Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olimpiada/ Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística
Nº 20 (nov.2024/nov.2025) Goiânia: Editora da UFG, 2025-v. Anual
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração
Marcelo Bezerra Barbosa
Valdivino Vargas Junior

Arte da Capa
Ana P. A. Chaves (capa)
Anderson V. Macêdo (logomarca)

Postagem
2º semestre de 2025

Revista da Olimpíada, nº 20, 2025
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
74.690-900 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 3521 1208
Versão eletrônica disponível em:
`https://revistadaomeg.ime.ufg.br/`

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática*.

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, 22 de novembro de 2025.
Os Editores.

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - CEP 74.690-900 - Goiânia-GO
E-mail: revista.omeg.ime@ufg.br Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180 Site: https://revistadaomeg.ime.ufg.br/

Classificados na XXXIII OMEG - 2024

Nome	Nível	Premiação
Pedro Rodrigues Romanhol	Nível 1	Ouro
Enzo Cargin	Nível 1	Prata
Gabriel Tavares Rodrigues	Nível 1	Prata
João de Paula Carneiro Mello	Nível 1	Prata
Mariana de Oliveira Freire	Nível 1	Prata
Miguel Monteiro Lyra	Nível 1	Prata
Pedro Fernandes de Oliveira Mendes	Nível 1	Prata
Tales Jose de Castro Gontijo	Nível 1	Prata
Vitor Araujo Ferreira Sales	Nível 1	Prata
Abraao Cintra dos Santos Silveira	Nível 1	Bronze
Ana Clara Franzoni Costa	Nível 1	Bronze
Ana Elisa Barbosa Vieira Ribeiro	Nível 1	Bronze
Bruna Steindorff Fleury	Nível 1	Bronze
Gabriel Menezes Xavier	Nível 1	Bronze
Lucas Alves de Araujo Borges	Nível 1	Bronze
Manuela Cirilo Martins	Nível 1	Bronze
Pedro Augusto Máximo	Nível 1	Bronze
Pedro Henrique Campos da Rosa	Nível 1	Bronze
Samuel Parreira Goncalves Mariano	Nível 1	Bronze

Nome	Nivel	Premiação
Julio Cesar Vilela Vidica	Nível 2	Ouro
Athos de Lima Rodrigues	Nível 2	Prata
Davi de Sousa Rocha Tejota	Nível 2	Prata
Gabriel Prieto Lima	Nível 2	Prata
Jose Augusto Rocha Faleiro	Nível 2	Prata
Miguel Ribeiro Nakao	Nível 2	Prata
Alexandre Portela Rocha Resende	Nível 2	Bronze
André Viana Ferreira Santos	Nível 2	Bronze
Gabrielle Xavier de Almeida	Nível 2	Bronze
Guilherme Silva Correia	Nível 2	Bronze
Igor Wosnjuk	Nível 2	Bronze
Laura Laperche Belo	Nível 2	Bronze
Lucas Brandão	Nível 2	Bronze
Marcos Mendes Moisés	Nível 2	Bronze
Matheus Magalhães Brandão	Nível 2	Bronze
Matheus Oliveira Martins	Nível 2	Bronze
Rhiana de Paula Buss	Nível 2	Bronze
Stefany Cecilia Castro Fonseca	Nível 2	Bronze
Yuri Andrade Castro	Nível 2	Bronze

Nome	Nível	Premiação
Enrico Mundim Galvão	Nível 3	Ouro
Artur Amaro Rodrigues Oliveira	Nível 3	Prata
Daniel Agi Pigini	Nível 3	Prata
Luiz Henrique de Jesus Figueiredo	Nível 3	Prata
Matheus Porto de Carvalho Nunes	Nível 3	Prata
Pedro Borges Minchev	Nível 3	Prata
Vitor de Oliveira Cezario	Nível 3	Prata
Clara Lopes Mussel	Nível 3	Bronze
Davi Lobo El Zayek	Nível 3	Bronze
Enrico Valente Tavares	Nível 3	Bronze
Giovana Faleiro Serafim	Nível 3	Bronze
Gustavo Alves Brandão	Nível 3	Bronze
Gustavo Linhares Rodrigues	Nível 3	Bronze
Jabes Soares Araujo	Nível 3	Bronze
João Cléber álvares Mattos	Nível 3	Bronze
Leonel Costa Neves Pimenta	Nível 3	Bronze
Lucas Nunes Silveira	Nível 3	Bronze
Marcelo Augusto Paula Vieira Lima	Nível 3	Bronze
Pedro Joviano Vaz de Oliveira	Nível 3	Bronze
Plínio Assunção de Souza	Nível 3	Bronze
Rodolfo de Melo Neto	Nível 3	Bronze

Menções Honrosas	
Nome	**Nível**
Alberto Gebin Maltez	Nível 1
Ana Laura Lima Corrêa	Nível 1
Antonio Carlos Ribeiro Oliveira	Nível 1
Arthur Korey Rodrigues Neves	Nível 1
Arthur Sousa Santana	Nível 1
Bernardo Marques Dalul Faria	Nível 1
Eduardo Novais Moraes	Nível 1
Eduardo Veiga Parmigiani	Nível 1
Estevão Labre Muniz	Nível 1
Heitor Carvelo e Silva Lima	Nível 1
Heitor de Castro Siqueira	Nível 1
João Gabriel da Fonseca Filho	Nível 1
João Paulo Skaf Abdala Septimio	Nível 1
João Pedro Tavares Ribeiro	Nível 1
Laura Kern de Mesquita	Nível 1
Laura Serbeto Medina Lima	Nível 1
Layla Piva e Souza	Nível 1
Leandra Helena Matos Palmeira	Nível 1
Lucas Brandão Oliveira	Nível 1
Marco Labre Muniz	Nível 1
Mariana Carvalho Felix	Nível 1
Pedro Gabriel Melo Alves	Nível 1
Pedro Jaime Platero Madureira	Nível 1
Rafael Dâmaso Esper	Nível 1
Sérgio Henrique Dias de Oliveira	Nível 1
Sophia Vieira Zago	Nível 1
Thomaz Dechichi Castanheira Martins	Nível 1
Vitor Hugo Lopes Ferreira Junior	Nível 1
Alan Cavalcanti Naves	Nível 2
Alice Almeida Fernandes	Nível 2
Andre Dias Barros de Sa	Nível 2
Arthur de Aguiar Dias	Nível 2
Arthur de Oliveira Magalhães	Nível 2
Artur de Oliveira Cezário	Nível 2
Caio Rodrigues Turco	Nível 2
Calebe Siqueira de Alvarenga	Nível 2
Davi Pires Fernandes Rodrigues	Nível 2
Eloá Machado Duarte	Nível 2
Guilherme Martins Bittencourt	Nível 2
Isabela Machado Pires	Nível 2
Letícia Domingues Nogueira	Nível 2
Marcelo Vieira da Silva Filho	Nível 2
Mauro José Rizzo Filho	Nível 2
Miguel Porto Carvalho Nunes	Nível 2
Yasmim Rodrigues Curã	Nível 2

Nome	Nível
Álvaro Dias Silveira	Nível 3
Arthur Moreira Batista	Nível 3
Artur Guilherme Candido Mendonca	Nível 3
Bianca Pereira de Souza	Nível 3
Carlos Eduardo Duarte Pereira	Nível 3
Enzo Ribeiro Alves	Nível 3
Fernando Giron Paranhos de Avila	Nível 3
Guilherme Araújo Fernandes de Oliveira	Nível 3
Guilherme Ávila Machado Costa	Nível 3
Henrique Vieira Cavalcante	Nível 3
Lucas Feitosa Costa	Nível 3
Luiz Eduardo Partata Galvão	Nível 3
Maria Clara Brisda dos Santos	Nível 3
Maria Eduarda Magalhães Ferreira	Nível 3
Maria Júlia Mendonça Fernandes de Freitas Almeida	Nível 3
Mateus Carneiro Beraldo	Nível 3
Nicholas Carvalho Marques Romanhuk	Nível 3
Paulo Otavio Silva de Oliveira	Nível 3
Pedro Dumont Moraes	Nível 3
Rafael Kaua de Freitas Araujo	Nível 3
Renan Machado Amorim	Nível 3
Sarah Antunes Vilela de Aguiar	Nível 3
Vinicius Costa Mercez	Nível 3
Vitor Marinho	Nível 3
Xile Wu	Nível 3

REVISTA DA OLIMPÍADA

Número 20

Resolução Comentada das Provas da XXXIII OMEG - Primeira Fase

Adriana Araújo Cintra[1] | Ana Paula de Araújo Chaves[2] | Douglas Hilário da Cruz[3] | Francisco Bruno de Lima Holanda[4] | Gregory Duran Cunha[5] | Hiuri Felipe Santos dos Reis[6] | Kamila da Silva Andrade[7] | Lidiane dos Santos Monteiro[8] | Luiz Fernando Gonçalves[9] | Marcelo Bezerra Barboza[10] | Otávio Marçal Leandro Gomide[11] | Rosane Gomes Pereira[12] | Tiago Moreira Vargas (in memoriam)[13] | Valdivino Vargas Júnior[14]

Neste artigo apresentamos resoluções comentadas das questões da primeira fase da XXXIII OMEG, realizada em 2024. Sugerimos que, antes de simplesmente ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, todos os problemas são apresentados primeiro e, depois, as soluções e comentários.

[1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14]Instituto de Matemática e Estatística, UFG

[2]Faculdade de Administração, Ciências Contábeis e Ciências Econômicas, UFG

Contato
[1]adriana.cintra@ufg.br
[2]apchaves@ufg.br
[3]douglascruz@ufg.br
[4]bholanda@ufg.br
[5]gregoryduran@ufg.br
[6]hiurireis@ufg.br
[7]kamila.andrade@ufg.br
[8]lidianesantos@ufg.br
[9]luiz.goncalves@ufg.br
[10]bezerra@ufg.br
[11]otaviomarcal@ufg.br
[12]rosanegope@ufg.br
[13]vargas@ufg.br
[14]vvjunior@ufg.br

1 | INTRODUÇÃO

A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG) é realizada anualmente pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), com apoio da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), desde 1992. A competição, que já consta no calendário de várias escolas, intenta despertar o interesse, bem como estimular e desenvolver a consciência de estudantes do ensino fundamental e médio sobre a importância do desenvolvimento do pensamento matemático; incitar a aprendizagem significativa, o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e a capacidade de resolver problemas por meio de competição Matemática; despertar os jovens para a investigação científica por meio de questões interessantes e desafiadoras , e, assim, atrair novos talentos para as carreiras em Ciências, particularmente em Matemática; e ampliar o contato de estudantes e professores da educação básica do estado de Goiás com a UFG.

Olimpíadas de Matemática como a OMEG representam uma grande oportunidade para a descoberta e o incentivo de novos talentos. Alunos com desempenho diferenciado frequentemente encontram nesses eventos um ambiente propício para aprofundar seus conhecimentos, desenvolver habilidades de resolução de problemas e ampliar sua visão sobre a abrangência e a beleza da Matemática. Além disso, tais competições contribuem para a formação de uma cultura científica sólida, estimulando o protagonismo estudantil e promovendo o intercâmbio de experiências entre participantes, professores e instituições de ensino.

Neste artigo apresentamos uma resolução comentada para cada uma das questões da primeira fase da OMEG de 2024. O artigo é dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos as questões relativas à primeira fase da prova da OMEG. Na Seção 3 as soluções das questões apresentadas na Seção 2 são detalhadas.

2 | PROVAS DA XXXIII OMEG-QUESTÕES RELATIVAS A PRIMEIRA FASE

2.1 | Primeira Fase - Nível 1

Problema 1:
Uma palavra *sábia* é uma combinação de letras de forma que sempre existirá pelo menos uma vogal entre duas consoantes. Quantas palavras *sábias* podem ser formadas usando as quatro letras da palavra **OMEG**?
(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 24 (e) 30

Problema 2:
Uma turma de alunos de um curso de Matemática reuniu-se em um restaurante para um jantar de confraternização e coube a Flávio receber de cada um a quantia a ser paga pela participação. Desconfiado que Ana, Bia e Carla não tinham pago as suas respectivas partes, Flávio conversou com as três e obteve as seguintes respostas:
Ana: - Você disse que Bia pagou ou Carla não pagou. Isso não é verdade.
Bia: - Se Carla pagou, então Ana também pagou.
Carla: - Eu paguei, mas sei que pelo menos uma das duas outras não pagou.
Considerando que **as três falaram a verdade**, é **correto** afirmar que:
(a) Apenas Bia não pagou a sua parte.
(b) Apenas Carla não pagou a sua parte.
(c) Ana e Carla não pagaram suas partes.
(d) Bia e Carla pagaram suas partes.
(e) As três pagaram suas partes.

Problema 3:

Alberto e Bruno aniversariam nos respectivos meses de agosto e setembro, em um mesmo dia da semana (segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado ou domingo). Se a data (1 a 30 ou 1 a 31, a depender do mês) do aniversário de Alberto é o sêxtuplo da data do de Bruno, então a soma das datas em que os dois aniversariam é:

(a) 21 (b) 14 (c) 7 (d) 35 (e) 2

Problema 4:

Após concluir suas tarefas escolares, Rafael decidiu brincar com números inteiros. Segundo ele, um número inteiro positivo de três dígitos, digamos,

$$\overline{a_0 a_1 a_2} = a_0 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_2,$$

é **especial** quando:

- $\overline{a_0 a_1 a_2}$ é par;
- $\overline{a_0 a_1 a_2} = a_0 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_2$ também é um número de três dígitos;
- $\overline{a_0 a_1 a_2}$ deixa resto 1 na divisão por 5.

Quantos números inteiros e positivos, de três dígitos, são **especiais** segundo Rafael?

(a) 88 (b) 89 (c)90 (d) 91 (e) 92

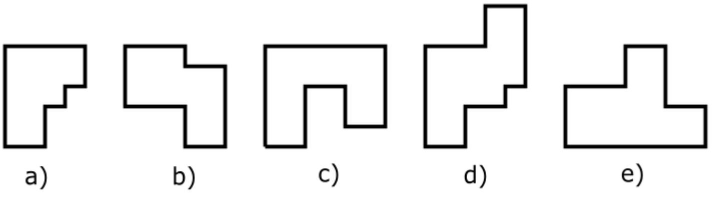
Problema 5:

Em um triângulo equilátero ABC de lado igual a 4 cm, traça-se um segmento $\overline{XY}$ paralelo ao lado $\overline{BC}$ de modo que o triângulo fique decomposto em um trapézio e em um novo triângulo. Sabendo-se que o perímetro do trapézio é igual ao perímetro do novo triângulo, então o comprimento do segmento de reta $\overline{XY}$, em centímetros, é:

(a) 1 (b) 0, 5 (c) 2 (d) 2, 5 (e) 3

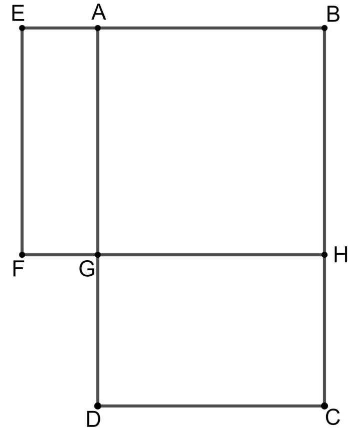
Problema 6:

Qual dos seguintes polígonos é um octógono cujos ângulos internos no sentido anti-horário são 90, 90, 90, 270, 90, 90, 90 e 270?



(a) Polígono a) (b) Polígono b) (c) Polígono c) (d) Polígono d) (e) Polígono e)

Problema 7:
Considere a figura abaixo, onde a área do retângulo $ABCD$ e a área do retângulo $EBHF$ são iguais a 48. Sabendo que o comprimento dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são números naturais e que $\overline{GD} = 2\overline{EA} = 4$, o perímetro do retângulo $EBHF$ é:



(a) 28 (b) 26 (c) 14 (d) 16 (e) 22

Problema 8:
Maria, Luiz, Jéssica, Carlos e Levi são os cinco filhos de Alacyr. Alacyr tem um total de 15 netos. Maria é tia de 13, Luiz é tio de 12, Jéssica é tia de 11 e Carlos é tio de 10 desses netos. Quantos filhos Levi tem?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 9:
Luiz quer comprar seis chocolates. Cada chocolate custa R$1, 00. Cinco lojas disseram que têm ofertas imperdíveis:

- **Loja 1:** "Compre um chocolate e leve o segundo pela metade do preço!"
- **Loja 2:** "Compre dois chocolates e ganhe o terceiro de graça!"
- **Loja 3:** "Compre cinco chocolates e ganhe o sexto de graça!"
- **Loja 4:** "25% de desconto em todos os chocolates!"
- **Loja 5:** "30% de desconto na compra de pelo menos três chocolates!"

Em qual loja Luiz **economiza mais** na compra de seis chocolates?
(a) Loja 1 (b) Loja 2 (c) Loja 3 (d) Loja 4 (e)Loja 5

Problema 10:
Érica sai todo dia da faculdade às 18 : 00 horas e sua mãe, Paula, que dirige com velocidade constante, chega todo dia às 18 : 00 à faculdade para apanhá-la e levá-la para casa. Num determinado dia, Érica é liberada meia hora mais cedo

da faculdade e resolve ir andando para casa, encontrando sua mãe no caminho e voltando de carro com ela o restante do caminho, chegando em casa 12 minutos mais cedo que o de costume. Quanto tempo, em minutos, Érica andou a pé?

(a) 18 (b) 24 (c) 22 (d) 25 (e) 26

2.2 | Primeira Fase - Nível 2

Problema 1:

Uma turma de alunos de um curso de Matemática reuniu- se em um restaurante para um jantar de confraternização e coube a Flávio receber de cada um a quantia a ser paga pela participação. Desconfiado que Ana, Bia e Carla não tinham pago as suas respectivas partes, Flávio conversou com as três e obteve as seguintes respostas:

Ana: -Você disse que Bia pagou ou Carla não pagou. Isso não é verdade.

Bia: -Se Carla pagou, então Ana também pagou.

Carla: -Eu paguei, mas sei que pelo menos uma das duas outras não pagou.

Considerando que **as três falaram a verdade**, é **correto** afirmar que:

(a) Apenas Bia não pagou a sua parte.

(b) Apenas Carla não pagou a sua parte.

(c) Ana e Carla não pagaram suas partes.

(d) Bia e Carla pagaram suas partes.

(e) As três pagaram suas partes.

Problema 2:

Uma palavra *sábia* é uma combinação de letras de forma que sempre existirá pelo menos uma vogal entre duas consoantes. Quantas palavras *sábias* podem ser formadas usando as quatro letras da palavra **OMEG**?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 24 (e) 30

Problema 3:

Seja $ABCD$ um trapézio cujos lados AB e CD são paralelos. Seja E o ponto médio do lado AD e assuma que $\overline{EC} = \overline{BC} = 3$. Sabendo que EBC é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C, qual é a área do trapézio $ABCD$?

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 9 (e) 11

Problema 4:

Sejam $x^2 + mx - 2 = 0$ e $x^2 - 2x + m = 0$ equações quadráticas distintas. Para qual valor de m as equações quadráticas possuem **pelo menos uma** raiz em comum?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

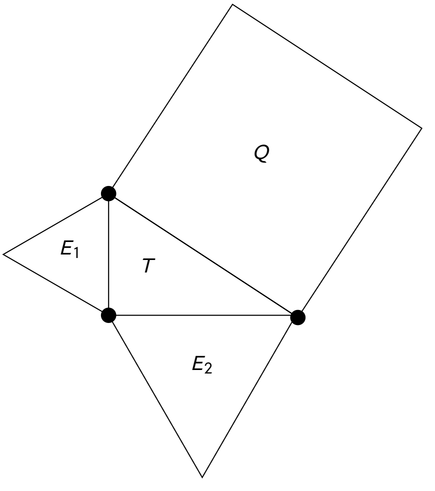
Problema 5:

Pedro e Paulo decidem fazer uma caminhada em uma pista circular, partindo juntos de um mesmo lugar, percorrendo-a em sentido contrário. Ambos caminham com velocidades constantes, sendo que a velocidade de Paulo é igual a 70% da velocidade de Pedro. Durante a caminhada, eles se encontraram diversas vezes. Porém, algum momento depois, percebem que eles encontram novamente no ponto de partida. Qual é a **menor** quantidade de voltas que Pedro precisa dar para que isso ocorra?

(a) 5 (b) 7 (c) 4 (d) 6 (e) 10

Problema 6:

George encontrou a figura de um triângulo retângulo T em um livro de matemática, e então decidiu construir dois triângulos equiláteros, E_1 e E_2, cada um com base em um dos distintos catetos de T. Além disso, ele construiu um quadrado Q com base sobre a hipotenusa de T. Se A denota a soma das áreas dos triângulos equiláteros E_1 e E_2, e B denota a área do quadrado Q, qual é o valor da razão $\frac{A}{B}$?



(a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Problema 7:

As 10 cadeiras de uma mesa circular foram etiquetadas com números consecutivos de dois dígitos cada, entre os quais há dois que são quadrados perfeitos. Antônio sentou-se na cadeira com o maior número e Omar, seu amigo, sentou-se na cadeira com o **menor** número. Qual é a soma dos números dessas duas cadeiras?

(a) 29 (b) 36 (c) 37 (d) 41 (e) 64

Problema 8:

Xavier digitou corretamente um múltiplo de 9 muito grande, com 4030 dígitos. Da esquerda para a direita, os dígitos são 2014 dígitos 1, um dígito n e 2015 dígitos 2. Qual é o valor de n?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 9:

Há 20 alunos em uma aula de Educação Física. Cada um desses 20 alunos está vestindo uma camiseta que é vermelha ou branca e está usando sapatos que são vermelhos ou brancos. Você tem as seguintes informações:

(i) Exatamente 10 alunos estão vestindo uma camiseta vermelha.

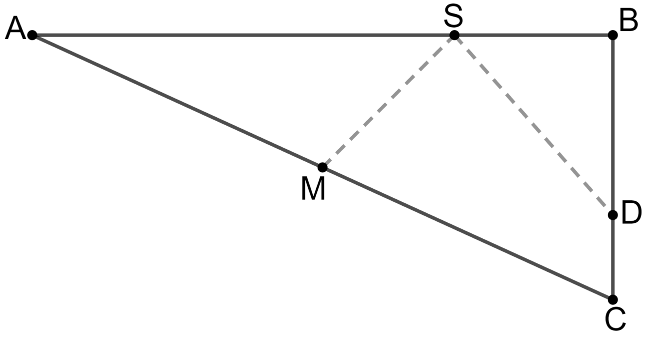
(ii) Exatamente 12 alunos estão usando sapatos vermelhos.

(iii) Exatamente 14 alunos estão vestindo camiseta e sapatos da mesma cor.

Quantos alunos estão vestindo uma camiseta vermelha e sapatos brancos?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) Impossível determinar a partir das informações fornecidas

Problema 10:
Considere um papel em forma do triângulo retângulo ABC da figura abaixo, em que $\overline{AB} = 12$ cm e $\overline{BC} = 4$ cm. Esse papel será dobrado ao longo da linha pontilhada $\overline{SD}$ de modo que o vértice B coincida com o ponto M que é o ponto médio de $\overline{AC}$.



Qual será o comprimento da dobra $\overline{SD}$?
(a) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ (b) $\frac{10\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{10\sqrt{6}}{4}$ (e) $\frac{10\sqrt{10}}{3}$

2.3 | Primeira Fase - Nível 3

Problema 1:
ma turma de alunos de um curso de Matemática reuniu- se em um restaurante para um jantar de confraternização e coube a Flávio receber de cada um a quantia a ser paga pela participação. Desconfiado que Ana, Bia e Carla não tinham pago as suas respectivas partes, Flávio conversou com as três e obteve as seguintes respostas:
Ana: -Você disse que Bia pagou ou Carla não pagou. Isso não é verdade.
Bia: -Se Carla pagou, então Ana também pagou.
Carla: -Eu paguei, mas sei que pelo menos uma das duas outras não pagou.
Considerando que **as três falaram a verdade**, é **correto** afirmar que:
(a) Apenas Bia não pagou a sua parte. **correta**
(b) Apenas Carla não pagou a sua parte.
(c) Ana e Carla não pagaram suas partes.
(d) Bia e Carla pagaram suas partes.
(e) As três pagaram suas partes.

Problema 2:

Quantas triplas (x, y, z) são soluções do sistema $\begin{cases} x + yz &= 6 \\ y + xz &= 6 \\ z + xy &= 6 \end{cases}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 5 (e) 6

Problema 3:

Uma sorveteria vende 100 bolas de sorvete por dia, sendo $R\$\ 2,00$ cada bola. O proprietário da sorveteria percebeu que para cada $R\$\ 0,10$ de desconto concedido por bola de sorvete, eram vendidas 10 bolas de sorvete a mais por dia, além das 100. Assim, o valor **máximo**, em reais, que pode ser arrecadado por essa sorveteria em um dia é:

(a) $R\$\,210$ (b) $R\$\,215$ (c) $R\$\,225$ (d) $R\$\,250$ (e) $R\$\,275$

Problema 4:

Após concluir suas tarefas escolares, Rafael decidiu brincar com números inteiros. Segundo ele, um número inteiro positivo de três dígitos, digamos,

$$\overline{a_2a_1a_0} = a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

é **especial** quando:

- $\overline{a_2a_1a_0}$ é par;
- $\overline{a_0a_1a_2} = a_0 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_2$ também é um número de três dígitos;
- $\overline{a_0a_1a_2}$ deixa resto 1 na divisão por 5.

Quantos números inteiros e positivos, de três dígitos, são **especiais** segundo Rafael?

(a) 88 (b) 89 (c) 90 (d) 91 (e) 92

Problema 5:

Considere um triângulo retângulo $\triangle ABC$ onde $\overline{AC}$ é a hipotenusa. Sejam Q o ponto médio de $\overline{AB}$ e P o ponto de $\overline{AC}$ que torna $\overline{PQ}$ paralelo a $\overline{BC}$. Considere O o ponto de intersecção dos segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{QC}$. Sabendo que $\overline{AC} = 12$ cm, qual é o comprimento de $\overline{PO}$?

(a) 4 cm (b) 6 cm (c) 2 cm (d) 5 cm (e) 3 cm

Problema 6:

Beatriz vende melancias na feira local. Ela vende uma melancia inteira por$R\$\ 7,00$ e metade de uma melancia por $R\$\ 4,00$. Quando um cliente compra metade de uma melancia, ela pega uma melancia inteira e a corta ao meio para ele. Beatriz começou um dia específico com 20 melancias inteiras. No final do dia, ela havia feito $R\$\ 101,00$ reais em vendas de melancias. Qual é o **maior** número de melancias que poderia ter **sobrado** ao final do dia na barraca de Beatriz?

(a) 7 (b) 9 (c) 4 (d) 2 (e) 6

Problema 7:

Qual é o último algarismo do número 2023^{2024}? (a) 3 (b) 7 (c) 6 (d) 9 (e) 1

Problema 8:
Seja $ABCD$ um quadrilátero com coordenadas $A = (2, 2)$, $B = (14, 2)$, $C = (16, 0)$ e $D = (0, 0)$. Este quadrilátero está inscrito em um círculo. Qual é a área deste círculo?
(a) 61π (b) 64π (c) 79π (d) 81π (e) 100π

Problema 9:
Suponha uma modalidade de aposta lotérica fictícia que funciona com as seguintes regras:
1- A cada semana uma cartela virtual com escudos de 20 equipes do futebol brasileiro é sorteada;
2- Há dez equipes participantes em cada uma das 27 unidades federativas. Numa cartela sorteada, cada equipe pertence a uma unidade federativa diferente das demais.
3- Uma vez definidas as 20 equipes, a ordem das equipes na cartela não muda (dadas 20 equipes, há apenas uma cartela com elas).

Suponha que seja possível fazer a impressão física de um conjunto de cartelas onde há exatamente uma de cada cartela possível. Se a cartela pesa 2 g, qual seria o peso de uma pilha com todas essas cartelas colocadas uma sobre a outra?
(a) $1,76 \cdot 10^8$ Kg (b) $4,0 \cdot 10^{-1}$ Kg (c) $1,76 \cdot 10^{20}$ Kg (d) $1,76 \cdot 10^{23}$ Kg (e) $4,0 \cdot 10^{26}$ Kg

Problema 10:
Deseja-se colocar os inteiros positivos de 1 a 16 nas casas de um tabuleiro 4×4 (um em cada casa), de modo que a soma em cada coluna e em cada linha seja ímpar. De quantas maneiras isso pode ser feito?
(a) $144 \cdot (8!)^2$ (b) $144 \cdot 8!$ (c) $16!$ (d) $(8!)^2$ (e) 144

3 | GABARITO DAS QUESTÕES RELATIVAS A PRIMEIRA FASE

3.1 | Primeira Fase - Nível 1

Problema 1: Resposta correta: (c).
A palavra **OMEG** possui duas vogais e duas consoantes, todas distintas. Em uma palavra com quatro letras, sendo duas vogais e duas consoantes, há três combinações que resultam em uma palavra sábia: $CVCV$, $CVVC$ e $VCVC$ onde C refere-se a consoante e V refere-se a vogal. Logo, para cada uma das combinações temos 4 possíveis palavras

sábias. Portanto, a quantidade total de palavras sábias é $4 \cdot 3 = 12$.

Problema 2: Resposta correta: (a).
Da terceira afirmação, segue que Carla pagou e uma das outras não pagou. Mas se Carla pagou, da segunda afirmação segue que Ana também pagou. Por consequência da terceira afirmação, Bia não pagou, indo de encontro à primeira afirmação. Testando as alternativas, concluímos facilmente que podemos descartar as alternativas: (b), (c), (d) e (e). Restando-nos somente a alternativa a, que obviamente deve ser a correta.

Problema 3: Resposta correta: (b)
Considere os pares ordenados (a, b) onde a representa o data de Alberto e b a de Bruno. Se a data do aniversário de Alberto é o sêxtuplo da de Bruno, as datas possíveis são os pares ordenados $(6, 1)$, $(12, 2)$, $(18, 3)$, $(24, 4)$, $(30, 5)$. Como ambos aniversariam no mesmo dia da semana, então a diferença entre a data de nascimento dos dois é divisível por 7. Testando os pares ordenados um a um, podemos ver que o par ordenado $(12, 2)$ é o único que satisfaz essa característica: se Alberto aniversaria dia 12 de agosto, faltam 19 dias para terminar esse mês, mais 2 dias até o aniversário de Bruno, ou seja, há 21 dias entre o aniversário de Alberto e de Bruno. Como 7 divide 21, a alternativa correta é o item (b).

Problema 4: Resposta correta: (b).

Esta questão foi anulada por conter um erro de digitação no enunciado. Mais precisamente, a condição "$\overline{a_2 a_1 a_0}$ é par" deveria ser "$\overline{a0a1a2}$ é par". Com esta modificação, a solução segue como abaixo.

Como $\overline{a_0 a_1 a_2} = a_0 a_1 a_2$ é um número de três dígitos, nós devemos ter $a_0 \neq 0$. Além disso, como $\overline{a_0 a_1 a_2}$ é par, nós temos que $a_2 \in \{2, 4, 6, 8\}$. Agora, perceba que:

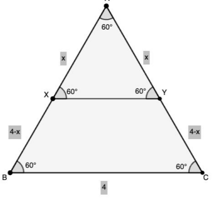
$$\frac{\overline{a_0 a_1 a_2}}{2} = \frac{a_0 10^2 + a_1 10 + a_2}{2} = 5(a_0 10 + a_1) + \frac{a_2}{2},$$

Se queremos obter resto 1 na divisão por 5 é preciso ter $\frac{a_2}{2}$ igual a 1, ou seja, $a_2 = 2$. Resumindo:

$$a_2 = 2, \qquad a_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \qquad a_0 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

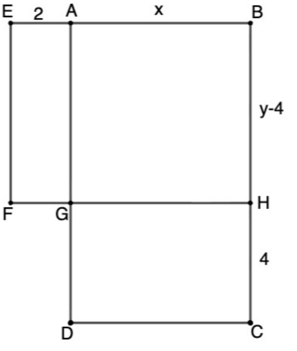
São, portanto, $10 \cdot 9 = 90$ números e a alternativa correta é a (b).

Problema 5: Resposta correta: (e).
Observando a figura, temos que o perímetro do novo triângulo AXY é $3x$ e o perímetro do trapézio $XBCY$ é $2(4 - x) + 4 + x = 12 - x$, assim, $3x = 12 - x$ o que nos dá $x = 3$.



Problema 6: Resposta correta: (b).
Basta observar que é o polígono b).

Problema 7: Resposta correta: (a)
Observando a figura abaixo, e baseando-se no enunciado, temos o sistema $\begin{cases} xy = & 48, \\ (x+2)(y-4) = & 48. \end{cases}$



Assim, $xy = (x+2)(y-4)$ o que nos dá $y = 2x+4$. Como x e y são naturais, então, testando as possibilidades, temos:

- para $x = 1$, temos $y = 6$ e $xy = 6 \neq 48$, assim a solução não serve.
- para $x = 2$, temos $y = 8$ e $xy = 16 \neq 48$, assim a solução não serve.
- para $x = 3$, temos $y = 10$ e $xy = 30 \neq 48$, assim a solução não serve.
- para $x = 4$, temos $y = 12$ e $xy = 48$, assim a solução serve.
- para $x > 4$, temos $y > 12$ e $xy > 48$, não gerando soluções para o problema.

Logo, a única solução possível é $x = 4$ e $y = 12$. O perímetro de $EBHF$ é dado por $2(x+2) + 2(y-4) = 2(4+2) + 2(12-4) = 28$.
Problema 8: Resposta correta: (a).
Para determinar quantos filhos Levi tem, definimos algumas variáveis: m para o número de filhos de Maria, l para o número de filhos de Luiz, j para o número de filhos de Jessica, c para o número de filhos de Carlos e v para o número de filhos de Levi. Sabemos que: $m + l + j + c + v = 15$. Como Maria é tia de 13, então os filhos dos outros quatro irmãos somam 13, ou seja, $l + j + c + v = 13$. Do mesmo modo, temos $m + j + c + v = 12$, $m + l + c + v = 11$, $m + l + j + v = 10$. Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos $m = 2$. Do mesmo modo, subtraindo cada uma das outras equações da primeira obtemos $l = 3$, $j = 4$ e $c = 5$. Finalmente, substituindo m, l, j, e c na primeira equação para encontrar v obtemos $v = 1$. Portanto, Levi tem 1 filho.

Problema 9: Resposta correta: (b).
Para determinar em qual loja Luiz economiza mais na compra de seis chocolates, precisamos calcular o custo total em cada loja e comparar.

1. **Loja 1: “Compre um chocolate e leve o segundo pela metade do preço!”**

- Preço de um chocolate: 1 real
- Preço do segundo chocolate: 0,5 real
- Custo de 2 chocolates: $1 + 0,5 = 1,5$ reais
- Para 6 chocolates: $3 \times 1,5 = 4,5$ reais

2. **Loja 2: "Compre dois chocolates e ganhe o terceiro de graça!"**

- Preço de dois chocolates: 2 reais
- Terceiro chocolate: grátis
- Custo de 3 chocolates: 2 reais
- Para 6 chocolates: $2 \times 2 = 4$ reais

3. **Loja 3: "Compre cinco chocolates e ganhe o sexto de graça!"**

- Preço de cinco chocolates: 5 reais
- Sexto chocolate: grátis
- Para 6 chocolates: 5 reais

4. **Loja 4: "25% de desconto em todos os chocolates!"**

- Preço original de um chocolate: 1 real
- Desconto de 25%: $1 \times 0,75 = 0,75$ reais
- Para 6 chocolates: $6 \times 0,75 = 4,5$ reais

5. **Loja 5: "30% de desconto na compra de pelo menos três chocolates!"**

- Preço original de um chocolate: 1 real
- Desconto de 30%: $1 \times 0,70 = 0,70$ reais
- Para 6 chocolates: $6 \times 0,70 = 4,2$ reais

Portanto, a loja onde Luiz economiza mais na compra de seis chocolates é a **Loja 2**, onde o custo total é 4 reais.

Problema 10: Resposta correta: (b).
Temos que Érica e Paula chegaram em casa 12 minutos mais cedo do que o de costume. Isso ocorreu porque Paula não precisou ir até a faculdade para apanhar Érica. Ela ja vinha andando, e ela a apanhou antes de chegar à faculdade. Dos 12 minutos que Paula economizou na viagem, metade (6 min) se refere à ida do ponto de encontro com Érica à faculdade e a outra metade (6 min) se refere à volta da faculdade ao ponto de encontro. Como Paula chegaria a faculdade às 18:00 e ela economizou 6 min na ida para a faculdade, então Paula apanhou Érica 6 minutos antes das 18:00, ou seja, às 17:54. Como Érica saiu da faculdade às 17:30 e foi apanhada às 17:54, então concluímos que Érica caminhou durante 24 minutos (17:54-17:30).

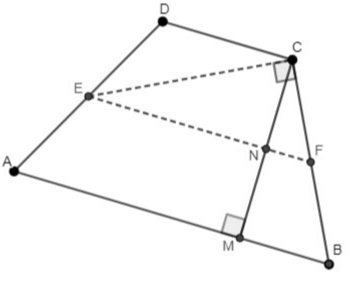
3.2 | Primeira Fase - Nível 2

Problema 1: Resposta correta: (a).

Vide solução do Problema 2 do Nível 1.

Problema 2: Resposta correta: (c).
A palavra **OMEG** possui duas vogais e duas consoantes, todas distintas. Em uma palavra com quatro letras, sendo duas vogais e duas consoantes, há três combinações que resultam em uma palavra sábia: $CVCV$, $CVVC$ e $VCVC$ onde C refere-se a consoante e V refere-se a vogal. Logo, para cada uma das combinações temos 4 possíveis palavras sábias. Portanto, a quantidade total de palavras sábias é $4 \cdot 3 = 12$.

Problema 3: Resposta correta: (d)



Primeiramente, traçaremos uma reta paralela ao lado AB e passando por E. A reta intercepta o lado BC em um ponto F de forma que $\overline{CF} = \overline{FB}$. Assim, $\overline{CF} = \frac{3}{2}$ e ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo ECF obteremos $\overline{EF} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. O segmento EF é a base média do trapézio, isto é, $\overline{EF} = \dfrac{(\overline{AB} = \overline{CD})}{2} \cdot$ Resta-nos descobrir a altura do trapézio para utilizar a fórmula da área. De C baixe uma perpendicular ao lado AB, esta intercepta os segmentos EF e AB nos pontos N e M, respectivamente. Da semelhança de triângulos, podemos concluir que $\overline{CN} = \dfrac{\overline{CM}}{2} \cdot$ A área do triângulo ECF pode ser obtida de duas formas diferentes: $\dfrac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2}$ ou $\dfrac{\overline{EF} \cdot \overline{CN}}{2} \cdot$ Comparando as duas expressões obtemos $\overline{CN} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ e assim a área do trapézio $ABCD$ é dada por: $\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 9$.

Problema 4: Resposta correta: (a).
Seja r raiz dos polinômios, isto é, $r^2 + mr - 2 = 0$ e $r^2 - 2r + m = 0$. Subtraindo as duas equações, obtemos: $(m + 2)(r - 1) = 0$. Como os polinômios são distintos segue que $r = 1$. Se $r = 1$ então ao substituir nas equações iniciais concluímos que $m = 1$.

Problema 5: Resposta correta: (e).
Quando os dois amigos se encontram a primeira vez, então a soma dos comprimentos percorridos por ambos deve ser igual ao comprimento da pista. Assim, cada vez que eles se encontram, a soma dos comprimentos percorridos deve ser um múltiplo do comprimento da pista. Se após k encontros eles se encontram no ponto de partida, cada um deles deve ter dado um número inteiro de voltas na pista, m e n, digamos. Assim, $m = n = k$. Como ambos perfazem

o percurso em velocidade constante, temos que $m = (7/10)n$ de modo que $(7/10)n = n = k$, ou seja $k = (10/7)n$. Como n e k são inteiros, o menor n inteiro possível é 7 e nesse caso, $k = 10$.

Problema 6: Resposta correta: (a).
Sejam a e b as medidas dos catetos do triângulo retângulo e c a medida de sua hipotenusa. A soma das áreas dos triângulos equiláteros é $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$ e a área do quadrilátero é c^2. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $a^2 + b^2 = c^2$, e portanto a razão solicitada na questão é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Problema 7: Resposta correta: (d).
Os números quadrados perfeitos de dois dígitos são: 16, 25, 36, 49, 64 e 81. Para que tenhamos dois números quadrados perfeitos de forma que as 10 cadeiras sejam etiquetadas com números consecutivos precisamos que a numeração seja: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25. O menor valor é 16 e o maior é 25. Logo, o resultado será 41.

Problema 8: Resposta correta: (b).
Xavier digitou o número

$$\underbrace{111\cdots1}_{2014}\,n\,\underbrace{222\cdots2}_{2015}.$$

O número é múltiplo de 9, isto é

$$2014 = 2(2015) = n = 9k$$

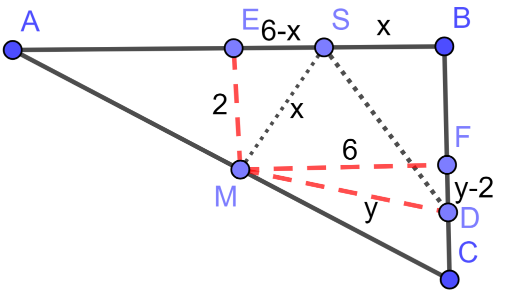
Logo, obtemos $6044 = n = 9k$. O número 6048 é divisível por 9. Portanto, $n = 4$.

Problema 9: Resposta correta: (a).
Considere

- x o número de alunos com camiseta e sapato vermelhos;
- y o número de alunos com camiseta e sapato brancos;
- z o número de alunos com camiseta vermelha e sapato branco;
- w o número de alunos com camiseta branca e sapato vermelho.

De acordo com (iii) temos $x = y = 14$. Assim, $z = w = 6$ pois $x = y = z = w = 20$.
De acordo com (i) temos $x = z = 10$ e de acordo com (ii) temos $x = w = 12$.
Como $z = w = 6$ então ao substituirmos pelos valores $z = 10 - x$ e $w = 12 - x$ obtemos $x = 8$. Consequentemente, $z = 2$, $w = 4$ e $y = 6$. Portanto, temos 2 alunos vestindo camiseta vermelha e sapato branco.

Problema 10: Resposta correta: (e).
Considere a figura abaixo.



Aqui, os triângulos MES e MFD são retângulos. $\overline{MS} = x, \overline{ES} = 6 - x$. Aplicando Teorema de Pitágoras em MES temos

$$x^2 = (6 - x)^2 = 2^2$$

o que nos dá $x = \frac{10}{3}$cm. Aplicando Teorema de Pitágoras em MFD, temos

$$y^2 = 6^2 = (y - 2)^2$$

o que nos dá $y = 10cm$. Como temos uma dobradura, o triângulo MSD também é retângulo, logo $\overline{SD}^2 = x^2 = y^2 = \frac{100}{9} = 100 = \frac{1000}{9}$, logo

$$\overline{SD} = \frac{10\sqrt{10}}{3}cm.$$

3.3 | Primeira Fase - Nível 3

Problema 1: Resposta correta: (a).

Vide solução do Problema 2 do Nível 1.

Problema 2: Resposta correta: (d).
Subtraímos a segunda equação do sistema da primeira e obtemos:

$$(x - y)(1 - z) = 0$$

Subtraímos a terceira equação do sistema da primeira e obtemos:

$$(x - z)(1 - y) = 0$$

Subtraímos a terceira equação do sistema da segunda e obtemos:

$$(y - z)(1 - x) = 0$$

Se $z = 1$ teremos ou $x = 1$ ou $y = 1$. Do sistema original, obteremos então $x = y = 6$ e $xy = 5$. As triplas neste caso são: $(1, 5, 1), (5, 1, 1)$. Se $z \neq 1$ então $x = y$ e o sistema original fornece as equações $x = xz = 6$ e $z = x^2 = 6$ e assim $x = 1$ ou $x = z$. Se $x = 1$ então $z = 5$. Se $x = z$ então $z = 2$ ou $z = -3$. As triplas neste caso são: $(1, 1, 5), (2, 2, 2), (-3, -3, -3)$. Assim, obtemos cinco triplas que são soluções do sistema dado.

Problema 3: Resposta correta: (c).
Seja V o valor arrecadado e x as unidades de desconto em R$ 0,10 concedido (o número de descontos de dez centavos). Assim,

$$V(x) = (2,00 - 0,10x)(100 + 10x).$$

Esta função pode ser reescrita como

$$V(x) = 200 + 10x - x^2$$

que é uma função quadrática que atinge ponto de máximo em $x = \frac{-10}{2(-1)} = 5$. Mas

$$V(5) = 200 + 10.5 - 5^2 = 225.$$

Problema 4: Resposta correta: (b).
Como $\overline{a_2a_1a_0} = a_0a_1a_2$ é um número de três dígitos, nós devemos ter $a_0 \neq 0$. Além disso, como este é um número par, nós sabemos que $a_2 \in \{2, 4, 6, 8\}$. Agora, perceba que:

$$\frac{\overline{a_2a_1a_0}}{2} = \frac{a_0a_1a_2}{2} = \frac{a_0 10^2 = a_1 10 = a_2}{2} = 5\,(a_0 10 = a_1) = \frac{a_2}{2},$$

Se queremos obter resto 1 na divisão por 5 é preciso ter $\frac{a_2}{2}$ igual a 1, ou seja, $a_2 = 2$. Resumindo:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2, \\ a_1 &\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ a_0 &\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \end{aligned}$$

São, portanto, $10 \cdot 9 = 90$ números.

Problema 5: Resposta correta: (c).
O triângulo $\triangle AQP$ é semelhante a $\triangle ABC$ com razão meio. Assim, $\overline{AP} = \overline{PC} = 6$ cm. $\triangle BPQ$ é um triângulo retângulo e $\overline{BP}$ é a hipotenusa, assim $\triangle AQP$ e $\triangle AQP$ são congruentes, logo $\overline{BP} = 6$ cm. Note que O é o baricentro de $\triangle ABC$, pois $\overline{BP}$ e $\overline{QC}$ são medianas. então temos que $\overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{BP} = 2$ cm.

Problema 6: Resposta correta: (a).

Sejam x o número de peças inteiras vendidas e y o número de metades vendidas. Ao fim do dia temos:

$$7x = 4y = 101. \tag{1}$$

O dia começou com 20 peças inteiras. Perceba que

$$7x \leq 7x = 4y = 101 \Rightarrow 7x \leq 101 \Rightarrow x \leq 14.$$

E além disso, considerando a equação (1) módulo 4, conseguimos

$$7x \equiv 101 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow x \equiv 3 \pmod 4.$$

Ou seja, x deixa resto 3 quando dividido por 4, donde as únicas possibilidades para x dentro do intervalo encontrado são $x \in \{3, 7, 11\}$. Portanto, as soluções da equação são: $(3, 20); (7, 13); (11, 6)$.

No primeiro caso, são 3 inteiras e 20 metades (10 inteiras), com o total de 13 inteiras. Resto de 7 melancias no fim do dia.

No segundo caso, são 7 inteiras e 13 metades, com o total de 13 inteiras e uma metade. Resto de 1 metade e 6 inteiras.

No terceiro caso, são 11 inteiras e 6 metades, com o total de 14 inteiras. Resto de 6 inteiras.

Portanto, o maior resto é de 7 melancias.

Problema 7: Resposta correta: (e).

Basta-nos saber qual o último algarismo de 3^{2024}. Agora, perceba que temos o seguinte padrão para o último dígito de potências de 3:

$$3^1 \longrightarrow 3, \ \ 3^2 \longrightarrow 9, \ \ 3^3 \longrightarrow 7, \ \ 3^4 \longrightarrow 1,$$

$$3^5 \longrightarrow 3, \ \ 3^6 \longrightarrow 9, \ \ 3^7 \longrightarrow 7, \ \ 3^8 \longrightarrow 1,$$

$$\ldots$$

Sendo assim, como 2024 é múltiplo de 4, o último dígito de 3^{2024} é 1.

Problema 8: Resposta correta: (e).

Seja $P = (x, y)$ o centro de circulo e r o raio do circulo. Como o quadrilátero está inscrito em um círculo temos que:

(1) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = r^2$

(2) $(x-14)^2 + (y-2)^2 = r^2$

(3) $(x-16)^2 + y^2 = r^2$

(4) $x^2 + y^2 = r^2$

Subtraindo a equação (3) da equação (4) temos que

$$(x-16)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 8.$$

Substituindo $x = 8$ temos que

(1) $36 = (y-2)^2 = r^2$
(2) $64 = y^2 = r^2$

Subtraindo as duas últimas equações, temos que

$$(y-2)^2 - y^2 = 28 \Rightarrow y = -6.$$

Portanto, $P = (8, -6)$. Logo

$$64 = 36 = r^2 \Rightarrow r = 10.$$

Portanto, a área do circulo é 100π.

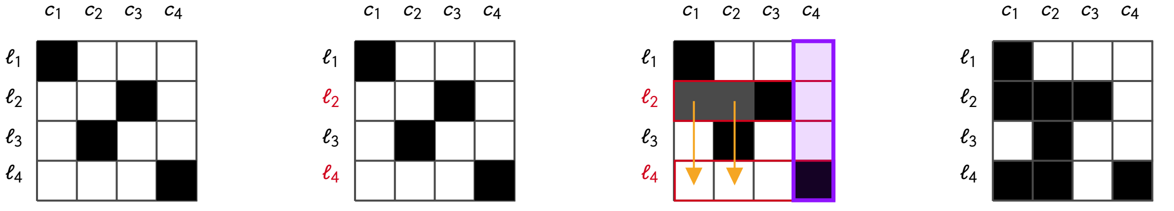
Problema 9: Resposta correta: (d).
Temos 27 unidades federativas para escolher 20. O número de modos de escolher as 27 unidades federativas é $C_{27,20} = \frac{27!}{20!7!} = 888.030$. Fixada, a escolha das 20 unidades federativas, há para cada uma delas dez escolhas possíveis de equipes. Logo, o total de cartelas pode ser obtido pelo PFC: $C_{27,20} \times 10^{20} = 8,8803 \times 10^{25}$.

O peso será

$$8,8803 \times 10^{25} 2.10^{-3} = 1,76.10^{23} Kg.$$

Problema 10: Resposta correta: (a).
Observe que, para se determinar a paridade da soma dos números em uma linha/coluna, não importa quais números ímpares colocamos nas mesmas, mas sim a quantidade, que deve ser ímpar. Como são 4 números em cada linha/coluna, então cada uma deve ter 1 ou 3 números ímpares. Sendo assim, vamos pintar o tabuleiro 4×4 de branco e preto, onde as casas pretas serão aquelas com números ímpares (que vamos nos preocupar posteriormente), de modo que cada linha/coluna possua exatamente 1 ou 3 casas pretas, e no total tenhamos 8 casas pretas.

Primeiro, vamos pintar 4 casas pretas, de modo que se tenha exatamente uma em cada linha/coluna. Perceba que isso pode ser feito de 4! formas diferentes, basta notar que na 1ª linha temos 4 possibilidades; na 2ª linha não podemos pintar na mesma coluna da casa já pintada da 1ª linha, nos dando 3 possibilidades; o mesmo se repete para as outras duas linhas, o que pelo princípio multiplicativo nos garante a afirmação. Agora, nos resta pintar 4 casas, e como cada linha tem 1 ou 3 pintadas, existirão duas linhas com 3 casas pretas e duas com 1. Temos $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de escolher as duas linhas que terão mais duas casas pintadas. Supondo que escolhemos as linhas ℓ_i e ℓ_j, e que nestas linhas as casas pintadas no primeiro passo estão nas colunas c_{n_i} e c_{n_j}, com $i, j, n_i, n_j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$ e $n_i \neq n_j$. Veja que as casas a serem pintadas na linha ℓ_i já ficam determinadas, pois não podemos pintar uma casa na coluna c_{n_j}, pois caso contrário tal coluna teria duas casas pretas, o que não é permitido. Dessa forma, nos resta apenas pintar na linha ℓ_i as duas casas restantes. Feito isso, as casas a serem pintadas na linha ℓ_j também ficam determinadas, pois é necessário pintar na mesma as casas que estão nas colunas das duas casas que acabamos de pintar na linha ℓ_i, já que as colunas de tais casas ficaram com duas pretas cada. A figura abaixo ilustra esse processo, a partir uma escolha específica do primeiro passo:



Escolhidas as casas pretas, há 8! maneiras de distribuir os oito números ímpares entre 1 e 16, e finalmente, 8! maneiras de distribuir os oito números pares entre 1 e 16 nas casas restantes. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, temos $4! \cdot 6 \cdot (8!)^2 = 144 \cdot (8!)^2$ como resposta para o problema.

REVISTA DA OLIMPÍADA

Número 20

Resolução Comentada das Provas da XXXIII OMEG -Segunda Fase

Adriana Araújo Cintra[1] | Ana Paula de Araújo Chaves[2] | Douglas Hilário da Cruz[3] | Francisco Bruno de Lima Holanda[4] | Gregory Duran Cunha[5] | Hiuri Felipe Santos dos Reis[6] | Kamila da Silva Andrade[7] | Lidiane dos Santos Monteiro[8] | Luiz Fernando Gonçalves[9] | Marcelo Bezerra Barboza[10] | Otávio Marçal Leandro Gomide[11] | Rosane Gomes Pereira[12] | Tiago Moreira Vargas (in memoriam)[13] | Valdivino Vargas Júnior[14]

[1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14]Instituto de Matemática e Estatística, UFG

[2]Faculdade de Administração, Ciências Contábeis e Ciências Econômicas, UFG

Contato
[1]adriana.cintra@ufg.br
[2]apchaves@ufg.br
[3]douglascruz@ufg.br
[4]bholanda@ufg.br
[5]gregoryduran@ufg.br
[6]hiurireis@ufg.br
[7]kamila.andrade@ufg.br
[8]lidianesantos@ufg.br
[9]luiz.goncalves@ufg.br
[10]bezerra@ufg.br
[11]otaviomarcal@ufg.br
[12]rosanegope@ufg.br
[13]vargas@ufg.br
[14]vvjunior@ufg.br

Neste artigo apresentamos resoluções comentadas das questões da segunda fase da XXXIII OMEG, realizada em 2024. Sugerimos que, antes de simplesmente ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, todos os problemas são apresentados primeiro e, depois, as soluções e comentários.

1 | INTRODUÇÃO

Neste artigo apresentamos uma resolução comentada para cada uma das questões da segunda fase da OMEG de 2024. O artigo é dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos as questões relativas à segunda fase da prova da OMEG. Na Seção 3 as soluções das questões apresentadas.

2 | PROVAS DA XXXIII OMEG- ENUNCIADO DAS QUESTÕES RELATIVAS A SEGUNDA FASE

2.1 | Questões relativas ao Nível 1

Problema 1:
No meu bolso possuo somente moedas de 10 centavos e de 25 centavos, totalizando um valor, em reais, de $R\$2,50$. Quais as possíveis quantidades de moedas que eu possuo no meu bolso?

Problema 2:
Giraldo esqueceu sua senha de 4 dígitos, fez algumas tentativas e obteve dicas, conforme esquema abaixo:

- | 9 | 2 | 8 | 5 | Só um dígito está correto, mas na posição errada.
- | 1 | 9 | 3 | 7 | Exatamente dois dígitos estão corretos, mas em posições erradas.
- | 5 | 2 | 0 | 1 | Só um dígito está correto e está na posição certa.
- | 6 | 5 | 0 | 7 | Nenhum dígito está correto.
- | 8 | 5 | 2 | 4 | Exatamente dois dígitos estão corretos, mas em posições erradas.

Com base nas tentativas acima, qual é a senha de 4 dígitos de Giraldo? Justifique sua resposta.

Problema 3:
As amigas Alice, Berenice e Candice se perderam uma das outras em meio ao deserto do Saara. Cada uma está parada em um ponto e grita o mais alto possível para que as outras possam encontrá-la. Existe um único ponto em que é possível ouvir Alice e Candice ao mesmo tempo, um outro único ponto (diferente do anterior) em que se pode ouvir Candice e Berenice ao mesmo tempo e existe ainda um único ponto (que difere dos outros dois) em que é possível ouvir ao mesmo tempo Alice e Berenice. Candice está, em linha reta, a uma distância de 1,5 km do ponto em que se encontra Alice. Alice, está a 0,85 km, em linha reta, do ponto em que está Berenice. Alice grita o suficiente para que seja possível ouvi-la em qualquer ponto até 0,5 km de onde ela está. Qual a distância em linha reta, em metros, entre os pontos em que se encontram Berenice e Candice?

Problema 4:
Sete pessoas participam de uma competição e para recompensá-las o organizador decide distribuir livros. A distribuição dos livros depende da classificação dos participantes e deve seguir, obrigatoriamente, as regras descritas abaixo:

1ª Regra. Se dois participantes obtiverem a mesma pontuação, deverão obter o mesmo número de livros.

2ª Regra. Caso um participante obtenha pontuação superior a outro, deverá receber um maior número de livros.

3ª Regra. Cada participante deverá receber pelo menos um livro.

4ª Regra. Todos os livros devem ser distribuídos.

Responda:
(a) Em certa edição desta mesma competição, foram distribuídos exatamente 56 livros. Dê exemplo de uma classificação onde tal distribuição seja possível.
(b) Qual a menor quantidade de livros que o organizador deve ter para cumprir todas essas regras independente da classificação dos participantes?

2.2 | Questões relativas ao Nível 2

Problema 1:
Uma estrutura é formada por uma circunferência e três cordas de tamanhos 18, 42 e 54, onde as cordas de tamanhos 18 e 54 estão a uma mesma distância d da corda de tamanho 42. Determine a distância d entre as cordas.

Problema 2:
Em um acampamento de verão, todas as crianças, exceto 24 delas, são "filhos únicos" (não têm irmãos), todas as crianças, exceto 18, têm um único irmão, e todas as crianças, exceto 14, têm dois irmãos. Quantas crianças nesse acampamento podem ter mais de 2 irmãos, sabendo que há pelo menos um filho único e que todos os irmãos de todas as crianças também estão no acampamento?

Problema 3:
O planeta OMEG é habitado por criaturas denominadas *omeguianas*, cada criatura assume uma única cor dentre: vermelho, azul e cinza. Nesse planeta os encontros entre seus habitantes podem gerar mudanças na população. A dinâmica dos encontros é descrita abaixo
(i) Quando duas omeguianas azuis se encontram elas desaparecem e uma nova omeguiana vermelha surge;
(ii) Quando três omeguianas vermelhas se encontram elas desaparecem e uma nova omeguiana azul surge;
(iii) Quando três omeguianas cinzas se encontram elas desaparecem e uma nova omeguiana vermelha surge;
(iv) Quando uma omeguiana vermelha se encontra com uma omeguiana cinza elas desaparecem e uma nova omeguiana azul surge;
(v) Quando uma omeguiana vermelha se encontra com uma omeguiana azul elas desaparecem e duas novas omeguianas cinzas surgem.
Seguindo essa dinâmica e assumindo que no planeta OMEG existem, somente, 2024 omeguianas e todas elas vermelhas, responda o que se pede:
(a) Descreva uma sucessão de encontros de forma que, em algum momento existam apenas 5 omeguianas no planeta OMEG.
(b) Mostre que a quantidade de omeguianas vermelhas somada com o dobro de omeguianas cinzas e com o triplo de omeguianas azuis deixa sempre o mesmo resto na divisão por 5, independente dos encontros que ocorrerem.
(c) É possível obter uma sucessão de encontros de forma que as 5 omeguianas restantes sejam da mesma cor?

Problema 4:
Resolva os itens a seguir:

(a) Prove que é possível pintar os inteiros $\{1, 2, 3, ..., 14\}$ de duas cores (azul e vermelho) de modo que não existam três números a, b, c pintados da mesma cor tais que $2a + b = c$.
(b) Prove que ao pintarmos os inteiros $\{1, 2, 3, ..., 15\}$ de duas cores (azul e vermelho) sempre existirão três números a, b, c pintados da mesma cor tais que $2a + b = c$.

2.3 | Questões relativas ao Nível 3

Problema 1:
Qual o resto da divisão do número

$$2024^2 - 2023^2 + 2022^2 - 2021^2 + \cdots + 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

por 2024?

Problema 2:
Uma estrutura é formada por uma circunferência e três cordas de tamanhos 18, 42 e 54, onde as cordas de tamanhos 18 e 54 estão a uma mesma distância d da corda de tamanho 42. Determine o raio da circunferência.

Problema 3:
Seja f a função cúbica dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, onde a, b são números reais. Determine todos os números a e b para os quais f possui 3 raízes distintas, sendo uma delas igual a 1.

Problema 4:
No jogo do *dois ou um*, três ou mais crianças ficam organizadas em uma roda e assim que o grupo fala "dois ou um", todos, simultaneamente, mostram um ou dois dedos. Vence o jogo aquele jogador que mostrar um número de dedos diferente do que os outros jogadores mostraram. Por exemplo, num grupo de cinco crianças, uma delas venceria se colocou um dedo e as outras quatro crianças colocaram dois dedos (venceria também a criança que tenha colocado dois dedos e todas as demais um dedo). Caso nenhuma criança seja a única a mostrar uma dada quantidade de dedos o jogo fica empatado e a dinâmica é repetida. Suponha um jogo do dois ou um com $n, n \geq 3$ jogadores.
(a) Qual é a probabilidade do jogo terminar empatado?
(b) Considere uma sequência de jogos do dois ou um até que o jogo tenha o primeiro vencedor. Calcule a probabilidade de se repetirem pelo menos m vezes o jogo até que se tenha o primeiro vencedor.

3 | PROVAS DA XXXIII OMEG- SOLUÇÕES DAS QUESTÕES RELATIVAS A SEGUNDA FASE

3.1 | Soluções das questões relativas ao Nível 1

Problema 1:
Seja x o número de moedas de 10 centavos e y o número de moedas de 25 centavos. Assim,

$$10x + 25y = 250 \text{ centavos.}$$

Observe que y não pode ser ímpar, pois teríamos uma soma de um número par ($10x$) com um número ímpar $25y$ resultando em um número par. Além disso, $0 \leq x \leq 25$ e $0 \leq y \leq 10$. Analisando as possibilidades para x e y, temos:

- $y = 0$ e $x = 25$: total de 25 moedas;
- $y = 2$ e $x = 20$: total de 22 moedas;
- $y = 4$ e $x = 15$: total de 19 moedas;
- $y = 6$ e $x = 10$: total de 16 moedas;
- $y = 8$ e $x = 5$: total de 13 moedas;
- $y = 10$ e $x = 0$: total de 10 moedas.

Logo, as quantidades possíveis de moedas são: 25, 22, 19, 16, 13 e 10.

Sendo (x, y) o par ordenado representado as soluções inteiras da equação, temos os pares: $(25, 0)$, $(20, 2)$, $(15, 4)$, $(10, 6)$, $(5, 8$
Não podemos aumentar ainda mais o valor de y, senão teríamos $x < 0$. Logo as quantidades possíveis de moeda são: 25, 22, 19, 16, 13, 10.

Problema 2:

Vamos enumerar as 5 informações que temos:

(1)	9	2	8	5	Só um dígito está correto, mas na posição errada.
(2)	1	9	3	7	Exatamente dois dígitos estão corretos, mas em posições erradas.
(3)	5	2	0	1	Só um dígito está correto e está na posição certa.
(4)	6	5	0	7	Nenhum dígito está correto.
(5)	8	5	2	4	Exatamente dois dígitos estão corretos, mas em posições erradas.

Por (4), podemos eliminar os dígitos 6, 5, 0 e 7. Assim, por (3), temos que 2 ou 1 é o dígito correto na posição certa. Se for o dígito 2, teremos uma contradição com (1), logo concluímos que o 1 é o 4^o dígito da senha. Por (3), podemos eliminar o dígito 2 da disputa. Por (5), sabemos que 8 e 4 aparecem na senha. Como a posição do 8 não pode ser a primeira (por (5)), nem a quarta (já está ocupada pelo 1) e nem a terceira (por (1)), logo concluímos que o 8 é o 2^o dígito da senha. Por (1), podemos eliminar o 9 da disputa. E por (2), temos que 3 é um dos dígitos da senha e não ocupa a terceira posição, restando somente a primeira posição para ele. Para o 4 restou a terceira posição. Portanto, a senha é 3841.

Problema 3:

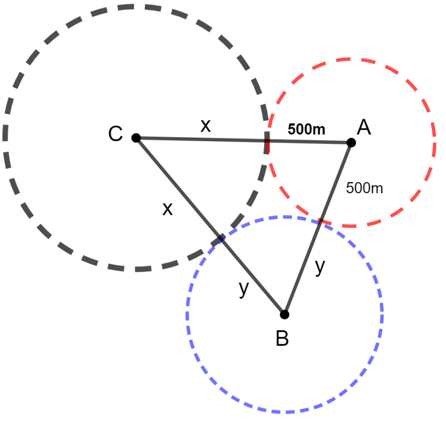


FIGURA 1 Esquema ilustrando as posições de Alice, Berenice e Candice

Na Figura 1 acima, os pontos A, B e C representam, Alice, Berenice e Candice, respectivemente. A única distância de alcance do grito informada no enunciado foi a de Alice: 850 metros. Logo, a distância máxima que se consegue ouvir Alice é uma circunferência raio igual a 850 metros. A distância máxima que se consegue ouvir as outras duas são também circunferências, mas os raios não foram informados no enunciado. Como só existe um ponto em que se pode ouvir Alice e Berenice, então as circunferências dos gritos das duas se tocarão em um único ponto. Também só existe um ponto em que se pode ouvir Alice e Candice, e ainda um único ponto em que se pode ouvir Berenice e Candice. Então, as circunferências dos gritos das três ficarão de acordo com a figura acima. Assim se x é o raio de Candice, temos que $x + 500m = 1500m$, portanto $x = 1000m$. Do mesmo modo, se y é o raio de Berenice, temos que $y + 500 = 850m$, logo $y = 350m$. Como a distância de Berenice e Candice é $x + y$, temos $x + y = 1000m + 350m = 1350m$.

Problema 4:

(a) Exemplo: Do último (sétimo colocado) para para o primeiro colocado, temos a respectiva distribuição, somando 56 livros, para o caso em que todos os participantes obtenham a mesma pontuação: $(8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)$. Alternativamente, poderíamos ter a configuração $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 20)$, dentre outras.

(b) A ideia é estabelecer uma cota inferior para o número de livros necessários e mostrar que esta cota é suficiente. Para isso, suponha que N seja a menor quantidade de livros que o organizador deva dispor para cumprir todas as regras.Se todos os participantes obtiverem a mesma pontuação, deverão obter o mesmo número, k, de livros e assim o número total de livros é $N = 7k$, isto é, N deve ser múltiplo de 7.

Além disso, caso 6 participantes obtenham a mesma pontuação e o sétimo uma pontuação menor que os demais, então cada um dos 6 empatados deve receber pelo menos $k+1$ livros pois caso contrário o último colocado receberia um número igual ou maior de livros que os outros, o que não pode ocorrer. Note que $7k - 6(k+1) = k - 6$ é a quantidade que o último colocado deve receber. Mas, pela regra 3, como o último colocado deve receber ao menos um livro, devemos ter $k - 6 \geq 1$, ou seja, $k \geq 7$ e, consequentemente, $N \geq 49$. Por exemplo, caso o organizador disponha de 42 livros e os 6 primeiros participantes obtenham a mesma pontuação então teríamos que dar 8 livros para cada um deles, pois caso contrário o último colocado receberia a mesma quantidade de livros que os demais. Assim, $8 \times 6 = 48$ ultrapassaria a quantidade de livros disponíveis. Note que para $k = 7$ precisaríamos de um total de 49 livros, o que seria suficiente para cumprir todas as regras, distribuindo 8 livros para os 6 participantes empatados e 1 livro para participante na última colocação. Este total aumenta para valores de $k > 7$.

Vamos mostrar que $N = 49$ é uma quantidade suficiente para solucionar o problema.

Façamos 7 pilhas de livros, organizados provisoriamente da seguinte maneira:

- na primeira pilha coloque 1 livro; (total de livros organizados: $1 = 1^2$)
- na segunda pilha coloque 3 livros; (total de livros organizados: $1 + 3 = 4 = 2^2$)
- na terceira pilha coloque 5 livros; (total de livros organizados: $4 + 5 = 9 = 3^2$)
- na quarta pilha coloque 7 livros; (total de livros organizados: $9 + 7 = 16 = 4^2$)
- na quinta pilha coloque 9 livros; (total de livros organizados: $16 + 9 = 25 = 5^2$)
- na sexta pilha coloque 11 livros; (total de livros organizados: $25 + 11 = 36 = 6^2$)
- na sétima pilha coloque 13 livros. (total de livros organizados: $36 + 13 = 49 = 7^2$)

Note que, no final foram provisoriamente organizados 49 livros em 7 pilhas. Na distribuição de livros ter-se-á a primeira pilha dada à última colocação, seguindo sucessivamente até que a última pilha seja dada à primeira colocação. O que é preciso fazer agora é organizar os possíveis empates para que os empatados recebam a mesma quantidade de livros. Para tal, suponha que, ao organizarmos os participantes da pior para a melhor colocação, haja um empate, com mesma pontuação, da posição $m + 1$ até a posição n. Observe que dessa maneira, as posições coincidem com a ordem das pilhas de livros. Vamos verificar que é possível redistribuir os livros dessas pilhas, de forma que cada pilha tenha a mesma quantidade de livros.

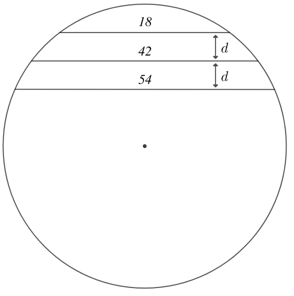
De fato, somando os livros organizados nas pilhas de $m + 1$ à n, teremos $n^2 - m^2$ livros (pois até a pilha i foram distribuídos provisoriamente i^2 livros) os quais deverão ser redistribuídos igualmente para $n-m$ participantes. Observe que

$$\frac{n^2 - m^2}{n - m} = \frac{(n-m)(n+m)}{n-m} = n + m.$$

Portanto, é possível redistribuir os livros nas pilhas de $m + 1$ até n de forma que cada pilha tenha a mesma quantidade de livros sem que seja necessário adicionar livros aos que foram inicialmente distribuídos. Isso significa que, $N = 49$ é a menor quantidade de livros que o organizador deve ter para que consiga cumprir todas as regras de distribuição.

3.2 | Soluções das questões relativas ao Nível 2

Problema 1:



Seja r o raio da circunferência e h a distância do centro da circunferência até a corda de tamanho 54. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$r^2 = h^2 + 27^2.$$

Mas $h + d$ é a distância do centro da circunferência até a corda de tamanho 42 e $h + 2d$ é a distância do centro da circunferência até a corda de tamanho 18. Usando novamente o Teorema de Pitágoras (duas vezes), obtemos

$$r^2 = (h + d)^2 + 21^2 = (h + 2d)^2 + 9^2$$

Portanto,

$$r^2 = h^2 + 27^2 = (h + d)^2 + 21^2 = (h + 2d)^2 + 9^2$$

Assim

$$\begin{aligned} h^2 + 27^2 &= (h + d)^2 + 21^2 = h^2 + 2hd + d^2 + 441 \\ h^2 + 27^2 &= (h + 2d)^2 + 9^2 = h^2 + 4hd + 4d^2 + 81 \end{aligned} \tag{1}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{2} + dh &= 144 \\ d^2 + dh &= 162 \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto,

$$d^2 = 36$$

Resolvendo, encontramos $d = 6$.

De $18 + 6h = 144$, ou de $36 + 6h = 162$, encontramos

$$h = 21$$

De $r^2 = h^2 + 27^2 = 21^2 + 27^2 = 441 + 729 = 1170$, encontramos

$$r = \sqrt{1170} = 3\sqrt{130}$$

Problema 2:
Seja o número de campistas x, então o número de filhos únicos é $x - 24 \geq 1$, ou seja, $x \geq 25$. O número de crianças com um irmão é $x - 18$, o número de crianças com dois irmãos é $x - 14$, e juntos eles são no máximo o número total de campistas, então $x - 24 + x - 18 + x - 14 \leq x$. Organizamos a desigualdade: $2x \leq 56$, logo $x \leq 28$. Comparando isso com o que foi dito anteriormente, temos que x pode ser $25, 26, 27$ ou 28, e, de acordo com isso, analisamos os seguintes casos:
1. Caso 1: Se $x = 25$, então $25 - 18 = 7$ campistas teriam um irmão, mas como todos os irmãos também são campistas, eles devem estar em número par, então, nesse caso, não há solução.
2. Caso 2: Se $x = 26$, então $26 - 24 = 2$ campistas não têm irmãos, $26 - 18 = 8$ campistas têm um irmão, e $26 - 14 = 12$ campistas têm dois irmãos. Isso é possível, pois satisfaz a condição de que os com um irmão estão em pares, e os com dois irmãos estão em grupos de três. Agora, só precisamos verificar quantos têm mais de 2 irmãos, pois evidentemente devem ser mais que 3, o que é verdade, já que seu número é $26 - 2 - 8 - 12 = 4$. Nesse caso, encontramos uma solução correta.
3. Caso 3: Se $x = 27$, então $27 - 18 = 9$ campistas teriam um irmão, o que não satisfaz a condição de que eles estejam em pares, logo, não há solução.
4. Caso 4: Se $x = 28$, então $28 - 14 = 14$ campistas teriam dois irmãos. Como 14 não é divisível por 3, eles não poderiam estar em grupos de três, logo, não há solução.

Não há mais casos, portanto, existem 4 crianças no acampamento que têm mais de 2 irmãos.

Problema 3:

[a)]

Passo 1:	V_{2024}	$\longrightarrow$	$A_{674} + V_2$
Passo 2:	$A_{674} + V_2$	$\longrightarrow$	V_{339}
Passo 3:	V_{339}	$\longrightarrow$	A_{113}
Passo 4:	A_{113}	$\longrightarrow$	$V_{56} + A_1$
Passo 5:	$V_{56} + A_1$	$\longrightarrow$	$A_{19} + V_2$
Passo 6:	$A_{19} + V_2$	$\longrightarrow$	$V_{11} + A_1$
Passo 7:	$V_{11} + A_1$	$\longrightarrow$	$V_2 + A_4$
Passo 8:	$V_2 + A_4$	$\longrightarrow$	$V_1 + C_2 + A_3$
Passo 9:	$V_1 + C_2 + A_3$	$\longrightarrow$	$A_4 + C_1$

No **Passo 9** restaram cinco omeguianas sendo quatro vermelhase uma cinza.

[b)] De forma geral, no **Passo** i temos x omeguianas vermelhas, y omeguianas azuis e z omeguianas cinzas. Denotaremos por N_i o número $x + 2z + 3y$. Mostraremos que N_i deixa o mesmo resto na divisão por 5. Aplicando o Algoritmo da Divisão, temos: $x = 3q_1 + r_1$, $y = 2q_2 + r_2$ e $z = 3q_3 + r_3$. Assim,

i) Transformação $A_2 \longrightarrow V_1$:

Passo i:	$\cdots$	$\longrightarrow$	$V_x + A_y + C_z$
Passo (i+1):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$V_{x+q_2} + A_{r_2} + C_z$

$N_{i+1} = x + 2z + 3y - 5q_2 = N_i - 5q_2$

ii) Transformação $V_3 \longrightarrow A_1$:

Passo i:	$\cdots$	$\longrightarrow$	$V_x + A_y + C_z$
Passo (i+1):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$V_{r_1} + A_{y+q_1} + C_z$

$N_{i+1} = x + 2z + 3y = N_i$

iii) Transformação $C_3 \longrightarrow V_1$:

Passo i:	$\cdots$	$\longrightarrow$	$V_x + A_y + C_z$
Passo (i+1):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$V_{x+q_3} + A_y + C_{r_3}$

$N_{i+1} = x + 2z + 3y - 5q_3 = N_i - 5q_3$

iv) Transformação $V_1 + C_1 \longrightarrow A_1$:

Passo i:	$\cdots$	$\longrightarrow$	$V_x + A_y + C_z$
Passo (i+1)($z < x$):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$V_{x-z} + A_{y+z}$
Passo (i+1)($z > x$):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$C_{z-x} + A_{y+x}$
Passo (i+1)($z = x$):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	A_{y+x}

$N_{i+1} = N_i$

v) Transformação $V_1 + A_1 \longrightarrow C_2$:

Passo i:	$\cdots$	$\longrightarrow$	$V_x + A_y + C_z$
Passo (i+1)($x < y$):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$C_{2x+z} + A_{y-x}$
Passo (i+1)($x > y$):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	$C_{2y+z} + V_{x-y}$
Passo (i+1)($y = x$):	$V_x + A_y + C_z$	$\longrightarrow$	C_{2y+z}

$N_{i+1} = N_i$

Para todos os casos, $N_i - N_{i+1} = 5k$. Como $N_0 = 2024$ e este deixa resto 4 na divisão por 5, usando a fórmula recursiva obtemos que para qualquer N_i o resto na divisão por 5 será 4.

[c)]

Observemos que em cada um dos passos anteriores, o número de omeguianas restantes após cada encontro obedece um padrão. Este padrão é obtido quando somamos a quantidade de omeguianas vermelhas com o dobro da quantidade de omeguianas cinzas e com o triplo de omeguianas azuis. Para todos os passos o resultado obtido seguindo este padrão é um número que deixa resto 4 na divisão por 5. Analisando as situações, temos:

i) Todas as cinco omeguianas restantes são vermelhas: para este caso temos que o número de omeguianas azuis e cinzas é zero e aplicando o padrão teremos o resultado 5 que deixa resto 0 na divisão por 5.
ii) Todas as cinco omeguianas restantes são cinzas: para este caso temos que o número de omeguianas azuis e vermelhas é zero e aplicando o padrão teremos o resultado 10 que deixa resto 0 na divisão por 5.
iii) Todas as cinco omeguianas restantes são azuis: para este caso temos que o número de omeguianas vermelhas e cinzas é zero e aplicando o padrão teremos o resultado 15 que deixa resto 0 na divisão por 5.

Logo, não é possível obter apenas cinco omeguianas da mesma cor na caixa pois em nenhuma das situações o resto da divisão por 5 é 4, conforme padrão observado no item [b)].

Problema 4:
(a) Um trio (a, b, c) é dito ser bom se $2a + b = c$ e, além disso, todos os números a, b, c são da mesma cor. Considere a seguinte coloração dos números $\{1, \ldots, 14\}$: 1 – 3 são pintados de vermelho, 4 – 12 de azul, e 13 – 14 de vermelho. Essa coloração não admite trio bom, como verificamos a seguir:

- Escolhendo $a, b \in \{1, 2, 3\}$, temos que $4 \leq 2a + b \leq 8$, então a e b são vermelhos, mas $c = 2a + b$ é azul.
- Escolhendo $a, b \in \{4, 5, \ldots, 12\}$, temos que $2a + b \geq 13$, então a e b são azuis, mas $c = 2a + b$ é vermelho ou muito grande.
- Escolhendo $a \geq 13$ ou $b \geq 13$, temos que $2a + b \geq 15$, então $c = 2a + b$ é muito grande.
- As opções restantes teriam a e b de cores distintas.

Logo, em nenhuma opção temos um trio bom, e consequentemente a coloração apresentada satisfaz as condições pedidas.
(b) Mostraremos a seguir, por contradição, que qualquer coloração de $\{1, \ldots, 15\}$ produz um trio bom. Suponha que tenhamos uma coloração de $\{1, \ldots, 15\}$ para a qual não existe um trio bom. Temos dois casos:

Caso 1: 1 e 2 são da mesma cor. Sem perda de generalidade, suponha que 1 e 2 sejam ambos vermelhos. Usando nossa suposição de que não há trios bons, as seguintes cores são necessárias:

- 4 deve ser azul, porque, caso contrário, $(1, 2, 4)$ seria um trio bom vermelho.
- 5 deve ser azul, porque, caso contrário, $(2, 1, 5)$ seria um trio bom vermelho.
- 13 deve ser vermelho, porque, caso contrário, $(4, 5, 13)$ seria um trio bom azul.
- 15 deve ser azul, porque, caso contrário, $(1, 13, 15)$ seria um trio bom vermelho.
- 7 deve ser vermelho, porque, caso contrário, $(4, 7, 15)$ seria um trio bom azul.
- 3 deve ser azul, porque, caso contrário, $(2, 3, 7)$ seria um trio bom vermelho.
- 9 deve ser azul, porque, caso contrário, $(1, 7, 9)$ seria um trio bom vermelho.

E agora temos uma contradição, pois $(3, 9, 15)$ é um trio bom azul.

Caso 2: 1 e 2 são de cores diferentes. Sem perda de generalidade, suponha que 1 seja vermelho e 2 seja azul. Se qualquer $5 \leq x \leq 13$ for colorido de vermelho, então, como o trio $(1, x, x + 2)$ não pode ser um trio bom vermelho, vemos que $x + 2$ deve ser colorido de azul. Mas então, como o trio $(2, x - 2, x + 2)$ não pode ser um trio bom azul, vemos que $x - 2$ deve ser colorido de vermelho. Mas, nesse caso, $(1, x - 2, x)$ é um trio bom vermelho, o que não é permitido. Portanto, todos os elementos de $\{5, \ldots, 13\}$ devem ser coloridos de azul. E agora temos uma contradição pois, em particular, $(2, 5, 9)$ é um trio bom azul.

Assim, por contradição, qualquer coloração de $\{1, \ldots, 15\}$ deve produzir pelo menos um trio bom.

3.3 | Soluções das questões relativas ao Nível 3

Problema 1:
Observe que o número dado pode ser escrito da seguinte forma:

$$(2024-2023)(2024+2023)+(2022-2021)(2022+2021)+\cdots+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1)$$

Realizando as operações obtém-se:

$$2024+2023+2022+2021+\cdots+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1,$$

que é uma progressão aritmética de razão 1. Logo,

$$2024+2023+2022+2021+\cdots+8+7+6+5+4+3+2+1=\frac{(2024+1)}{2}\cdot 2024.$$

Note que este é um número divisível por 2024, isto é, deixa resta zero na divisão por 2024.

Problema 2:
Ver Problema 1, Nível 2.

Problema 3:
Como $f(1)=0$, segue que $a+b=-2$ e portanto $b=-2-a$. Assim, podemos fatorar $f(x)=(x^2+(1+a)x-1)(x-1)$. Observe que $\Delta=(1+a)^2+4>0$ e portanto a equação quadrática tem duas raízes reais dadas por $x_{\pm}=\dfrac{-(1+a)\pm\sqrt{(1+a)^2+4}}{2}$. Note que x_- é sempre negativo, pois $x_-<-(1+a+|1+a|)/2\leq 0$, logo $x_-\neq 1$. Agora, se $1+a\geq 0$, então $x_+>(-(1+a)+(1+a))/2=0$. Se $1+a<0$, então $x_+>(-(1+a)-(1+a))/2=-(1+a)>0$. Em ambos os casos $x_-<0<x_+$. Assim, para que f tenha 3 raízes distintas, é necessário e suficiente que $x_+\neq 1$. Igualando $x_+=1$, obtemos $a=-1$. Neste caso, para que a função f tenha 3 raízes distintas, é necessário e suficiente que $a\neq -1$ e $b=2-a$.

Problema 4:
a) Note que para n crianças usamos o Princípio Fundamental da Contagem para obter que existem $2\times 2\times\ldots\times 2=2^n$ possibilidades de configurações de dedos (cada criança coloca um ou dois dedos). Em cada uma dessas 2^n configurações há vencedor quando uma criança coloca um dedo e as outras $n-1$ crianças colocam dois dedos ou quando uma criança coloca dois dedos e as outras $n-1$ crianças colocam um dedo. Isso ocorre em $n+n=2n$ configurações. Logo, a probabilidade de haver vencedor é

$$\frac{2n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

e então a probabilidade do jogo terminar empatado é

$$1-\frac{2n}{2^n}=1-\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}.$$

b) Para que se repita o jogo pelo menos m vezes, é preciso que as primeiras $m-1$ repetições terminem sem vencedor. Se A é o evento de interesse e A_i é o evento onde a i-ésima repetição do jogo termina em empate. Como os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ são independentes, a probabilidade requerida é

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) = \prod_{i=1}^{m-1}\left[1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right] = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)^{m-1}.$$

REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 20

A Carreira Acadêmica do Professor Tiago Moreira Vargas

Valdivino Vargas Junior[1] | Rodrigo Lambert[2] | Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva[3] | Heitor Braga de Melo[4] | Rosane Gomes Pereira[5]

Este artigo presta uma homenagem ao professor Tiago Moreira Vargas, com foco em sua trajetória acadêmica e contribuições profissionais. A primeira parte aborda sua formação, início da carreira e atuação na Universidade Federal de Goiás (UFG). Em seguida, é apresentada uma visão geral de sua contribuição na Universidade Federal de Uberlândia (UFU). O texto também destaca seu papel como professor, orientador, pesquisador e colaborador em projetos científicos, bem como sua relevante participação na Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG). O artigo se encerra com reflexões sobre seu legado acadêmico, profissional e pessoal.

[1,3,5] Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
[2] Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Mato Grosso
[4] João Domingos Advogados Associados

Contato
[1] vvjunior@ufg.br
[2] rodrigolambert@yahoo.com.br
[3] tmelo@ufg.br
[4] heitorbragamelo@gmail.com
[5] rosanegope@ufg.br

1 | INTRODUÇÃO

Este artigo aborda a trajetória do professor Tiago Moreira Vargas, destacando sua formação acadêmica, bem como suas contribuições institucionais e científicas. Na Seção 2, Valdivino Vargas Junior apresenta um panorama da carreira do professor, abordando desde sua formação escolar até os primeiros passos na vida acadêmica, com ênfase em sua atuação na Universidade Federal de Goiás (UFG). A Seção 3, escrita por Rodrigo Lambert, traça um retrato da contribuição do professor Tiago na Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Na Seção 4, Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva ressalta sua atuação como pesquisador e colaborador em projetos científicos. Na Seção 5, Heitor Braga de Melo retrata o professor Tiago a partir do ponto de vista do aluno, destacando como os discentes percebiam sua atuação e postura em sala de aula. A Seção 6, de autoria de Rosane Gomes Pereira, destaca o envolvimento e a importância de Tiago na Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG). Por fim, na Seção 6, Valdivino Vargas Junior apresenta as considerações finais, reforçando a relevância do legado acadêmico e humano deixado pelo professor Tiago Moreira Vargas.

2 | A CARREIRA ACADÊMICA DO PROFESSOR TIAGO MOREIRA VARGAS

O professor Tiago Moreira Vargas nasceu em 26 de setembro de 1983 e, apesar de sua partida precoce, deixou uma marca profunda entre familiares, amigos e colegas de trabalho. Desde muito jovem, destacou-se nos estudos, iniciando a educação básica aos seis anos e concluindo o ensino médio aos dezesseis. Ingressou inicialmente no curso de Ciência da Computação na UFG, mas, motivado por sua paixão pela Matemática, migrou para essa área, na qual se formou com excelência, recebendo elogios de diversos professores. Após concluir o mestrado, também na UFG, cursou o doutorado em Estatística na USP, com atuação destacada. Professores que o acompanharam ao longo da vida acadêmica expressaram, em homenagens, a admiração por sua inteligência, dedicação e caráter, entre eles, sua orientadora Silvia Lopes de Paula Ferrari e o professor Fábio Prates Machado (coordenador da Pós-graduação em Estatística do IME-USP no período em que Tiago ingressou no doutorado), que ressaltaram tanto sua passagem brilhante pela USP quanto sua receptividade e generosidade no convívio acadêmico.

Entre 2013 e 2017, o professor Tiago Moreira Vargas atuou na Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e, a partir de 2017, tornou-se professor efetivo do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (UFG). Na UFG, destacou-se nas áreas de ensino, pesquisa e extensão, sempre com forte dedicação e envolvimento nos projetos em que participava. Era conhecido por preparar suas aulas com grande cuidado, priorizando o aprendizado dos alunos e a coerência pedagógica das avaliações. Na extensão, teve participação marcante na Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG), atuando como editor-chefe da revista da olimpíada, elaborador de questões e articulador entre os professores do projeto. Sua ausência em 2025 tem sido amplamente sentida pelos colegas envolvidos. Na pesquisa, vinha aprofundando os estudos iniciados em sua tese de doutorado, com aplicações práticas já em andamento e perspectivas de expansão futura.

O professor Tiago Moreira Vargas teve um impacto significativo na vida acadêmica e pessoal de inúmeros estudantes. Como orientador, foi sempre dedicado e inspirador, incentivando seus orientandos a valorizarem o conhecimento e a se aprofundarem nos estudos. Seu comprometimento como educador foi reconhecido por ex-estudantes, que, em homenagens recentes, expressaram profunda gratidão à sua família pelo apoio e incentivo que receberam do professor durante o período de orientação. Cabe destacar que algumas dessas orientações e discussões com estudantes se transformaram em publicações acadêmicas (veja [3] e [4]), fato que contribuiu para que os estudantes atingissem um patamar maior de maturidade e interesse nos estudos.

Além de sua produção acadêmica, o professor Tiago Moreira Vargas também se dedicou à divulgação da matemática, desenvolvendo artigos voltados ao apoio de professores no estímulo ao pensamento crítico dos estudantes. Era conhecido por propor problemas instigantes e com significado prático, buscando sempre conectar o conteúdo matemático à realidade dos alunos. Essa preocupação com a formação crítica, tanto de estudantes quanto de professores, foi uma das marcas mais notáveis de sua atuação docente e intelectual.

Nesse contexto, tive a oportunidade de realizar diversas parcerias com o professor Tiago, que sempre demonstrou grande empenho e compromisso com os projetos em que se envolvia. Por diversas vezes, discutimos problemas para a confecção de questões para a OMEG. Partindo de ideias iniciais, desenvolvemos problemas interessantes que vieram a figurar na olimpíada do nosso estado, Goiás. Tiago sempre demonstrou empolgação e empenho para que chegássemos às melhores versões possíveis dos problemas. Como exemplo também, destaco o trabalho apresentado em [1], no qual desenvolvemos um modelo voltado a alertar a população sobre os riscos dos jogos de aposta. O objetivo do estudo é mostrar como as regras desses jogos são estruturadas para gerar lucro contínuo às bancas, em prejuízo dos jogadores. Em [2], nós avaliamos um método amplamente divulgado na internet como sendo infalível para ganhar dinheiro: o chamado método Martingale. Demonstramos que essa estratégia está longe de ser infalível e que pessoas podem, na verdade, perder muito dinheiro ao adotá-la. Deixamos claro que os jogos propostos, a longo prazo, tendem a causar prejuízo aos jogadores. Essas colaborações evidenciam não apenas o rigor acadêmico de Tiago, mas também sua preocupação com temas socialmente relevantes e com a formação crítica da sociedade.

Tiago também participou ativamente da organização de diversos eventos, como várias edições do ENGOPE e do Workshop on Statistics and Probability (evento satélite do ICM). Foi membro do NDE do curso de Estatística por vários anos, membro da Comissão Acadêmica do PROFMAT e vice-presidente da Comissão de Pesquisa do IME. Participou de um grande número de bancas de mestrado, TCCs, entre outras. Em algumas bancas nas quais trabalhamos conjuntamente, pude testemunhar o empenho do professor em colaborar de forma significativa na elaboração das versões finais dos trabalhos, sempre com contribuições inteligentes e relevantes. Essa diversidade nas atividades do professor demonstra o papel importante que ele desempenhou dentro da universidade.

3 | A ATUAÇÃO DO PROFESSOR TIAGO MOREIRA VARGAS NA UFU

A trajetória de Tiago como professor começou em 2013, na então Faculdade de Matemática — hoje Instituto de Matemática e Estatística — da Universidade Federal de Uberlândia. Durante todo o tempo em que esteve lá, sua mesa ficava na sala 1J-107, um pequeno espaço que acabou se tornando ponto de encontro de colegas, alunos e amigos.

Logo ao chegar, impaciente como só ele sabia ser, preferiu não esperar pela estruturação oficial da sala. Comprou, junto com os colegas, uma impressora, um quadro de vidro e um aparelho de ar-condicionado, e mandou fazer a instalação. Queria o lugar pronto, vivo, funcionando. Era o jeito Tiago de começar as coisas: fazendo.

Pouco tempo depois, entre 2014 e 2015, assumiu a coordenação do curso de Estatística. Nesse período, destacou-se pelo diálogo constante com professores e alunos, sempre com a convicção de que a boa formação exigia prática e persistência. Certa vez, um aluno entrou em sua sala se queixando de uma lista com cem exercícios de Probabilidade I. Tiago ouviu, sorriu… e sugeriu mais cem.

Com os alunos, sabia equilibrar ternura e firmeza. Não oferecia facilidades, mas oferecia escuta, tempo e confiança. Sua sala era abrigo e oficina: lugar onde se encontravam os que buscavam aprender, e também os que apenas precisavam conversar.

Foi nesse mesmo espaço que começou sua ligação com a OBMEP. Tiago aplicou provas em Carneirinho, no interior de Minas, e integrou a equipe de correção do núcleo de Uberlândia — sempre com a mesma disposição de contribuir e somar.

Tiago liderava com leveza e geria com elegância. Tinha humor, energia e uma presença tranquila que inspirava quem o cercava. Lembrando Fernando Sabino, talvez se possa dizer que ele fazia “da queda um passo de dança, do medo uma escada, do sono uma ponte, da procura um encontro.”

Participou de várias Semanas Acadêmicas da FAMAT-UFU, muitas vezes como membro oficial da comissão, outras tantas como colaborador espontâneo — sempre disposto a ajudar, inclusive como “leva e traz” de convidados.

Durante seu período na UFU, orientou diversos alunos, publicou artigos em revistas internacionais de bom nível e deixou muito mais do que registros em seu Lattes: deixou amigos, histórias, risadas e um exemplo silencioso de dedicação e generosidade.

4 | PESQUISA E PRODUÇÃO CIENTÍFICA

O presente texto tem como objetivo prestar uma homenagem póstuma ao professor Tiago Moreira Vargas, colega e amigo que partiu precocemente em abril de 2025. Sua trajetória acadêmica e científica foi marcada pela seriedade intelectual, pelo compromisso com a pesquisa e pela dedicação à formação de novas gerações de matemáticos e estatísticos.

A pesquisa de Tiago Moreira Vargas se concentrou em teoria assintótica de alta ordem, em especial na obtenção de correções de viés para estimadores e de ajustes para estatísticas de teste em modelos de regressão, contribuindo de forma inovadora à literatura, confirmando seu reconhecimento acadêmico. Publicou artigos em periódicos de destaque, como *Computational Statistics & Data Analysis*, *Electronic Journal of Statistics*, *Communications in Statistics* e *Journal of Statistical Computation and Simulation*.

Esses trabalhos abordaram desde modelos lineares generalizados até regressões mais recentes, como os modelos Dirichlet, modelos com parametrização geral e Gama unitária.

Sua atuação em pesquisa foi marcada não apenas pela competência técnica, mas também por sua inteligência singular e criatividade. Tiago tinha a habilidade de propor ideias originais e caminhos inovadores, que frequentemente abriam novas possibilidades de investigação. Era um parceiro de pesquisa dedicado, sempre disposto a colaborar, compartilhar conhecimentos e somar esforços. Sua postura proativa e suas contribuições inspiradoras enriqueceram inúmeros trabalhos conjuntos, deixando clara a importância de sua presença como colega e pesquisador.

Para mim, em especial, Tiago foi mais que um colega de pesquisa: foi um amigo muito próximo, com quem compartilhei inúmeras conversas, ideias e dúvidas. Era comum trocarmos mensagens até tarde da noite, discutindo algum resultado, explorando uma nova possibilidade ou simplesmente esclarecendo questões que me pareciam difíceis, mas que ele conseguia elucidar com impressionante facilidade. Sua capacidade de transformar problemas complexos em argumentos claros e acessíveis era notável, e sua generosidade em dedicar tempo para ajudar e incentivar jamais será esquecida. Essas memórias de troca intelectual e amizade sincera permanecem vivas como parte de tudo o que aprendi com ele.

Além de sua produção teórica, Tiago contribuiu intensamente com a *Revista da Olimpíada*, voltada ao ensino e divulgação em Matemática, onde publicou vários artigos, comentando provas, propondo problemas e discutindo aplicações probabilísticas. Essa produção, direcionada a estudantes e professores, ilustra bem sua capacidade de transitar entre a pesquisa avançada e a popularização do conhecimento.

Tiago Moreira Vargas deixa como legado uma trajetória acadêmica notável, marcada por contribuições significativas à Estatística e à Matemática. Sua produção científica qualificada lhe confere um lugar de destaque na memória da comunidade acadêmica.

Ao mesmo tempo, será lembrado não apenas por seu brilhantismo intelectual, mas por sua generosidade, humildade e espírito colaborativo. Sua ausência é sentida profundamente, mas sua obra, seus ensinamentos e o impacto humano de sua convivência permanecem como fonte de inspiração.

5 | UM OLHAR DISCENTE

Com profundo sentimento de gratidão e apreço, escrevo este texto em nome dos inúmeros alunos que tiveram o privilégio de aprender com o professor Tiago Moreira Vargas — um educador que deixou marcas indeléveis não apenas em minha formação acadêmica e profissional, mas também em minha trajetória pessoal. Falar sobre o professor Tiago é rememorar uma história de aprendizado, dedicação, excelência e amizade genuína.

Conheci o professor Tiago durante o curso de Estatística na Universidade Federal de Uberlândia, período em que tive a oportunidade de ser seu aluno. Desde as primeiras aulas, destacou-se pela clareza, objetividade e profundidade de suas explicações. Sua didática era exemplar: unia rigor conceitual e aplicação prática, sempre conectando o conteúdo teórico às demandas e desafios do mercado profissional. O professor Tiago não se limitava ao papel de docente; era, acima de tudo, um orientador de trajetórias, alguém que acreditava que o conhecimento só alcança seu pleno valor quando colocado a serviço da realidade. Durante a graduação, o professor Tiago tornou-se mais do que um mestre — tornou-se uma referência. Tive a honra de ser seu orientando no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e aluno em disciplinas como Inferência Estatística, Confiabilidade e Processos Estocásticos. Nesses espaços de convivência acadêmica, ele me ensinou não apenas conteúdos técnicos, mas também valores como disciplina, responsabilidade, ética e compromisso com a excelência. Era um professor exigente, que constantemente incentivava seus alunos a superarem limites e a não se conformarem com o “suficiente”. Seu exemplo inspirava a busca constante pelo aprimoramento pessoal e profissional.

Com o passar do tempo, o vínculo ultrapassou o ambiente universitário. Em diversas oportunidades, partilhamos experiências acadêmicas, viagens, reflexões e momentos de convivência que deixaram lembranças significativas. O professor Tiago possuía uma combinação rara de racionalidade, serenidade e empatia — características que o tornavam um conselheiro sábio e um amigo leal. Sua influência se estendeu muito além das fronteiras da sala de aula, refletindo-se em decisões, escolhas e valores que carrego até hoje.

Após a conclusão de minha graduação e minha mudança para Goiânia, o professor Tiago também seguiu novos rumos, passando a integrar o corpo docente da Universidade Federal de Goiás. Mesmo em diferentes instituições, mantivemos o diálogo e o vínculo de amizade, sempre pautados pelo respeito, pela admiração e pela troca de conhecimentos. Tiago permanecia sendo aquele professor e amigo que sabia ouvir, aconselhar e encorajar.

O legado do professor Tiago Moreira Vargas transcende os espaços acadêmicos. Ele permanece vivo em cada aluno que orientou, em cada colega que inspirou e em cada pessoa que teve a oportunidade de compartilhar de sua sabedoria, generosidade e integridade intelectual. Ensinou-nos que o verdadeiro propósito do conhecimento é construir pontes — e que o maior êxito de um educador está em auxiliar os outros a atravessá-las.

A ausência física do professor Tiago é sentida com profunda saudade, mas também com gratidão. Gratidão por cada aula, por cada orientação e por cada gesto de incentivo. Sua trajetória permanecerá como exemplo de compromisso com o ensino, a pesquisa e a formação humana.

Professor Tiago Moreira Vargas, sua memória e seu legado permanecerão vivos em cada aluno, em cada sala de aula e em cada passo de quem teve o privilégio de aprender com o senhor.

6 | ATUAÇÃO NA OMEG

Assumi a coordenação da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás no ano de 2020. No dia 16 de março de 2020, o calendário acadêmico da UFG foi suspenso devido à pandemia do coronavírus (COVID-19) e com isso, o planejamento da XXIX OMEG. Posteriormente, esta edição foi realizada no ano de 2021 de forma virtual. Aliás, durante o ano de 2021 realizamos duas edições da OMEG: XXIX(Edição Virtual) e XXX(Híbrida). Nesta edição, o professor Tiago Moreira Vargas torna-se meu companheiro de coordenação. Juntos, eu como coordenadora e ele como vice-coordenador, ficamos à frente da comissão organizadora da XXX e XXXI OMEG. Tiago acumulava duas funções relacionadas com o projeto da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG): vice-coordenador e editor chefe da revista da olimpíada. Sob seu comando, os números 15 a 19 da revista foram publicados e distribuídos tanto aos premiados da OMEG quanto aos docentes do IME. Na XXXII edição da OMEG, Tiago deixa o posto de vice-coordenador e assume o posto de presidente da comissão de correção e elaboração de provas. Gostaria de compartilhar com vocês como foi minha experiência com Tiago durante esses anos na coordenação da OMEG. A melhor forma de definir nosso relacionamento é dizendo que Tiago era meu confidente e apoiador. Quando eu era tomada pelos temores de não estar à altura da tarefa, Tiago me dizia: "Rose, vai dar certo." No fim, sempre dava, porque ele estava comigo. As cerimônias de premiação eram o nosso momento de maior tensão, mas também de maior realização. Primeiro, como vice-coordenador e depois como editor chefe da revista, Tiago assumiu a tarefa de organizar os brindes para cada premiado. Nos dias próximos à cerimônia, ele dedicava a semana a coletar os brindes com nossos distribuidores e depois levava tudo ao IME, encontrava alguma sala disponível e começava o processo de organizar os brindes de acordo com cada premiação. Premiar não somente os alunos mas valorizar as contribuições da escola e do professor é uma característica da OMEG e Tiago realizava um trabalho excepcional e bastante laborioso para este fim. Uma vez que o processo de correção das provas estava encerrado, ele recolhia todas as provas e coletava os nomes dos professores e escolas, citados nas provas dos alunos. Em seguida, comparava esses nomes com os dados obtidos durante o processo de inscrição e, de acordo com o número de medalhas conquistadas, estabelecia pontuações para cada um destes. Durante a reunião de equipe, as propostas de professores e escolas premiadas apresentadas por Tiago eram referendadas. A cerimônia de premiação que mais guardo recordações foi uma que deveria ser relegada ao limbo do esquecimento. Devido a uma confusão com um de nossos fornecedores de medalhas, não conseguimos entregá-las durante a cerimônia de premiação. Como coordenadora da edição, anunciei durante o discurso de abertura para todos os presentes o acontecimento funesto. Dentre os presentes, estavam não somente os premiados, mas seus familiares, professores e a Magnífica Reitora da Universidade Federal de Goiás Professora Angelita. Passei boa parte da cerimônia olhando para Tiago que retribuía o olhar com aquele sentimento de quem estava vivendo um pesadelo na Biblioteca Central. Pelo menos os brindes foram entregues e junto com eles, a garantia de que as medalhas seriam enviadas para as escolas. Tiago assumiu mais essa tarefa. De posse do seu GPS interno ele organizou uma rota para as escolas premiadas. E, assim, como em uma sociedade da medalha, a coordenadora Professora Rosane Gomes, o vice-coordenador Professor Otávio Gomide e o editor chefe da revista da OMEG Professor Tiago Vargas iniciaram a entrega de medalhas em Goiânia. Para as escolas no interior, as medalhas foram enviadas por correio e para minha grande sorte, Tiago também assumiu essa parte da organização.

A palavra altruísmo se origina do francês autre que significa outro. Colocar os outros acima do seu próprio bem estar era o que Tiago fazia com frequência. Conversando com um dos meus colegas de OMEG, professor Marcelo Bezerra, ele me contou um momento que dividiu com nosso amigo. Depois da correção das provas, as notas de todos os alunos precisam ser passadas para uma planilha. Nesta planilha, a nota de todos os corretores deve aparecer por questão. Este é um trabalho cansativo e Marcelo tinha ficado encarregado dessa tarefa. Era um sábado e já passava da metade do dia. Sendo otimista, Marcelo sabia que levaria uma boa parte da tarde para finalizar de organizar as notas e a planilha de premiados. Enquanto ele estava lá na sala dele revestido do sentimento de resignação de aceitar seu destino, Tiago aparece na porta com um notebook. Sem palavras, ele pegou uma cadeira para ficar próximo de Marcelo, ligou o notebook na planilha e iniciou os trabalhos. Naquele momento, houve uma sintonia e como Marcelo confessou em poucos momentos na vida dele, ele experimentou uma sinergia como essa. O trabalho foi finalizado em um tempo bem menor do que o esperado inicialmente. Os dois se despediram e mais uma lista de premiados da OMEG tinha sido organizada. Não é fácil se deslocar para o prédio do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, principalmente se o dia que você escolhe para fazer isso é um sábado às oito horas da manhã. Acrescente a isso o fato de ter que corrigir centenas de provas. Bom, imagine um ambiente sério com professores com caras não convidativas e sem café. Pois bem, não era isso que você encontraria se entrasse na sala de correção das provas da OMEG. Tiago chegava e entregava para todos uma boa dose de serotonina. Meus colegas, professora Kamila Andrade e professor Luís Fernando salientaram que estar com Tiago era sempre uma garantia de boas risadas e trabalho feito com eficiência. Se a equipe de provas precisava de ajuda para material de última hora, lá estava ele e suas questões. Mesmo sendo da área de probabilidade, Tiago contribuia em todas as áreas. Amava elaborar uma questão de Geometria e se arriscava sem medo nas questões de Teoria dos Números. Quando iniciei este texto pensei em falar somente dos meus momentos com Tiago mas a comissão da OMEG é composta por muitos outros amigos dele. O professor Gregory em uma mensagem de texto me resumiu muito bem o que significava Tiago para a OMEG e para nós: Ao recordar do Professor Tiago Vargas e de nossa convivência na Comissão Organizadora da OMEG, a primeira imagem que me vem à mente é a de seu sorriso sereno, capaz de acalmar qualquer tempestade.

Tiago possuía uma habilidade rara e admirável: a de descomplicar o complexo. Onde muitos de nós víamos um emaranhado de desafios, ele, com sua clareza de pensamento, enxergava o caminho mais simples e direto. Aprendi imensamente com ele, não apenas sobre matemática ou organização, mas sobre como abordar os problemas com uma calma que transformava qualquer obstáculo em algo superável. Ele tinha o dom de nos fazer acreditar que tudo era possível, bastava olhar pelo ângulo certo.

Mais do que seu brilhantismo técnico, o que mais marcou a todos nós foi sua luz pessoal. Nunca o vi de cabeça baixa. Não importava a circunstância ou a pressão do momento, ele sempre nos recebia com um otimismo que contagiava o ambiente. Sua alegria não era superficial; era uma força genuína que transformava as reuniões de trabalho em encontros de amigos, nos lembrando da importância de manter o bom humor e a leveza.

Tiago nos deixou um legado que vai muito além de suas contribuições para a OMEG e para o Instituto de Matemática. Ele nos deixou a lição de que a genialidade pode, e deve, andar de mãos dadas com a generosidade e a alegria. Sua ausência abre uma lacuna imensa em nossa comissão e em nossos corações, mas sua memória será nossa inspiração para continuar. Levaremos conosco seu exemplo, sua capacidade de simplificar e, acima de tudo, sua contagiante vontade de fazer o bem.

Assim, com lágrimas nos olhos encerro este texto. A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás perdeu esse ano não apenas um membro da comissão organizadora e sim, seu fôlego de vida. Não foi fácil para a comissão viver os mesmos momentos, desprovida de seu ar. Para finalizar, permitam-me contar mais uma das peripécias do meu amigo Tiago. Ano passado ele me disse: Rose, vou elaborar mais questões para servir para edição do próximo ano. Na época de elaboração das provas, seu falecimento estava muito recente. A equipe não tinha condições de contribuir como em anos anteriores. Então, quando abri o banco de questões para organizar as provas desse ano, vi ali todas as questões que eu precisava para montar a prova desta edição. Essa foi a última contribuição de Tiago para a OMEG.

7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O professor Tiago nasceu para ser profissional da educação, em especial da Matemática e da Estatística. Desde criança, já brincava de professor, ensinando e até elaborando provas. Como estudante, sempre foi dedicado e demonstrou uma inteligência notável. O respeito e a admiração pelos professores vieram desde a infância. Os caminhos da vida o levaram à universidade, onde chegou ainda adolescente, para ficar de vez.

Embora tenha nos deixado de forma tão precoce, o professor Tiago deixou um legado valioso para amigos, familiares, colegas e estudantes. Sua maior marca foi a honestidade e a incessante vontade de trabalhar pelo bem comum das pessoas. Incansável, atuou de forma constante nos três grandes pilares da universidade: pesquisa, ensino e extensão. Onde quer que fosse chamado a trabalhar, deixava sua marca de realizações, companheirismo e esforço árduo.

Tiago sempre dizia que o caminho para o aprendizado era estudar de maneira contínua. Para ele, o aprendizado e seus frutos advêm do interesse e da dedicação. Esse era o ensinamento que gostava de transmitir a seus estudantes e orientandos.

Fica na mente e no coração de todos que conviveram com ele o sorriso cativante e a atenção que dedicava a todos que o procuravam. Sua vida e suas ações servem de exemplo para colegas e para as futuras gerações de profissionais.

References

[1] Júnior, Valdivino V. ; OLIVEIRA, N. X. ; Vargas, Tiago M. *Estudo da lucratividade de uma banca em um sistema de aposta fictício*. Revista da Olimpíada, v. 19, p. 44-56, 2024.

[2] Júnior, Valdivino Vargas ; REZENDE, R. L. ; Vargas, Tiago M. *Análise do Método Martingale*. Revista da Olimpíada, v. 16, p. 49-60, 2022.

[3] França, Jùlio César Pereira; Melo, Tatiane Ferreira do Nascimento ; Vargas, Tiago Moreira *Modelo de regressão linear múltipla e aplicações / Multiple linear regression model and applications*. Brazilian Journal of Development , v. 7, p. 74294-74313, 2021.

[4] Rodrigues de Souza Gentil, Jaqueline; Melo, Tatiane Ferreira do Nascimento ; Vargas, Tiago Moreira; Buosi Gazon Milani, Amanda. *Modelos com erros das variáveis: estudo de simulação e aplicação à dados de taxa de desemprego no Brasil*. PEER REVIEW , v. 5, p. 260-278, 2023.

REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 20

Infinitude dos primos para vários gostos

Thaynara Arielly de Lima[1] | **Mauricio Ayala-Rincón**[2]

[1]Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás
[2]Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília

Contato
[1]thaynaradelima@ufg.br
[2]ayala@unb.br

Um dos resultados mais populares da Matemática é a infinitude dos números primos. A demonstração mais conhecida deste fato é milenar e é atribuída a Euclides (por volta de 300 a.C.). Provas deste teorema abordam técnicas de uma variedade de áreas da Matemática. Neste trabalho, apresentamos ao leitor uma discussão acessível e precisa de três demonstrações: a prova clássica de Euclides; uma prova fundamentada em números de Fermat, atribuída a Christian Goldbach (em carta dirigida a Leonhard Euler em 1730); e a elegante e exótica prova baseada em argumentos topológicos de Hillel Fürstenberg (1955).

1 | INTRODUÇÃO

Um dos resultados matemáticos mais populares é a infinitude dos números primos. Além da importância inerente ao resultado (fundamental, por exemplo, para aplicações em criptografia), do ponto de vista histórico, este teorema é de notória particularidade: faz parte de um dos mais antigos livros de teoremas e demonstrações matemáticas; a saber, *Os Elementos IX*, *20*, atribuído a Euclides.

A prova clássica, baseada no texto de *Os Elementos*, é bastante difundida. Contudo, existem outras belas demonstrações da infinitude dos números primos, utilizando ferramentas de diferentes áreas da Matemática como Teoria dos Grupos, Análise, Topologia e, como esperado, Teoria dos Números. Neste ponto, é essencial destacar o instigante livro *Proofs from THE BOOK* [1], de Martin Aigner e Günter M. Ziegler, que está associado a um dos mais prolíficos matemáticos do século XX: Paul Erdős.

Erdős foi um matemático húngaro, reconhecido pela sua capacidade de propor provas elegantes para resultados matemáticos e de resolver problemas de alto grau de dificuldade. Outra característica peculiar de Erdős era a sua produtiva colaboração: publicou muitos artigos científicos com diferentes colegas ao redor do mundo. No meio matemático é comum o termo "número de Erdős" para designar a distância a que um científico está de Paul: Erdős está a uma distância 0 dele mesmo; um coautor de Erdős tem número igual a 1; um coautor de um coautor dele tem número 2, e assim sucessivamente.

Apesar de tudo indicar que Paul Erdős era agnóstico, ele gostava da ideia da existência de um livro divino, que contivesse provas "perfeitas" de todos os teoremas matemáticos. Em 1994, em uma conversa com Erdős, Aigner teve a ideia: por que não tentamos conceber um livro que seja ao menos uma sombra do celestial? [5]. A partir desse lampejo, em 1998 foi publicada a primeira edição de *Proofs from THE BOOK*, contendo elegantes provas de teoremas matemáticos de diversos campos como Teoria dos Números, Teoria dos Grafos, Geometria, Análise, Combinatória e Álgebra. Em particular, o primeiro capítulo traz seis bonitas provas de que o conjunto dos números primos é infinito, empregando diferentes técnicas.

Neste artigo consideramos três provas da infinitude dos números primos, contidas em *Proofs from THE BOOK*. O diferencial deste texto é o grau de detalhes das demonstrações, tornando-as autocontidas e acessíveis a um público iniciante que tem curiosidade e interesse em Matemática.

2 | O CLÁSSICO NUNCA SAI DE MODA

Comecemos com a prova clássica, baseada em *Os Elementos*. Mas antes disso, apresentaremos conceitos básicos que serão utilizados nesta e nas seções futuras.

Definição 1 (Números primos, compostos e coprimos) *Um número inteiro* p*, maior do que* 1*, é dito primo se seus únicos divisores inteiros positivos são* 1 *e* p*. Caso contrário,* p *é dito composto. Dois números inteiros são coprimos (ou relativamente primos entre si) se o único divisor positivo comum entre eles é o número* 1.

Exemplo 1 *Os números* $2, 3, 5, 7,$ *e* 11 *são os primeiros primos. O número* 2 *é o único primo que também é par. Os números* 12 *e* 35 *são coprimos.*

Teorema 1 (Infinitude dos números primos) *O conjunto* $\mathbb{P}$*, contendo todos os números primos, é infinito.*

Demonstração Suponha, por contradição, que $\mathbb{P}$ seja finito, de maneira que $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, em ordem crescente. Considere o número $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Note que $k > p_i$, qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Desta maneira, k não pode ser um número primo, pois o maior elemento de $\mathbb{P}$ é p_n. Assim, k é composto e existe um primo $p_i \in \mathbb{P}$ tal que p_i divide k; ou seja, $k = p_i \cdot l$, para algum inteiro l. Portanto,

$$p_i \cdot l = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

De onde,

$$p_i \cdot (l - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \ldots \cdot p_n) = 1$$

A última igualdade implica que p_i, um número primo, é um divisor do número 1, um absurdo. Esta contradição surgiu de supormos que $\mathbb{P}$ é finito. Logo, o conjunto dos números primos é infinito, como queríamos demonstrar.

3 | VIA NÚMEROS DE FERMAT

Esta prova é atribuída a Christian Goldbach, em uma carta escrita a Euler em 1730. Está fundamentada na infinitude e coprimalidade dos números de Fermat. Iniciemos definindo tais números.

Definição 2 (Números de Fermat) *Os números da forma* $F_n = 2^{2^n} + 1$, *em que* $n \in \mathbb{N}$, *são ditos números de Fermat.*

Observação 1 ***i)*** *Os seis primeiros números de Fermat são* $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ *e* $F_5 = 4.294.967.297$. *Os cinco primeiros são primos e o sexto é composto:* $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

ii) *Todos os números de Fermat são ímpares.*

iii) *Para cada número natural existe um único e diferente número de Fermat associado. Desta maneira, é intuitivo que o conjunto dos números de Fermat é infinito.*

O Lema 1 a seguir traz uma relação de recorrência envolvendo os números de Fermat, que pode ser demonstrada utilizando o Primeiro Princípio de Indução. Antes de enunciarmos tal recorrência, abrimos um parêntese para falar sucintamente, na Observação 2, sobre esse método. O objetivo é familiarizar os leitores que ainda não conhecem o Princípio de Indução.

Observação 2 (Primeiro Princípio de Indução) *Também conhecido por Indução Fraca, é uma técnica que viabiliza a verificação de propriedades sobre os números naturais. Para garantir que uma propriedade* $P(n)$ *vale para todo* $n \in \mathbb{N}$ *maior ou igual a um número natural* n_0, *basta checarmos:*

i) ***Base de Indução****:* $P(n_0)$ *é válida, em que* $n_0 \in \mathbb{N}$;

ii) ***Passo indutivo****: garantir que a validade de* $P(n)$ *implica na validade de* $P(n+1)$, *para* $n \geq n_0$.
No passo indutivo, a suposição de que $P(n)$ *é verdadeira é denominada hipótese de indução.*

Para compreendermos a filosofia deste método, façamos uma analogia. Imaginemos uma fila infinita de dominós, cada peça disposta em uma posição $n \in \mathbb{N}$. *Pensemos que a propriedade* $P(n)$ *é válida sempre que a peça que estiver na* n*-ésima posição for derrubada. A fim de garantir que a fila infinita seja completamente derrubada a partir de uma posição* n_0 *(ou seja, que a propriedade* $P(n)$ *seja verificada para todos os números naturais maiores ou iguais a* n_0*), basta: (i) tombar a peça que se encontra na posição* n_0*; (ii) garantir que a caída da peça na posição* n *faça com que a peça da posição* $n+1$ *também caia.*

O Primeiro e o Segundo Princípios de Indução já foram temas da Revista da Olimpíada [3] e da Eureka! [6]. Convidamos o leitor interessado a apreciar estes artigos. É importante ressaltar que existe um princípio mais geral, conhecido como Indução Noetheriana ou Indução bem-fundada sobre conjuntos munidos de uma relação bem-fundada [9]; esse foi nomeado em honra a Amalie Emmy Noether, devido ao seu pioneirismo no estudo de cadeias ascendentes e descendentes em estruturas algébricas abstratas.

Notação 1 $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} F_k$ *denota o produto* $F_0 \cdot \ldots \cdot F_n$.

Lema 1 *A fórmula de recorrência* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$, $n \geq 1$, *é válida.*

Demonstração A prova é por indução em n.

Base de Indução: Pelo enunciado, a base corresponde a $n = 1$, o menor número natural para o qual o resultado vale.

Note que $\displaystyle\prod_{k=0}^{0} F_k = F_0 = 3$ e $F_1 - 2 = 5 - 2$.

Passo Indutivo: Suponha, por hipótese de indução, que o resultado é válido para n, isto é, $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$. Provemos que isto implica que o resultado é também válido para $n+1$, ou seja, $\prod_{k=0}^{(n+1)-1} F_k = F_{n+1} - 2$.

Observe que:

$$\prod_{k=0}^{(n+1)-1} F_k = \prod_{k=0}^{n} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) \cdot F_n$$

Por hipótese de indução e pela definição dos números de Fermat,

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} F_k = (F_n - 2)F_n &= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) \\ &= (2^{2^n})^2 - 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} - 1 \\ &= F_{n+1} - 2\end{aligned}$$

Lema 2 *Para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, tem-se que os números de Fermat F_i e F_j são coprimos, sempre que $i \neq j$.*

Demonstração Sem perda de generalidade, suponha que $i < j$. Considere, ainda, que p é um número primo que divide F_i. Uma vez que F_i é fator de $\prod_{k=0}^{j-1} F_k$, temos que p divide tal produto. À luz do Lema 1, $\prod_{k=0}^{j-1} F_k - F_j = -2$. Assim, se p também dividir F_j, necessariamente $p = 2$; isto não pode ocorrer, uma vez que p é um primo que divide F_i e todo número de Fermat é ímpar. Portanto, um primo arbitrário p não pode ser divisor de F_i e F_j simultaneamente, de onde obtemos que quaisquer números de Fermat distintos são relativamente primos entre si.

A demonstração do Teorema 1 da infinitude dos números primos, baseada nos números de Fermat, é estabelecida a seguir.

Demonstração Para cada número natural n, seja $\min_p(F_n)$ o menor divisor primo de F_n. Considere $Min_F = \{\min_p(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como números de Fermat distintos são coprimos, Min_F é infinito: de fato, cada número natural n está biunivocamente associado a um $\min_p(F_n)$. Como Min_F é subconjunto do conjunto dos números primos $\mathbb{P}$, a infinitude de Min_F implica a infinitude de $\mathbb{P}$.

4 | TEM TOPOLOGIA? TEM SIM, SENHOR(A)!

A terceira e última prova deste artigo é uma demonstração devida a Hillel (Harry) Fürstenberg, originalmente publicada como uma nota de doze linhas em *The American Mathematical Monthly* no ano de 1955 [4]. Nascido em Berlim em 1935, de família de origem judaica, Fürstenberg é um matemático Americano-Israelita, laureado com o notável *Abel Prize* no ano de 2020, por seu pioneirismo no uso de métodos de probabilidade e dinâmica em Teoria dos Grupos, Teoria dos Números e Combinatória.

A prova da infinitude dos primos por Fürstenberg é nada menos que formidável, fundamentada na construção de uma peculiar topologia sobre o conjunto dos números inteiros, utilizando progressões aritméticas da forma $(\ldots a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \ldots)$, em que $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. Comecemos pelas noções e propriedades básicas de topologia, essenciais para o entendimento da prova. Para um estudo mais aprofundado, sugerimos a referência [8].

Definição 3 (Topologia) *Uma topologia sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) *$\emptyset$ e X pertencem a τ;*

ii) *A união de qualquer coleção de elementos de τ pertence a τ;*

iii) *A interseção de uma coleção finita de elementos de tau pertence a τ.*

Observação 3 ***i)*** *Um conjunto X equipado com uma topologia τ é dito um espaço topológico.*

ii) *Dado um espaço topológico (X, τ), um subconjunto U de X que pertence à coleção τ é dito um aberto de X.*

Exemplo 2 *Considere os conjuntos $X = \mathbb{Z}$ e $N_{a,b} = \{a + n \cdot b : n \in \mathbb{Z}\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, em que $b > 0$. Vamos construir a seguinte topologia sobre $\mathbb{Z}$: um conjunto $O \subseteq \mathbb{Z}$ é dito aberto se e somente se $O = \emptyset$ ou para todo $a \in O$ existe um inteiro $b > 0$ tal que $N_{a,b} \subseteq O$. A coleção τ, contendo todos os conjuntos do tipo O, é uma topologia sobre $\mathbb{Z}$:*

i) *$\emptyset$ e $\mathbb{Z}$ pertencem a τ.*
De fato, $\emptyset \in \tau$, por definição. Além disso, qualquer que seja $a \in \mathbb{Z}$, tem-se $N_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$, qualquer que seja b inteiro.

ii) *A união arbitrária de elementos de τ pertence a τ.*
Se tal união é um conjunto vazio, isto vale por definição. Por outro lado, suponha que exista $a \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}} O_\alpha$, em que $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos de τ. Isto significa que existe $\beta \in \mathcal{F}$ tal que $a \in O_\beta$. Como O_β é um aberto, existe um inteiro $b > 0$ tal que $N_{a,b} \subset O_\beta$. Além disso, $O_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}} O_\alpha$, de onde $N_{a,b} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{F}} O_\alpha$. Logo, a união arbitrária de conjuntos de τ pertence a τ.

iii) *Se O_1 e O_2 pertencem a τ então $O_1 \cap O_2$ também pertence a τ.*
Se $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ isto vale por definição. Por outro lado, considere $a \in O_1 \cap O_2$. Então, existem b_1 e b_2 inteiros positivos tais que $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ e $N_{a,b_2} \subseteq O_2$. Logo, $N_{a,b_1 \cdot b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$.
Note que se $O_1, \ldots, O_n$ é uma coleção finita de abertos de $\mathbb{Z}$ em τ, é possível demonstrar que $O_1 \cap \ldots \cap O_n$ pertence a τ utilizando o Primeiro Princípio de Indução. Esse exercício fica para o leitor.

Notação 2 *No que segue, denotaremos $\mathcal{T}_{\text{PA}}$ o espaço topológico apresentado no Exemplo 2. O subíndice PA alude ao fato de que os abertos desta topologia são definidos por meio de uma dupla progressão aritmética.*

As seguintes proposições apresentam propriedades de $\mathcal{T}_{\text{PA}}$.

Lema 3 *Qualquer aberto O não vazio de $\mathcal{T}_{\text{PA}}$ é infinito.*

Demonstração Se $O \neq \emptyset$ então $N_{a,b} \subseteq O$, para algum $a \in O$ e $b > 0$. Como $N_{a,b}$ é infinito, O também o é.

Lema 4 *Para quaisquer $a \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, $N_{a,b}$ é um aberto de $\mathcal{T}_{\text{PA}}$.*

Demonstração De fato, $N_{a,b} \neq \emptyset$ e $N_{a,b} \subseteq N_{a,b}$.

A seguir, define-se outro conceito importante em topologia.

Definição 4 (Conjuntos fechados) *Considere o espaço topológico (X, τ). Um subconjunto C de X é dito fechado se e somente se $X \setminus C$, seu complementar em X, é um aberto de X.*

Lema 5 *Para quaisquer $a \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, $N_{a,b}$ é um fechado com respeito ao espaço topológico $\mathcal{T}_{\text{PA}}$.*

Demonstração Note que $N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$. Pelo Lema 4, cada $N_{a+i,b}$ é um aberto de $\mathbb{Z}$. Como, por definição, a união arbitrária de abertos é um conjunto aberto, segue que $\bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$ é aberto e, portanto, o seu complemento, $\mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$, é fechado.

A seguinte proposição apresenta algumas propriedades de conjuntos fechados. Todas elas são demonstradas a partir de resultados de Teorias dos Conjuntos.

Proposição 1 *Se (X, τ) é um espaço topológico então:*

P1. *$\varnothing$ e X são fechados de X;*
P2. *A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;*
P3. *A interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração Deixamos as propriedades $P1$ e $P3$ a cargo do leitor. Para provar a Propriedade $P2$, considere C_i, $1 \leq i \leq n$, fechados de X. Por Teoria dos Conjuntos, sabe-se que: $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus C_i)$

Como cada C_i é fechado, segue que $X \setminus C_i$ é aberto para cada $1 \leq i \leq n$. Por definição, a interseção finita $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus C_i)$ é um conjunto aberto. Logo, seu complemento em X, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, é fechado.

Depois desta discussão, temos todos os ingredientes! A demonstração do Teorema 1 da infinitude dos números primos, baseada em topologia, é apresentada a seguir.

Demonstração Inicialmente, observe que, se k é um número inteiro tal que $k \neq 1$ e $k \neq -1$, existe um número primo p que divide k. Consequentemente, $k \in N_{0,p} = \{0 + n \cdot p; n \in \mathbb{Z}\}$.

De fato, $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$

Se o conjunto dos números primos $\mathbb{P}$ é finito, segue, pelo Lema 5 e pelo Item $P2$ da Proposição 1, que $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ é um conjunto fechado. Consequentemente, seu complemento $\{-1, 1\}$ é um aberto de $\mathbb{Z}$. Pelo Lema 3, todo aberto não vazio do espaço topológico $\mathcal{T}_{PA}$ é infinito. Portanto, $\{-1, 1\}$ é um conjunto infinito, o que é absurdo. Portanto, o conjunto $\mathbb{P}$ dos números primos é infinito, como queríamos demonstrar.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como dito na Introdução deste artigo, *Proofs from THE BOOK* apresenta outras três elegantes provas da infinitude dos números primos, além das discutidas aqui, que valem a pena conferir! Uma delas utiliza resultados de Álgebra Abstrata, e as outras duas, de Análise.

A prova envolvendo Álgebra Abstrata, da qual não se sabe ao certo a autoria, utiliza números de Mersenne e o Teorema de Lagrange para grupos finitos. As provas envolvendo Análise são atribuídas a Leonhard Euler e Paul Erdős.

Euler demonstrou que, se considerarmos um número real x tal que $n \leq x < n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, a função $\log_e(x)$ é limitada superiormente por $\pi(x) + 1$, em que $\pi(x)$ denota a quantidade de primos menores ou iguais a x. Como a função logarítmica é ilimitada sobre seu domínio, o número de primos deve ser ilimitado. Por sua vez, Erdős mostrou não somente a infinitude dos números primos, mas também a divergência da série $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$.

ON THE INFINITUDE OF PRIMES

HARRY FURSTENBERG, Yeshiva University

In this note we would like to offer an elementary "topological" proof of the infinitude of the prime numbers. We introduce a topology into the space of integers S, by using the arithmetic progressions (from $-\infty$ to $+\infty$) as a basis. It is not difficult to verify that this actually yields a topological space. In fact, under this topology, S may be shown to be normal and hence metrizable. Each arithmetic progression is closed as well as open, since its complement is the union of other arithmetic progressions (having the same difference). As a result, the union of any finite number of arithmetic progressions is closed. Consider now the set $A = \bigcup A_p$, where A_p consists of all multiples of p, and p runs through the set of primes $\geqq 2$. The only numbers not belonging to A are -1 and 1, and since the set $\{-1, 1\}$ is clearly not an open set, A cannot be closed. Hence A is not a finite union of closed sets which proves that there are an infinity of primes.

FIGURA 1 Prova original de Hillel Fürstenberg em *The American Mathematical Monthly [4]*

Como outra leitura complementar, sugere-se o artigo de Idris D. Mercer [7], no qual se apresenta a prova de Fürstenberg apenas com noções de Teoria dos Números e de Teoria dos Conjuntos.

O Professor Hillel Fürstenberg, hoje ativo aos 90 anos, mantém sua posição de pesquisador e professor emérito no *Einstein Institute of Mathematics*, na *Hebrew University of Jerusalem*. O Professor Fürstenberg gentilmente nos permitiu incluir as doze linhas da sua fantástica demonstração topológica da infinitude dos primos, como originalmente publicada aos seus vinte anos de idade no *The American Mathematical Monthly* [4], 70 anos atrás! A Figura 1 apresenta a prova original. A prova fascina matemáticos desde então, gerando uma série de artigos científicos e documentos acadêmicos (são centenas de milhares de referências na Internet em dezenas de idiomas) que interpretam, explicam e adaptam a prova.

Nosso interesse particular na prova de Fürstenberg, assim como em outras provas da infinitude dos primos, está centrado em convencer matemáticos de diversas áreas da importância, no exercício da profissão do matemático no presente século, de utilizar ferramentas computacionais na construção, na verificação e na curadoria de suas provas. Mecanizações no *Provador Interativo de Teoremas* PVS das seis provas da infinitude dos primos discutidas em [1] estão publicadas em [2]. Em particular, a mecanização em PVS das doze singelas linhas da demonstração original de Fürstenberg corresponde a cerca de 2000 linhas de código computacional.

Pois bem, cara leitora e caro leitor, chegamos ao final deste artigo. Esperamos que vocês tenham se divertido com a leitura tanto quanto nós ao escrevermos este texto.

References

[1] Aigner, M. & Ziegler, G.M.; *Proofs from THE BOOK*. 6 ed. Springer Verlag (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8.

[2] de Oliveira Ribeiro, B. B.; Moscato, M. M.; de Lima, T. A. & Ayala-Rincón, M.; *A PVS Library on the Infinitude of Primes*. Proc. Intelligent Computer Mathematics, Springer Nature Switzerland, LNAI vol. 16136, pages 412-430, https://doi.org/10.1007/978-3-032-07021-0_23.

[3] de Castro, H. P.; *Números Naturais e Propriedades Indutivas*. Revista da Olimpíada, no. 2, IME/UFG, 2001. Disponível em: https://revistadaomeg.ime.ufg.br/p/28564-revista-da-olimpiada-n-2. Acesso em: 04 de set. de 2025.

[4] Fürstenberg, H.; *On the infinitude of primes*. Amer. Math. Monthly, 62(5) (1955), 353. Note in *Mathematical Notes*, pages 349-353, https://doi.org/10.1080/00029890.1955.11988641.

[5] Klarreich, E.; *In Search of God's Perfect Proofs*. Quanta Magazine, 19 de março de 2018. Disponível em: https://www.quantamagazine.org/gunter-ziegler-and-martin-aigner-seek-gods-perfect-math-proofs-20180319/. Acesso em: 04 de set. de 2025.

[6] Lima, E. L.; *O Princípio da Indução*. Eureka!, vol. 3, OBM, IMPA, 1998. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka3.pdf. Acesso em: 04 de set. de 2025.

[7] Mercer, I. D.; *On Furstenberg's Proof of the Infinitude of Primes*. Am. Math. Mon., vol. 116(4), pages 355-356, 2009, http://www.jstor.org/stable/40391095.

[8] Munkres, J.R.; *Topology: a first course*. 2nd ed. Prentice-Hall (2000).

[9] Winskel, G.; *Well-founded Induction and Recursion*. Lecture Notes for Discrete Mathematics 2018-19, University of Cambridge, 25 de novembro de 2018. Disponível em: https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1819/DiscMath/AddWFI.pdf. Acesso em: 04 de set. de 2025.