

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS**

**ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**Análise de Treliça Espacial Constituída de  
Material Hiperelástico**

**Vinícius Augusto Fonseca Garcia**

**GOIÂNIA, 2018**

Vinícius Augusto Fonseca Garcia

# Análise de Treliça Espacial Constituída de Material Hiperelástico

Projeto de pesquisa apresentada ao Curso de Engenharia Civil da  
Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de  
Engenheiro Civil

Orientadora: Prof. Dra. Renata Machado Soares

GOIÂNIA, 2018

Vinícius Augusto Fonseca Garcia

Análise de Treliça Espacial Constituída de Material Hiperelástico

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Engenheiro Civil

Orientadora: Prof. Dra. Renata Machado Soares

Aprovada em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

---

Prof. Dra. Renata Machado Soares  
(Presidente)

---

Prof. Dr. Zenón José G N del Prado

---

Prof. Dr. Ademir Aparecido do Prado

Avisto que as revisões solicitadas foram feitas

---

Orientador

Em: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

## **Resumo**

A treliça é um elemento estrutural composto de um arranjo estável de barras delgadas interligadas (LEET, 2009). Nesse elemento estrutural, as barras somente são solicitadas a esforços axiais de compressão e de tração, não havendo momento entre as barras e pinos da estrutura. Por causa dessa característica de trabalhar somente a esforços axiais, é analisado o comportamento da treliça espacial a respostas lineares e não lineares quando submetida a esforços estáticos. Além disso, as barras da treliça são constituídas de material hiperelástico, que possuí a característica de grandes deformações, os modelos constitutivos de materiais hiperelásticos que são utilizados na análise desse trabalho são o Mooney-Rivlin e o neo-Hookeano. Essa análise será realizada via Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando-se o software comercial ABAQUS® para se obter o comportamento estrutural da treliça espacial quando composta de material hiperelástico, modelado como Mooney-Rivlin e sua simplificação neo-Hookeano, isotrópico, incompressível e homogêneo. Sendo assim, como resultado é esperado obter a frequência natural da treliça; a carga crítica; e o caminho não-linear de equilíbrio para os modelos constitutivos neo-Hookeano e Mooney-Rivlin e também são comparados os resultados entre os modelos constitutivos. Sendo assim, é percebido que quanto mais esbelta a treliça menor é a diferença entre a frequência dos modelos constitutivos; maior é a diferença entre a carga limite e a carga crítica e quando se compara dois métodos diferentes para se obter as cargas limites, também aumenta a diferença entre as cargas limites. Por último, é destacado um comportamento diferente em relação ao caminho não linear para quando a treliça é esbelta

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> – Ponte Hans Wilsdorf, Genebra, Suíça.....	10
<b>Figura 1.2</b> – Exemplos de posições estáticas e equilíbrio. ....	12
<b>Figura 2.1</b> – Relação de equilíbrio para bifurcação.....	18
<b>Figura 2.2</b> – Relação de equilíbrio para snap-through. ....	19
<b>Figura 3.1</b> - Vistas da treliça espacial.....	24
<b>Figura 4.1</b> – Direções e dimensões das treliças .....	25
<b>Figura 4.2</b> - Curva da frequência ao quadrado pela carga aplicada.....	26
<b>Figura 4.3</b> - Relação carga por deslocamento na direção z do nó do topo. ....	28
<b>Figura 4.4</b> – Relação da carga ( <b>P</b> ) com o deslocamento/altura (w/H).....	31

## **LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela 4.1</b> – Relação da frequência .....	25
<b>Tabela 4.2</b> – Relação entre a carga limite e crítica .....	28
<b>Tabela 4.3</b> – Relação das cargas limites .....	30

## **LISTA DE SÍMBOLOS**

$W$  - Função densidade de energia

$C_1$  - Constante do material

$C_2$  - Constante do material

$\alpha$  - Relação entre  $C_2/C_1$

$I_1$  - Primeiro invariante de deformação

$I_2$  - Segundo invariante de deformação

$L$  - Comprimento da barra

$D$  - Diâmetro da barra

$B$  - Abertura da base da treliça

$H$  - Altura da treliça

$\gamma$  - Peso específico do material

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

MEF – Método dos Elementos Finitos

# **SUMÁRIO**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.1	Treliças Espaciais .....	11
1.2	Estabilidade Estrutural .....	11
1.3	Material Elastomérico.....	12
1.4	Método dos Elementos Finitos (MEF).....	13
1.5	Justificativa .....	14
1.6	Objetivos .....	15
1.6.1	Objetivos Específicos.....	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>16</b>
2.1	Treliça .....	16
2.2	Material elastomérico e Método dos elementos finitos (MEF) .....	20
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA E MÉTODOS .....</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>35</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As treliças espaciais são amplamente utilizadas na construção civil principalmente em construções de galpões, armazéns e pontes, com geometrias retangulares, lineares e circulares, como por exemplo a mostrada na Figura 1.1

**Figura 1.1** – Ponte Hans Wilsdorf, Genebra, Suíça.



Fonte: imagem do site engenhariacivil.com

Pelo fato das treliças tornarem a estrutura mais leve, estável e resultar em uma economia para o empreendimento por utilizar menos material para sua construção, cada vez mais ganham mercado como uma alternativa na construção civil. No entanto, como elemento estrutural, as treliças estão sujeitas a flambagem, pois suas barras são submetidas à esforços axiais. Caso tais esforços forem de compressão e atingirem o valor de carga crítica o fenômeno de flambagem ocorre.

Já os estudos sobre materiais hiperelásticos é uma área da ciência mais recente do que as treliças e que os estudos estão sendo mais aprofundados. Os materiais hiperelásticos podem ser utilizados em vários elementos estruturais como: membranas, cascas cilíndricas, anéis e barras que compõe a treliça, como é o caso do presente trabalho.

Além disso, para uma análise detalhada de qualquer estrutura, tal como uma treliça espacial, os métodos numéricos, como por exemplo o Método dos Elementos Finitos (MEF), são metodologias eficazes para obter-se o comportamento linear e não-linear da estrutura, para cargas pré e pós críticas e verificar fenômenos como a flambagem.

## 1.1 Treliças Espaciais

A treliça, também denominada estrutura reticulada de nós rotulados, é formada por barras retas bi-rotuladas, sob forças externas apenas nas rótulas, de maneira a ocorrer apenas esforço normal, de tração ou compressão. Naturalmente, trata-se de uma idealização, por não existir rótula perfeita e pelo fato de sempre atuar peso próprio das barras (SORIANO, 2013).

A treliça espacial é um tipo de estrutura reticulada espacialmente, pois possui barras em três dimensões para lhe dar o intertravamento necessário da estrutura para sua estabilidade. De acordo com Souza e Gonçalves (2006), as treliças espaciais são formadas por duas ou mais malhas planas, em geral paralelas, que são conectadas por meio de diagonais verticais ou inclinadas. Nas treliças espaciais, assim como nas treliças planas, as barras são dimensionadas somente para trabalhar a esforços axiais de tração ou compressão. E também, considera-se que não existe momento entre as barras e os nós da estrutura.

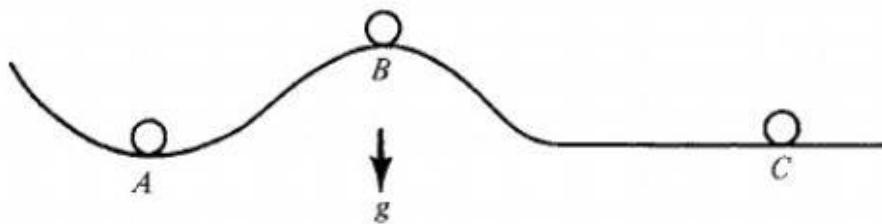
## 1.2 Estabilidade Estrutural

A estabilidade de elementos estruturais consiste em um conceito de força, energia e movimento aplicado a um corpo, pois um objeto estável estaticamente possui uma força atuante constante, ausência de variação energética e movimento. Já um corpo instável estaticamente possuí variação de força, energia e movimento.

Existem três divisões de estabilidade estática: instável, estável e indiferente. Como exemplo, a estabilidade instável consiste na situação em que um corpo está em uma posição estática e se minimamente perturbado irá mudar para uma posição diferente da anterior, saindo da estabilidade; na situação da estabilidade estável o corpo que minimamente perturbado tende a retornar a posição inicial estática e por último a estabilidade indiferente é um corpo que minimamente perturbado irá tender a permanecer

na situação de perturbação, como mostrado na Figura 1.2 em que A, B e C representam respectivamente estabilidade estável, estabilidade instável e estabilidade indiferente (SIMITSES, HOGDES, 2006)

**Figura 1.2–** Exemplos de posições estáticas e equilíbrio.



Fonte: Simitses, Hogdes, 2006.

Dessa forma, o conceito de estabilidade estável à estruturas também é aplicado, com a diferença de que a estrutura é rígida e intertravada de maneira para que não se movimente como no exemplo das esferas na Figura 1.2, fazendo com que a estrutura deva combater os esforços solicitantes. Nos casos da treliça principalmente para evitar-se os fenômenos que se fazem atingir a carga crítica de flambagem, ponto limite, snap-through, bifurcação, ressonância e vibrações excessivas que podem comprometer a vida útil da estrutura ou levá-la a ruína (BENEDETTI, 2016).

### 1.3 Material Elastomérico

Os materiais elastoméricos são caracterizados por possuírem uma relação tensão deformação não linear, não sendo possível se aplicar a lei de Hooke a eles, isso significa que tensão e deformação do material não se relacionam proporcionalmente. Fazendo assim com que seja necessário um outro equacionamento que utiliza uma ou mais constantes e que relaciona a energia e a deformação do material, a chamada função densidade de energia (W) (HOSS, 2009).

Um material elastomérico nada mais é do que um material composto de polímeros, os quais têm capacidade elástica como por exemplo os materiais hiperelásticos. Nos materiais hiperelásticos esses polímeros possuem uma capacidade elástica maior do que os materiais elásticos e um comportamento não linear. Dentro desses materiais

hiperelásticos existe uma divisão de modelos constitutivos para se descrever os comportamentos desses materiais, que segundo Hoss (2009) pode ser feita em modelos fenomenológicos e micromecânicos.

A diferença entre eles é que os fenomenológicos são modelos que se baseiam em testes empíricos, entre os modelos que fazem parte dessa divisão estão: Mooney-Rivlin, Yeoh e Ogden. Já os micromecânicos são modelos baseados nas ligações químicas do material e as propriedades que essas ligações possuem, que como exemplo se tem o modelo neo-Hookeano, e Arruda Boyce.

Neste estudo é adotado o modelo constitutivo de Mooney Rivlin para a função densidade de energia, que para um material incompressível, é dada por:

$$W = C_1 \left[ (I_1 - 3) + \alpha (I_2 - 3) \right] \quad (1)$$

Onde  $I_1$  é o primeiro invariante de deformação;  $I_2$  é o segundo invariante de deformação e  $\alpha = C_2/C_1$ ,  $C_1$  e  $C_2$  são parâmetros do material e quando  $\alpha = 0$  tem-se a simplificação do modelo para o neo-Hookeano.

## 1.4 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O Método do Elementos Finitos é uma metodologia que consiste na modelagem de uma estrutura e/ou objeto que se quer analisar, dividindo-se essa estrutura em vários elementos pequenos, geométricos e determinados, como por exemplo quadrados, triângulos e hexágonos, chamados de elementos. Esses elementos são interligados por nós, ou seja, são os pontos de contato entre os elementos que irão sofrer as ações alvo do método. Nesses nós se determina os graus de liberdade (deslocamentos translacionais e rotacionais), o que significa que um nó possui uma variação pré-estabelecida em uma ou mais direções (ALVES FILHO, 2000). Através dessa estrutura modelada são extraídas informações de possíveis ações e suas consequências na estrutura, tais como: deslocamentos, tensões e frequências

Além disso, o MEF vem como uma alternativa para se solucionar os problemas de engenharia. Nem todos os problemas podem ser solucionados de forma analítica, que consiste em se descrever o problema matematicamente através das equações diferenciais

as quais são resolvidas analiticamente ou com o uso de métodos numéricos. No entanto, o MEF trabalha de forma discretizada dividindo a malha estrutural em elementos, que podem assumir diferentes formas geométricas, para obter soluções aproximadas por meio dos nós. (ALVES FILHO, 2000).

Através do MEF são obtidos os deslocamentos dos nós, dos elementos, assim como os esforços a que os mesmos estão sendo solicitados, por isso é importante se utilizar uma malha com número de nós, elementos e forma dos elementos adequados, para que os resultados sejam o mais acurado possível.

Para isso, é necessário realizar um estudo de convergência de malha, verificando o número e tipo de elementos, bem como dos graus de liberdade, a serem utilizados na modelagem da estrutura. Uma estrutura com um elevado número de elementos e nós pode resultar em um grande custo computacional para a solução do problema, que pode ser um desperdício pelo fato da precisão dos resultados não se alterar a partir de uma determinada malha. Ou seja, uma malha muito detalhada, por exemplo com cinco mil elementos pode ter os mesmos resultados que uma malha com oitocentos elementos, justamente pelo fato do erro associado ao número de elementos não interferir em uma malha um pouco menos detalhada, o que geraria um gasto computacional maior e desnecessário.

## 1.5 Justificativa

As treliças espaciais são muito utilizadas na engenharia civil para construção de galpões e pontes, no entanto na maioria das construções é empregado como material constitutivo da treliça materiais metálicos. Então os materiais hiperelásticos vêm como uma alternativa para esse tipo de estrutura, mas são necessários mais estudos para se verificar o comportamento estrutural desse tipo de material e se atende as solicitações as quais as estruturas são submetidas.

Além disso, os materiais elastoméricos possuem um comportamento não linear que não é totalmente conhecido, se justificando mais estudos sobre seu comportamento.

## 1.6 Objetivos

Esse trabalho tem como objetivo geral utilizar o MEF, através do software comercial Abaqus®, para analisar o comportamento estático linear e não linear de treliças espaciais constituídas de quatro barras, composta de material hiperelástico, homogêneo, isotrópico e incompressível. Para isso serão estudadas treliças com diferentes relações da altura com a abertura da base.

### 1.6.1 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos se tem a análise da treliça quando solicitada a um carregamento estático na direção transversal aplicado no nó do topo. Objetiva-se obter as respostas lineares, tais como carga crítica e ponto limite para um modo de flambagem específico, e as respostas não lineares, tais como caminho não linear de equilíbrio.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse capítulo serão tratados três assuntos que são temas principais que compõe o presente trabalho, eles são: treliças, material elastomérico com enfoque no hiperelástico e método dos elementos finitos (MEF).

### 2.1 Treliça

A treliça espacial é composta de barras delgadas que possuem vários arranjos possíveis, fixas por pinos perfeitos que não fornecem atrito a estrutura e que as barras trabalham a esforços axiais apenas. Dentre os vários estudos na literatura que versam sobre treliças têm-se o de Ligarò e Valvo (2005) que trata da análise de treliças piramidais compostas de materiais elásticos com três ou mais pontos de apoio na base e apenas um ponto no cume da treliça. As análises são realizadas através de um modelo analítico formulado para o problema e utilizando o princípio da conservação da energia potencial do sistema. Dessa forma, são analisadas as configurações de equilíbrio estáveis e discutidos os fenômenos de bifurcação, snap-through e snap-back que podem ocorrer utilizando três diferentes tipos de carregamentos. Assim sendo, os autores têm por objetivo analisar as respostas pós críticas do modelo espacial e encontram regiões de equilíbrio, bifurcação e snaps e que, independente das cargas, existem regiões de equilíbrio que sempre são alcançadas. Conclui-se também que para cargas verticais, horizontais e oblíquas aplicadas no cume da treliça são necessários mais estudos para se determinar os pontos críticos e a estabilidade da estrutura.

Os autores Castro, Gonçalves e Orlando (2015) discutem as vibrações não lineares e a estabilidade de uma treliça piramidal de 6 barras com uma relação baixa da altura com a abertura da base piramidal. Nesse trabalho, utiliza-se uma análise numérica do problema em que são abordados os assuntos de estabilidade estática, frequências de estruturas carregadas, variação do potencial de energia, conservação da energia e vibrações forçadas. Na análise de frequências da estrutura carregada utiliza-se do estado de pré-flambagem para se obter a frequência natural, que diminui com o aumento da carga estática e torna-se zero quando a carga chega ao valor crítico. Através da equação da variação de energia potencial compara-se o comportamento da estrutura em relação a variação de carga estática e percebe-se que com o aumento de cargas de compressão a

diferença do estado de pré-flambagem diminui, isso indica uma capacidade baixa da estrutura de suportar perturbações iniciais sem perder a estabilidade.

Quando se trata da conservação de energia, conclui-se que com o aumento de pré-carregamento surgem duas curvas equipotenciais de equilíbrio estável em seus centros e um ponto de instabilidade e que, a região de estabilidade de pré-flambagem diminui e a região de instabilidade de pós-flambagem aumenta. Na análise de vibração forçada, vibrações simétricas sob a forma de uma carga vertical harmônica imposta à estrutura, sem pré-carregamento estático são verificadas, e notam-se dois ramos de estabilidade que se iniciam de dois pontos de estabilidade simétricos, formando uma bifurcação. E quando se aumenta a intensidade da força vertical, a bifurcação se torna menor e as soluções de estabilidade e instabilidade passam por saltos de forma caótica. Já para uma treliça pré-carregada estaticamente, os ramos de estabilidade que se iniciam deixam de ser simétricos e as soluções de estabilidade e instabilidade também passam por saltos caóticos (CASTRO, GONÇALVES, ORLANDO, 2015).

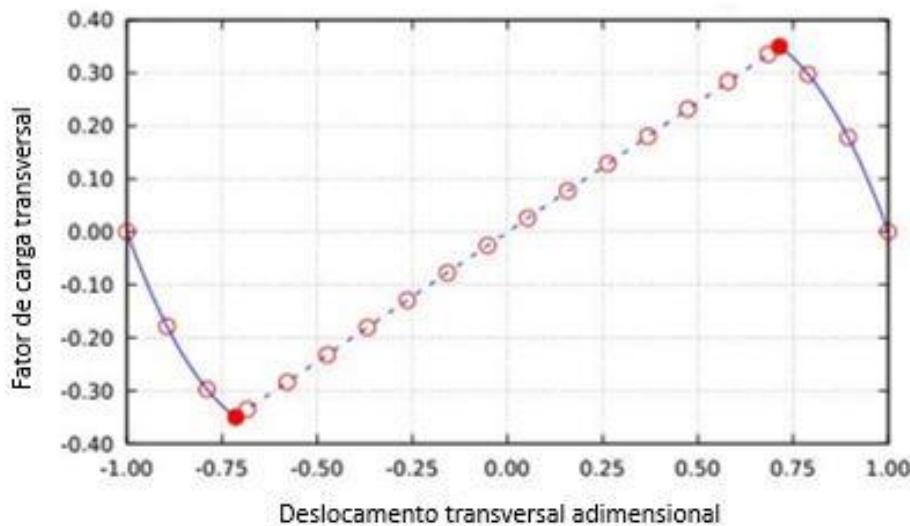
Por fim, Castro, Gonçalves e Orlando (2015) terminam o estudo concluindo que a não linearidade geométrica tem maior influências do que um comportamento não linear elevado da estrutura com vários pontos de equilíbrio estático tanto para situações em que a estrutura é pré-carregada estaticamente quanto para situações em que não é pré-carregada estaticamente.

Já Santana, Gonçalves e Silveira (2017) estudam o comportamento de uma treliça espacial composta de material elástico com uma relação baixa entre sua altura e abertura da base. Nesse estudo são analisados dois comportamentos da estrutura treliçada: comportamento com bifurcação e de snap-through, quando submetida a esforços horizontais, verticais, estáticos e dinâmicos. Seu estudo é validado, através de duas análises, uma analítica e outra via Método dos Elementos Finitos (MEF) que convergem ao final do estudo.

Os autores observam que no comportamento com bifurcação da resposta não linear dos deslocamentos consiste em se considerar a existência de dois pontos de equilíbrio infinitesimalmente próximos, o que na abordagem matemática reduz esse tipo de problema a um caso de valor limite de contorno. Diz-se, assim, que a estrutura tem uma tendência inicial e a partir de um ponto crítico atinge o estado de bifurcação em que a estrutura terá duas opções de deslocamento. Na análise do comportamento de bifurcação,

observa-se na relação entre o deslocamento horizontal do ápice da treliça com a altura e o fator de carregamento que a treliça se comporta de forma não linear, perde a estabilidade na região linear e por último retorna a posição inicial através da não linearidade (SANTANA, GONÇALVES, SILVEIRA, 2017), como pode ser observado na Figura 2.1.

**Figura 2.1** – Relação de equilíbrio para bifurcação.



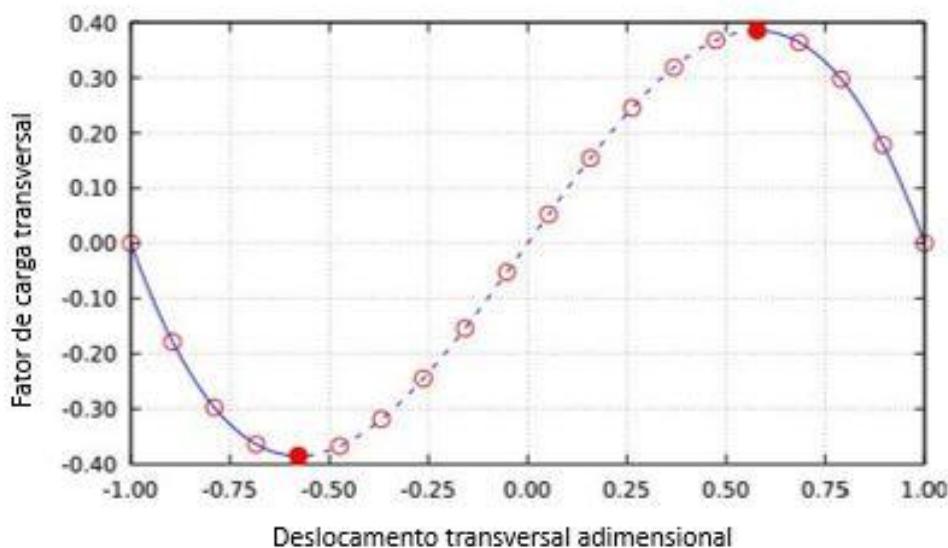
Fonte: Santana, Gonçalves, Silveira, 2017 adaptado.

O comportamento da estrutura chamado de snap-through é caracterizado por haver um salto da estrutura com um aumento infinitesimal de carga. Nesse salto, a estrutura passa de um estado de estabilidade para um estado de instabilidade não linear para então voltar a estabilidade em um ponto distinto do inicial. Da mesma maneira, se a carga então for diminuída infinitesimalmente desse ponto final, a estrutura saltará para um ponto de estabilidade diferente do inicial, passando por um estágio não linear. De forma simplificada significa que a estrutura sofre um deslocamento finito a partir de um acréscimo de carga infinitesimal, atravessando uma fase não linear para reencontrar a estabilidade (BAZANT, 2010).

Para o comportamento snap-through para a mesma relação de deslocamento horizontal do topo da treliça com a altura e o fator de carregamento, a treliça se comporta por todo seu deslocamento de maneira não linear, perdendo a estabilidade de forma não linear e

retornando à estabilidade de forma não linear também, como pode ser observado na Figura 2.2.

**Figura 2.2**– Relação de equilíbrio para snap-through.



Fonte: Santana, Gonçalves, Silveira, 2017 adaptado.

E como conclusão de seu estudo, Santana, Gonçalves e Silveira (2017) dizem que o efeito snap-through independe do sistema de parâmetros, criando pontos de limite de cargas e instabilidade e complementa dizendo que para estruturas pesadas, a instabilidade global pode aparecer com o efeito da bifurcação.

Benedetti (2016) em seu trabalho tem por objetivo verificar o fenômeno da instabilidade em um sistema treliçado plano que é excitado dinamicamente, utilizando tanto a análise paramétrica quanto a modelagem da estrutura em elementos finitos, para isso o autor utiliza o software comercial Ansys. O autor chega as conclusões de que para três geometrias de treliças de Von Mises, o trecho entre os cumes do caminho de equilíbrio é instável e se verifica um tipo de bifurcação global. Mais à frente, na análise de vibração forçada das mesmas treliças é constatado que nas regiões de ressonância a carga dinâmica de escape pode ser menor do que o ponto limite. Por último, na análise de uma treliça mais simples os caminhos de equilíbrio mantêm as características das treliças de Von Mises, apresentando saltos dinâmicos. Além disso, é observado uma relação entre a carga

limite e a geometria da estrutura, relacionando também relacionando as mais diversas deformadas com as geometrias com maior altura.

## 2.2 Material elastomérico e Método dos elementos finitos (MEF)

Selvadurai (2006), em seu trabalho, introduz uma perspectiva histórica do estudo de materiais elastoméricos, citando os resultados de Treloar de 1944 como um dos resultados científicos sobre membranas elásticas mais antigos que serviu de base para outros estudos. Assim, o autor evidencia que o estudo sobre materiais elastoméricos é relativamente novo. O autor realiza experimentalmente testes uniaxiais de tração em corpos de provas de materiais hiperelásticos, com geometria de membrana retangular. Com tais dados experimentais, faz-se a melhor adequação a diversos modelos constitutivos: Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano, Blatz-Ko, Yeoh e Ogden. Experimentalmente, observa-se que tal material suporta alongamentos da ordem de 300% do seu comprimento inicial.

Mais à frente, Soares (2009) realiza um trabalho sobre análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas, completas e anulares, em que são obtidas as frequências e os modos de vibração de uma membrana, modelada como um material neo-Hookeano, isotrópico e incompressível. Além disso, é objetivo também determinar-se modelos de dimensão reduzida para o estudo de vibrações transversais para grandes deslocamentos de membranas hiperelásticas. Para se obter os resultados é utilizado o método analítico, baseado na teoria de elasticidade finita, e também o método numérico, por elementos finitos, se utilizando o software Abaqus® para validar as aproximações usadas na dedução dos modelos reduzidos.

Sendo assim, as conclusões do trabalho de Soares (2009) são que à medida que a tração radial aumenta, as frequências naturais crescem de forma não linear até um valor constante para valores específicos de raio deformado; a não-linearidade da resposta da membrana hiperelástica diminui com o aumento da amplitude de vibração; o grau de não-linearidade da relação frequência-amplitude cresce à medida que a tração inicial radial decresce e que os métodos numéricos e analíticos tiveram resultados convergentes.

Posteriormente Silva (2015) realiza um trabalho sobre membranas hiperelásticas retangulares em que se tem por objetivo estudar o comportamento dinâmico linear e não linear das membranas, utilizando-se como modelos constitutivos de materiais o neo-Hookeano, Mooney-Rivlin e o Yeoh. Na formulação do problema é realizada a formulação matemática com base nas energias e trabalhos atuantes, bem como o princípio de Hamilton aplicado na função de Lagrange para se chegar as equações e equilíbrio estático e dinâmico. Como resultados, o autor destaca que quanto menor o nível de tração, maior será a não linearidade da curva de frequência-amplitude da membrana e que há pequenas divergências no comportamento da membrana em relação aos três modelos constitutivos de materiais.

De outra maneira, Amaral (2017) apresenta um estudo sobre análise dinâmica não-linear de uma membrana hiperelástica esférica que é realizada de forma numérica a partir da teoria das grandes deformações, assim como Silva (2015). Primeiramente são encontradas as tensões e deformações da membrana em uma análise estática e a partir disso é realizada a análise dinâmica para obter-se as relações de frequência-amplitude para os modelos de materiais constitutivos neo-Hookeano e Mooney-Rivlin. Como resultado, o autor destaca que na análise de tensão-deformação os modelos constitutivos têm comportamento semelhante, mas na análise dinâmica existem mais diferenças, pois o modelo neo-Hookeano se torna permanentemente instável após atingir sua extensão radial crítica, ao passo que o modelo Mooney-Rivlin apresenta uma resposta estável após o fenômeno de snap-through. Além disso, os modelos constitutivos mostram diferenças em relação aos planos-fase e respostas diferentes na simulação do comportamento dinâmico em que há amortecimento e excitação periódica.

De maneira mais específica, Santana e Dela-Sávia (2017) realizam uma análise estática e dinâmica de membranas hiperelásticas anelar de material neo-Hookeano tracionadas transversalmente em sua borda interna, utilizando o método dos elementos finitos (MEF) via Abaqus®. Como objetivo têm-se obter as tensões, deformações, deslocamentos, frequências naturais e resposta no tempo para vibração livre e forçada. Como resultado, os autores notam que quanto maior o deslocamento trativo transversal na membrana, maiores são as forças e as tensões; o aumento dessa tensão trativa faz a membrana apresentar uma conformação cada vez mais linear e retilínea; para análise dinâmica há uma correlação boa entre MEF e análises analíticas; a membrana submetida a uma

perturbação, realiza um movimento oscilatório não cíclico convergindo para a posição de repouso e que a frequência do carregamento tem grande influência no período e frequência da resposta dinâmica forçada. Por fim, concluem que os comportamentos estático e dinâmico da membrana são muito influenciados pelas condições de contorno que agem na mesma.

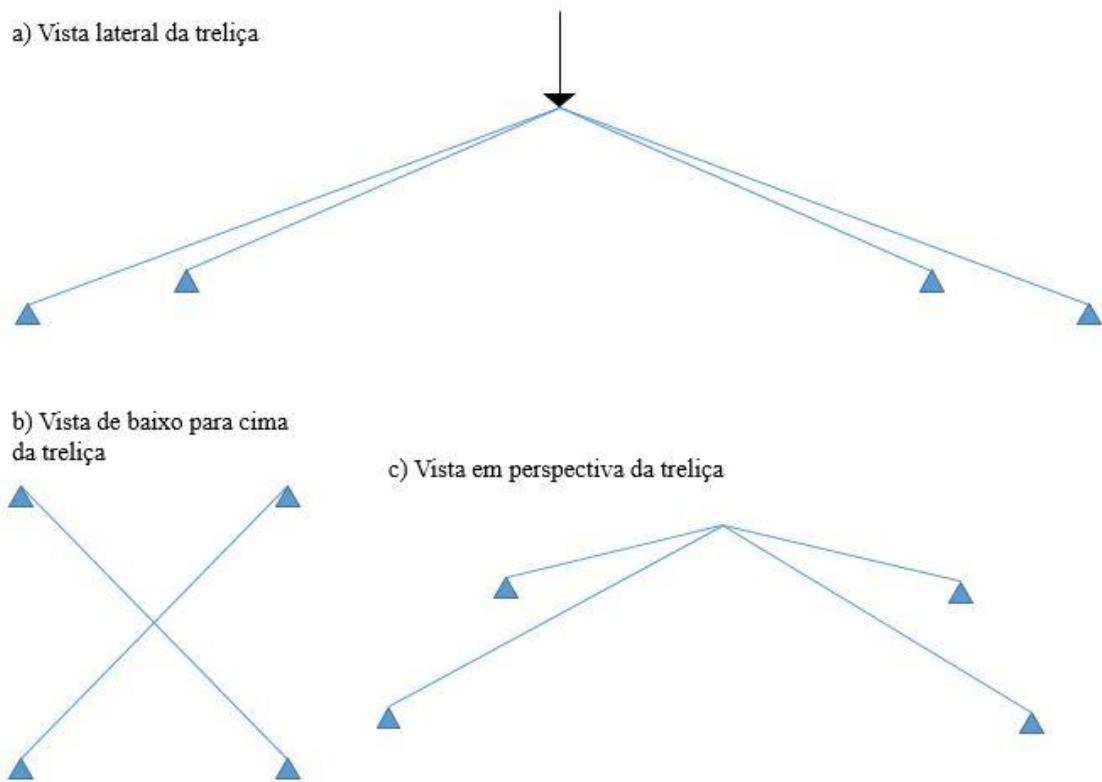
### 3 METODOLOGIA E MÉTODOS

Para a modelagem da estrutura treliçada é utilizado o MEF através do software comercial Abaqus®. Nesse software a treliça será modelada com cinco nós, quatro nós na base da treliça dispostos de maneira equidistante entre si e um nó no topo da treliça, formando uma pirâmide treliçada. Para a análise estática do comportamento linear e não linear dessa treliça é considerado que o material constituinte de suas barras é hiperelástico, isotrópico, incompressível e homogêneo.

A treliça é composta de barras de comprimento  $L$ , com diâmetro  $D$  uniforme por toda a extensão da barra, a relação entre a abertura da base ( $B$ ) e a altura da pirâmide ( $H$ ) é de  $B/H = 5$ , assim considera-se  $B = 5\text{ m}$  e  $H = 1\text{ m}$ . Os parâmetros dos materiais a serem utilizados serão os obtidos por Selvadurai (2006), serão para os modelos constitutivos neo-Hookeano, definido por  $C_1 = 0,17\text{ MPa}$  e Mooney-Rivlin, definido por  $C_1 = 0,1361\text{ MPa}$  e  $C_2 = 0,008060\text{ MPa}$ . A massa da barra da treliça é uniformemente distribuída de acordo com seu comprimento, o peso específico do material é de  $\gamma = 1200\text{ N/m}^3$  e a área da seção transversal as barras é de  $0,12\text{ m}^2$ .

No Abaqus® existem dois tipos de elementos de barras que são os elementos T3D2 e T3D3, tomando como exemplo T3D2, o significado dessa sigla é o seguinte: a letra “T” significa elemento de treliça (Truss em inglês); “3D” significa a dimensão da treliça, ou seja 3D espacial e 2D plana; e o “2” por último remete ao número de nós que as barras têm. Para a escolha do elemento duas treliças espaciais idênticas são modeladas, uma com elemento T3D2 e outra com elemento T3D3. No entanto, em uma análise de frequência de ambas as treliças, a treliça com elemento T3D2 apresentou três modos de vibração esperados e observados na literatura. A treliça com elementos T3D3 apresentou apenas um modo de vibração distinto dos observados na literatura, apresentando um deslocamento nodal concentrado no nó intermediário da barra.

Assim, no presente trabalho é utilizado um elemento T3D2 para cada barra e a treliça é apresentada visualmente na Figura 3.1 em uma vista lateral, de baixo para cima e em perspectiva. Também são apresentados os apoios e a carga aplicada.

**Figura 3.1-** Vistas da treliça espacial.

Depois da malha da treliça definida, analisa-se a resposta da mesma em relação as frequências de vibração, a carga crítica e o caminho não-linear da carga em função do deslocamento transversal do nó do topo. Todas essas respostas serão obtidas através do software Abaqus® por meio de comandos de entrada no software. Dessa forma, para obter-se as respostas lineares o software utiliza a solução de problemas de autovalores e autovetores sendo na frequência utilizado o comando *frequency* e na carga crítica de flambagem utilizado o comando *buckle*. Para a análise não linear, caminho não linear de equilíbrio, utilizam-se os comandos de aplicação estática de carga concentrada (*cload* e *static*) com controle de arco selecionado através do método de Ricks (*ricks*).

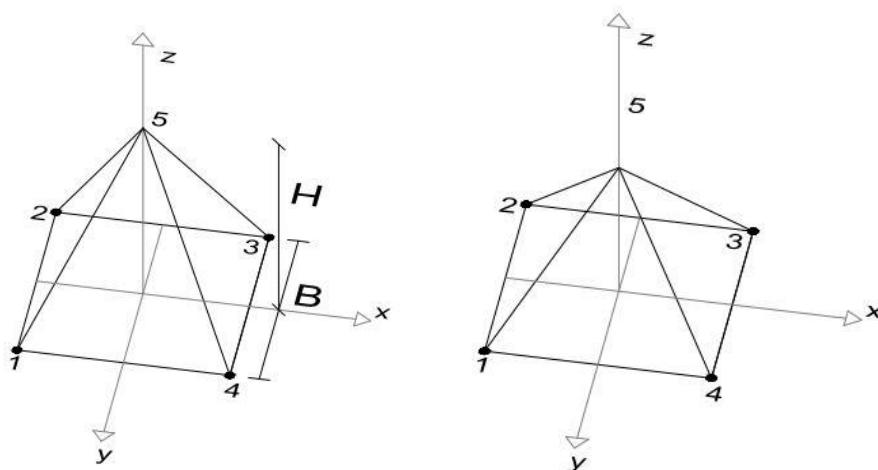
Como serão analisados dois modelos constitutivos, neo-Hookeano e Mooney-Rivlin, os dados para diferenciá-los também são inseridos através da definição das constantes  $C_1$  e  $C_2$  do modelo constitutivo hiperelástico que consta na biblioteca do software.

## 4 RESULTADOS

Para obter os resultados numéricos utilizam-se três treliças, a primeira com a relação geométrica  $B/H = 5$ , que é chamada de treliça abatida, descrita no item de metodologia, a segunda com relação geométrica  $B/H = 2,5$ , onde  $B = 6,25\text{m}$  e  $H = 2,5\text{m}$ , e a terceira com a relação geométrica de  $B/H = 0,2$ , onde  $B = 5\text{m}$  e  $H = 1\text{m}$ , que é chamada de treliça esbelta. As propriedades do material consideradas em ambas as treliças são iguais aos descritos no item de metodologia e as dimensões  $B$  e  $H$  são mostradas na Figura 4.1 (a).

A primeira análise realizada é em relação a frequência natural das estruturas para o modo de vibração onde o nó do topo desloca-se apenas na direção  $z$ , como pode ser observado na Figura 4.1 (a) e (b). São adquiridas as frequências para os modelos neo-Hookeano (NH) e Mooney-Rivlin (MR), como mostrado os resultados na Tabela 4.1 a seguir e as diferenças percentuais de um modelo constitutivo para o outro.

**Figura 4.1 – Direções e dimensões das treliças**



(a) Eixos cartesianos e dimensão da treliça

(b) Deslocamento do nó cinco no eixo z

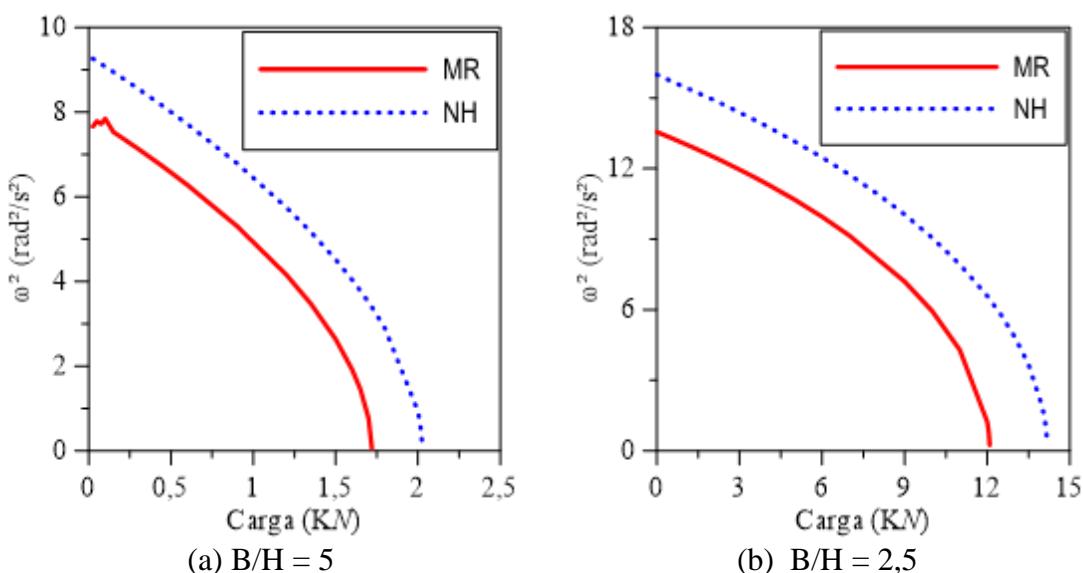
**Tabela 4.1– Relação da frequência.**

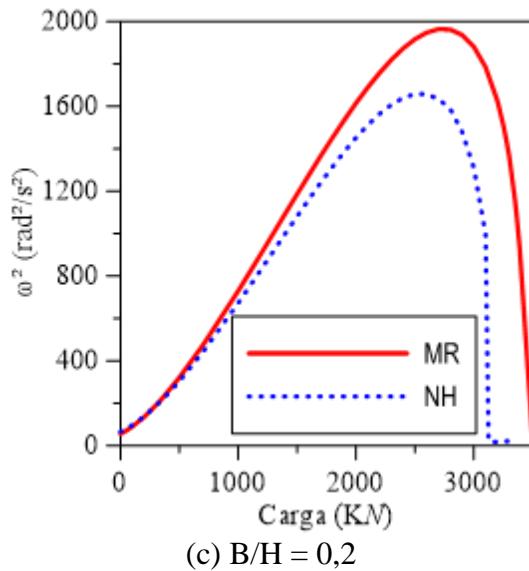
<b>Frequência (rad/s)</b>			
<b>B/H</b>	<b>NH</b>	<b>MR</b>	<b>%</b>
5	3,054	2,812	8,606
2,5	3,998	3,682	8,582
0,2	5,079	4,678	8,572

Dos resultados apresentados acima é perceptível que a frequência das treliças utilizando os modelos são próximas, porém apresentam uma diferença percentual em torno de 8%. Isso deve-se pelo fato de que os modelos constitutivos possuem bases matemáticas bem próximas, que em uma análise linear não apresenta uma diferença significativa das respostas. Analisando a diferença percentual é perceptível que quando a relação B/H diminui a diferença de frequência entre os dois modelos constitutivos também diminui, isso quer dizer que na medida em que a treliça se torna mais esbelta as frequências entre os dois modelos constitutivos se aproximam.

Já o segundo resultado obtido é em relação a carga limite da estrutura treliçada através de dois métodos. O primeiro método consiste em relacionar-se a frequência de vibração da estrutura a uma carga aplicada perpendicularmente ao ápice da treliça. Sendo assim a carga aplicada é variada e como resultado obtém-se a frequência de vibração da estrutura, a relação da frequência elevada ao quadrado com a carga aplicada configura uma curva característica que fornece a carga limite estimada do problema. Essa carga limite é obtida quando a curva intercepta o eixo das abscissas em que a frequência de vibração é zero, como mostrado na Figura 4.2, para os dois modelos de materiais constitutivos e para as três treliças modeladas que na figura (a) corresponde à treliça abatida, (b) à intermediária e (c) à esbelta.

**Figura 4.2-** Curva da frequência ao quadrado pela carga aplicada.





A partir da Figura 4.2 (a) é possível abstrair que para o modelo Mooney-Rivlin (linha vermelha contínua) a carga limite se dá aproximadamente em de 1,72  $kN$  e frequência ao quadrado próxima de  $7,6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ , e para o modelo neo-Hookeano (linha azul pontilhada) a carga crítica fica em torno de  $2 \text{ kN}$  e frequência ao quadrado de  $9,2 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ . Já na treliça intermediária, Figura 4.2 (b), o modelo Mooney-Rivlin apresentou carga limite próxima de  $12,1 \text{ kN}$  e frequência ao quadrado de  $13,5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ , e o neo-Hookeano  $14,2 \text{ kN}$  para carga e frequência ao quadrado de  $15,9 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ , e para treliça esbelta, Figura 4.2 (c), o Mooney-Rivlin apresentou carga próxima da maior inclinação da curva de  $3350 \text{ kN}$  e frequência ao quadrado máxima de  $1964,17 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ , e para o neo-Hookeano carga próxima de  $3000 \text{ kN}$  e frequência ao quadrado de  $1657,71 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ .

É notável que a Figura 4.2 (c) possui um comportamento não linear e bem diferente das treliças (a) e (b) mostrando que para treliças esbeltas a análise realizada não é precisa, não sendo possível se conseguir uma frequência máxima de vibração quando a carga é próxima de zero, neste ponto a carga é  $3500 \text{ kN}$  para o modelo Mooney-Rivlin e  $3125 \text{ kN}$  para o modelo neo-Hookeano.

Além disso, é importante destacar que o modelo neo-Hookeano apresenta uma capacidade de carga maior em relação ao modelo Mooney-Rivlin, frequências de vibração e rigidez maiores também, fazendo com que a curva do modelo neo-Hookeano fique deslocada para direita e para cima em relação a curva do modelo Mooney-Rivlin nas treliças abatida ( $B/H = 5$ ) e intermediária ( $B/H = 2,5$ ).

Na Tabela 4.2 apresentada a seguir é esquematizada a relação entre a carga limite obtida pela relação  $\omega^2 \times P$  e a carga crítica obtida através da análise linear no programa computacional. Além disso, é destacada a diferença percentual entre a carga crítica e a carga limite.

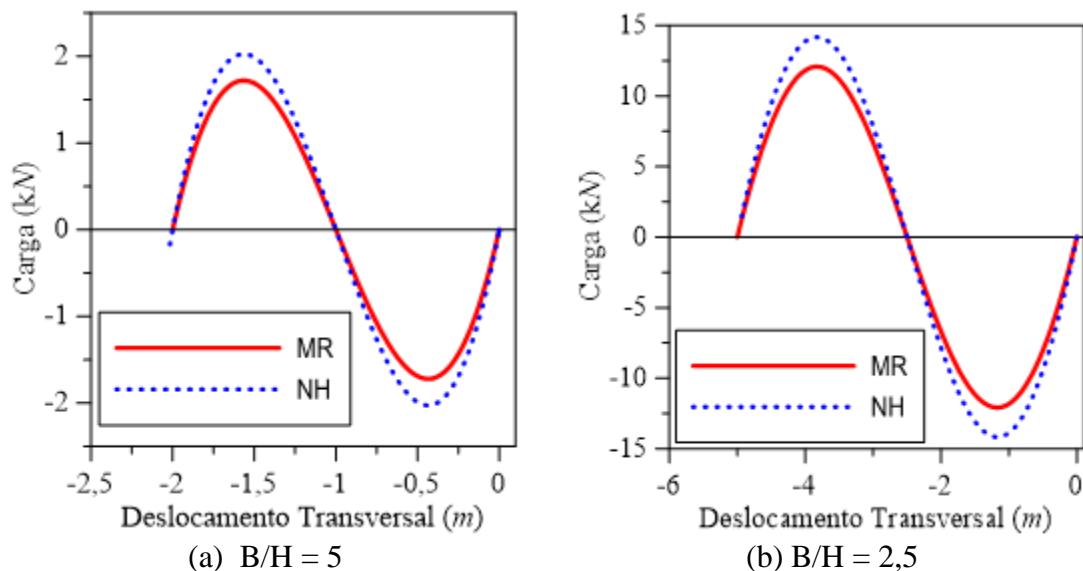
**Tabela 4.2 – Relação entre a carga limite e crítica**

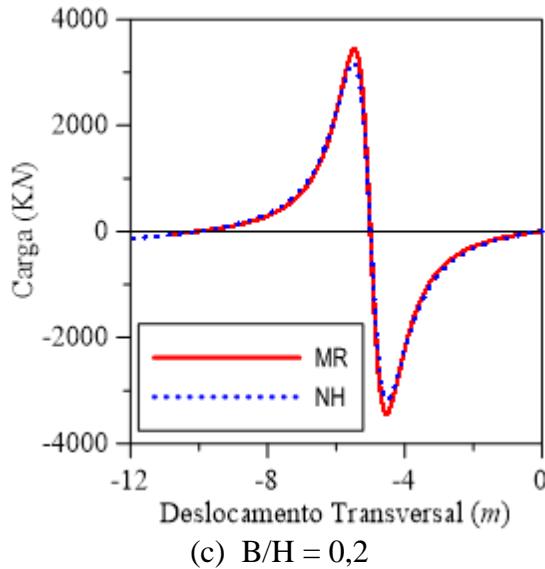
<b>B/H</b>	<b>NH</b>			<b>MR</b>		
	Carga crítica	$\omega^2 \times P$	%	Carga Crítica	$\omega^2 \times P$	%
5	7,902	2,025	290,22	8,370	1,72	386,63
2,5	23,37	14,177	39,34	19,82	12,089	63,95
0,2	95,04	3000	-3056,6	80,60	3350	-4056,3

Na análise percentual dos dados da Tabela 4.2 nota-se que para a treliça intermediária a diferença entre as cargas obtidas pelas duas metodologias é menor. No entanto, a diferença percentual é muito elevada para a treliça esbelta, mostrando que não é possível utilizar a solução linear para a determinação de um parâmetro crítico de análise podendo levar à um erro elevado.

Posteriormente obtém-se o caminho não-linear, que consiste em aplicar-se pequenos incrementos de carga ao topo da treliça de forma perpendicular e assim obter-se o deslocamento transversal do ápice da mesma. Essa relação carga versus deslocamento da estrutura é mostrado a seguir na Figura 4.3 para os casos de treliças estudados.

**Figura 4.3- Relação carga por deslocamento na direção z do nó do topo.**





Da Figura 4.3 (a) e (b) é observado que para cada modelo constitutivo a relação inicial de deslocamento é bem próxima, tanto que as curvas se sobrepõem, mas de acordo com que a carga é aplicada os modelos constitutivos se distanciam, demonstrando cargas limites diferentes. As cargas limites são os pontos dos vales das curvas, pontos em que se têm concavidades com relação ao eixo das ordenadas do gráfico. Assim sendo, para a Figura 4.3 (a), o Mooney-Rivlin tem a carga limite aproximada de 1,7 kN, em módulo e para o neo-Hookeano é próxima de 2 kN, em módulo e para Figura 4.3 (b), o Mooney-Rivlin possui a carga limite próxima de 12,08 kN e neo-Hookeano de 14,17 kN.

Sendo assim, é válido ressaltar o comportamento da estrutura pela análise da Figura 4.3 (a), (b) e (c), é caracterizado por um comportamento de snap-through, em que a estrutura perde a estabilidade de forma não linear, percorre um caminho não linear e retorna a estabilidade de maneira não linear também, de acordo com o aumento do deslocamento transversal, como também é mostrado na Figura 2.2 de acordo com o estudo realizado por Santana, Gonçalves e Silveira (2017).

Dessa maneira como apresentado na Figura 4.3 (c), o ponto de maior inclinação da curva, é de 3400 kN para o caminho não linear e 3350 kN, respectivamente para os modelos Mooney-Rivlin e neo-Hookeano, demonstrando que pode ser um possível ponto de carga limite. É percebido que os modelos constitutivos apresentam um comportamento concordante, mais próximos que os apresentados pelos outros casos de treliça. A carga limite para ambos os modelos constitutivos é de 3400 kN para Mooney-Rivlin e 3200 kN para o neo-Hookeano.

Para facilitar a análise dos resultados, é apresentada a seguir a Tabela 4.3 com a relação das carga limites, assim como a diferença percentual em relação aos modelos constitutivos de acordo com a numeração apresentada na própria Tabela 4.3. A primeira coluna são os resultados obtidos como explicado na análise da Figura 4.2 e a segunda coluna são os resultados obtidos como explicado na análise da Figura 4.3.

**Tabela 4.3** – Relação das cargas limites.

	$P_{lim} (\omega^2 \times P) (kN)$		$P_{lim} (\text{Caminho não linear}) (kN)$		%	%	%
<b>B/H</b>	<b>NH (1)</b>	<b>MR (2)</b>	<b>NH (3)</b>	<b>MR (4)</b>	<b>1 e 3</b>	<b>2 e 4</b>	<b>1 e 2</b>
5	2,02	1,72	2,025	1,719	-0,25	0,06	17,44
2,5	14,177	12,089	14,17	12,08	0,04	0,07	14,73
0,2	3000	3350	3200	3400	-6,67	-1,49	-11,67

Da comparação dos resultados obtidos entre as diferentes formas de obtenção do  $P_{lim}$ , para treliça abatida, percebe-se que a diferença percentual para o modelo neo-Hookeano (coluna 1 e 3) é maior que para o modelo Mooney-Rivlin (coluna 2 e 4) e que há uma boa concordância entre esses resultados, pois essa diferença não atinge 1%. Já para os outros dois casos de treliça estudados, intermediária e esbelta, a diferença percentual cresce no modelo de Mooney-Rivlin. Percebe-se também, que a treliça intermediária que ainda possui uma geometria abatida, mantém boa concordância entre os resultados dos dois modelos constitutivos, já na treliça esbelta essa concordância é menor, já que a diferença percentual cresce. Isso indica que a esbeltez da treliça pode levar a resultados menos precisos quando comparados com resultados de treliças abatidas.

Comparando a diferença percentual entre os resultados obtidos pela mesma metodologia para os dois modelos constitutivos para cada caso de treliça (coluna 1 e 2) observa-se que os valores diminuem a medida que a esbeltez da treliça aumenta, indicando a menor influência do modelo constitutivo nesses resultados.

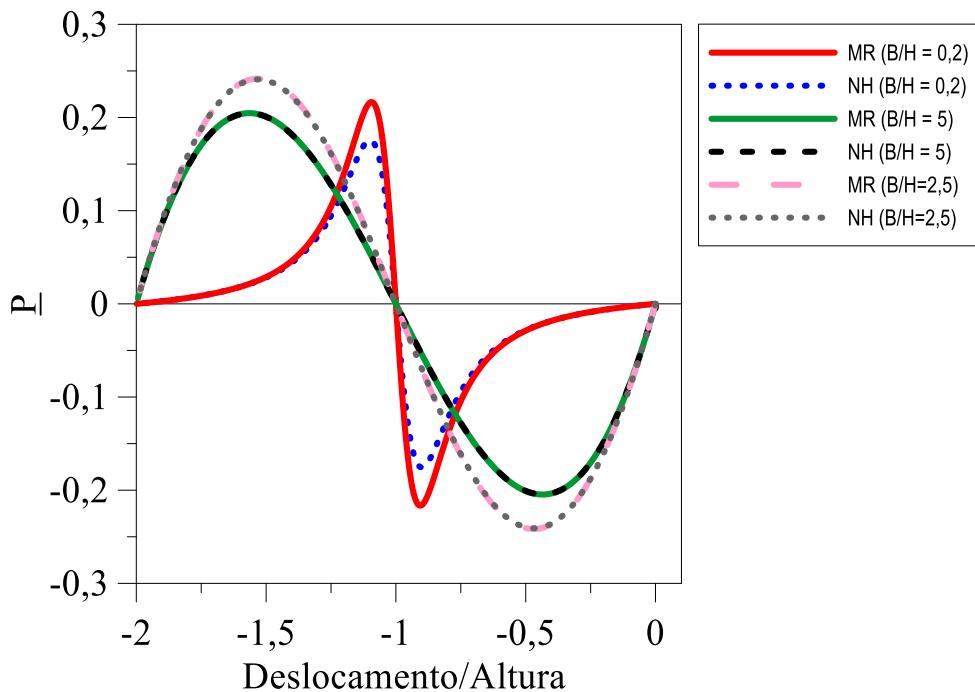
Todavia, a variação entre os modelos constitutivos é elevada, e essa variação deve-se pelo fato dos modelos constitutivos possuírem diferenças matemáticas em suas formulações relacionadas com invariantes que influenciam na resposta não linear dos modelos constitutivos, ocasionando os resultados diferentes. Observa-se com que essa diferença percentual, que diferentes modelos constitutivos influenciam na resposta podendo levar a resultados mais ou menos conservadores, sendo necessário uma análise de qual modelo representa melhor o problema físico a ser estudado.

Por último apresenta-se a relação de carga adimensional ( $\underline{P}$ ), dada pela equação 2, com o deslocamento dividido pela altura para assim obter-se uma relação das cargas e dos deslocamentos unitários das três estruturas que são apresentados na Figura 4.4 a seguir.

$$\underline{P} = \frac{2P}{\omega^2 H n m} \quad (2)$$

Em que  $\underline{P}$  é a carga adimensional,  $P$  é a carga em cada ponto do caminho não linear,  $\omega$  é a frequência de vibração relacionada com a carga  $P$  aplicada,  $H$  é a altura da treliça,  $n$  é o número de barras da treliça,  $m$  é a massa da barra.

**Figura 4.4 – Relação da carga ( $\underline{P}$ ) com o deslocamento/altura ( $w/H$ )**



A partir da Figura 4.4 observa-se que as três treliças possuem três pontos em comum em,  $w/H$  igual a 0, -1 e -2, ou seja, partem e chegam na mesma configuração e também mudam o sinal do carregamento em  $w/H = -1$ . A carga  $\underline{P}_{lim}$  das três estruturas está próxima variando de uma relação entre 0,2 e 0,25. As treliças abatida e intermediária possuem comportamentos semelhantes. Porém a treliça esbelta possui um comportamento mais singular em que a carga cresce de forma mais suave inicialmente e ocorre uma grande amplitude de carga em uma pequena variação da relação  $w/H$  próximo a -1 em relação as demais treliças.

Observa-se que há pouca ou nenhuma variação entre as respostas obtidas pelos diferentes modelos constitutivos nos três casos em estudo. Além disso, percebe-se que para a treliça abatida ( $B/H = 5$ ) e para a treliça intermediária ( $B/H = 2,5$ ) o  $P_{Lim}$  aumenta, ou seja a medida que a treliça abatida se torna mais esbelta o seu valor de carga limite aumenta. No entanto, para a treliça esbelta o valor de  $P_{Lim}$  é menor do que da treliça  $B/H = 2,5$  e intermediário com relação a treliça  $B/H = 5$ . Também é perceptível que na treliça com  $B/H = 0,2$  os modelos constitutivos não são tão coincidentes como nas demais relações  $B/H$  apresentadas, principalmente entre os valores de  $w/H$  de -1,25 e -0,25.

## 5 CONCLUSÕES

Nesse trabalho é estudado o comportamento estrutural de treliças espaciais utilizando-se o MEF via Abaqus®, visando analisar o comportamento estático linear, como a carga crítica e o ponto limite para o modo de flambagem; e o comportamento não linear como o caminho não linear de equilíbrio.

Assim sendo, em relação a frequência natural das treliças é concluído que a medida que a treliça torna-se mais esbelta, menor é a diferença percentual entre os modelos constitutivos, mostrando que quanto maior a esbeltez as frequências tendem a se aproximar. Além disso, a diferença percentual entre os modelos fica em torno de 8% para todas as treliças, mostrando que eles trabalham em frequências próximas e isso é devido a formulação matemática dos modelos constitutivos.

Outro resultado obtido a partir de uma análise linear é o da carga crítica, e observa-se que para os dois modelos utilizados os valores são próximos nos três casos estudados. Assim, observa-se que para soluções lineares neste tipo de problema a influência do modelo constitutivo para a representação do material é baixa. Isso pode ser explicado na presença dos termos lineares e não lineares nos invariantes de deformação utilizados nos modelos constitutivos.

Para a análise da carga limite no método da relação da carga com a frequência ao quadrado a medida que a treliça é mais esbelta, maior é a carga limite. Quando comparam-se as cargas limite e crítica, o erro percentual para a treliça intermediária diminui em relação ao erro das treliças esbelta e abatida, mas a treliça esbelta apresenta um erro percentual bem maior que as demais, mostrando que não é possível utilizar a resposta linear para a obtenção da carga crítica para treliças esbeltas sem obter-se erros elevados.

Em seguida calcula-se o caminho não linear de equilíbrio, de onde pode-se obter as cargas limites onde a treliça “salta” para outra configuração. Verifica-se que para as treliças abatida e intermediária o caminho não linear é semelhante, de acordo que os incrementos são aplicados mostram-se variações de deslocamento gradativas. Já para a treliça esbelta o comportamento não linear é mais brusco, mostrando que em alguns momentos pequenos incrementos provocam grandes deslocamentos.

Comparando-se os resultados de carga limite e caminho não linear de equilíbrio obtidos com a utilização dos diferentes modelos constitutivos observa-se que de acordo com o aumento da esbeltez, a diferença percentual entre eles diminui. Observa-se que para as treliças abatidas a solução utilizando o modelo neo-Hookeano apresenta valores maiores de resultados, enquanto que para a treliça esbelta essa diferença é mínima.

Por último através da relação da carga adimensional versus deslocamento/altura, conclui-se que as treliças abatidas possuem um comportamento muito próximo independente do modelo constitutivo usado, e que com a diminuição de relação B/H ocorre um aumento do valor de carga limite da treliça. Já para a treliça esbelta esse comportamento idêntico para os dois materiais constitutivos não ocorre, sendo que a treliça composta de material do tipo neo-Hookeano apresenta valores mais baixos de carga, levando a resultados mais conservadores.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES FILHO, A. *Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE. 5ª Edição.* São Paulo : Érica, 2000.
- AMARAL, P. F. T., *Análise dinâmica não-linear de uma membrana hiperelástica esférica,* Cilamce, Florianópolis, 2017.
- BAZANT, Z.P.; CEDOLIN, L. *Stability of structures,* Dover Publications, New York 2010.
- BENEDETTI, K.C.B. *Análise qualitativa da estabilidade estática e dinâmica de treliças planas,* 19p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.
- CASTRO, C.H.L; GONÇALVES, P.B; ORLANDO, D. *Nonlinear vibrations and instability of shallow pyramidal trusses,* International Design & Engineering Technical Conferences and Computers & Information in Engineering Conference – IDECT/CIE -, Boston, 2015.
- GARCIA, V.A.F; SOARES, R.M. *Influência de modelo constitutivo na análise dinâmica de membranas elastoméricas.* Congresso de pesquisa ensino e extensão – UFG, 2017.
- HOSS, L. *Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis: Ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo,* Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- LEET, K. M; UANG, C; GILBERT. A. M., *Fundamentos da análise estrutural, 3ª Edição.* São Paulo: McGraw-Hill, 2009.
- LIGARÒ, S. S.; VALVO, P.S., *Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses,* International journal of solids and structures, ELSEVIER, 2005.
- ROEHL, J. L. P. *Dinâmica das estruturas.* Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro : s.n., Notas de aula, 2005.
- SANTANA, L. C.; DELA-SÁVIA, T. C., *Análise estática e dinâmica de membranas hiperelásticas de material neo-Hookeano,* Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.
- SANTANA M.V.B.; GONÇALVES P.B.; SILVEIRA R.A.M. *Static stability and load capacity of pyramidal trusses,* Matec web of conference, V.148, 2017.
- SELVADURAI, A.P.S. *Deflection of a rubber membrane,* Journal of the mechanics and physics of solids, V.54, p.1093-1119, 2006.
- SILVA, R. S., *Estudo do comportamento dinâmico de membranas retangulares hiperelásticas,* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Goiás, 2015.
- SIMITSES G.J.; HOGDES D.H. *Fundamentals of structural stability,* Elsevier, 2006.
- SOARES. R. M, *Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas.* Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2009.
- SORIANO, H.L. *Estática das estruturas 3ª Edição,* Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2013.
- SOUZA, A.S.C; GONÇALVES, R.M.. *Análise teórica e experimental de treliças espaciais.* Cadernos de engenharia de estruturas, São Carlos, V.8, n.31, p.31-61, 2006.