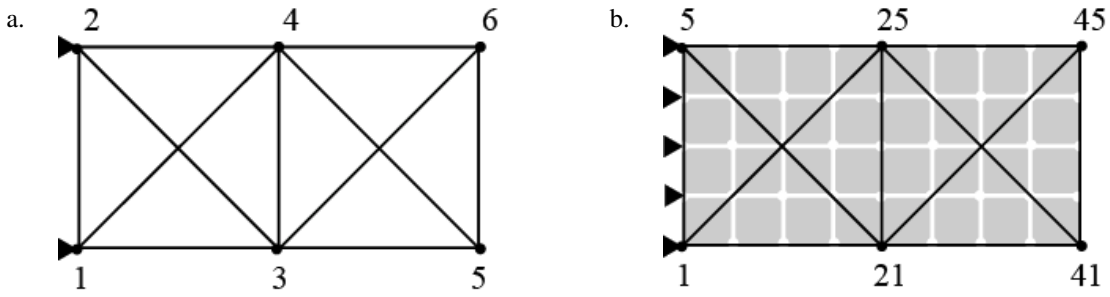
Figura 3.5 - Malha híbrida: estrutura base gerada a partir de uma grade de 2x2 e conectividade 2, e malha de elementos de densidade 8x8



Fonte: Gaynor, Guest e Moen (2013), adaptado pelo autor.

Como a estrutura base é gerada através de uma malha menos refinada, é necessário que após a sua geração, os nós que determinam as barras sejam compatibilizados com os nós da malha de densidade. A compatibilização dos nós é realizada através de uma renumeração dos nós que determinam as barras, através da busca dos nós de mesmas coordenadas, conforme é representado na Figura 3.6.

Figura 3.6 - Renumeração dos nós que definem a estrutura base considerando a malha com elementos de densidade. (a) Nós originais da geração da estrutura base. (b) Nós que definem as barras após a renumeração.

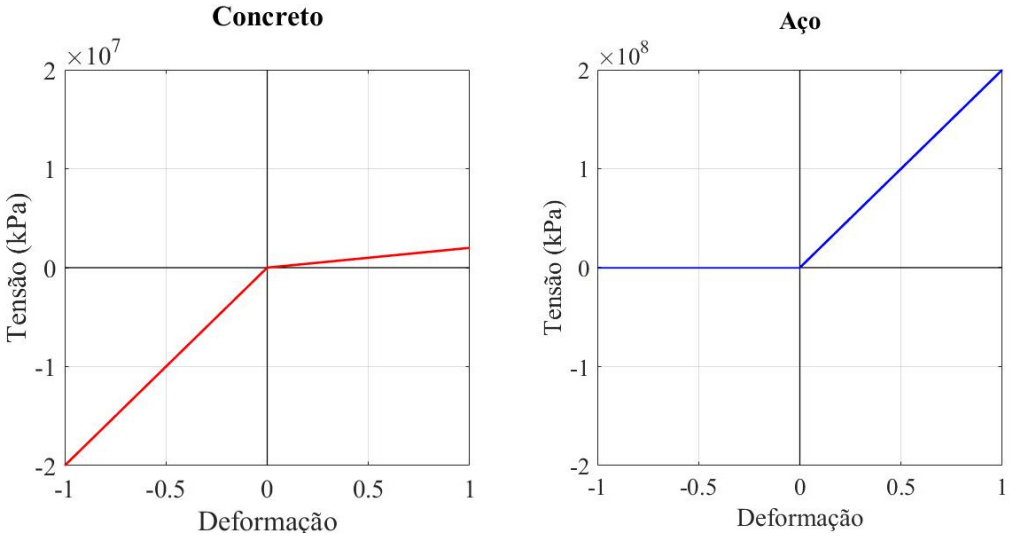


Fonte: Gerada pelo autor

3.2.2 Propriedades dos materiais

Como diferença em relação ao Método da Densidade Reforçado, apresentado no item 3.1, ambos os materiais para aplicação do Método Híbrido apresentam uma relação tensão-deformação bilinear. O aço, no entanto, possuirá uma rigidez à compressão nula. Os diagramas tensão-deformação do concreto e para o aço são apresentados na Figura 3.7.

Figura 3.7 – Diagramas tensão-deformação para o concreto e para o aço para MH



Fonte: Gerada pelo autor

É importante destacar que os elementos de estado plano ou sólidos não possuirão uma rigidez nula à tração para evitar que, nos nós localizados em uma região submetida a um estado de tensão de tração e não forem conectados a elementos de barra, haja singularidade na matriz de rigidez. É necessário lembrar que a malha de elementos finitos necessária para aplicação do Método da Densidade é mais refinada que a malha utilizada para geração da estrutura base. Esta

última deve ser menos refinada para que solução topológica obtida possua barras com posições bem definidas.

3.2.3 Modelos de material

A otimização com aplicação do método híbrido foi realizada com a aplicação de dois diferentes modelos de material para os elementos contínuos, primeiramente, um modelo de material isotrópico e, posteriormente, um modelo de material ortotrópico.

3.2.3.1 Modelo de material isotrópico

Um material isotrópico possui as mesmas propriedades mecânicas em todas direções. Deste modo, considerando um estado plano de tensões, a matriz constitutiva $\mathbf{D}_{el}$ é definida por (3.3).

$$\mathbf{D}_{el} = \frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Onde, E e ν correspondem ao módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do material.

3.2.3.2 Modelo de material ortotrópico

A justificativa da aplicação de um modelo de material ortotrópico é dada pelo fato que elementos de concreto armado quando sujeitos a um estado de tensão biaxial apresentam uma resposta tensão-deformação que sugere fortemente um comportamento de material ortotrópico induzido pelas tensões principais. Darwin e Pecknold (1974) desenvolveram um modelo de material com objetivo de representar os aspectos principais do comportamento do concreto armado sujeito a um estado de tensão biaxial. A matriz constitutiva, proposta por Darwin e Pecknold (1974), é definida por (3.4).

$$\mathbf{D}_{el} = \frac{1}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} E_1 & \upsilon\sqrt{E_2E_1} & 0 \\ \upsilon\sqrt{E_2E_1} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\left(E_1 + E_2 - 2\upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Onde os valores das propriedades do material (E_1, E_2, ν), são definidos ao longo das deformações nas direções principais. Sendo que, ν é definido por (3.5).

$$\upsilon^2 = \nu_1\nu_2 \tag{3.5}$$

Os valores dos módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson em cada uma das direções é definido a partir do sinal das tensões orientadas no sistema de deformações principais.

O ângulo que o sistema de deformações principais (1-2) forma com o eixo x do sistema global (x-y) de coordenadas é obtido por meio de (3.6).

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) \tag{3.6}$$

O ângulo θ é aplicado no tensor de rotação de tensões, a fim de calcular as mesmas no sistema de deformações principais, conforme apresentado em (3.7).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (cos\,\theta)^2 & (sin\,\theta)^2 & 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta \\ (sin\,\theta)^2 & (cos\,\theta)^2 & -2\,sin\,\theta\,cos\,\theta \\ -sin\,\theta\,cos\,\theta & sin\,\theta\,cos\,\theta & (cos\,\theta)^2 - (sin\,\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

Ou em forma matricial, conforme (3.8).

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}_s\,\boldsymbol{\sigma} \tag{3.8}$$

A partir da avaliação do sinal de $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$, atualizam-se os valores das propriedades do material de cada um dos elementos, nas direções 1 e 2, respectivamente.

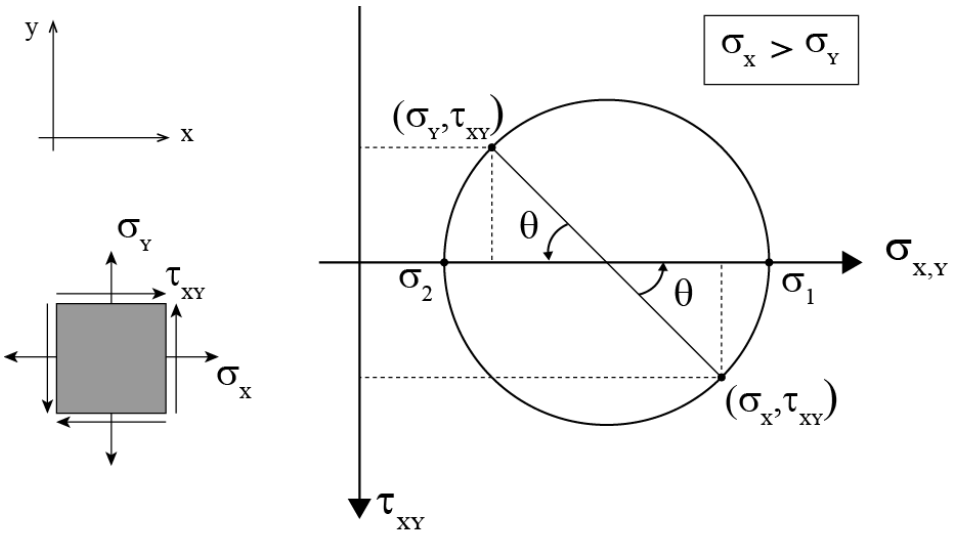
É válido destacar que, neste trabalho, a plotagem dos elementos contínuos é feita com uma diferenciação de cores, em função do estado de tensão ao qual o elemento está submetido.

Nesta, os elementos com cor azul possuem uma máxima tensão principal de tração, e os elementos com cor vermelha possuem uma máxima tensão principal de compressão. O cálculo das tensões principais é feito a partir de (3.9).

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} \tag{3.9}$$

A Figura 3.8 apresenta o sistema de eixos global considerado e a representação gráfica do cálculo das tensões principais e obtenção da orientação do sistema principal com o uso do Círculo de Mohr.

Figura 3.8 - Sistema de eixos adotado e representação gráfica do cálculo de tensões principais através do Círculo de Mohr



Fonte: Gerada pelo autor

O Apêndice A deste trabalho apresenta de forma detalhada o desenvolvimento da formulação do modelo ortotrópico proposto de Darwin e Pecknold (1974).

3.2.4 Formulação implementada

Neste trabalho, o esquema de otimização das variáveis utilizado é o Critério de Otimalidade (OC do inglês *Optimality Criteria*) com as variáveis de projeto, densidades e áreas, submetidas à mesma restrição de volume. O Apêndice B apresenta com mais detalhes a formulação do OC. É importante notar que as áreas das barras e as densidades podem ter ordem de grandeza muito diferentes quando o valor do limite superior das áreas das barras é muito menor que a unidade.

Para aplicação do OC em apenas uma etapa, realizando a otimização dos dois tipos de variáveis simultaneamente, as variáveis de projeto devem possuir mesma ordem de grandeza. Deste modo, para otimização das áreas das barras, será realizada uma normalização das áreas, conforme (3.10).

$$An_i = \frac{A_i}{A_{máx}} \tag{3.10}$$

Com a normalização das áreas, os limites da nova variável de projeto, An_i, passam a ser os apresentado em (3.11).

$$An_{mín} \leq An_i \leq 1 \tag{3.11}$$

Onde, $An_{mín}$ é o limite inferior normalizado das áreas das barras.

Por fim, a formulação híbrida empregada neste trabalho é a apresentada em (3.12).

$$\begin{aligned}
&Obter: && \mathbf{An}, \boldsymbol{\rho} \\
&Que\ minimize: && c(\mathbf{An}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U} \\
&Tal\ que: && \sum_{i=1}^{N_b} L_i\, An_i\, A_{máx} + \sum_{el=1}^{N_{el}} \rho_{el}\, V_{el} \leq V_{max} \\
&com: && An_{min} \leq An_i \leq 1 \\
& && \rho^{min} \leq \rho_{el} \leq 1 \\
&e && \mathbf{K}(\mathbf{An}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma_c}, \boldsymbol{\sigma_b})\,\mathbf{U} = \mathbf{F}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Com a alteração da variável de projeto relacionada à formulação do Método da Estrutura Base, o cálculo das sensibilidades da função objetivo e da restrição de volume, antes em relação ao valor das áreas das barras, irá ser modificado, enquanto o cálculo das sensibilidades relacionadas às densidades não é alterado. O cálculo da sensibilidade da função objetivo em relação à área normalizada é realizado segundo (3.13).

$$\frac{\partial c(\mathbf{An})}{\partial An_i} = \frac{\partial c(\mathbf{An})}{\partial A_i}\,\frac{\partial A_i}{\partial An_i} = -\,\mathbf{U_i}(\mathbf{An})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{K}_i^0\,\mathbf{U_i}(\mathbf{An})\,\frac{\partial A_i}{\partial An_i} \tag{3.13}$$

Sendo **An**, o vetor que contém os valores das áreas das barras normalizadas.

Uma vez que valor da derivada da área da barra em relação a área normalizada é igual ao valor de $A_{máx}$, a expressão obtida em (3.13) pode ser reescrita em (3.14).

$$\frac{\partial c(\mathbf{An})}{\partial An_i} = -\mathbf{U_i(An)}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{K}_i^0\,\mathbf{U_i(An)}\,A_{máx} \tag{3.14}$$

A sensibilidade da restrição de volume apresentada na formulação (3.12) em relação às áreas normalizadas das barras é calculada por (3.15).

$$\frac{\partial VC}{\partial An_i} = L_i\,A_{máx} \tag{3.15}$$

Sendo L_i o comprimento da barra i.

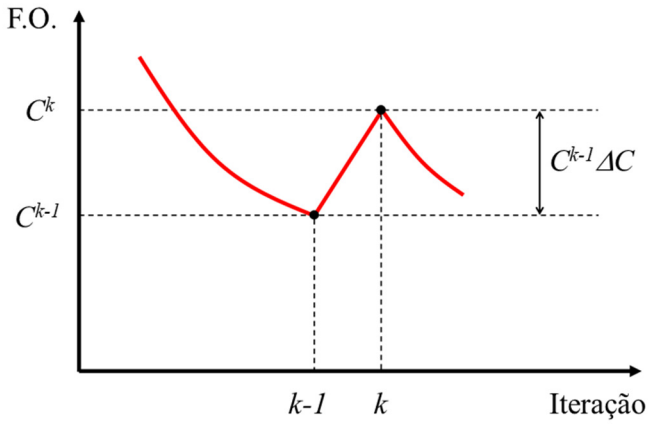
3.3 FILTRO MÁXIMO AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

Ramos Jr. e Paulino (2016) propuseram uma forma de se verificar se a solução topológica obtida da extração da estrutura base não viola o equilíbrio global da estrutura, com aplicação da regularização de Tikhonov sobre o funcional de energia total. A extração da topologia da estrutura base é dada em função do valor do filtro, α_f, conforme (3.16).

$$Filtro(\mathbf{A}, \alpha_f) = \begin{cases} 0 & se\ \dfrac{A_i}{máx(\mathbf{A})} < \alpha_f < 1 \\ A_i & caso\ contrário \end{cases} \tag{3.16}$$

Contudo, conforme destacado por Ramos Jr e Paulino (2016), o processo de filtragem promove um incremento no valor da flexibilidade média da estrutura, conforme é apresentado na Figura 3.9. Uma limitação ao incremento no valor da flexibilidade pode ser incluída no processo de filtragem.

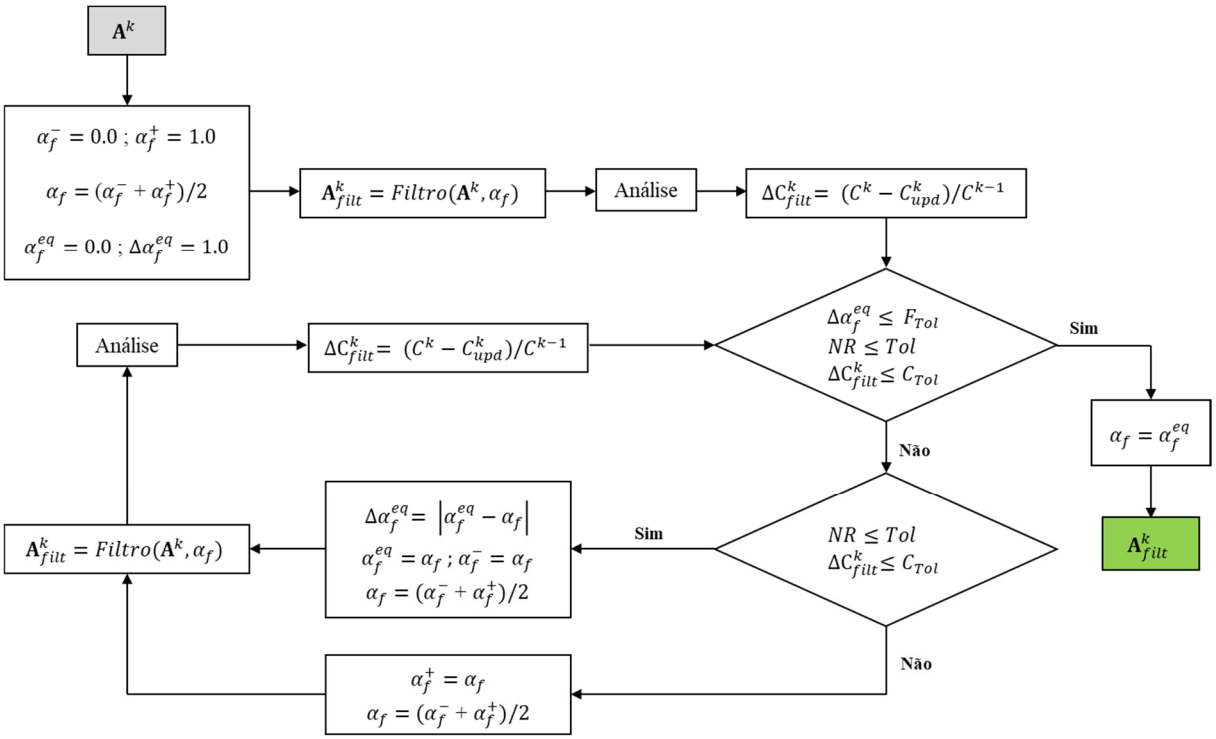
Figura 3.9 - Variação da função objetivo com a aplicação do filtro.



Fonte: Gerada pelo autor

Na proposta apresentada por Ramos Jr. e Paulino (2016) o valor do filtro é prescrito pelo projetista. No entanto, em alguns casos, chegar-se a um valor adequado pode ser um desafio. Assim, Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017) apresentaram a proposta do Filtro Máximo, na qual o valor do filtro α_f é definido aplicando-se o método da bissecção, conforme é representado no fluxograma da Figura 3.10.

Figura 3.10 - Fluxograma do método da bissecção aplicado no fim do processo de otimização após k iterações, com a técnica do Filtro Máximo



Fonte: Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017), adaptado pelo autor

Onde:

α_f^+ - limite superior do valor de filtro no método da bissecção;

α_f^- - limite inferior do valor de filtro no método da bissecção;

α_f^{eq} - valor do filtro que preserva o equilíbrio da estrutura;

C^k - flexibilidade média na iteração *k*;

C^{k-1} - flexibilidade média na iteração *k*-1;

C_{Tol} - parâmetro de tolerância para variação da flexibilidade média;

A proposta do Filtro Máximo (SANDERS, RAMOS JR.; PAULINO, 2017), realiza uma busca automática do valor do máximo filtro α_f que promova a extração de uma topologia que respeite o equilíbrio e também a uma variação limite no valor da função objetivo. É válido destacar que as propostas de Ramos Jr. e Paulino (2016) Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017) foram feitas de forma que a filtragem possa ser realizada durante o processo otimização. Contudo neste trabalho o filtro é aplicado apenas ao final do processo de otimização, com a finalidade de se obter a solução topológica de barras mais simples possível, e com menos barras finas.

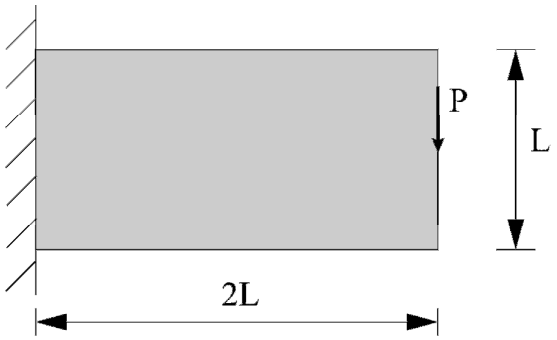
CAPÍTULO 4
RESULTADOS

Este capítulo apresenta, inicialmente, as soluções topológicas para o Método da Densidade (MD) e para o Método da Estrutura Base (MEB) para um exemplo, como forma de se analisar as vantagens e desvantagens de ambos os métodos, quando se deseja obter os caminhos de força em elementos de concreto armado. Posteriormente, são apresentados os resultados obtidos pelas implementações dos métodos propostos: o Método da Densidade Reforçado (MDR) e o Método Híbrido, com modelo de material isotrópico e ortotrópico.

4.1 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS CLÁSSICOS

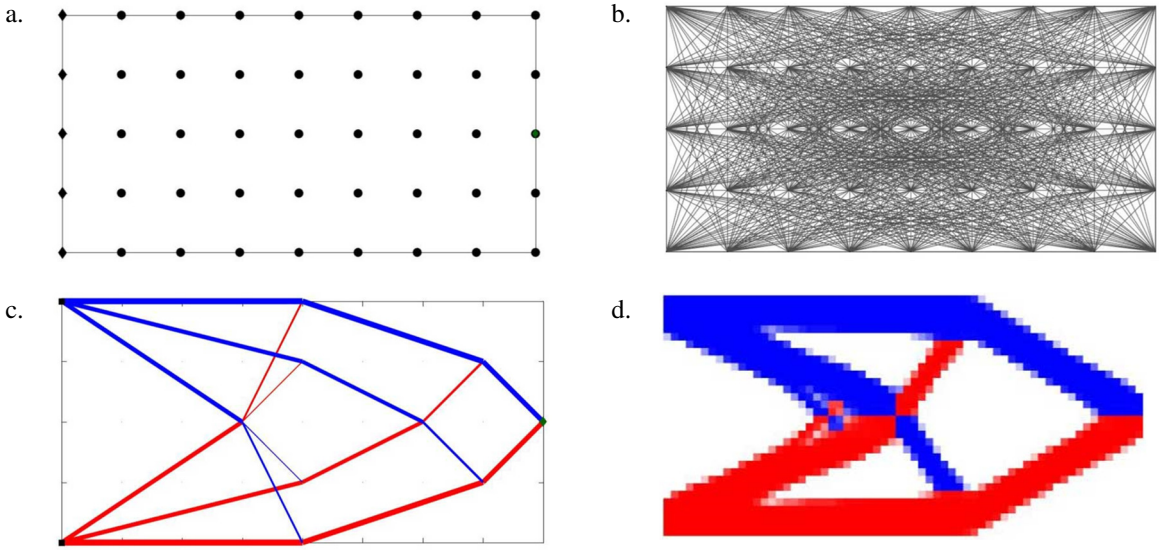
O exemplo consiste em uma viga engastada em uma das extremidades e livre na outra com uma carga pontual aplicada no meio da extremidade livre, conforme é apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Viga com dimensões de 2L x L.



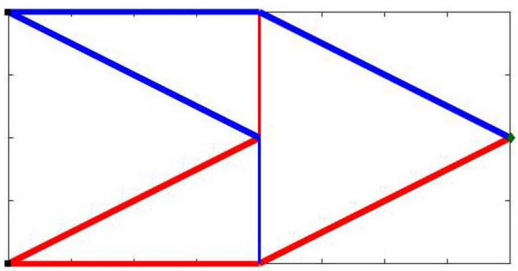
Neste exemplo, foi utilizado L igual 4. Para utilização do MEB, adotou-se uma grade de 8x4, apresentada na Figura 4.2 (a) e grau de conectividade 8, resultando na estrutura base apresentada na Figura 4.2 (b).Com aplicação do filtro máximo proposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017) no final do processo de otimização, a solução topológica obtida é apresentada na Figura 4.2 (c). Para otimização pelo MD, definiu-se uma malha de 64 x 32 elementos, com fator de penalização 3 e um volume máximo igual a 40% do volume inicial presente no domínio, resultando na solução indicada na Figura 4.2 (d).

Figura 4.2 – Solução pelos métodos clássicos: (a) Grade de nós para geração da estrutura base; (b) Estrutura base; (c) Solução pelo MEB; (d) Solução pelo MD.



Pode-se verificar pela Figura 4.2 que as soluções obtidas por ambos métodos possuem caminhos de força semelhantes, contudo é importante destacar alguns aspectos. Uma vez que o filtro de sensibilidade é aplicado ao MD, a solução topológica obtida deixa de apresentar dependência com a malha de elementos finitos utilizada. Em contrapartida, a solução obtida pelo MEB é limitada pela estrutura base utilizada, o que torna o problema dependente da malha. Para obter caminhos de força bem definidos pelo MEB, é necessário que se utilize uma grade de nós mais refinada e um grau de conectividade alto. Contudo, quando o MEB é utilizado com a finalidade de obter o reforço em aço de um elemento em concreto armado, é mais vantajoso, do ponto de vista construtivo, que se utilize uma estrutura base mais simples. Como exemplo, a Figura 4.3 apresenta a solução obtida pelo MEB adotando uma grade de nós 2x2 e grau de conectividade 1, para o problema apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.3 – Solução topológica pelo MEB, com utilização de uma estrutura base gerada com uma grade de nós de 2x2 e grau de conectividade 1.



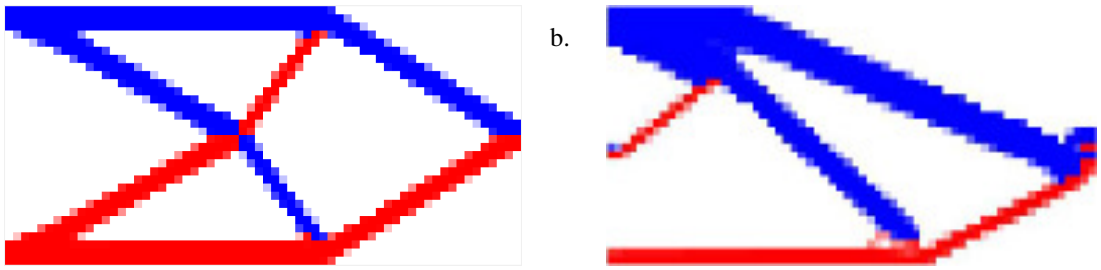
4.2 MÉTODO DA DENSIDADE REFORÇADO

Para apresentação do Método da Densidade Reforçado (MDR), inicialmente é discutida a influência da redução do módulo de elasticidade à tração do material sobre a solução final obtida. Posteriormente é aplicada a proposta do MDR ao mesmo exemplo, como forma de avaliar isoladamente a influência da presença das barras na determinação dos caminhos de força na região de concreto, representada pelos elementos de estado plano. O problema numérico é o apresentado na Figura 4.1, na qual foi utilizada uma malha de 64x32 elementos.

A Figura 4.4 apresenta as soluções obtidas com aplicação da abordagem clássica do Método de Densidade. Contudo a solução apresentada na Figura 4.4 (a) foi obtida com utilização de um material com comportamento linear (E_c= E_t= 2,4e7 kN/m²), enquanto a solução apresentada na Figura 4.4 (b) foi obtida com a utilização de um material com comportamento bilinear, de acordo com a Figura 3.1 do Capítulo 3 (E_c= 2,4e7 kN/m²; E_t= 2,0e6 kN/m²). O problema foi analisado com uma fração de volume de 30% sobre o volume inicial presente no domínio.

Figura 4.4 - Soluções obtidas pelo MD clássico com: (a) Modelo de material linear; (b) Modelo de material bilinear

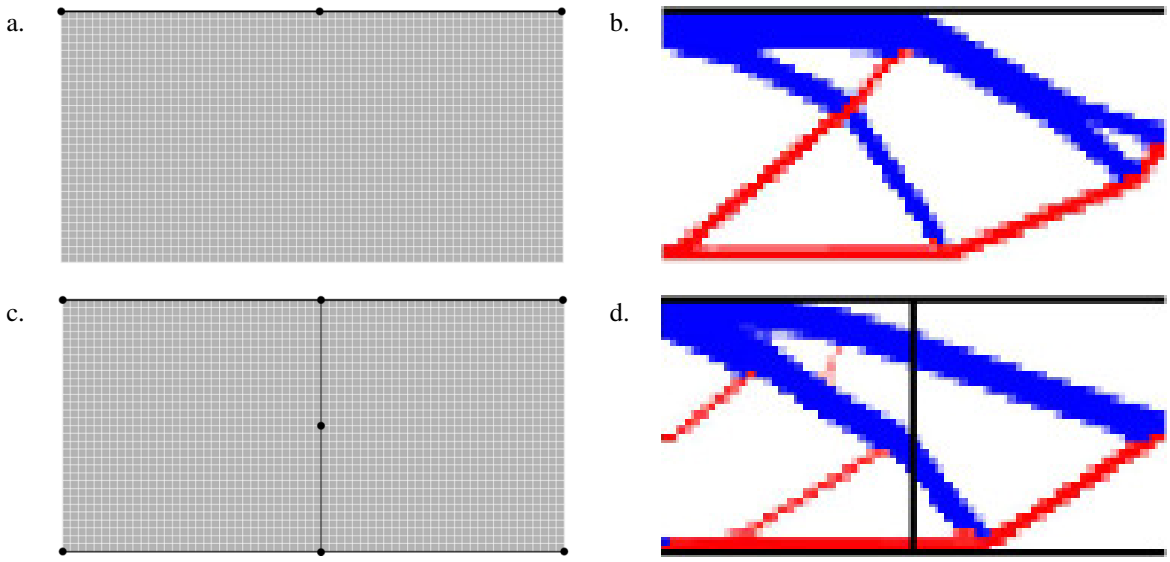
a. b.



É relevante destacar, através das soluções topológicas apresentadas na Figura 4.4, que a redução do valor do módulo de elasticidade dos elementos submetidos a um estado de tensão de tração apresentou influência na determinação da configuração final obtida. Na solução apresentada na Figura 4.4 (a), a distribuição de material entre os elementos tracionados e comprimidos foi igual devido à simetria do problema. Contudo, na solução apresentada na Figura 4.4 (b), 73,8% do material a ser distribuído está presente entre os elementos tracionados e 26,2% entre os elementos comprimidos. O aumento da quantidade de material na região tracionada ocorre com a finalidade de compensar a redução da rigidez de cada elemento pela redução do módulo de elasticidade mantendo a rigidez global da estrutura, o que promoveu a alteração da topologia final obtida para garantir o equilíbrio da estrutura.

A Figura 4.5 apresenta as soluções topológicas obtidas com aplicação do MDR para o mesmo exemplo (Figura 4.1) com fração de volume de 30% e com o modelo de material bilinear (E_c= 2,4e7 kN/m²; E_t= 2,0e6 kN/m²). A aplicação do MDR foi realizada para 2 configurações de reforço diferentes, conforme indicado pelas Figuras 4.5 (a) e (c).

Figura 4.5 – Aplicação do MDR: (a) Configuração de reforço 01; (b) Solução obtida com uso da configuração de reforço 01; (c) Configuração de reforço 02; (d) Solução obtida com uso da configuração de reforço 02.



A Figura 4.5 indica que a presença de barras incorporadas na malha de elementos de densidade altera a solução topológica obtida. Esta alteração é justificada pelo fato de que há um aumento de rigidez nos nós da malha conectados aos elementos de barra, o que permite uma redistribuição de material, conforme apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Distribuição de material entre os elementos tracionados e comprimidos

	Sem reforço	**Configuração de reforço 01**	**Configuração de reforço 02**
Elementos tracionados	73.8%	71.1%	72.4%
Elementos comprimidos	26.2%	28.1%	27.6%

Logo, a presença das barras no interior de um domínio de concreto influencia os caminhos de força de tração e compressão, haja vista que nas regiões onde se tem a presença de barras de aço há maior concentração de tensão e, por consequência, de material.

4.3 MÉTODO HÍBRIDO

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos com a implementação do método híbrido, com modelo de material isotrópico e com modelo de material ortotrópico.

A Tabela 4.2 apresenta os parâmetros relacionados ao algoritmo de otimização que foram utilizados em comum para todos os exemplos apresentados a seguir.

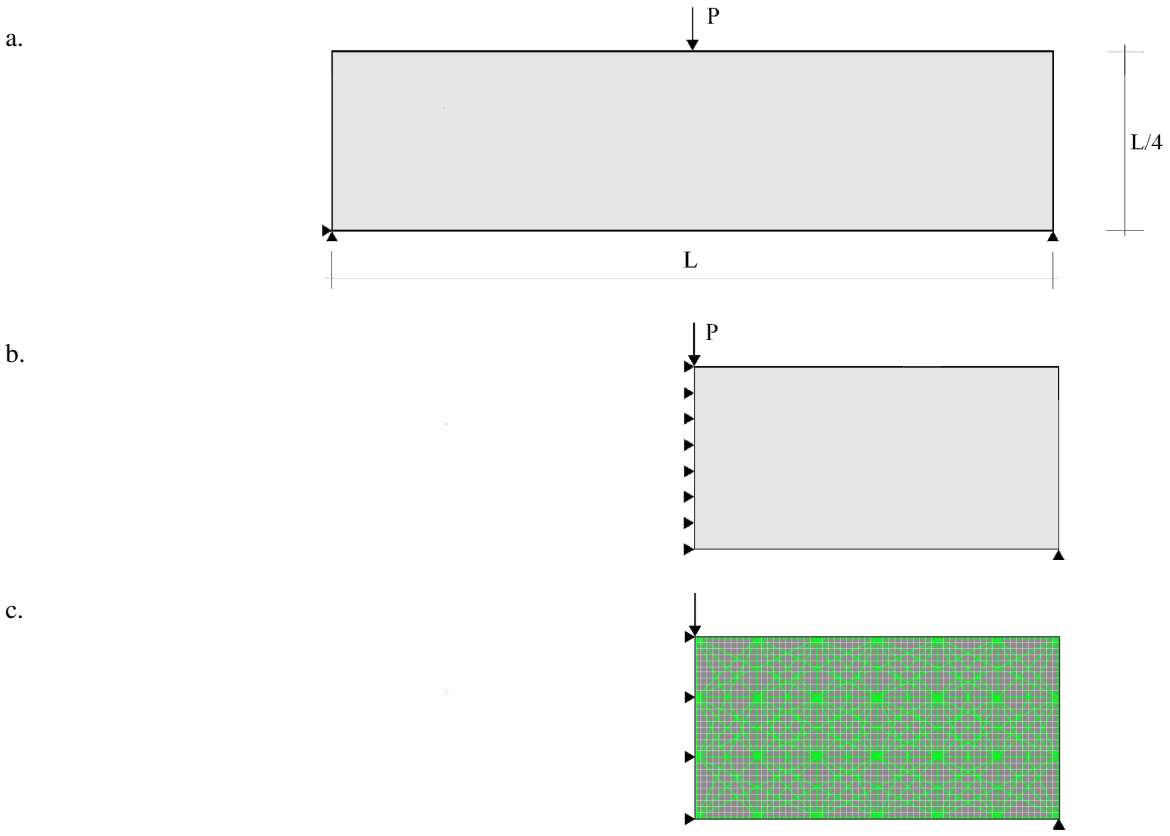
Tabela 4.2 - Parâmetros utilizados no algoritmo para aplicação do Método Híbrido

Parâmetros de convergência	Convergência do algoritmo	1e-5
	Convergência do OC	1e-3
	Limite móvel (*m*)	0,0009
	Nº máximo de iterações	3000
Parâmetros relacionados à análise estrutural	Parâmetro de Tikhonov (λ)	1e-12
	Detecção de equilíbrio (*Tol*)	1e-7-
Propriedades dos elementos	Valor máximo de área para elementos de barra ($A_{máx}$)	$A_{média}.10^4$
	$r_{mín}$ (filtro de sensibilidade)	1,5 elementos
Propriedades dos materiais	Ec (Concreto)	2,4e7 kN/m²
	Et (Concreto)	2,0e6 kN/m²
	ν (Concreto)	0,2
	Ec (Aço)	2,0e8 kN/m²
	Et (Aço)	0,0e0 kN/m²

4.3.1 Exemplo 01: Viga biapoiada com carga concentrada no meio do vão

O exemplo 01 consiste em uma viga biapoiada com uma carga concentrada aplicada na face superior no meio do vão, conforme representado na Figura 4.6 (a). Para geração da malha híbrida, foi adotada uma malha de 60x30 de elementos contínuos e, para geração da estrutura-base, uma malha de 6x3, com nível de conectividade igual a 2, de acordo com a Figura 4.6 (c).

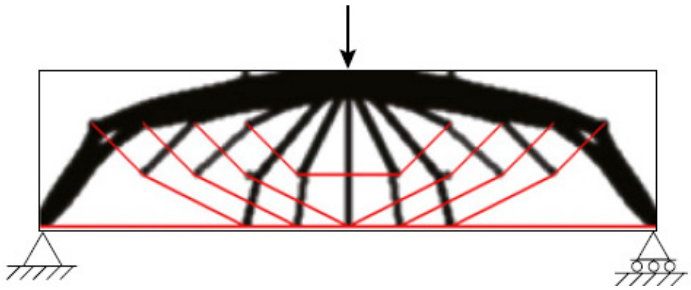
Figura 4.6 - Exemplo 01: (a) Problema estrutural (b) Domínio de projeto; (c) Malha híbrida.



Os valores de L e P, indicados na Figura 4.6 (a), correspondem à 2,5 m e 100 kN, respectivamente.

A fim de validar o algoritmo implementado, foi realizada uma comparação do resultado obtido com a solução topológica apresentada no artigo de Gaynor, Guest e Moen (2013), a qual está apresentada na Figura 4.7.

Figura 4.7 - Solução topológica utilizada para validação do Exemplo 01

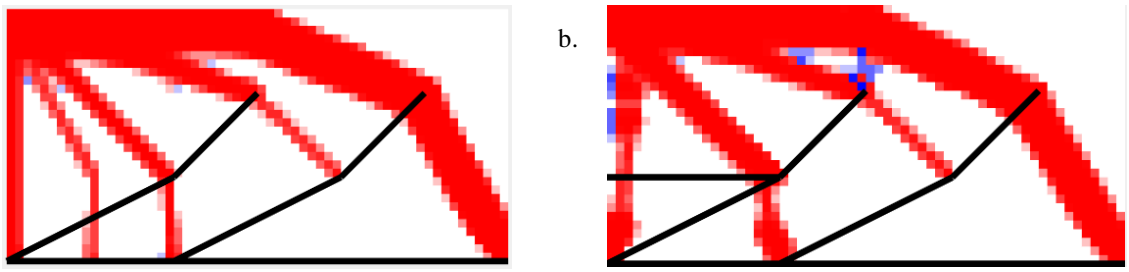


Fonte: Gaynor, Guest e Moen (2013)

As soluções pelo método híbrido, com os modelos de materiais isotrópico e ortotrópico são apresentadas nas Figuras 4.8 (a) e 4.8 (b), respectivamente. O problema foi analisado com uma fração de volume de 40% sobre o volume inicial presente no domínio.

Figura 4.8 - Exemplo 01 - Soluções topológicas pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico. (b) Modelo de material ortotrópico

a. b.



A partir da Figura 4.8, pode-se verificar que os caminhos de força de compressão foram representados pelos campos de tensão de compressão dos elementos contínuos de forma livre, e os caminhos de força de tração às barras da estrutura base utilizada.

É necessário destacar, pela Figura 4.8 (b), a presença de elementos contínuos com uma máxima tensão principal de tração, formando um tirante, onde não havia a presença de um elemento barra para exercer tal função mecânica.

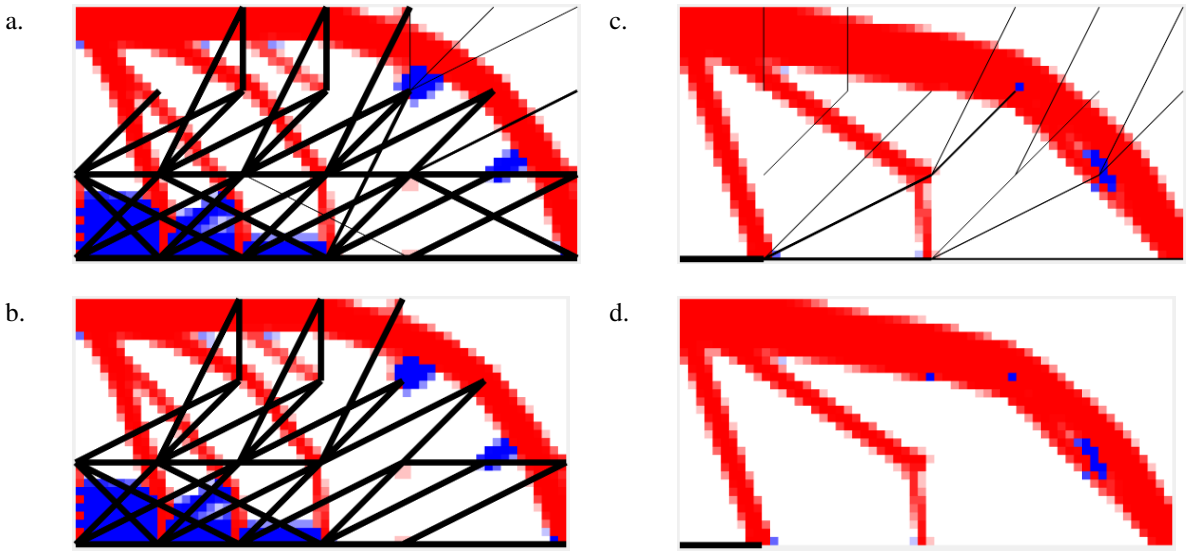
A solução obtida, Figura 4.8 (b), se assemelha com a apresentada por Gaynor, Guest e Moen (2013), Figura 4.7, sendo que pequenas diferenças podem ser justificadas por diferenças de implementação. Neste trabalho foi utilizado como algoritmo de otimização o OC e como correção das sensibilidades dos elementos contínuos o filtro de sensibilidade, enquanto no trabalho de Gaynor, Guest e Moen (2013) foi utilizado como algoritmo de otimização o método das assíntotas móveis e como correção das sensibilidades dos elementos contínuos o esquema de projeção,

A fim de comparar as soluções obtidas, é realizada a comparação da distribuição de material entre os elementos contínuos e os elementos de barra. A solução obtida com o uso de modelo de material isotrópico (Figura 4.8 (a)), apresentou uma distribuição de material de 90,857% entre os elementos contínuos e 9,143% entre os elementos de barra, enquanto quando utilizado o modelo de material ortotrópico, a distribuição de material entre os elementos foi de 89,717% entre os elementos contínuos e 10,283% entre os elementos de barra. Visualmente, a diferença entre as soluções obtidas pelo modelo de material isotrópico e pelo modelo de material

ortotrópico consistiu, principalmente, na concentração dos caminhos de força de compressão no interior do domínio quando utilizado o modelo de material ortotrópico.

Neste exemplo, também, foi realizado um estudo da influência do valor de área máxima das barras ($A_{máx}$) na solução topológica final. Para este, foi avaliado, com uso do modelo de material isotrópico, as soluções finais utilizando 3 valores de $A_{máx}$: 0,002 m²; 0,02 m² e 2 m². A solução com $A_{máx}$ igual a 0,02 m² foi a apresentada, previamente, na Figura 4.8 (a). As demais soluções estão presentes na Figura 4.9.

Figura 4.9 – Influência do valor de $A_{máx}$ na solução topológica final: (a) Solução final sem aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 0,002; (b) Solução final após aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 0,002; (c) Solução final sem aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 2; (d) Solução final após aplicação do filtro máximo com uso de Amáx igual a 2;



A partir da análise das soluções da Figura 4.9, pode-se verificar que o valor de área $A_{máx}$ apresenta influência na solução topológica final. A utilização de um valor de $A_{máx}$ igual a 0,002 promoveu uma solução final com um grande número de barras com o valor de área igual ao limite superior, Figura 4.9 (a), a fim de aumentar a rigidez global da estrutura na região tracionada, lembrando que os elementos contínuos possuem um módulo de elasticidade à tração reduzido. Além disso, a solução obtida com uso do valor de $A_{máx}$ igual a 0,002 apresentou elementos contínuos na região tracionada para contribuir com a rigidez global da estrutura, compensando a baixa rigidez promovida pela presença das barras. Em contrapartida, ao utilizar um valor de $A_{máx}$ igual a 2, a solução final, Figura 4.9 (c), apresentou um pequeno número de barras, sendo que apenas uma delas possuía um valor igual ao limite superior imposto. Deste

modo, a aplicação do filtro máximo ao final do processo de otimização promoveu eliminação de grande parte das barras da solução, conforme ilustrado na Figura 4.9 (d).

Deve-se destacar que a aplicação do filtro máximo ao final do processo de otimização elimina os elementos de barras garantindo, em um de seus critérios durante a busca pelo método da bissecção, que a solução topológica extraída respeite a tolerância imposta da norma residual de equilíbrio. Contudo, o filtro proposto por Sanders, Ramos Jr. e Paulino (2017) tem aplicação direcionada com a utilização do método da estrutura base, promovendo a eliminação apenas dos elementos de barra. Conforme observado pela Figura 4.10 (d), a aplicação do filtro com a utilização do método híbrido, eliminou todas as barras que não possuíram um valor de área igual ao limite superior $A_{máx}$, haja vista que a remoção das demais barras promoveu uma baixa redução na norma residual de equilíbrio. Isto é justificado pela não eliminação dos elementos contínuos que também pouco contribuem com a função objetivo, haja vista que é atribuída uma densidade mínima aos elementos contínuos a fim de se evitar a formação de singularidades na matriz de rigidez da estrutura. Deste modo, tem-se a necessidade de uma adaptação no filtro máximo para sua aplicação no Método Híbrido a fim de que seja levado em consideração os elementos de barra e os elementos contínuos. Assim, a avaliação do equilíbrio da estrutura seria realizada na topologia extraída como um todo, não considerando a rigidez acrescentada pelo valor mínimo de densidade atribuída aos elementos contínuos.

A Tabela 4.3 apresenta a distribuição de material entre os elementos contínuos e os elementos de barra com a variação do valor de $A_{máx}$. Pode-se verificar que a utilização de um valor elevado ou reduzido de limite superior promove uma redução da porcentagem de material entre os elementos de barras. Este fato pode ser justificado pela observação das soluções apresentadas na Figura 4.9, uma vez que ao utilizar um valor de $A_{máx}$ reduzido, conforme apresentado na Figura 4.9 (b), um grande número de barras está presente na solução final, contudo com um baixo valor de área. Em contrapartida, a utilização de um valor de $A_{máx}$ elevado, conforme apresentado na Figura 4.9 (d), resultou em uma solução com uma barra com um elevado valor de área.

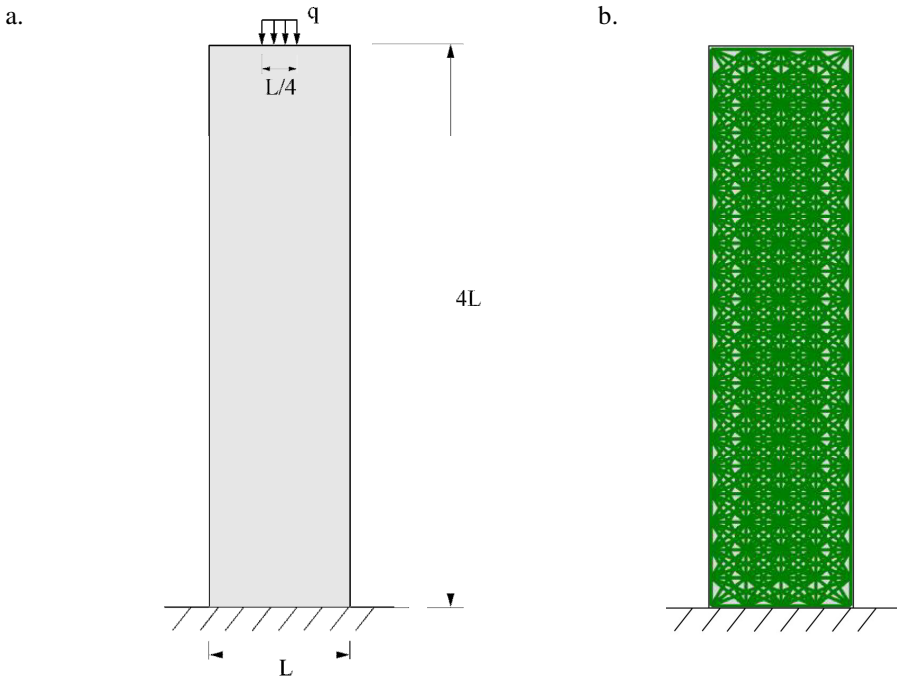
Tabela 4.3 – Distribuição de material entre os elementos contínuos e os elementos de barra

Amáx	**Elementos de barra**	**Elementos contínuos**
0,002	3.815%	96.185%
0,020	9.143%	90.857%
2,000	3.381%	96.619%

4.3.2 Exemplo 02: Pilar comprimido

O exemplo 02 consiste em um pilar, com carga de compressão aplicada no topo, conforme ilustrado na Figura 4.10 (a). Para geração da malha híbrida, foi adotada uma malha de 20x80 de elementos contínuos e, para geração da estrutura-base, uma malha de 4x20, com nível de conectividade igual a 2, de acordo com a Figura 4.10 (b).

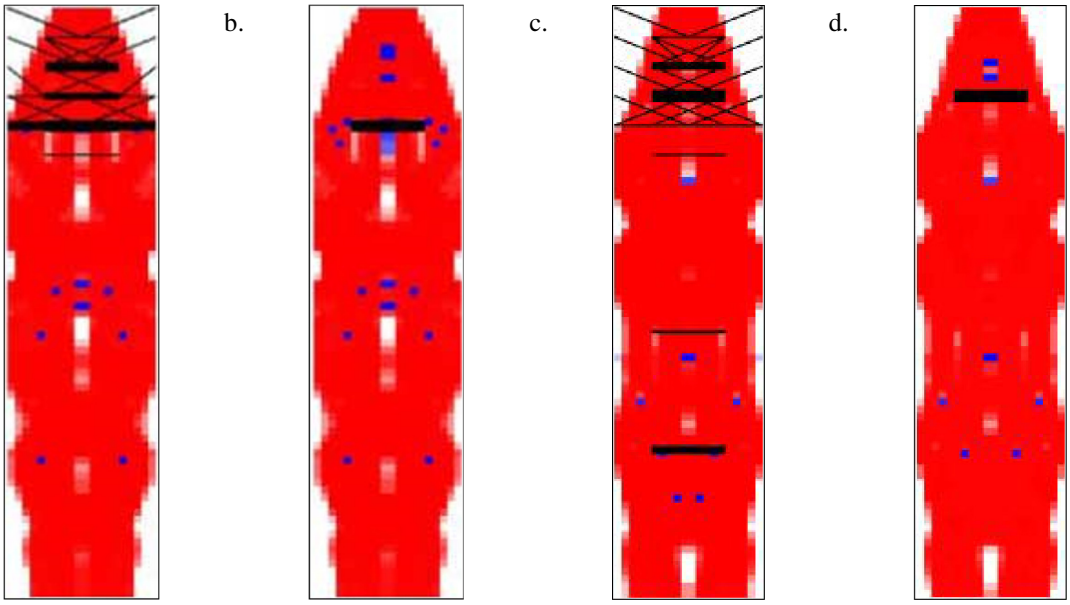
Figura 4.10 - Exemplo 02: (a) Domínio de projeto; (b) Malha híbrida



As soluções pelo método híbrido, com os modelos de materiais isotrópico e ortotrópico são apresentadas na Figura 4.11, antes e após a etapa do filtro máximo ao final do processo de otimização. O problema foi analisado com uma fração de volume de 85% sobre o volume inicial presente no domínio.

Figura 4.11 - Exemplo 02 - Soluções topológicas pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo.

a. b. c. d.



Pela comparação das soluções obtidas, apresentadas na Figura 4.11, observa-se que o uso de ambos modelos resultou em soluções semelhantes para este exemplo. A solução obtida com o uso de modelo de material isotrópico (Figura 4.11 (b)), apresentou uma distribuição de material de 99,8526% entre os elementos contínuos e 0,1474% entre os elementos de barra, enquanto quando utilizado o modelo de material ortotrópico (Figura 4.12 (1)), a distribuição de material entre os elementos foi de 99,8536% entre os elementos contínuos e 0,1464% entre os elementos de barra.

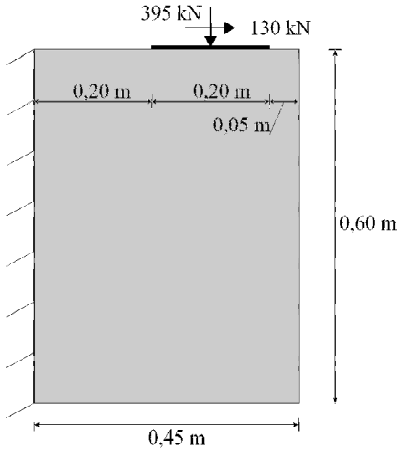
Destaca-se, também, a presença de uma barra na região do topo do pilar, onde ocorre tensões de tração devido ao fenômeno de espraiamento dos caminhos de força de compressão, com uso de ambos modelos de material.

4.3.3 Exemplo 03: Consolo

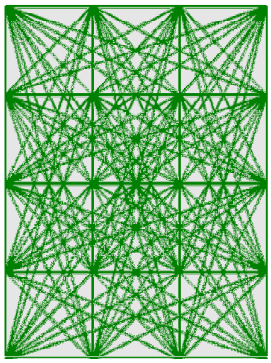
O exemplo 3 consiste em um consolo com dimensões e carregamentos conforme indicado na Figura 4.12 (a). Para geração da malha híbrida, foi adotada uma malha de 60x80 de elementos contínuos e, para geração da estrutura-base, uma malha de 3x4, com nível de conectividade igual a 4, de acordo com a Figura 4.12 (b).

Figura 4.12 - Exemplo 03: (a) Domínio de projeto; (b) Malha híbrida

a.



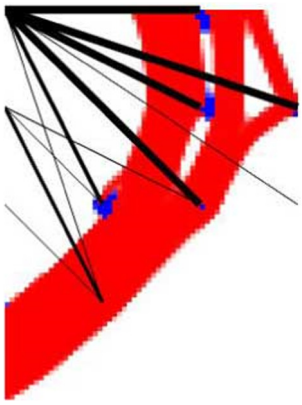
b.



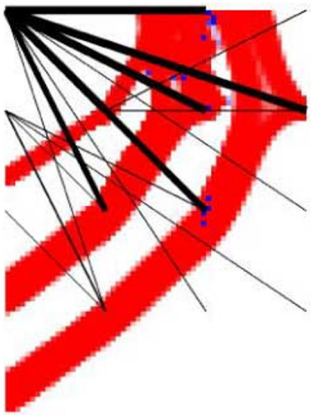
As soluções pelo método híbrido, com os modelos de materiais isotrópico e ortotrópico são apresentadas na Figura 4.13. O problema foi analisado com uma fração de volume de 40% sobre o volume inicial presente no domínio.

Figura 4.13 - Exemplo 03 - Soluções topológicas pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo.

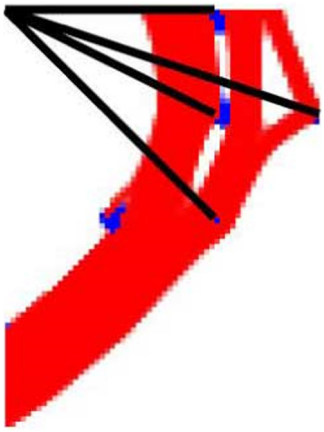
a.



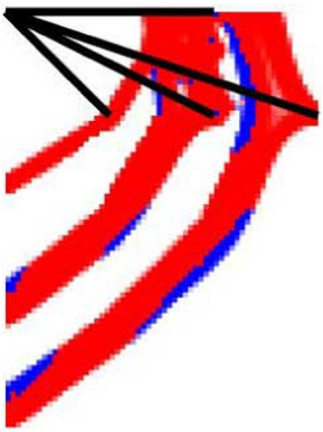
c.



b.



d.



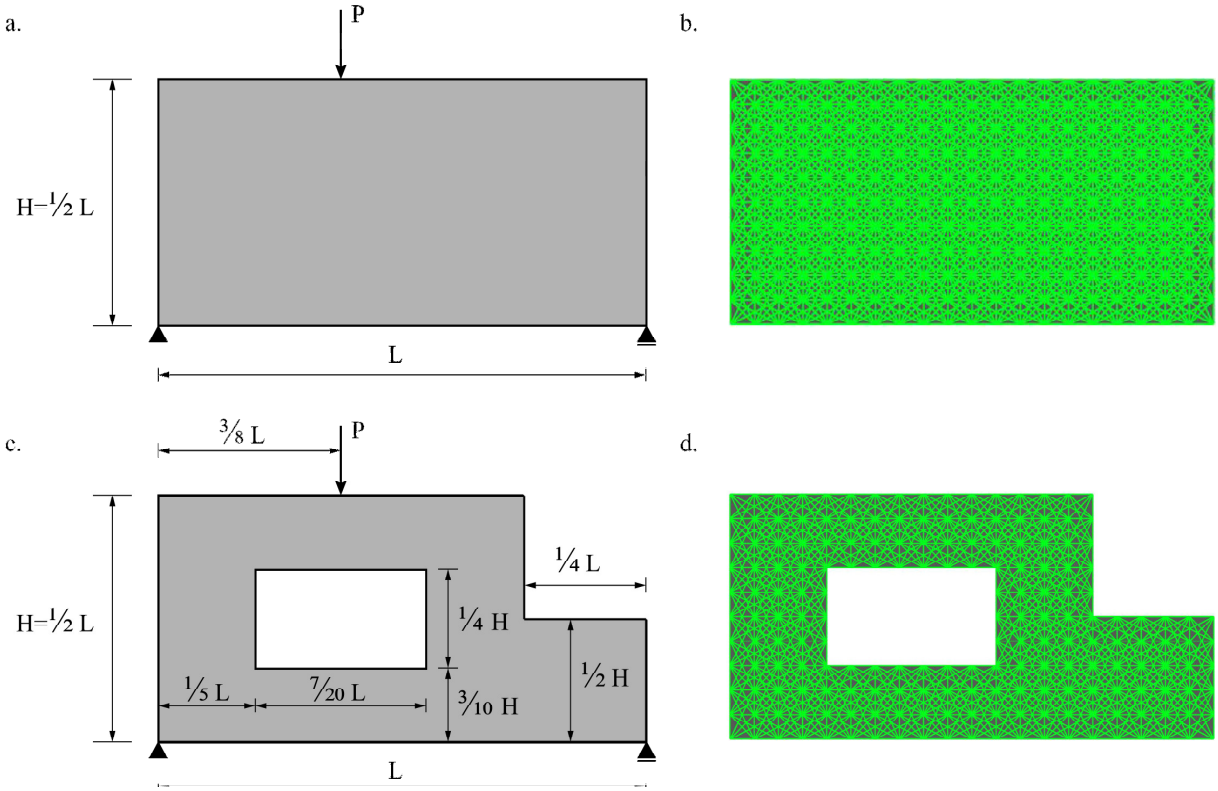
Conforme apresentado pela Figura 4.13, na solução obtida com modelo de material isotrópico, formou-se um caminho de força de compressão concretado, enquanto na solução com modelo de material ortotrópico, os caminhos de força de compressão se dividiram em 3. A distribuição de material entre os elementos contudo foi próxima, uma vez que a solução obtida com o uso de modelo de material isotrópico (Figura 4.13 (b)), apresentou uma distribuição de material de 90,1092% entre os elementos contínuos e 9,8908% entre os elementos de barra, enquanto quando utilizado o modelo de material ortotrópico (Figura 4.13 (d)), a distribuição de material entre os elementos foi de 91,3732% entre os elementos contínuos e 8,6268% entre os elementos de barra.

É importante destacar, também, a presença de elementos contínuos com um estado de tensão de tração após a filtragem das barras na solução obtida com uso do modelo de material ortotrópico, conforme apresentado na Figura 4.13 (d). Esta ocorrência evidencia novamente a questão já mencionada no exemplo 01, presente no item 4.3.1, de que é necessário adaptar o filtro máximo para sua aplicação no Método Híbrido de modo que ele leve em consideração os elementos de barra e os elementos contínuos.

4.3.4 Exemplo 04: Viga parede com furo e recorte

O exemplo 04 consiste em uma viga parede com presença de um furo e um recorte, conforme ilustrado na Figura 4.14 (c). Para geração da malha híbrida, foi adotada uma malha de 120x60 de elementos contínuos e, para geração da estrutura-base, uma malha de 20x10, com nível de conectividade igual a 2, de acordo com a Figura 4.14 (d). A fim de se avaliar a influência do furo e do recorte nos caminhos de força, também foi analisada a viga parede maciça, conforme apresentado na Figura 4.14 (a)

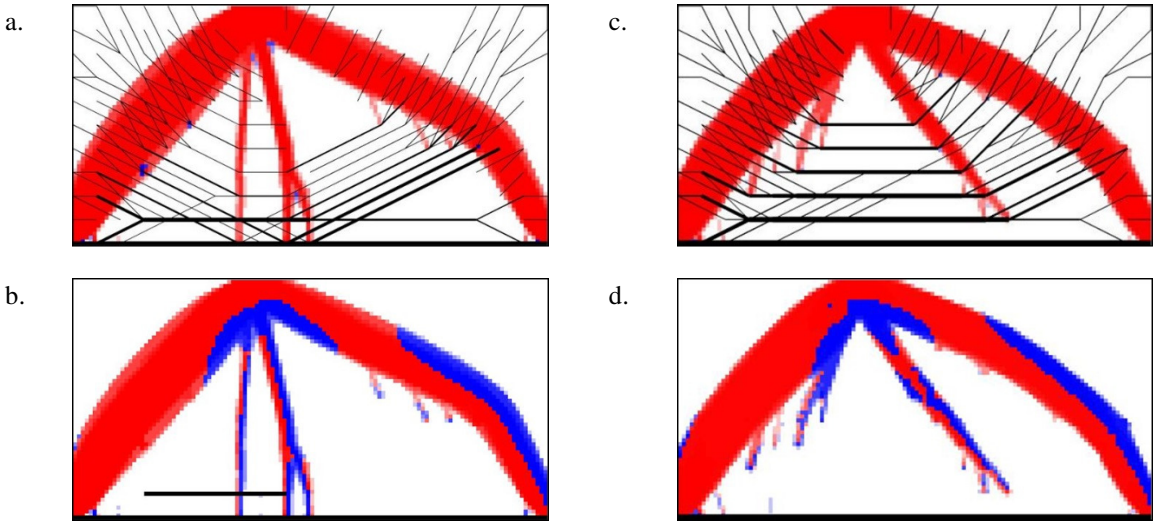
Figura 4.14 - Exemplo 04: (a) Domínio de projeto para viga parede maciça; (b) Malha híbrida para viga parede maciça; (c) Domínio de projeto para viga parede com presença de furo e recorte; (d) Malha híbrida para viga parede com presença de furo e recorte



Os valores de L e P, indicados na Figura 4.14, correspondem à 5 m e 100 kN, respectivamente.

Primeiramente, são apresentadas as soluções pelo método híbrido, com os modelos de materiais isotrópico e ortotrópico, para a viga parede maciça na Figura 4.15. O problema foi analisado com uma fração de volume de 35% sobre o volume inicial presente no domínio.

Figura 4.15 - Exemplo 04 - Soluções topológicas da viga parede maciça pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo.

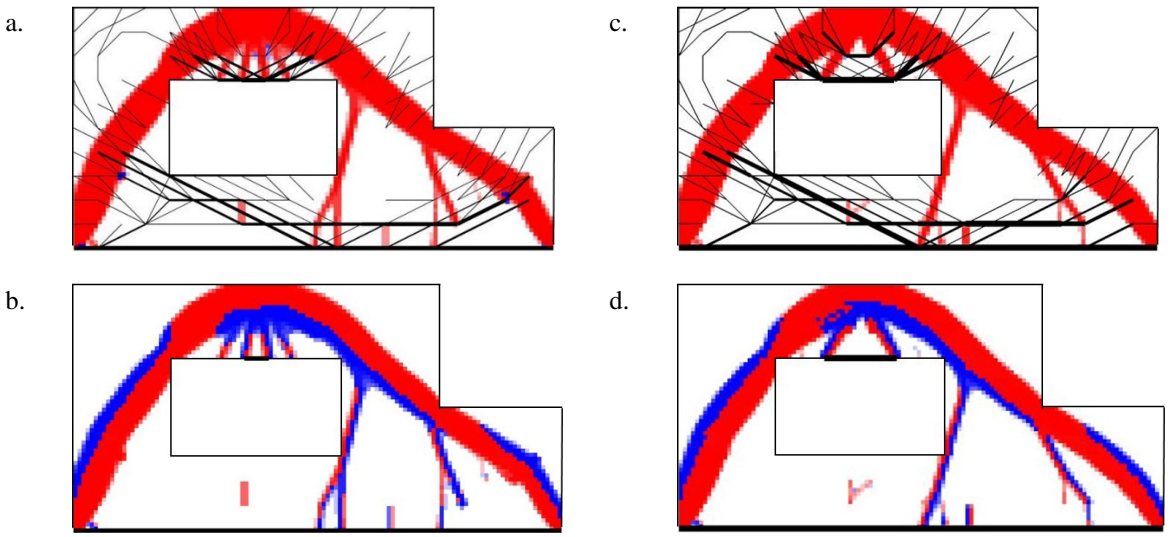


As soluções apresentadas pelo método híbrido com ambos modelos de material possuem uma distribuição de material entre os elementos contínuos e elementos de barra semelhante. Na solução final com uso do modelo de material isotrópico, tem-se que 96,7198% do material está presente entre os elementos contínuos e 3,2802% entre os elementos de barra. Na solução final com uso do modelo de material ortotrópico, 97,4419% do material está entre os elementos contínuos e 2,5581% entre os elementos de barra. Embora haja apenas uma pequena diferença entre a distribuição de material, é notória a distinção entre os caminhos de força obtidos com ambos modelos de material. O uso do modelo de material ortotrópico, Figura 4.15 (c), resultou em um caminho de força de compressão na região interior, representando a biela comprimida, com uma inclinação mais acentuada. Além disso, a solução topológica de barras apresenta o aumento das áreas das barras de acordo com a sua proximidade da face inferior da viga, onde ocorrem as máximas tensões de tração.

É importante destacar novamente a necessidade de adaptação do filtro máximo para sua aplicação no método híbrido. Observa-se na solução filtrada com uso de modelo de material isotrópico, Figura 4.15 (b), que há a presença de uma barra com nó isolado, o que só ocorre sem acusação de perda de equilíbrio devido à presença da rigidez provida pelos elementos contínuos na região próxima ao nó da barra com uma densidade de material igual ao limite inferior imposto à variável.

A Figura 4.16 apresenta as soluções topológicas pelo método híbrido com modelos de material isotrópico e ortotrópico para a viga parede com presença de um furo e um recorte. As soluções também foram obtidas utilizando-se uma fração de volume de 35% sobre o volume inicial presente no domínio.

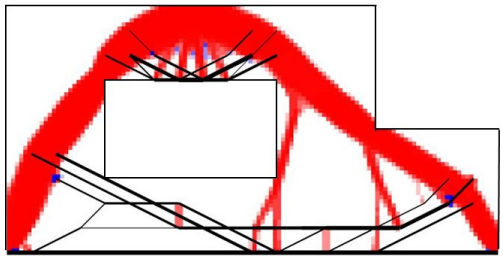
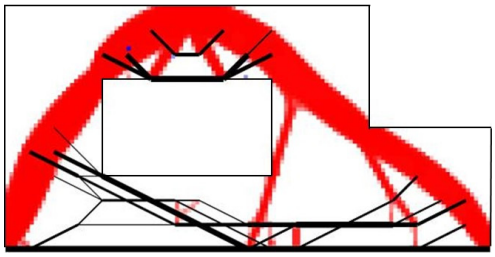
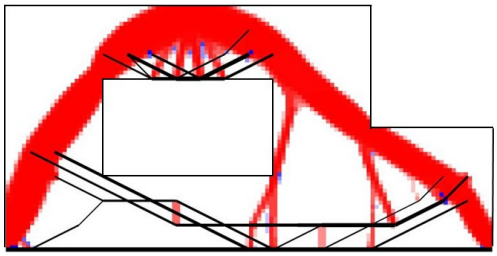
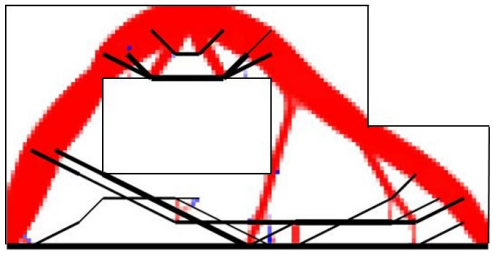
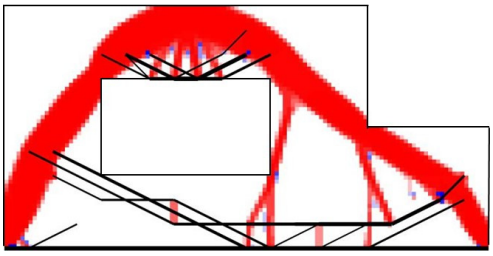
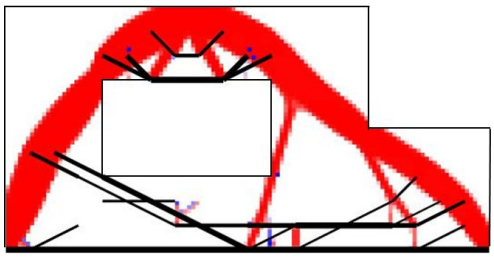
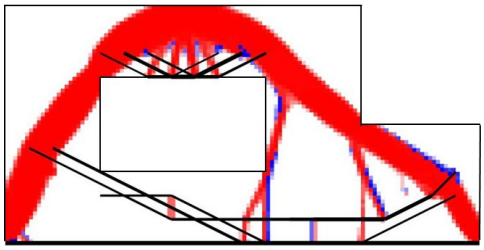
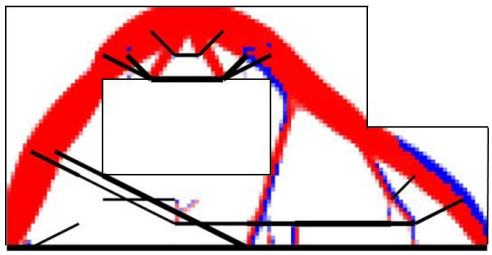
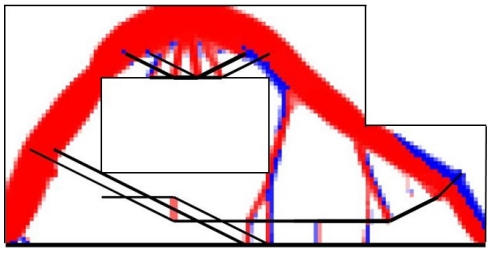
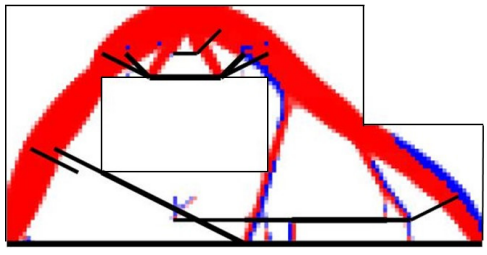
Figura 4.16 - Exemplo 04 - Soluções topológicas da viga parede com furo e recorte pelo método híbrido: (a) Modelo de material isotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (b) Modelo de material isotrópico após a etapa do filtro máximo; (c) Modelo de material ortotrópico anterior a etapa do filtro máximo; (d) Modelo de material ortotrópico após a etapa do filtro máximo.

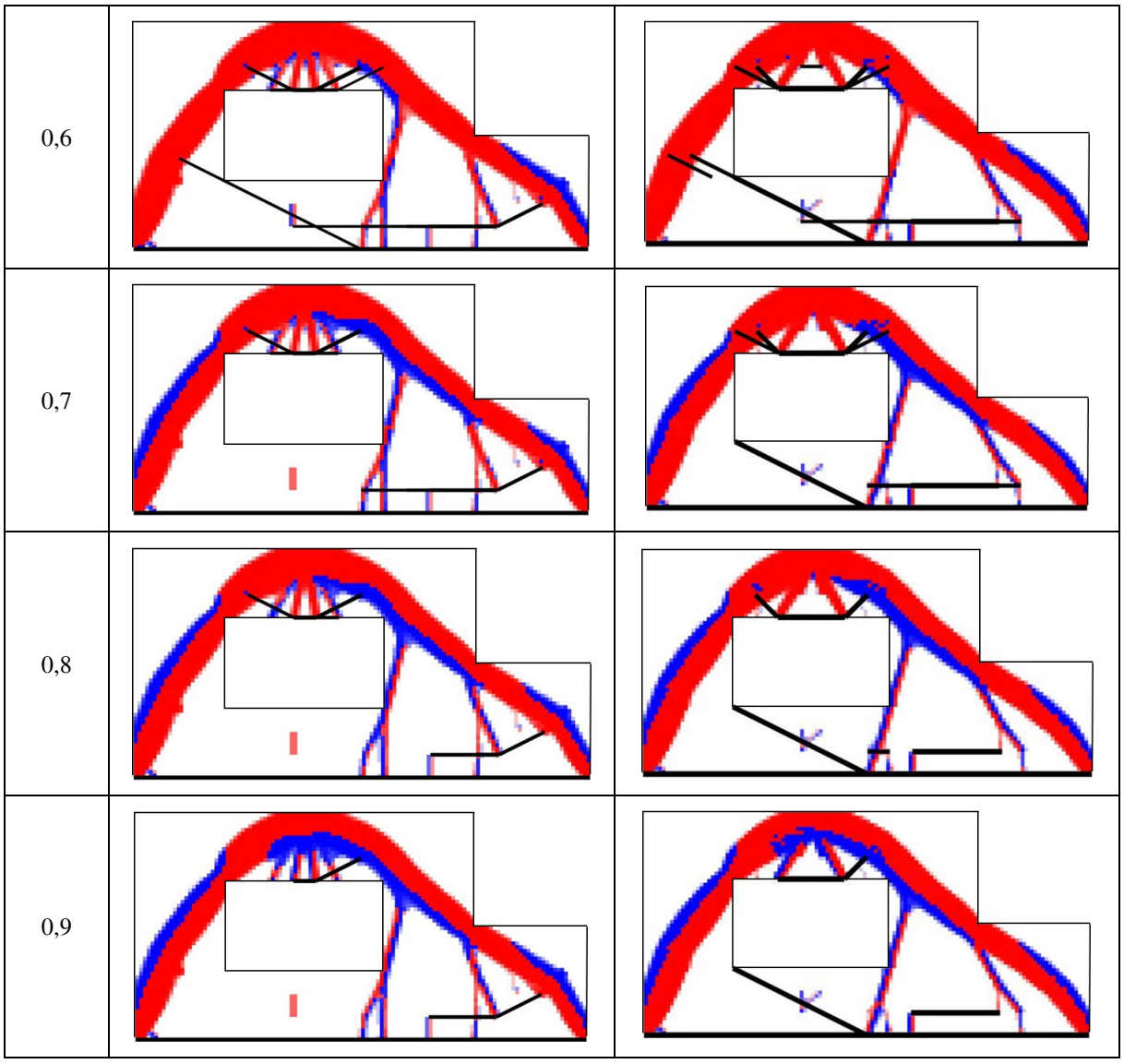


Através da comparação com as soluções apresentadas na Figura 4.15 para a viga parede maciça, observa-se na Figura 4.16 a influência da presença do furo e do recorte na determinação dos caminhos de força.

Assim como para os demais exemplos apresentados, nas soluções presentes na Figura 4.16, o filtro máximo promoveu a eliminação de todas as barras com valor de área inferior ao limite superior imposto. A fim de realizar uma análise sobre o processo de filtragem das barras, a Figura 4.17 apresenta o comportamento da topologia final a medida que o valor do filtro é aumentado e, consequentemente, os elementos de barras são retirados.

Figura 4.17 - Exemplo 04 - Soluções topológicas da viga parede com furo e recorte pelo método híbrido com modelos de material isotrópico e ortotrópico para diferentes valores de filtro

Cut-off	Modelo de material isotrópico	Modelo de material ortotrópico
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		
0,5		



Evidencia-se, novamente, pela Figura 4.17 a necessidade de adaptação do processo de filtragem para aplicação no Método Híbrido. A presença de elementos de contínuos, formando uma ilha, abaixo da região do furo sem detecção de perda de equilíbrio só é possível pelo fato dos elementos adjacentes possuírem rigidez. Além disso, é possível visualizar que a medida que os elementos de barra são retirados, os campos de tensões de tração passam a surgir nos elementos contínuos, indo em contrapartida a proposta do método híbrido, o qual possui como objetivo que os elementos contínuos representem os caminhos de força de compressão e os elementos de barra os caminhos de força de tração.

CAPÍTULO 5
CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta técnicas de otimização topológica com a finalidade de se obter de forma automática os caminhos de força em estruturas de concreto armado. Uma vez levantado os aspectos negativos relacionados à aplicação dos métodos clássicos de OT para esta finalidade, são apresentadas técnicas alternativas: o Método da Densidade Reforçado (MDR) e o Método Híbrido (MH).

Através da aplicação do MDR em um exemplo numérico, é atestado que a presença de barras no interior do domínio de concreto apresenta influência na determinação dos caminhos de força de compressão e tração.

A contribuição principal deste trabalho consistiu em uma ferramenta de obtenção automática da visualização dos caminhos de força em estruturas de concreto armado, através de uma formulação híbrida de otimização de topologia, a qual se mostrou eficiente, com a análise dos resultados obtidos. Contudo, foi verificado que a aplicação do filtro máximo no MH para simplificação da solução topológica de barras, que representa o reforço em aço, tem necessidade de ser adaptado, de forma que seja considerado os elementos contínuos durante a etapa de extração da topologia. Assim, uma proposta para trabalhos futuros consiste na investigação de melhorias no filtro máximo para aplicação no MH.

Os resultados obtidos pelo MH, também indicam que a utilização dos modelos de material isotrópico e ortotrópico possuem influência na solução topológica final. Sendo válido destacar que embora o modelo de material ortotrópico utilizado, proposto por Darwin e Pecknold (1974), represente melhor o comportamento mecânico do concreto em um estado biaxial de tensões, há críticas ao uso de modelos de materiais ortotrópicos para aplicação no MEF.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAZANT, Z. P. Comment on orthotropic model for concrete and geomaterials. **Journal of Engineering Mechanics**, v.109, n.3, 1983, p. 849-865.

BENDSØE, M. P. Optimal shape desing as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v.34, n.2, p. 1-20, 1989.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural desing using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.71, n.2, p.197-224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization:** Theory, Methods, and Applications.2. ed. New York: Springer, 2004. 370 p.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An introduction to structural optimization**. 1.ed. Linköping: Springer, 2009. 213 p.

DARWIN, D; PECKNOLD, D. A. W. **Inelastic model for cyclic bixial loading of reinforced concrete**. 1974. 176 f. Tese. Universidade de Illinois, Illinois, 1974.

GAYNOR, A. T.; GUEST J. K.; MOEN C. D. Reinforced concrete force visualization and desing using bilinear truss-continuum topology optimization. **Journal of Structural Engineering**, v.139, n.4, 2013, p. 607-618.

OHSAKI, M. **Optimization of finite dimensional structures**. 2.ed. Boca Raton: CRC Press, 2011, 420 p.

PAPADRAKIS, M.; TSOMPANAKIS, Y.; HILTON, E.; SIENZ, J. Advanced solution methods in topology optimization and shape sensitivity analysis. **Engineering Computations**, v.13, n.5, p. 57-90.

RAMOS JR, A. S.; PAULINO, G. H. Filtering structures out of ground structures - a discrete filtering tool for structural design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 54, n. 1, p. 95-116, 2016.

SANDERS, E. D.; RAMOS JR, A. S.; PAULINO, G. H. A maximum filter for the ground structure method: An optimization tool to harness multiple structural designs. **Engineering Structures**, v. 151, n. 1, p. 235-252, 2017.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.1, p. 120-127, 2001.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.16, n. 1, p. 68-75, 1998.

STROMBERG, L. L.; BEGHINI, A.; BAKER, W. F.; PAULINO, G. H. Topology optimization for braced frames: Combining continuum and beam/column elements. **Engineering Structures**, v.37, p. 106-124, 2011.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.89, n.1-3, p. 309-336, 1991.

APÊNDICE A
MODELO DE MATERIAL ORTOTRÓPICO

O modelo proposto por Darwin e Peckhold (1974) foi desenvolvido para ser usado em conjunto com o método dos elementos finitos, e para um caso de carga cíclica. Logo, o trabalho original apresenta uma formulação incremental, onde o material é tratado como um material linear elástico a cada incremento de carga. Como neste trabalho o carregamento é estático, a formulação apresentada a seguir será simplificada parte este tipo de carregamento em específico.

Desconsiderando as deformações cisalhantes inicialmente, as relações entre tensões e deformações para um material linear ortotrópico são apresentadas em (A.1).

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_1\,\nu_2}\begin{bmatrix}E_1 & \nu_2\,E_1\\ \nu_1\,E_2 & E_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{Bmatrix} \tag{A.1}$$

Onde:

σ_1 - Tensão normal na direção principal 1;
σ_2 - Tensão normal na direção principal 2;
ν_1 - Coeficiente de Poisson na direção principal 1;
ν_2 - Coeficiente de Poisson na direção principal 2;
ε_1 - Deformação normal na direção principal 1;
ε_2 - Deformação normal na direção principal 2;
E_1 - Módulo de Elasticidade na direção principal 1;
E_2 - Módulo de Elasticidade na direção principal 2.

A partir de considerações de energia, tem-se (A.2).

$$\nu_1\,E_2 = \nu_2\,E_1 \tag{A.2}$$

A fim de simplificar (A.1) e fazer com que nenhuma das direções seja favorecida, impõe-se (A.3).

$$v^2 = \nu_1 \nu_2 \tag{A.3}$$

Sendo ν o coeficiente de Poisson equivalente, o qual se mantém dependente do estado de tensão no qual o elemento está submetido. A partir das relações apresentadas em (A.2) e (A.3), (A.1) pode ser reescrita conforme apresentado em (A.4).

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_1\,\nu_2}\begin{bmatrix}E_1 & v\sqrt{E_2\,E_1}\\ v\sqrt{E_2\,E_1} & E_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{Bmatrix} \tag{A.4}$$

Expandindo (A.4) a fim de incluir a deformação cisalhante, tem-se (A.5).

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix} = \frac{1}{1-v^2}\begin{bmatrix}E_1 & v\sqrt{E_2\,E_1} & 0\\ v\sqrt{E_2\,E_1} & E_2 & 0\\ 0 & 0 & (1-v^2)G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix} \tag{A.5}$$

Sendo que (A.5), pode ser escrita de forma simplificada, conforme (A.6).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{A.6}$$

Assim como foi destacado ao incluir a relação (A.3) sobre os coeficientes de Poisson, nenhuma direção em particular deve ser favorecida ao incluir a rigidez ao cisalhamento. Uma forma satisfatória de se resolver essa situação é obtida através da observação do efeito da rotação dos eixos por um ângulo θ sobre a matriz constitutiva **D**. A matriz constitutiva descrita ao longo do novo sistema de coordenadas é obtida através da operação (A.7).

$$\mathbf{D'} = \mathbf{Q}^T\,\mathbf{D}\;\mathbf{Q} \tag{A.7}$$

Onde a matriz **Q**, é a matriz de rotação do sistema de eixos de deformações principais para o sistema de eixos global, apresentada em (A.8).

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}(cos\,\theta)^2 & (sin\,\theta)^2 & sin\,\theta\,cos\,\theta\\ (sin\,\theta)^2 & (cos\,\theta)^2 & -sin\,\theta\,cos\,\theta\\ -2\,sin\,\theta\,cos\,\theta & 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta & (cos\,\theta)^2-(sin\,\theta)^2\end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Para um valor de ângulo θ arbitrário, o termo correspondente a rigidez cisalhante, nomeado como *Dcis*, pode ser calculado por (A.9).

$$Dcis = \frac{\sin\theta^2 \cos\theta^2}{1-\nu^2}\left(E_1 - \upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) - \frac{\sin\theta^2 \cos\theta^2}{1-\nu^2}\left(-E_2 + \upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) + (\cos\theta^2 - \sin\theta^2)^2\, G \tag{A.9}$$

Simplificando a expressão (A.9), obtém-se (A.10).

$$Dcis = \frac{\sin\theta^2 \cos\theta^2}{1-\nu^2}\left(E_1 + E_2 - 2\upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) + (\cos\theta^2 - \sin\theta^2)^2\, G \tag{A.10}$$

A condição (A.11) é imposta a fim de que o termo *Dcis* não dependa da orientação do sistema de eixos.

$$Dcis = \frac{1}{1-\nu^2} G\,(1-\nu^2) \longrightarrow Dcis = G \tag{A.11}$$

Substituindo (A.11) em (A.10) e realizando manipulações algébricas, tem-se (A.12) e por fim (A.13).

$$G(1 - (\cos\theta^2 - \sin\theta^2)^2) = \frac{\sin\theta^2 \cos\theta^2}{1-\nu^2}\left(E_1 + E_2 - 2\upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) \tag{A.12}$$

$$4\sin\theta^2 \cos\theta^2\, G = \frac{\sin\theta^2 \cos\theta^2}{1-\nu^2}\left(E_1 + E_2 - 2\upsilon\sqrt{E_1E_2}\right)$$

$$G = \frac{1}{4(1-\nu^2)}\left(E_1 + E_2 - 2\upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) \tag{A.13}$$

A matriz constitutiva apresentada em (A.5) pode ser reescrita, substituindo o termo da terceira linha e terceira coluna por (A.13), obtendo-se (A.14).

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix} E_1 & \upsilon\sqrt{E_2E_1} & 0 \\ \upsilon\sqrt{E_2E_1} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\left(E_1 + E_2 - 2\upsilon\sqrt{E_1E_2}\right) \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

É válido destacar que a matriz constitutiva é determinada com o uso dos valores de E_1, E_2 e ν, sendo estes obtidos em função do estado de tensão em cada ponto, na orientação do sistema de deformações principais, conforme apresentado no item 3.2.3.2 deste trabalho. Para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos, essa matriz deve ser rotacionada para o sistema global de coordenadas, operação feita com uso da equação (A.7). A fim justificar a operação indicada em (A.7) e o motivo do eixo de ortotropia ser o sistema de eixos de deformações principais, parte-se da operação de rotação dos tensores de tensão e deformação, apresentados em (A.15) e (A.16), respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (cos\,\theta)^2 & (sin\,\theta)^2 & 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta \\ (sin\,\theta)^2 & (cos\,\theta)^2 & -2\ sin\,\theta\,cos\,\theta \\ -sin\,\theta\,cos\,\theta & sin\,\theta\,cos\,\theta & (cos\,\theta)^2 - (sin\,\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{A.15}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (cos\,\theta)^2 & (sin\,\theta)^2 & sin\,\theta\,cos\,\theta \\ (sin\,\theta)^2 & (cos\,\theta)^2 & -\ sin\,\theta\,cos\,\theta \\ -2\,sin\,\theta\,cos\,\theta & 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta & (cos\,\theta)^2 - (sin\,\theta)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{A.16}$$

De forma matricial, as operações (A.15) e (A.16) são reescritas conforme (A.17) e (A.18).

$$\boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{Q}_\sigma\, \boldsymbol{\sigma}_g \tag{A.17}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_l = \mathbf{Q}_\varepsilon\, \boldsymbol{\varepsilon}_g \tag{A.18}$$

O índice *l* indica que o tensor é definido no sistema local, neste caso no sistema de ortotropia, e o índice *g* indica que o tensor é definido no sistema global. Além disso, destaca-se, por meio das equações (A.17) e (A.18), que a operação de rotação de tensões e deformações são distintas, logo o sistema principal de deformações não é o mesmo que o sistema principal de tensões. Contudo, embora haja esta distinção entre as operações de rotação de tensão e deformação, é possível encontrar uma relação entre as matrizes de rotação através da consideração de que a energia interna de deformação calculada no sistema local ($U_{i,l}$) é a mesma que a calculada no sistema global ($U_{i,g}$), conforme (A.19).

$$U_{i,l} = U_{i,g} \rightarrow\ \boldsymbol{\sigma}_l^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_l = \boldsymbol{\sigma}_g^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_g \tag{A.19}$$

Aplicando (A.17) em (A.19), obtém-se (A.20), a qual após simplificações algébricas resulta em (A.21).

$$\mathbf{Q}_{\sigma}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\sigma}_{g}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{l}=\boldsymbol{\sigma}_{g}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{g} \tag{A.20}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{l}=(\mathbf{Q}_{\sigma}^{\mathrm{T}})^{-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{g} \tag{A.21}$$

Comparando a equação (A.21) com a (A.18), obtém-se uma relação entre as matrizes de rotação, conforme (A.22).

$$\mathbf{Q}_{\varepsilon}=(\mathbf{Q}_{\sigma}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{A.22}$$

Partindo da relação constitutiva no sistema local, apresentada em (A.23), aplica-se as operações de rotação indicadas em (A.17) e (A.18), obtendo (A.24).

$$\boldsymbol{\sigma}_{l}=\mathbf{D}_{l}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{l} \tag{A.23}$$

$$\mathbf{Q}_{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}_{g}=\mathbf{D}_{l}\;\mathbf{Q}_{\varepsilon}\;\boldsymbol{\varepsilon}_{g} \tag{A.24}$$

Simplifica-se (A.24) multiplicando ambos lados por $\mathbf{Q}_{\sigma}^{-1}$ resultando em (A.25).

$$\boldsymbol{\sigma}_{g}=\mathbf{Q}_{\sigma}^{-1}\,\mathbf{D}_{l}\;\mathbf{Q}_{\varepsilon}\;\boldsymbol{\varepsilon}_{g} \tag{A.25}$$

Aplicando a relação entre as matrizes de rotação (A.22) em (A.25), tem-se (A.26).

$$\boldsymbol{\sigma}_{g}=\mathbf{Q}_{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{D}_{l}\;\mathbf{Q}_{\varepsilon}\;\boldsymbol{\varepsilon}_{g} \tag{A.26}$$

Logo, a matriz constitutiva é calculada no sistema global através da operação (A.27).

$$\mathbf{D}_{g}=\mathbf{Q}_{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{D}_{l}\;\mathbf{Q}_{\varepsilon} \tag{A.27}$$

Pelo fato da operação de rotação da matriz constitutiva do sistema de ortotropia para o sistema global utilizar a matriz de rotação do tensor de deformações, o sistema de ortotropia adotado foi o sistema de deformações principais.

APÊNDICE B
CRITÉRIO DE OTIMALIDADE

O algoritmo de otimização utilizado neste trabalho é o OC (do inglês *Optimality Criteria*), o qual consiste em um método heurístico proposto por Bendsoe (1989). Segundo Bendsoe (1995), o ponto chave do método é conceber um método iterativo que atualize as variáveis de projeto relacionadas a cada elemento finito de forma independente da atualização entre os demais elementos, baseando-se nas condições de otimalidade necessárias. A seguir é apresentado concepção do esquema de atualização pelo OC, a partir do problema apresentado em (B.1).

$$
\begin{aligned}
&Obter: && \mathbf{x} \\
&Que\ minimiza: && c(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) \\
&Tal\ que: && \sum_{i=1}^{nel} x_i\, V_i = V_{max} \\
& && 0 < x_i^{min} \le x_i \le x_i^{max}, \qquad i = 1, \ldots, nel \\
&com: && \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Onde:

x - vetor de variáveis de projeto;

V_i - volume de material relativo ao elemento finito *i*;

V_{max} - volume máximo final a ser atingido;

x_i^{min} - limite inferior da restrição dos valores das variáveis de projeto admissíveis;

x_i^{max} - limite superior da restrição dos valores das variáveis de projeto admissíveis;

K - matriz de rigidez da estrutura;

U - vetor de deslocamentos nodais;

F - vetor de forças nodais da estrutura.

A função Lagrangeana do problema (B.1), é apresentada em (B.2):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_{sup}, \boldsymbol{\lambda}_{inf}, \lambda_{vol}, \boldsymbol{\mu}) \\ = \mathrm{c}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}\,(\mathbf{K}(\mathbf{x})\,\mathbf{U}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}) + \lambda_{vol}\left(\sum_{i=1}^{nel} x_i\,V_i - V_{max}\right) \\ + \sum_{i=1}^{nel} \lambda_{sup,i}\,(x_i - x^{max}) + \sum_{i=1}^{nel} \lambda_{inf,i}\,(x^{min} - x_i)\end{aligned} \tag{B.2}$$

Onde:

$\boldsymbol{\lambda}_{sup}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições laterais superiores;

$\boldsymbol{\lambda}_{inf}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições laterais inferiores;

λ_{vol} - multiplicador de Lagrange associados à restrição de volume;

$\boldsymbol{\mu}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação de equilíbrio.

Haja vista que a formulação adotada é aninhada, na qual a restrição de equilíbrio é satisfeita durante a etapa de análise estrutural, e que o método de atualização das variáveis de projeto respeita os limites impostos aos valores das variáveis de projeto, a função Lagrangeana apresentada em (B.2) pode ser simplificada conforme (B.3).

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_{vol}) = \mathrm{c}(\mathbf{x}) + \lambda_{vol}\left(\sum_{i=1}^{nel}(x_i\,V_i - V_{max})\right) \tag{B.3}$$

Aplicando as condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) em (B.3), obtêm-se (B.4).

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_{vol})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathrm{c}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \lambda_{vol}\,V_e = 0 \tag{B.4}$$

Onde, V_e corresponde a somatória dos volumes dos elementos finitos.

Conforme apresentado no Capítulo 2 deste trabalho, o valor da sensibilidade da função objetivo, que corresponde a primeira parcela obtida da derivada da função Lagrangeana em relação à variável de projeto, é calculada por (B.5).

$$\frac{\partial \mathrm{c}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -\,\mathbf{U}_{\boldsymbol{i}}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \mathbf{K}(\mathrm{x})}{\partial x_i}\,\mathbf{U}_{\boldsymbol{i}}(\mathbf{x}) \tag{B.5}$$

Substituindo (B.5) em (B.4), obtém-se (B.6).

$$-\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\,\mathbf{U}(\mathbf{x})+\lambda_{vol}\,V_e=0 \tag{B.6}$$

A equação (B.6) pode ser reescrita como (B.7).

$$B_m=\frac{\mathbf{U}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\,\mathbf{U}(\mathbf{x})}{\lambda_{vol}\,V_e}=1 \tag{B.7}$$

O termo B_m, apresentado em (B.7), possui como significado físico que a densidade da energia interna de deformação será constante através do domínio de projeto para cada elemento finito, deste modo a busca sobre o multiplicador de Lagrange é realizada de forma que a energia interna de deformação se torne constante (CHRISTENSEN E KLARBRING, 2009).

Por fim, o esquema heurístico para atualização das variáveis de projeto, proposto por Bensoe (1995), segue a expressão (B.8).

$$x_{(k+1)}^{i}=\begin{cases}\max\left(x^{min},x_i-m\right), se & x_i{B_m}^{\eta}\le\max\left(x^{min},x_i-m\right)\\ x_i{B_m}^{\eta}, se & \max\left(x^{min},x_i-m\right)<x_i{B_m}^{\eta}<\min(x^{max},x_i+m)\\ \min(x^{max},x_i+m), se & \min(x^{max},x_i+m)\le x_i{B_m}^{\eta}\end{cases} \tag{B.8}$$

Onde η é um coeficiente de amortecimento. Este, segundo Bendsoe (1995), tem como objetivo desacelerar o processo de convergência do método, como forma de estabilizar a geração da topologia ótima. Além disso, para evitar que mudanças bruscas ocorram nas distribuições de material, um parâmetro *m* (*move*) é inserido, com a funcionalidade de ser um limite móvel para os valores das variáveis de projeto.