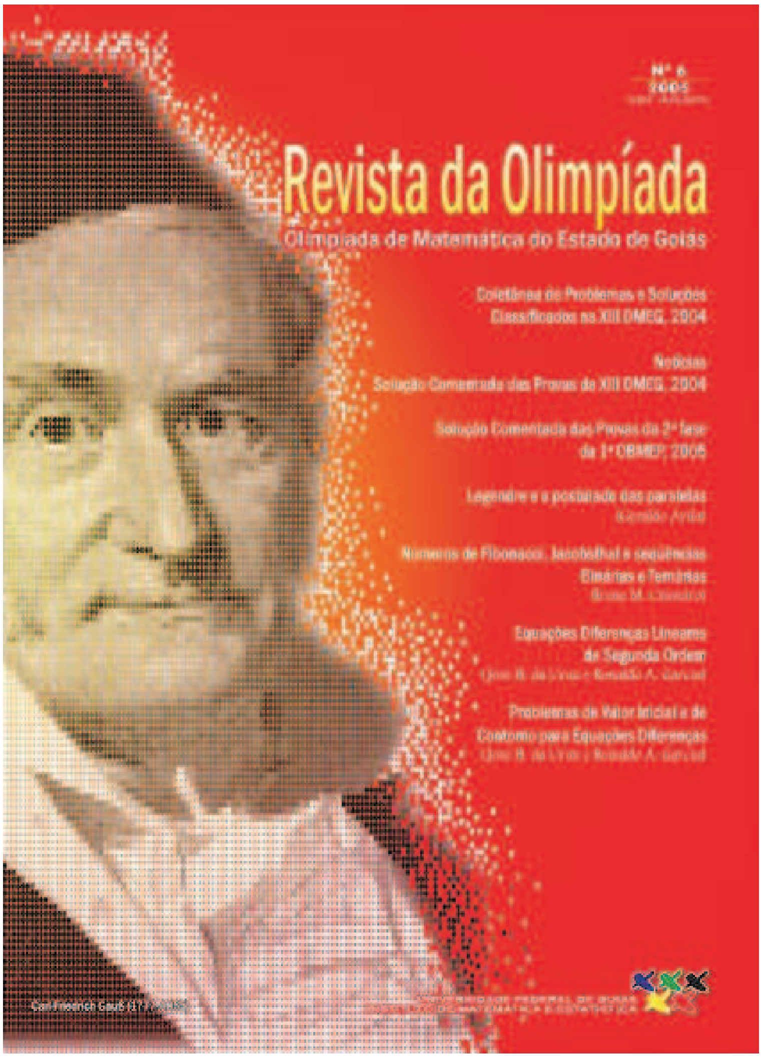


Nº 6
2005
Revista da Olimpíada
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Coletânea de Problemas e Soluções Classificados na XIII OMEG, 2004
Notícias
Solução Comentada das Provas da XIII OMEG, 2004
Solução Comentada das Provas da 2ª fase da 1ª OBMEP, 2005
Legendre e o postulado das paralelas
Números de Fibonacci, Jacobsthal e sequências Binárias e Ternárias
Equações Diferenças Lineares de Segunda Ordem
Problemas de Valor Inicial e de Contorno para Equações Diferenças
Carl Friedrich Gauß
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Nº 6
Mai/2006
ISSN 1518-6075

revista
DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

Conteúdo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olímpiada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 6 (jan./dez. 2005). Goiânia: Editora da UFG, 2005-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração	**Arte da Capa**
José H. da Cruz	Leonardo M. Pelá
Tiragem	**Postagem**
2.500 exemplares	1º semestre de 2006

Revista da Olimpíada, nº 6, 2005
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
Caixa Postal 131
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 3521 1208, Fax: (62) 3521 1180
Versão eletrônica disponível em: `www.ime.ufg.br`

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

O Comitê Editorial da Revista da Olimpíada de Matemática presta sua homenagem ao Prof. Oswaldo Scarpa Magalhães Alves (*in memoriam*) pelo entusiasmo e colaboração neste projeto de difusão científica e cultural da Matemática nos últimos 14 anos.

Goiânia, 2 de junho de 2006
Os Editores.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Comissão Organizadora (ano 2005)
Fábio V. e Silva (coordenador), Edmeia Fernandes de Souza, Maxwell Lizete da Silva.

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180
Site: `www.ime.ufg.br/extensao/olimpiada`

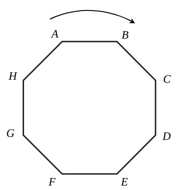
Índice

Coletânea de Problemas e Soluções

Dylene Agda Souza de Barros[1]

• Nível 1 - Problemas

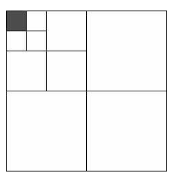
Problema 1 - Uma formiga caminha pela borda de um prato de oito lados iguais como o da figura. Cada lado do prato mede 14 cm. A formiga sai do vértice A e caminha no sentido que indica a seta, sempre na borda do prato. Ela faz uma primeira parada a 6 cm do vértice A e depois, a cada 6 cm faz uma parada, fazendo, no total, 2000 paradas.



a) Quantas vezes a formiga para no vértice A?

b) Em quais outros vértices a formiga faz a mesma quantidade de paradas que em A?

Problema 2 - Mário desenhou um quadrado vermelho de 2 cm de lado, depois desenhou outros três quadrados iguais formando um quadrado maior. Assim segue até obter a seguinte figura.



[1]Bolsista/2005/PROEC/UFG

a) Quantas vezes tem que se repetir o processo anterior para obter um quadrado de perímetro 1024 cm?

b) Quantas vezes tem que se repetir o processo anterior para obter um quadrado de área 1024 cm^2?

Problema 3 - Para completar a sua coleção de tazos, João trocou 3/5 dos que possuía por um tazo raro. Como 3/5 dos tazos que lhe restaram eram repetidos, resolveu oferecê-los ao seu amigo Miguel, ficando assim com 30 tazos. Quantos tazos tinha João inicialmente?

Problema 4 - Quantas vezes, em 24 horas, o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio é reto?

Problema 5 - Os pesquisadores da Escola Nacional de Estatística revelaram em sua última pesquisa alguns dados sobre a população de Brasilópolis. Veja as tabelas abaixo:

Números aproximados	
Moradores	150000
Casas	40000
Bairros	30

Dados sobre a população
74% são naturais de Brasilópolis
12% são analfabetos
62 % trabalham

Dados da população trabalhadora
19% trabalham por conta própria
67% trabalham em alguma empresa
13% trabalham com atividades domésticas

a) Quantas pessoas trabalham por conta própria?

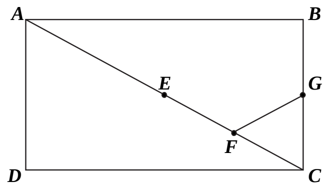
b) Qual é a média de pessoas alfabetizadas por casa?

c) Se 10% dos analfabetos trabalham por conta própria, quantos destes são alfabetizados?

Problema 6 - Em um condomínio serão construídas 6 casas em um mesmo lado de uma rua. As casas podem ser de tijolo ou de madeira mas, como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras se pode planejar a construção das casas desse condomínio?

Problema 7 - Três grandes amigos, cada um deles com algum dinheiro, redistribuem o que possuem da seguinte maneira: Antonio dá a Bernardo e a Carlos dinheiro suficiente para duplicar a quantia que cada um possui. A seguir, Bernardo dá a Antonio e a Carlos o suficiente para que cada um duplique a quantia que possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo, isto é, dá a Antonio e a Bernardo o suficiente para que cada um duplique a quantia que possui. Se Carlos possuía R$36,00 tanto no início quanto no final da distribuição, qual a quantia total que os três amigos possuem juntos?

Problema 8 - $ABCD$ é um retângulo de lados AB, BC, CD, DA. E é o ponto médio da diagonal AC. F é o ponto médio do segmento EC. G é o ponto médio do lado BC. Determine a área do triângulo CFG como fração da área do retângulo $ABCD$.

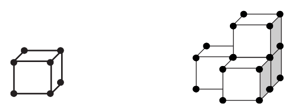


Problema 9 - Seja N o número natural formado pelos 2002 primeiros números naturais, i.e, $N = 12345678910111213415...1999200020012002$.

Quantos algarismos tem N?

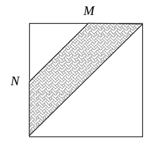
Problema 10 - Uma reta intersecta dois lados de um triângulo eqüilátero e é paralela ao terceiro lado. Se essa reta divide a região triangular em um trapézio e um triângulo menor de modo que ambos tenham o mesmo perímetro. Qual a razão das áreas do triângulo menor e do trapézio?

Problema 11 - O seguinte cubo, 1ª figura abaixo, se constrói com palitos, cartolina e bolinhas para representar as arestas, faces e vértices, respectivamente:



Quantos palitos, cartolinas e bolinhas se utilizam para construir três cubos, 2ª figura acima? Justifique sua resposta.

Problema 12 - No quadrado, M e N são pontos médios. Qual é a razão da área do quadrado em relação a área da parte sombreada?



• Nível 2 - Problemas

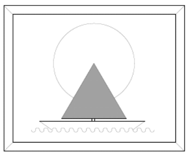
Problema 1 - Um quadrado multiplicativo tem como propriedade que qualquer linha, qualquer coluna e as duas diagonais têm o mesmo produto. Isto é, pela figura abaixo:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

$$A \times B \times C = D \times E \times F = G \times H \times I = A \times D \times G =$$
$$B \times E \times H = C \times F \times I = A \times E \times I = C \times E \times G = K.$$

Mostre que se os números colocados no quadrado forem inteiros, então K (o produto comum) deve ser um cubo perfeito.

Problema 2 - No quadro, a vela do barco é um triângulo eqüilátero com $2dm$ de lado e a lua é um círculo cujo centro é um vértice do triângulo.



A área da parte da lua escondida atrás da vela é exatamente metade da área da vela. Qual é o raio da lua?

Problema 3 - Um triângulo eqüilátero tem área $9\sqrt{3}$. Um ponto P no interior do triângulo é eqüidistante a cada lado. Qual a distância de P a cada lado?

Problema 4 - Na figura, $ACDF$ é um retângulo e BG é perpendicular a CE. Sabendo que $AC = 4$, $AB = FE$, $CD = 2$ e $BC = \sqrt{2}$, encontre BG.

Problema 5 - Quantos pares (a, b) de números reais não-nulos satisfazem à equação $1/a + 1/b = 1/(a + b)$.

Problema 6 - Determine todos os primos que são a soma ou a diferença de dois primos.

Problema 7 - Seja m real e o sistema

$$\begin{aligned} y &= mx + 3, \\ y &= (2m - 1)x + 4, \end{aligned}$$

sob quais condições de m o sistema admite pelo menos uma solução?

Problema 8 - Seja a equação $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$ com x real. Sob quais condições sobre x, y é um número real?

Problema 9 - Considere todos os números naturais de dois algarismos tais que a soma destes seja 11. Se a cada um desses números se soma 2, quantos deles são divisíveis por 4? Justifique.

Problema 10 - Encontre todos os números naturais da forma $2^r + 1$ que sejam divisíveis por 3.

• Nível 3 - Problemas

Problema 1 - Seja P um ponto no interior de am triângulo eqüilátero ABC, tal que $PA = 5$, $PB = 7$ e $PC = 8$. Encontre o lado do triângulo ABC.

Problema 2 - Mostre que todo primo da forma $3k+1$ é da forma $6m+1$, para todo $m > 0$. (Obs: Define-se que um número é congruente a outro quando os restos da divisão de ambos por um mesmo divisor são iguais).

Problema 3 - Prove que para todo real positivo a, b e c

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} > a + b + c$$

e determine quando a igualdade ocorre.

Problema 4 - Encontre todas as ternas inteiras (x, y, z) tais que

$$x + y + z = 24,\ x^2 + y^2 + z^2 = 210 \text{ e } xyz = 440.$$

Problema 5 - Se $-8 < x < 2$, então $a \leq |2 - |2 + x|| < b$. Encontre $a + b$.

Problema 6 - Calcule o valor do seguinte produto infinito:

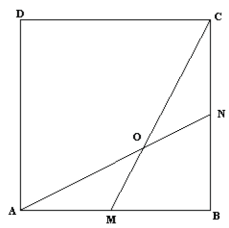
$$\frac{7}{9} \cdot \frac{26}{28} \cdots \left(\frac{t^3 - 1}{t^3 + 1}\right) \cdots$$

Problema 8 - Dados

$$A = \frac{1}{(4x^2 + 4x + 1)^{1/2}} \text{ e } B = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 1)^{1/2}}.$$

Encontre todos os valores inteiros de x, para os quais o número $C = (2A + B)/3$ seja inteiro.

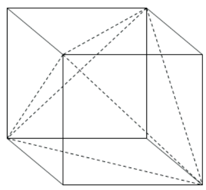
Problema 9 - Na figura seguinte AB e BC são lados adjacentes do quadrado $ABCD$. M e n ao pontos médios dos lados AB e BC respectivamente e NA e MC se interceptam em O. Encontre a razão das áreas de $AOCD$ e $ABCD$.



Problema 10 - Quatro dos oito vértices de um cubo são vértices de um tetraedro regular. Encontre a razão da área da face do cubo pela área da face do tetraedro.

• Nível 1 - Soluções

Solução do Problema 1 - a) Temos que o perímetro do polígono representado pela borda do prato é 112 cm, pois são oito lados de 14



cm. Como a formiga faz 2000 paradas a cada 6 cm, ela caminha um total de 12000 cm. Na primeira parada que a formiga fizer no vértice A ela terá caminhado $\text{mmc}(112, 6) = 336$ cm, e assim a cada 336 cm ela fará uma parada em A. Fazendo a divisão de 12000 por 336 obtemos quociente 35 e resto 240, portanto a formiga para 35 vezes no vértice A.

b) Observe que a formiga para em um dos vértices quando percorre uma distância múltipla de $\text{mmc}(14, 6) = 42$, isto é, a cada 42 cm a formiga para em um vértice. Mas, como em 42 cm ela percorre três lados do polígono segue que

- saindo de A ela para em D,
- saindo de D ela para em G,
- saindo de G ela para em B,
- saindo de B ela para em E,
- saindo de E ela para em H,
- saindo de H ela para em C,
- saindo de C ela para em F,
- saindo de F ela para em A.

Portanto, cada vez que a formiga parar em A, ela terá parado em todos os vértices a mesma quantidade de vezes. Já que ela parou 35 vezes em A falta agora analisarmos os 240 cm que sobraram da divisão de 12000 por 336. Dividindo 240 por 42 temos quociente 5 e resto 30, ou seja, ela vai fazer mais 5 paradas além das 35 já feitas em cada vértice, assim ela vai parar mais uma vez em D, G, B, E e H. Logo, a formiga para a mesma quantidade de vezes que A em C e F.

Solução do Problema 2 - a) A cada processo o lado do novo quadrado obtido dobra de tamanho. O quadrado inicial tem 2 cm de lado e após o primeiro processo passa a medir 2^2 cm, após o segundo passa a ter 2^3cm e após o n-ésimo processo passa a medir $2^{n+1}cm$.

Um quadrado cujo perímetro mede 1024 cm possui 256cm de lado. Notemos que $256 = 2^8$, logo para se ter um quadrado de 1024cm de lado precisa-se fazer o processo 7 vezes.

b) De maneira análoga, temos que um quadrado de área 1024 cm^2 possui lado de 32 cm de comprimento. Mas $32 = 2^5$, logo precisa-se repetir o processo 4 vezes para obter o quadrado desejado.

Solução do Problema 3 - Seja x o número de tazos que João tinha inicialmente. Como ele trocou $\frac{3}{5}$ de x por um tazo raro , ficou com $\frac{2}{5}x + 1$, depois de dar $\frac{3}{5}$ do que tinha para Miguel, lhe sobrou $\frac{2}{5}(\frac{2}{5}x + 1)$ que é igual a 30. Daí tiramos que João tinha 185 tazos inicialmente.

Solução do Problema 4 - Observe que o ângulo formado pelos ponteiros situados em duas marcas consecutivas é de 6^0. Como em uma hora o ponteiro das horas percorre 5 marcas e o ponteiro dos minutos percorre 60 marcas, teremos um ângulo de 90^0 quando o ponteiro dos minutos estiver a uma distância de 15 marcas ou de 45 marcas do ponteiro das horas (o que corresponde a 15 marcas no sentido anti-horário). Portanto, em 1 hora os ponteiros formam dois ângulos retos, então em 24 horas tem-se 48 ângulos retos.

Solução do Problema 5 a) Temos que a quantidade de pessoas que trabalham é de 93000. Logo a quantidade de pessoas que trabalham por conta própria é de $93000 \times 0,19 = 17670$.

b) a quantidade de pessoas alfabetizadas é de $150000 \cdot 0,88 = 132000$. Então a média de pessoas alfabetizadas por casa é de $\frac{132000}{40000} = 3,3$.

c) a quantidade de analfabetos é de $150000 - 132000 = 18000$. Logo a quantidade de analfabetos que trabalham por conta própria é de $18000 \times 0,1 = 1800$. Portanto, a quantidade de pessoas que trabalham por conta própria e que são alfabetizadas é de $17670 - 1800 = 15870$.

Solução do Problema 6 - Observamos que não pode haver 4 casas de madeira, pois teríamos pelo menos duas casas de madeira vizinhas, o que não é permitido. Assim, faremos uma análise para cada caso:

Caso 1. Nenhuma casa de madeira, ou seja, todas as casas são de tijolos e portanto temos uma maneira.

Caso 2. Com apenas uma casa de madeira M e considerando T casa de tijolo temos as seguintes configurações

$$(M\ T\ T\ T\ T\ T),\ (T\ M\ T\ T\ T\ T), \ldots, (T\ T\ T\ T\ T\ M),$$

ou seja, M pode ocupar todas as 6 posições. Portanto, temos 6 maneiras diferentes.

Caso 3. Com duas casas de madeira temos as seguintes configurações:

1ª a primeira casa é de madeira

$$(M\ T\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ ),$$

logo, a outra casa de madeira pode ocupar 4 posições;

2ª a primeira casa de madeira está na segunda posição

$$(T\ M\ T\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ ),$$

logo, a outra casa de madeira pode ocupar 3 posições.

3ª a primeira casa de madeira está na terceira posição

$$(T\ T\ M\ T\ \_\_\ \_\_\ ),$$

logo, a outra casa de madeira pode ocupar 2 posições;

4ª a primeira casa de madeira está na quarta posição

$$(T\ T\ T\ M\ T\ M),$$

logo, a outra casa de madeira pode ocupar 1 posição.
Neste caso, temos 10 maneiras diferentes.

Caso 4. Com três casas de madeira temos as seguintes configurações:

1ª a primeira casa é de madeira. Temos os seguintes:

$$(M\ T\ M\ T\ \_\_\ \_\_\ ),$$

logo, a terceira casa de madeira pode ocupar 2 posições ou

$$(M\ T\ T\ M\ T\ M),$$

ou seja, a terceira casa de madeira pode ocupar 1 posição. Portanto, ao todo temos 3 maneiras diferentes.

2ª a primeira casa de madeira está na segunda posição

$$(T\ M\ T\ M\ T\ M),$$

logo temos 1 maneira diferente. Neste caso, temos 4 maneiras diferentes

Assim, a construção das casas pode ser planejada de 21 maneiras diferentes.

Solução do Problema 7 - Inicialmente, Antônio tem x reais; Bernardo tem y reais e Carlos tem R$ 36,00.

Após a primeira distribuição, Bernardo tem $2y$ reais; Carlos tem R$ 72,00 e Antônio tem $x - y - 36$ reais.

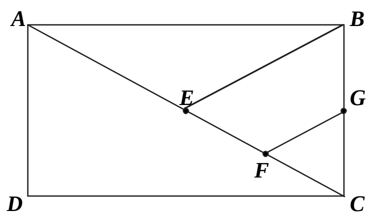
Após a segunda distribuição, Antônio tem $2x - 2y - 72$ reais; Carlos tem R$ 144,00 e Bernardo tem $3y - x - 36$ reais.

Finalmente, Antônio tem $4x - 4y - 144$ reais; Bernardo tem $6y - 2x - 72$ reais e Carlos tem $144 - 2x + 2y + 72 - 3y + x + 36$. Como no final Carlos tem 36, temos a seguinte equação

$$144 - 2x + 2y + 72 - 3y + x + 36 = 36,$$

ou seja, $x + y + 36 = 252$. Como no início Carlos tinha 36 temos que 252 representa a quantia total que os três amigos tinham juntos.

Solução do Problema 8 - Ligue os pontos B e E conforme a figura abaixo:



Como $FG//EB$ temos que os triângulos FGC e EBC são semelhantes, logo

$$\frac{h}{GC} = \frac{H}{BC},$$

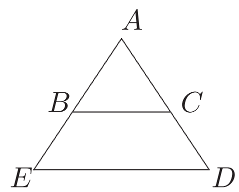
onde h e H são as alturas dos triângulos FGC e EBC, respectivamente. Além disso, como $GC = \frac{BC}{2}$ e $H = \frac{CD}{2}$, segue que $h = \frac{1}{4}CD$. Portanto,

$$S_{FGC} = \frac{1}{8}CD \times \frac{1}{2}BC. \text{ Assim, } S_{FGC} = \frac{1}{16}S_{ABCD}.$$

Solução do Problema 9 - $N = 1234567891011121314...200020012002$, separando os algarismos número de N em quatro grupos, os dos números formados por 1, 2, 3 e 4 algarismos respectivamente, tem-se:

De 1 a 9 tem-se 9 algarismos; De 10 a 99 tem-se $90 \times 2 = 180$ algarismos; De 100 a 999 tem-se $990 \times 3 = 2970$ algarismos; De 1000 a 2002 tem-se $1003 \times 4 = 4012$ algarismos. Logo N tem $9 + 180 + 2970 + 4012 = 7171$ algarismos.

Solução do Problema 10 - Considere o triângulo ADE, o triângulo ABC e o trapézio $BCED$ como na figura abaixo:



Seja x a medida do lado do triângulo ADE e y a medida do lado do triângulo ABC. Como o perímetro de $BCDE$ é igual ao perímetro de ABC, segue que

$$2(x - y) + x + y = 3y, \text{ isto é, } x = \frac{4}{3}y.$$

Temos que $S_{ADE} = x^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Logo, pela igualdade acima, segue que, $S_{ADE} = 4y^2\sqrt{3}/9$. Além disso, temos que $S_{ABC} = y^2\sqrt{3}/4$. Portanto, como $S_{BCED} = S_{ADE} - S_{ABC}$,

$$S_{BCED} = \frac{7}{9}y^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{9}S_{ABC}.$$

Logo, a razão procurada é de $9/7$.

Solução do Problema 11 - Para se construir um cubo são necessárias 6 cartolinas, 8 bolinhas e 12 palitos. Como temos 4 cubos teríamos 24 cartolinas, 32 bolinhas e 48 palitos. Mas, observando a figura, podemos notar que:

3 palitos pertencem a 3 cubos;
6 palitos pertencem a 2 cubos;
1 bolinha pertence aos 4 cubos;
3 bolinhas pertencem a 3 cubos;
3 bolinhas pertencem a 2 cubos;
3 cartolinas pertencem a 2 cubos.

Assim sendo, para construir a figura acima, temos que utilizar 21 cartolinas, 20 bolinhas e 36 palitos.

Solução do Problema 12 - Sejam A, B, C e D os vertíces do quadrado, onde M pertence ao segmento AB e N ao segmento AD. Temos que $S_{BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ e $S_{AMN} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$. Logo, como $S_{ABCD} = S_{AMN} + S_{MBDN} + S_{BCD}$, segue que $S_{MBDN} = \frac{3}{8}S_{ABCD}$.

• Nível 2 - Soluções

Solução do Problema 1.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Temos que K é o produto comum. O exercício é trivial caso $K = 0$. Suponhamos $K \neq 0$. De $A \times B \times C = A \times E \times I$ segue que

$$B \times C = E \times I. \tag{i}$$

E de $G \times H \times I = G \times E \times C$ temos que

$$E \times C = H \times I. \tag{ii}$$

Segue de (ii) que

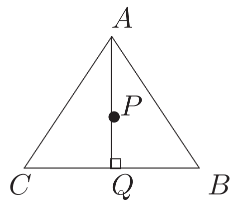
$$B \times E \times C = B \times H \times I. \tag{iii}$$

De (i) e (iii) temos que $E \times E \times I = B \times H \times I$, $E^2 = B \times H$ e $E^3 = B \times E \times H = K$. Logo $K = E^3$ é um cubo perfeito do inteiro E.

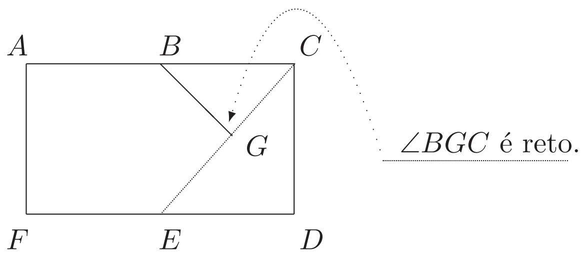
Solução do Problema 2. Temos que a área do triângulo equilátero é $A_T = \sqrt{3}$ dm^2. Logo, como a área do setor circular, A_S, é a metade da área de A_T e, por outro lado, $A_S = \pi r^2/6$. Então, $\pi r^2/6 = \sqrt{3}/2$. Adotando as aproximações $\pi \approx 3,14$ e $\sqrt{3} \approx 1,7$ temos $r \approx 1,274$ dm.

Solução do Problema 3.

Na figura, abaixo, temos que CP é bissetriz do ângulo $\angle ACB$ e $AQ \perp BC$, assim $\angle PCQ = 30^0$ e $\angle PQC = 90^0$. Como a área do triângulo ABC é $9\sqrt{3}$ e, AQ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$, então $BC = 6$. E assim, QC mede 3. Como $\tan 30^0 = PQ/3$ e, por outro lado, $\tan 30^0 = \sqrt{3}/3$, temos que P está a uma distância de $\sqrt{3}$ dos lados do triângulo.



Solução do Problema 4. A figura é a seguinte:



Temos que $CE = \sqrt{6}$ e, consequentemente, que

$$GE = \sqrt{6} - CG. \qquad \text{(i)}$$

Como $BC = \sqrt{2}$, temos

$$BG^2 + CG^2 = 2. \qquad \text{(ii)}$$

Do fato que $BG^2 + GE^2 = 4$, pois $BE = 2$, e de (i) segue que

$$BG^2 + (\sqrt{6} - CG)^2 = 4. \qquad \text{(iii)}$$

Resolvendo o sistema obtido pelas equações (i) e (iii), temos que $BG = 2\sqrt{3}/3$.

Solução do Problema 5. Temos que $a, b \neq 0$ e

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} = \frac{1}{a+b}.$$

Daí, temos que $0 < ab = (a+b)^2$ e que a e b têm mesmo sinal. Mas $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = ab$, o que implica que $a^2 + b^2 = -ab$, o que não é possível. Portanto não há um par de números reais não nulos (a, b) tal que $1/a + 1/b = 1/(a+b)$.

Solução do Problema 6. Sejam p, p_1, p_2, p_3 e p_4 números primos onde $p_1 \leq p_2$ e $p_3 \leq p_4$ e tais que $p = p_1 + p_2$ e $p = p_4 - p_3$. Temos que $p \neq 2$ pois 2 não pode ser soma de outros primos, portanto p é ímpar. Como a soma de dois números ímpares é um número par temos $p_1 = 2$ e, pelo mesmo motivo $p_3 = 2$. Logo, temos que $p_2 = p - 2, p, p_4 = p + 2$ três números ímpares consecutivos. Fica a cargo do leitor verificar que dentre três números ímpares consecutivos, um é múltiplo de três. Suponhamos que p_2 seja múltiplo de três. Como ele é primo, temos que $p_2 = 3$ e assim temos que: $p = 5 = 3 + 2 = 7 - 2$.

Solução do Problema 7. Considere o sistema

$$\begin{aligned} y &= mx + 3, \\ y &= (2m-1)x + 4. \end{aligned}$$

Caso $m = 2m - 1$, implica que $m = 1$ e o sistema resultaria em $y = x + 3, \quad y = x = 4$ o qual não admitiria solução. Logo, o sistema admite solução quando $m \neq 2m - 1$, ou seja, $m \neq 1$.

Solução do Problema 8. Dada a equação $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$ de incógnita y, temos que y possui valor real quando $16x^2 - 16(x+6) \geq 0$ ou $x^2 - x - 6 \geq 0$, que nos dá $x \leq -2$ ou $x \geq 3$.

Solução do Problema 9. Temos que os números de dois algarismos ab cuja soma $a + b = 11$ são: $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ e 92. Se a cada um desses números soma-se 2, temos que apenas os números 38 e 74 são divisíveis por 4, visto que $38 = 4 \times 9 + 2$ e $74 = 18 \times 4 + 2$.

Solução do Problema 10. Buscamos todos os r naturais tais que $2^r + 1 = 3q$, isto é, $(2^r + 1)/3$ é natural. Escrevemos $r = 2p + 1$ com $p \geq 0$ e afirmamos que $(2^{2p+1} + 1)/3$ é natural. De fato, isso vale para

$p = 0$. Suponhamos que o mesmo vale para $p = k$ e provemos que vale para $p = k + 1$. Temos que

$$\frac{2^{2(k+1)+1}+1}{3} = \frac{2^{2k+1}.2^2+1}{3} = \frac{2^{2k+1}+1+3.2^{2k+1}}{3} = \frac{2^{2k+1}+1}{3} + 2^{2k+1}$$

que é um número natural devido a hipótese indutiva.

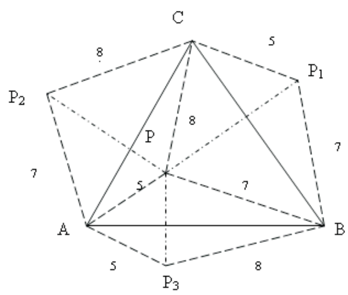
Escrevemos $r = 2p, (p \geq 0)$ e afirmamos que $(2^{2p}+1)/3$ não é natural. Isso vale para $p = 0$ e suponhamos que isso vale para $p = k$. Provaremos que vale para $p = k + 1$. De fato

$$\frac{2^{2(k+1)}+1}{3} = \frac{2^k.2^2+1}{3} = \frac{2^k+1+3.2^k}{3} = \frac{2^k+1}{3} + 2^k$$

que não é um número natural devido a hipótese indutiva. Logo $2^r + 1$ será divisível por 3 apenas quando r for ímpar.

• Nível 3 - Soluções

Solução do Problema 1. Rotacione o triângulo PAB em torno de B de modo que AB fique sobreposto a BC. Faça o mesmo com PAC em torno de A com AC sobrepondo AB e com PCB em torno de C com CB sobrepondo CA. (Vide figura)



Observe que o triângulo APP_3 é isósceles de base PP_3. Devido a isso e que o $\angle PAB = 60^o - \angle CAP$, temos que Devido $\angle PAP_3 = 60^o$, então temos que triângulo APP_3 é eqüilátero de lado 5. Analogamente, temos que triângulo CPP_2 é eqüilátero de lado 8 e BPP_1 de lado 7. Note que o hexágono $H = AP_2CP_1BP_3$, tem o dobro da área do triângulo ABC. Por outro lado,

$$S_H = S_{APP_3} + S_{BPP_1} + S_{CPP_2} + 3S_{APP_2},$$

e assim $S_H = 89\sqrt{3}/2$, o que nos dá $S_{ABC} = \frac{89}{4}\sqrt{3}$. Como ABC é eqüilátero temos que $AB = BC = CA = \sqrt{89}$.

Solução do Problema 2. Um número da forma $3k + 1$ pode ser da forma $6m + 1$ ou da forma $6m + 4$ pois ambos deixam resto 1 na divisão por 3. Temos que $3k + 1$ é primo, mas $6m + 4$ nunca será primo pois é par, logo resta que $6m + 1$ é primo.

Solução do Problema 3. De fato temos que

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} = a + b + c$$

se $a = b = c$. De $(m - n)^2 \geq 0$ temos que

$$\frac{m^2 + n^2}{2} \geq mn. \tag{i}$$

De (i) segue que

$$\frac{m^4 + n^4}{2} \geq m^2n^2. \tag{ii}$$

Logo

$$a^4 + b^4 + c^4 = \left[\frac{a^4 + b^4}{2}\right] + \left[\frac{b^4 + c^4}{2}\right] + \left[\frac{c^4 + a^4}{2}\right] \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

onde a desigualdade é obtida de (ii), o que implica

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \tag{iii}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{b^2(c^2 + a^2)}{2} + \frac{c^2(b^2 + a^2)}{2} \\ &\geq a^2bc + b^2ca + c^2ba, \end{aligned}$$

onde a desigualdade é obtida de (i). Da desigualdade acima e de (iii) temos que

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ba.$$

Dividindo ambos os membros por abc, concluímos que

$$a^3/(bc) + b^3/(ca) + c^3/(ab) > a + b + c.$$

Solução do Problema 4. Consideraremos aqui ternas não ordenadas. Temos o seguinte sistema:

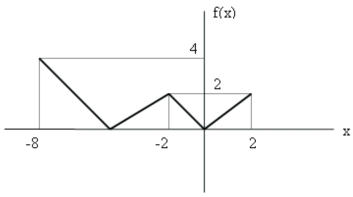
$$\begin{cases} x + y + z = 24, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 210, \\ xyz = 440. \end{cases} \tag{1.1}$$

Da segunda equação do sistema (1.1) temos que $|x|, |y|, |z| < 15$ pois $210 < 225$. Por outro lado temos que $440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Assim:

Para $440 = 8 \cdot 5 \cdot 11$ temos que o sistema é solucionado.
Para $440 = 4 \cdot 10 \cdot 11$ não temos solução.

E não há mais como fatorar 440 em fatores menores que 15. Portanto, a terna inteira não ordenada que satisfaz o sistema é $(8, 5, 11)$.

Solução do Problema 5. Esboçando o gráfico de $f(x) = |2 - |2 + x||$ para $-8 < x < 2$, temos o seguinte:



Assim podemos ver que $f(x) \geq 0$ e $f(x) < 4$ para todo x do domínio de f. Logo $0 \leq |2 - |2 + x|| < 4$ mas $a \leq |2 - |2 + x|| < b$, portanto

$$a + b = 4.$$

Solução do Problema 6. Primeiramente, note que

$$k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1) \;\text{ e }\; k^3 + 1 = (k + 1)(k^2 - k + 1),$$

logo

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}. \tag{i}$$

Portanto, fazendo o produto do membro direito de (i) com $k = 2, 3, \cdots, n$ e usando (i) podemos escrever o produto

$$\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{26}{28}\right)\cdots\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right).$$

Como

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{13}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{21}{13}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-3}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{n^2-3n+3}{n^2-5n+7}\right)\cdot$$
$$\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot\left(\frac{n^2-n+1}{n^2-3n+3}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right).$$

Observe que o numerador do 2º termo entre parênteses pode ser simplificado com o denominador do 2º termo entre parênteses subseqüente, logo o produto torna-se

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-3}{n-1}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n+1}\right).$$

Agora, podemos observar que ao pularmos um elemento entre parênteses o denominador e o numerador podem ser simplificado restando o seguinte produto:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n})}\right).$$

Como estamos interessados no produto infinito, fazemos n tender ao infinito (n suficientemente grande), logo $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n^2}$ tendem a zero, e assim o produto infinito é $\frac{2}{3}$.

Solução do Problema 7. Como a parábola não intercepta o eixo x temos que

$$p^2 < q, \tag{i}$$

pois $\Delta = b^2 - 4ac = (2p)^2 - 4.1.q < 0$. Sejam $A = (x_1, y_0)$ e $B = (x_2, y_0)$. Temos que A e B pertencem à parábola $y = x^2 - 2px + q$ se, e somente se, x_1 e x_2 são raízes da equação $x^2 - 2px + q - y_0 = 0$, logo

$$x_1 x_2 = q - y_0. \tag{ii}$$

Agora, o ângulo $\angle AOB = 90^0$ se, e somente se, $d^2(A, B) = d^2(A, O) + d^2(B, O)$, ou seja,

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + y_0^2 + x_2^2 + y_0^2$$

o que implica

$$y_0^2 + x_1 x_2 = 0. \tag{iii}$$

De (ii) e (iii) temos que $y_0^2 - y_0 + q = 0$.

Portanto, A e B existem se, e somente se, x_1 e x_2 são raízes da equação $x^2 - 2px + q - y_0 = 0$, ou seja,

$$y_0 > q - p^2.$$

Além disso, y_0 tem que ser raiz da equação $y^2 - y + q = 0$, ou seja, $1 - 4q \geq 0$, o que implica $q \leq \frac{1}{4}$. Logo, de (i) temos $p^2 < q \leq \frac{1}{4}$.

Além disso, temos solução única se $1 - 4q = 0$.

Solução do Problema 8. Temos que

$$A = \frac{1}{|2x+1|}, \quad B = \frac{2(x-1)}{|x-1|} \text{ e } C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{|2x+1|} + \frac{x-1}{|x-1|}\right).$$

Observe que C não está definido para $x = -1/2$ e $x = 1$.

• Se $x < -1/2$, temos $x \leq -1$ e

$$C = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2x+1} - 1\right) = -\frac{4(x+1)}{3(2x+1)} \leq 0,$$

assim

$$C + 1 = -\frac{4(x+1)}{3(2x+1)} + 1 = \frac{2x-1}{3(2x+1)} > 0.$$

Como $-1 < C \leq 0$ temos que $C = 0$, e assim $x = -1$.

• Se $-1/2 < x < 1$, temos $x = 0$, pois x é inteiro, e assim $C = 0$.

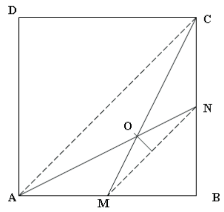
- Se $x > 1$, então

$$C = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2x+1} + 1\right) = \frac{4(x+1)}{3(2x+1)} > 0 \quad \text{e} \quad C - 1 = \frac{1-2x}{3(2x+1)} < 0.$$

Como $0 < C < 1$ temos que C não é inteiro para $x > 1$.

Logo, C é inteiro somente para $x = 0$ e $x = -1$.

Solução do Problema 9. Seja a figura:



Observe que o triângulo ANB é congruente ao triângulo CMB, assim

$$S_{ANB} = S_{CMB}. \tag{i}$$

Por outro lado, $S_{ANB} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ e $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, logo

$$S_{ANB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}. \tag{ii}$$

Como $S_{AOCD} = S_{ABCD} - S_{ANB} - S_{CMB} + S_{OMBN}$, de (i) e (ii) temos

$$S_AOCD = \frac{1}{2}S_ABCD + S_OMBN. \tag{iii}$$

Por outro lado, temos que $S_{OMBN} = S_{MNO} + S_{MNB}$. Seja x o lado do quadrado. Observe que $AN = x\sqrt{5}/2$ e $MN = x\sqrt{2}/2$. Como $AC//MN$ segue que o triângulo AOC é semelhante ao triângulo MNO e assim $ON = AN/3 = x\sqrt{5}/6$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a altura do triângulo MNO é $x\sqrt{2}/12$. Portanto, $S_{MNO} = x^2/24$. Como $S_{MNB} = x^2/8$, temos $S_{OMBN} = \frac{x^2}{24} + \frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{6}$.

Daí e de (iii) segue que

$$S_{AOCD} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}S_{ABCD}.$$

Logo, a razão das áreas de $AOCD$ e $ABCD$ é $\frac{2}{3}$.

Solução do Problema 10. Seja k a medida da aresta do cubo. Assim, temos que a área da face do cubo é de k^2. Temos que o tetraedro tem faces constituídas de triângulos eqüiláteros cujos lados são $k\sqrt{2}$, então a área da face de um tetraedro é de $\frac{k^2\sqrt{3}}{2}$. Logo, a razão procurada é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Referências Bibliográficas

[Book IV] Artino, Ralph A. et al., *The contest problem book IV:* annual high school examinations, 1973-1982, MAA, 1983. [www.math.unm.edu/math_contest/contest.html]

[OMA] Olimp. M. Argentina, [www.oma.org.ar/mateclubes/problemas]

[OPM] Olim. Port. de Matemática, [www.mat.uc.pt/ opm/problemas.htm]

[OMR] Olimp. Mat. Rioplatense, [www.oma.org.ar/internacional/omr.htm]

[OMERJ] Olimp. de Mat. do Rio de Janeiro, [www.omerj.com.br]

[BNOM] Bulgarian N. Olympiad in math. [www.math.bas.bg/bcmi]

[OBM] XXI Torneio Inter. de cidades, [www.obm.org.br]

[OMCS] Olimpíada de Matemática do Cone Sul, [www.obm.org.br]

[OPaM] Olimpiada Panameña de Matemática, [www.opm.org.pa]

[OIM] Olimp. Iberoamericana de Mat., [www.campus-oei.org/oim]

[CMO] Olimpíada Canadense, [www.cms.math.ca/Olympiads/CMO]

Editora da seção: Dylene Agda Souza de Barros
Graduanda em Matemática

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
dylene@mat.grad.ufg.br,

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 22-24

Classificados na XIII OMEG - 2004

Nível 1 (5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

  ⋆ *Fernando Gobbi Paixão*/Colégio Ateneu Dom Bosco - Goiânia.

- Segundo Lugar

  ⋆ *Marcos Celestino Carvalho Júnior*/Colégio Goyases - Goiânia.

- Terceiro Lugar

  ⋆ *Marina Berquió Peleja*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia.

- Menção Honrosa

  ⋆ *Arthur Magalhães de Oliveira*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia.

  ⋆ *Yuri Rezende Souza*/Educandário Nascentes do Araguaia - Mineiros.

  ⋆ *Marcelo Abdala Daher*/Colégio Crescer - Anápolis.

  ⋆ *Victor Hugo Vaz de Queiroz P. Azevedo*/Escola Frei Antônio Voogt - Goiânia.

  ⋆ *Amanda Barroso de Freitas*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia.

  ⋆ *Leonardo Finotti Brazão*/Instituto Educacional Emmanuel - Goiânia.

  ⋆ *Juan Estevão Cortez*/Sociedade Educacional Objetivo - Rio Verde.

  ⋆ *Marco Túlio José de Oliveira*/Centro Educacional SESC Cidadania Elias Bufáiçal - Goiânia.

  ⋆ *Sara de Oliveira Santos*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia.

⋆ *Guilherme Resende Magro*/Educandário Nascentes do Araguaia - Mineiros.

⋆ *Jorge Elias Bazi Filho*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *Marcus Vinícius Morais de Souza*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia.

⋆ *Marlus Lopes Tavares*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia.

⋆ *Mateus Miranda Andrade*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *Douglas F. Souza*/Colégio Ateneu Dom Bosco - Goiânia.

⋆ *Rafael Mentone de B. Siqueira*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *André Santiago Beires*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *Erick Miranda Martins*/Colégio Santo Agostinho- Goiânia.

⋆ *Lucas Machado Fraissat*/Educandário Sol Nascente - Goiânia.

⋆ *Júlio Ferreira Soares Filho*/Colégio Galileu - Anápolis.

⋆ *Renato Luiz Bizol*/Colégio Disciplina - Goiânia.

Nível 2 (7ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental)

• Primeiro Lugar

⋆ *Fernanda Pedrosa Torres*/Colégio Marista - Goiânia.

• Segundo Lugar

⋆ *Lucas de Oliveira Sena Hortêncio*/Colégio Disciplina - Goiânia.

• Terceiro Lugar

⋆ *Vinícius Queiroz de Almeida*/Colégio Disciplina - Goiânia.

• Menção Honrosa

⋆ *Letícia Goulart Netto*/Centro Educacional Paulo Freire - Catalão.

⋆ *Alice Duarte Scarpa*/Colégio Pré-Médico - Goiânia.

⋆ *Rhaísa Ghannam Macêdo*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *Ney César de Melo Filho*/Colégio Crescer - Anápolis.

Nível 3 (Ensino Médio)

- Primeiro Lugar

⋆ *Matheus Minelli de Carvalho*/Colégio Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

- Segundo Lugar

⋆ *Gustavo de Souza Pinto*/Colégio Mega - Goiânia.

- Terceiro Lugar

⋆ *Atahualpa Moura Mendes*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Ralph C. Ribeiro Silva*/Colégio Visão - Goiânia.

- Menção Honrosa

⋆ *Vantuir Santos Júnior*/Colégio Intercom 2000 - Porangatu.

⋆ *Caio Teodoro de Magalhães Alves*/Colégio Pré-Médico - Goiânia.

⋆ *Pedro Henrique Guedes de Oliveira*/Colégio Prevest - Goiânia.

⋆ *Bernardo Amorim Santos*/Colégio Mega - Goiânia.

⋆ *Luciana Martins R. Salgado*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Adriano da Mota Santos*/Colégio Ávila - Goiânia.

⋆ *Leonardo Araujo Tirabosqui*/Colégio Objetivo Uniclass- Goiânia.

⋆ *Raquel Cristina Zendron*/Colégio Galileu- Anápolis.

⋆ *Wild Afonso Ogawa Filho*/Colégio Objetivo Uniclass - Goiânia.

⋆ *Vinicius Rodovalho Pereira*/Colégio Galileu - Anápolis.

Notícias

• A **III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática** será realizada no período de 06 a 10 de novembro de 2006 no Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Informações no site `www.mat.ufg.br`.

• A **XIV Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** foi realizada em **24 de setembro de 2005** das 13:30h às 18:00h, nos campi da UFG de: Goiânia, Catalão, Jataí e Rialma, nos campi da UEG de: Anápolis, Iporá e Porangatu e no Colégio Diocesano de Itumbiara.

Para participar da **XV Olimpíada de Matemática** do Estado de Goiás a escola deve estar cadastrada.

O cadastramento e as inscrições deverão ser feitos diretamente pelo site `www.mat.ufg.br` no período de **01 de junho até 31 de agosto** de 2006. A XV Olimpíada será realizada no dia **23 de setembro**.

Poderão participar, por escola, até:

▷ 10 estudantes no nível 1 (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental);
▷ 10 estudantes no nível 2 (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental);
▷ 10 estudantes no nível 3 (Ensino Médio).

A seleção dos estudantes para participarem da XV OMEG ficará a critério da escola, podendo ser utilizada a prova da 1ª fase da 27ª OBM e ou da 2ª OBMEP para esta seleção.

• A **26ª Olimpíada Brasileira de Matemática -OBM** foi realizada nos níveis 1, 2 e 3 em três fases:

▷ 1º fase 11/05/2005 na escola.
▷ 2º fase 03/09/2005 na escola.
▷ 3º fase 23 e 24/10/2005, no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Para participar da 27ª OBM a escola deverá se cadastrar na Secretaria da OBM. A ficha pode ser encontrada no site `www.obm.org.br`.

• A **1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Púbicas -OBMEP** foi realizada em 2005 nos níveis 1, 2 e 3 em duas fases:

▷ 1º fase 16/08/2005 na escola.
▷ 2º fase 08/10/2005.

Para participar da 2ª OBMEP, a ser realizada em 2006, a escola pública deverá se cadastrar no site `www.obmep.org.br`.

• Datas de Outras Olimpíadas:

▷ A Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário é realizada em duas fases. A primeira fase aconteceu dia 03 de setembro de 2005 e a segunda fase nos dias 22 e 23 de outubro de 2005 no Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Participaram estudantes de vários cursos universitários [www.obm.org.br].

▷ A **Olimpíada de Maio** é uma competição realizada para jovens estudantes, disputada em dois níveis (Nível 1: para alunos até 13 anos e Nível 2: para alunos de até 15 anos), por países da América Latina, Espanha e Portugal. No Brasil a olimpíada de maio é aplicada apenas àqueles aos alunos que tenham sido premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática (medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas) e para os estudantes classificados na XI Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. A 11ª Olimpíada de Maio foi realizada no dia 14 de maio de 2005, nos locais designados por cada coordenação regional.

▷ A **Olimpíada de Matemática do Cone Sul** é uma competição internacional da qual participam os países da porção meridional da América do Sul, representados por equipes de 4 estudantes que não tenham feito 16 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada. A 16ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul foi realizada na cidade de Sucre, Bolívia, de 24 a 25 de maio de 2005.

▷ A **Olimpíada Iberoamericana de Matemática** é uma competição internacional da qual participam os países da América Latina, Espanha e Portugal, representados por equipes de até 4 estudantes que não tenham feito 18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da olimpíada e que não tenham participado anteriormente em duas OIM. A 20ª OIM foi realizada em Cartegena de Índias, Colômbia, de 24/09 a 01/10/2005.

▷ A **Olimpíada Internacional de Matemática** é a mais importante competição internacional, realizada desde 1959. Participam dessa competição cerca de 100 países de todo o mundo, representados por equipes de até 6 estudantes secundários ou que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente, na data da celebração da Olimpíada. A 46ª IMO foi realizada no período de 08 a 19 de julho de 2005, em Yukatán, México.

▷ VIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária foi em 19 de novembro de 2005.

• Foi realizado o **IX Encontro de Matemática e Estatística (XX Semana da Matemática)**no IME, de 3 a 7 de outubro de 2005. Maiores informações pelo telefone (62) 3521-1208, pelo e-mail eme@mat.ufg.br ou no site `www.mat.ufg.br`.

• O **Simpósio de Matemática - XVI Jornada de Matemática de Catalão** foi realizada no Campus Avançado de Catalão de 8 a 11 de novembro de 2005. Maiores informações pelo telefone (62) 447 5642 `www.catalao.ufg.br/matematica`.

• A **IX Jornada de Matemática de Rialma** foi realizada de 17 a 18 novembro de 2005 em Rialma. Maiores informações pelo telefone (62) 3971556 `www.mat.ufg.br/cursos/rialma`.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 28-45

Soluções Comentadas das Provas da XIII OMEG - 2004

Edméia Fernandes da Silva

Resumo. Nesta seção apresentamos as soluções comentadas dos participantes da XIII OMEG.

• Nível 1

Problema 1) Um carro pode utilizar como combustível tanto álcool, que custa um real e trinta centavos o litro quanto gasolina, que custa dois reais o litro. Sabendo que o carro faz oito quilômetros por litro com álcool e dez quilômetros por litro com gasolina, qual o combustível mais econômico? Justifique.

Solução apresentada por Marcos Celestino Carvalho Júnior:

Denotando por A o gasto médio com álcool e por G o gasto médio com gasolina, temos que:

$$A = \frac{8\text{Km}}{1,30}, \quad \text{logo} \quad A = \frac{8\text{Km} \times 20}{1,30 \times 20} = \frac{160\text{Km}}{26}.$$

$$G = \frac{10\text{Km}}{2,00}, \quad \text{logo} \quad G = \frac{10\text{Km} \times 13}{2,00 \times 13} = \frac{130\text{Km}}{26}.$$

O álcool é o combustível mais econômico, pois, a cada 26 reais gastado em litros de álcool o carro percorrerá 160 Km, e a cada 26 reais gastado em litros de gasolina o carro percorrerá 130 Km.

Problema 2)

a) Existem exatamente duas estradas ligando a cidade A até a cidade B e duas estradas ligando a cidade B até a cidade C. De quantos modos é possível ir de A para C passando por B?

b) Quantos números de dez algarismos podemos formar utilizando apenas os algarismos zero e um?

Solução apresentada por Marcos Celestino Carvalho Júnior:

a) Chamando as estradas de x, y (duas possibilidades de se ir de A até B) e de z e w as duas possibilidades de se ir de B até C, vemos que temos quatro modos, a saber: xy, xw, yz, yw.

b) Podemos formar 512 números (podendo iniciar somente com 1) utilizando apenas 0 e 1, pois observamos que a quantidade é dada pelo produto das possibilidades de cada um dos 9 algarismos restantes, isto é, $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^9$.

Problema 3) Na cidade de Itapipoca alguns animais são realmente estranhos, 10% dos cães pensam que são gatos e 10% dos gatos pensam que são cães. Todo restante de cães e gatos são perfeitamente normais. Certo dia todos os cães e gatos de Itapipoca foram testados por um veterinário - psicanalista, verificando-se então que 20% deles pensam que são gatos. Que porcentagem de animais eram realmente gatos? Justifique.

Solução apresentada pela Comissão:

Temos que 90% da população de gastos pensam que são gatos e 10% da população de cães pensam que são gatos. Logo, como 20% da população total pensam que são gatos (identificado pelo veterinário) conclui-se que $0,9g + 0,1c = 0,2(c+g)$ e portanto $1c = 7g$. Logo a porcentagem de gatos é

$$\frac{g}{c+g} \times 100\% = \frac{g}{7g+g} \times 100\% = \frac{1}{8} \times 100\% = 12,5.$$

Problema 4) Um certo número abc de 3 algarismos no sistema decimal aumenta de 36 se inverte-se a posição dos dois algarismos da direita e diminui de 270 se inverte-se os dois algarismos da esquerda do referido número. O que acontece ao número se inverte-se os dois algarismos extremos?

Solução apresentada pela Comissão:

$$x = abc = a \times 10^2 + b \times 10 + c,$$

$$x + 36 = a \times 10^2 + c \times 10 + b,$$

$$9 \times c - 9 \times b = 36,$$

$$c - b = 4. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x - 270 &= b \times 10^2 + a \times 10 + c, \\ 90 \times (a - b) &= 270, \end{aligned}$$

$$a - b = 3. \tag{2}$$

De (2) temos $b = a - 3$. Substituindo o valor de b em (1), obtemos $c = a + 1$,

$$x = abc = a \times 10^2 + (a - 3) \times 10 + (a + 1).$$

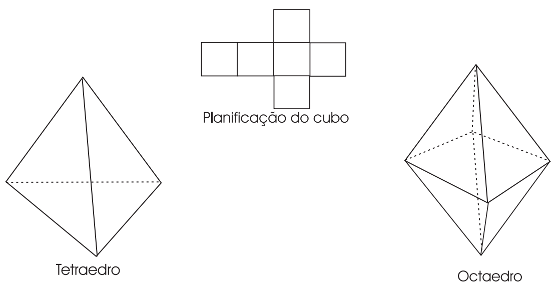
Seja

$$\begin{aligned} y &= cba = c \times 10^2 + b \times 10 + a = (a + 1) \times 10^2 + (a - 3) \times 10 + a, \\ &= a \times 10^2 + (a - 3) \times 10 + a + 10^2, \\ &= a \times 10^2 + (a - 3) \times 10 + (a - 1) + 99, \\ &= x + 99. \end{aligned}$$

Ao se inverter os dois algarismos extremos tem-se um acréscimo de 99 unidades.

Problema 5) A figura abaixo (parte central) chama-se *planificação do cubo* pois podemos construir um cubo apenas dobrando as arestas da figura de modo conveniente.

Na figura abaixo também temos desenhado um tetraedro, que é uma pirâmide de base triangular e um octaedro, formado por duas pirâmides (bases quadradas) justapostas pelas bases. Desenhe planificações do tetraedro e do octaedro.



Solução apresentada por Marina Berquió Peleja:

Faça para o tetraedro o seguinte: desenhe um triângulo e justaponha as três faces restantes uma em cada lado do triângulo.

Para o octaedro desenhe um segmento de reta dividido em 4 partes e justaponha um triângulo na parte superior e outro na parte inferior de cada parte, obtendo assim as 8 faces no mesmo plano.

Solução apresentada por Marcos Celestino Carvalho Júnior:

Faça para o tetraedro uma figura com 3 triângulos tendo dois lados em comum e justaponha mais um triângulo tendo em comum apenas um lado com um dos outros 3.

Faça uma figura com 4 triângulos justapostos tendo apenas um lado em comum um com o outro, depois justaponha outros 4 tendo em comum apenas um lado com cada um dos 4 primeiros.

Solução apresentada por Fernando Gobbi Paixão:

Para o Tetraedro desenhe quatro triângulos tendo um deles (a base) com apenas um lado em comum com cada um dos outros três (4 faces = quatro triângulos), cortando ao longo das arestas que não fazem parte da base.

Para o Octaedro corte ao longo das arestas tracejadas da figura dada e o abra colocando as faces no plano.

Problema 6) Dado n, um número inteiro positivo, defina

$$R(n) = \frac{10^n - 1}{9} = \underbrace{11\cdots1}_{n \text{ vezes}}.$$

Por exemplo: $R(2) = \dfrac{10^2-1}{9} = 11,\ R(3) = \dfrac{10^3-1}{9} = 111.$

a) Mostre que $R(2)$ divide $R(6)$.

b) Mostre que 41 é um fator primo de $R(5) = 11111$ e encontre a fatoração, em fatores primos, de $R(5)$.

c) Mostre que se k divide n, então $R(k)$ divide $R(n)$.

Solução apresentada pela Comissão:

$a)$
$$\begin{aligned} R(6) = 111111 &= 11 \times 10^{2\cdot 2} + 11 \times 10^{2\cdot 1} + 11, \\ &= R(2) \times (10^4 + 10^2 + 1). \end{aligned}$$

Portanto $R(2)$ divide $R(6)$.

b) $R(5) = 11111 = 41 \times 271$. Como 271 é primo, esta é a decomposição de $R(5)$ em fatores primos.

c) Se k divide n, existe um inteiro $r > 0$ tal que $n = k \times r$.

$$\begin{aligned} R(n) &= \underbrace{11\cdots1}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{R(k)R(k)\cdots R(k)}_{r \text{ vezes}}, \\ &= R(k) \times 10^{k(r-1)} + R(k) \times 10^{k(r-2)} + \cdots + R(k) \times 10^{k} + R(k), \\ &= R(k) \times [10^{k(r-1)} + 10^{k(r-2)} + \cdots + 10^{k} + 1]. \end{aligned}$$

Portanto, $R(k)$ divide $R(r)$.

• Nível 2

PROBLEMA 1) Determine todas as frações cujo numerador e denominador são números de dois algarismos da forma $ab/(bc)$ e que seja equivalente a fração a/c, isto é, $ab/(bc) = a/c$. A fração $16/64$ é um exemplo pois $16 \times 4 = 64 \times 1 = 64$.

Solução apresentada por Letícia Goulart Netto:

Temos que $\dfrac{ab}{bc} = \dfrac{a}{c}$, é equivalente a

$$\begin{aligned} (10 \times a + b) \times c &= (10 \times b + c) \times a, \\ 10 \times a \times c + b \times c &= 10 \times b \times a + a \times c, \\ 10 \times a \times c - 10 \times b \times a &= a \times c - b \times c, \\ 10 \times a \times (c - b) &= c \times (a - b). \end{aligned}$$

Atribuindo valores a a e b entre 1 e 9 encontramos, as seguintes frações:

$$\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}, \frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \frac{33}{33}, \frac{44}{44}, \frac{55}{55}, \frac{66}{66}, \frac{77}{77}, \frac{88}{88} \text{ e } \frac{99}{99}.$$

Problema 2)

i) Considere os números $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ e $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Mostre que

$$\frac{b-a}{\sqrt{2}} = 1.$$

ii) Encontre um polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros tal que

$$p(a) = p(b) = 0.$$

Solução apresentada pela Comissão:

$$\begin{aligned}
\text{i)}\quad \frac{b-a}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}(b-a)}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2},\\
&= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2},\\
&= \frac{|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|}{2} = \frac{1+\sqrt{3}-(\sqrt{3}-1)}{2} = 1.
\end{aligned}$$

ii) Observe que $b = \sqrt{2+\sqrt{3}} \Leftrightarrow b^2 = |2+\sqrt{3}| = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2-2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow (b^2-2)^2 = 3 \Leftrightarrow b^4-4b^2+4 = 3 \Leftrightarrow b^4-4b^2+1 = 0$.

Assim, a e b são raízes de $p(x) = x^4-4x^2+1$.

Problema 3) Sejam os números racionais

$$a = 6+\frac{5}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5} \quad \text{e} \quad b = 6+\frac{5}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\frac{3}{7^5}.$$

i) Determine o maior número. Justifique.

ii) Calcule $a+2b$ e $2a-b$, escrevendo os resultados na forma como no enunciado, isto é, como soma de um inteiro e de frações tais que cada numerador seja um número natural menor que 7.

Solução apresentada por Alice Duarte Scarpa:

i) As parcelas $6, \frac{5}{7}, \frac{4}{7^2}$ são comuns ao número a e ao b. Então

$$a-6-\frac{5}{7}-\frac{4}{7^2} = \frac{3}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^3} = \frac{21}{7^4}+\frac{15}{7^5},$$

$$b-6-\frac{5}{7}-\frac{4}{7^2}=\frac{2}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\frac{3}{7^5}=\frac{14}{7^4}+\frac{25}{7^5}.$$

$$\frac{21}{7^4}=\frac{14}{7^4}-\frac{49}{7^4} \quad \text{e} \quad \frac{15}{7^5}=\frac{25}{7^5}-\frac{10}{7^5},$$

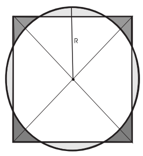
logo o número a é maior do que b, porque $a=b+\dfrac{4}{7^5}$.

ii)

$$\begin{aligned} a)\quad a+2b &= 18+\frac{15}{7}+\frac{12}{7^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{8}{7^4}+\frac{1}{7^4}=20+\frac{1}{7}+\frac{13}{7^2}+\frac{9}{7^4},\\ &= 20+\frac{2}{7}+\frac{6}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}. \end{aligned}$$

$$b)\quad a-2b = 6+\frac{5}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\frac{1}{7^4}-\frac{1}{7^5}=6+\frac{5}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\frac{6}{7^5}.$$

Problema 4) Considere um quadrado cuja diagonal mede 2 cm e um círculo de raio R, como na figura abaixo. Determine R tal que a área da região do círculo que está fora do quadrado seja igual à área região do quadrado que está fora do círculo.



Solução apresentada por Ney César de Melo Filho:

A área do círculo de raio r é igual a $A_C=\pi r^2$ e a área do quadrado de lado ℓ é $A_Q=\ell^2$. A diagonal de um quadrado de lado ℓ é $\ell\sqrt{2}$. Logo $2=\ell\sqrt{2}$ implica em $\ell=\sqrt{2}$.

Se a área do círculo que está de fora do quadrado deve ser igual à área do quadrado fora do círculo, então a área do círculo é igual a área do quadrado. Então basta igualar 2, que é a área do quadrado , a πr^2:

$$A_Q=A_C$$

$$2=\pi r^2, \quad \text{isto é,} \quad r^2=\frac{2}{\pi}. \quad \text{Logo,} \quad r=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Para que estas áreas sejam iguais o raio do círculo deve ser $r = \sqrt{2/\pi}$.

PROBLEMA 5) O símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ representa a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Por exemplo

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \ \sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} = na.$$

a) Mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

b) Defina uma seqüência de números pela seguinte fórmula $h_n = 1 + 3n(n-1)$, $n \geq 1$. Por exemplo: $h_1 = 1$, $h_2 = 7$ e $h_3 = 19$. Calcule a soma $S_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, para $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ e 5.

c) Use os dados numéricos obtidos no item b) para intuir a fórmula da soma S_n.

d) Prove a fórmula encontrada no item c).

Solução apresentada pela Comissão:

a) Por indução matemática em n. Para $n = 1$ temos,

$$\sum_{k=1}^{1}(k-1)\cdot k = (1-1)\cdot 1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{(1-1)\cdot 1\cdot(1+1)}{3} = 0.$$

Portanto, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Por hipótese de indução, suponhamos que

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Queremos mostrar que $\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k &= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)n + n(n+1),\\
&= \sum_{k=1}^{n}(k-1)k + n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1),\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)+3n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n-1+3)}{3},\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

b) $h_n = 1 + 3n(n-1),\ n \geq 1.$

$$S_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n.$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= h_1 = 1 = 1^3,\\
S_2 &= 1+7 = 8 = 2^3,\\
S_3 &= 1+7+19 = 27 = 3^3,\\
S_4 &= 1+7+19+37 = 64 = 4^3,\\
S_5 &= 1+7+19+37+61 = 125 = 5^3.
\end{aligned}$$

c) Pelos dados obtidos no item b) $S_n = n^3$.

$$\begin{aligned}
d)\quad S_n &= \sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n}(1+3k(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} 3(k-1)k,\\
&= n + 3\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = n + 3\frac{(n-1)n(n+1)}{3},\\
&= n + (n-1)n(n+1) = n(1+(n-1)(n+1))\\
&= n(1+n^2-1) = n^3.
\end{aligned}$$

Problema 5) Dado n, um número inteiro positivo, defina

$$R(n) = \frac{10^n - 1}{9} = \underbrace{11\cdots 1}_{n \text{ vezes}}.$$

Por exemplo, $R(2) = \dfrac{10^2-1}{9} = 11,\ R(3) = \dfrac{10^3-1}{9} = 111.$

a) Mostre que $R(2)$ divide $R(6)$.

b) Mostre que 41 é um fator primo de $R(5) = 11111$ e encontre a fatoração, em fatores primos, de $R(5)$.

c) Mostre que se k divide n, então $R(k)$ divide $R(n)$.

d) Mostre que se n não é primo, então $R(n)$ também não é primo. Observe que n ser primo não implica que $R(n)$ seja primo como mostra o item b).

Solução apresentada pela Comissão:

d)
$$\begin{aligned} R(6) = 111111 &= 11 \times 10^{2\cdot 2} + 11 \times 10^{2\cdot 1} + 11, \\ &= R(2) \times (10^4 + 10^2 + 1). \end{aligned}$$

Portanto, $R(2)$ divide $R(6)$.

b) $R(5) = 11111 = 41 \times 271$.
Como 271 é primo, esta é a decomposição de $R(5)$ em fatores primos.
c) Se k divide n, existe um inteiro $r > 0$ tal que $n = k \times r$.

$$\begin{aligned} R(n) &= \underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{R(k)R(k) \cdots R(k)}_{r \text{ vezes}}, \\ &= R(k) \times 10^{k(r-1)} + R(k) \times 10^{k(r-2)} + \cdots + R(k) \times 10^k + R(k), \\ &= R(k) \times [10^{k(r-1)} + 10^{k(r-2)} + \cdots + 10^k + 1]. \end{aligned}$$

Portanto $R(k)$ divide $R(r)$.

d) Suponha que n não é primo, então existe k, $1 < k < n$ tal que k divide n, e pelo item c) $R(k)$ divide $R(n)$, $R(k) \neq 1$ e $R(k) \neq R(n)$.
Portanto, $R(n)$ não é primo.

• Nível 3

PROBLEMA 1) O fatorial de um número inteiro é definido recursivamente como segue: $1! = 1$, $2! = 2\times 1$, $3! = 3\times 2! = 6$, $\cdots$, $n! = n\times(n-1)!$.

i) Determine o algarismo da unidade do número

$$(1! + 2! + 3! + 4!)^2.$$

ii) Determine o algarismo da unidade do número

$$(2! + 3! + \cdots + 9! + 10!)^2.$$

iii) Determine o algarismo da unidade do número

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 2004!.$$

Solução apresentada por: Ralph Canhete Ribeiro Silva, Gustavo de Souza Pinto e Atahualpa Moura Mendes

i) $$(1 + 2! + 3! + 4!)^2 = (1 + 2 + 6 + 24)^2 = 33^2 = 1089.$$

o algarismo da unidade é 9.

ii) Temos que $2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720$. A partir de 5!, todos os outros $n!$ terminarão em zero, pois $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$, ou seja, $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot a$, tal que "$a$" é um número terminado em zero.

Portanto, o algarismo das unidades será definido pelos 3 primeiros números, que são 2,6, 24, cuja soma é 32, ou seja o algarismo da unidade é 2, que elevado ao quadrado é 4.

iii) Por analogia à explicação do item anterior, o algarismo das unidades será definido pelos primeiros termos da soma, ou seja, 1, 2, 6 e 24, cuja soma é 33 e, como todos os outros números terminam em zero, o algarismo das unidades é o 3.

Problema 2) O símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ representa a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Por exemplo

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \quad \sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ vezes}} = na.$$

a) Mostre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

b) Defina uma seqüência de números pela seguinte fórmula $h_n = 1 + 3n(n-1)$, $n \geq 1$. Por exemplo: $h_1 = 1,\ h_2 = 7$ e $h_3 = 19$. Calcule a soma $S_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, para $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ e 5.

c) Use os dados numéricos obtidos no item b) para intuir a fórmula da soma S_n.

d) Prove a fórmula encontrada no item c).

Solução apresentada por Matheus Minelli de Carvalho:

a) Provemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

pelo princípio da indução finita.

Para $n = 1$, a hipótese é verdadeira, pois

$$\sum_{k=1}^{1}(k-1)\cdot k = (1-1)\cdot 1 = 0 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Suponhamos que para $n = p > 1$

$$\sum_{k=1}^{p}(k-1)k = \frac{(p-1)p(p+1)}{3}. \qquad (*)$$

Para $n = p + 1$,

$$\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)k = \sum_{k=1}^{p}(k-1)k + p(p+1).$$

De $(*)$ segue que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)k &= \frac{(p-1)p(p+1)}{3} + p(p+1) = p(p+1)\left(\frac{p-1}{3} + 1\right), \\ &= \frac{p(p+1)(p+2)}{3} = \frac{(p+1-1)(p+1)(p+1-1)}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$, para todo $n \geq 1$.

b) Seja $h_n = 1 + 3n(n-1), n \geq 1$ e $S_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$. Temos $h_1 = 1, h_2 = 7, h_3 = 19, h_4 = 37, h_5 = 61$. Logo,

$$S_1 = 1,\ S_2 = 8,\ S_3 = 27,\ S_4 = 64 \text{ e } S_5 = 125.$$

c) Notemos que $S_1 = 1^3, S_2 = 2^3, S_3 = 3^3, S_4 = 4^3$ e $S_5 = 5^3$. Logo, uma possível fórmula para S_n seria $S_n = n^3$.

d) Para provar que $S_n = n^3$, devemos notar que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}[1 + 3(k-1)c \cdot k],$$

logo, $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} 3(k-1) \cdot k = n + 3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)k$.

Lembrando que, como provado no item b)

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

segue que

$$S_n = n + 3\frac{(n-1)n(n+1)}{3} = n[1 + (n-1)(n+1)].$$

Logo, $S_n = n^3$.

PROBLEMA 3) Considere as seguintes propriedades de divisibilidade. Sejam a, b, c números inteiros positivos.

i) Se $a|b$ (a divide b) e $a|c$, então $a|(b+c)$.

ii) Se p é primo e $p|bc$, então $p|b$ ou $p|c$.

a) Mostre que todo número primo ímpar é da forma $4n+1$ ou $4n+3$.

b) Mostre que o produto de dois números da forma $4n+1$ é um número da forma $4n+1$.

c) Suponha que $3 < p_1 < \cdots < p_k$ sejam primos da forma $4n+3$. Usando o item b) e as propriedades de divisibilidade i) e ii), verifique que $4(p_1 \cdots p_k)+3$ é primo ou é divisível por um primo p da forma $4n+3$ e que p não pertence ao conjunto $\{3, p_1, \cdots, p_k\}$.

d) Use o item c) para mostrar que existem infinitos primos da forma $4n + 3$, e portanto o conjunto dos números primos é infinito.

Solução apresentada por Matheus Minelle de Carvalho:

a) Dado um número inteiro $m > 0$, o resto da divisão de m por 4 é $0, 1, 2$ ou 3. Se m é ímpar o resto deve ser 1 ou 3. Logo todo primo ímpar é da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$.

b) Seja $a = 4n + 1$ e $b = 4m + 1$. Temos,

$$\begin{aligned} a \times b &= (4n+1)(4m+1) = 16mn + 4(n+m) + 1, \\ &= 4(4nm + (n+m)) + 1, \\ &= 4k + 1. \end{aligned}$$

c) Seja $m = 4(p_1 \cdots p_k) + 3,\ \ 3 < p_1 < \cdots < p_k$. Sendo da forma $4n + 3$, há duas possibilidades para m:

I) m é primo ou

II) m não é primo.

Se m não é primo seja p um primo ímpar divisor de m. Se $p|(p_1 \cdots p_k)$, então de acordo com i) $p|3$. Da mesma forma, se $p|3$ então $p|(p_1 \cdots p_k)$. Entretanto, isso seria um absurdo, pois implicaria em $p = 3$ e $p = p_i$, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, $p_i \neq 3$. Logo, p não pertence ao conjunto $\{3, p_1, \cdots, p_k\}$.

Note ainda que, se todos os primos p divisores de m fossem da forma $4n+1$, de acordo com o item b) m também seria da forma $4n+1$. Logo, m é divisível por um primo p da forma $4n + 3$ e não pertencente ao conjunto $\{3, p_1, \cdots, p_k\}$.

d) Suponha que sejam conhecidos somente os números primos p_1, p_2, $\cdots$, p_k, todos da forma $4n + 3$ e maiores que 3. Pelo item c), ao construirmos o número $m = 4(p_1 \cdots p_k) + 3, m$ passa a ser um novo número primo p_{k+1}, diferente de 3, da forma $4n + 3$ ou é um número divisível por um primo p da forma $4n + 3$ e $p \notin \{3, p_1, \cdots, p_k\}$.

Dessa forma, utilizando este método, é sempre possível descobrir um novo número primo, o que prova ser infinito o conjunto dos números primos.

Problema 4)

i) Dado um número real a defina $|a| = \max\{a, -a\}$ (módulo de a). Por exemplo, $|-2| = |2| = 2$. Mostre que $|ab| = |a||b|$ e que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

ii) Considere uma seqüência de números reais tais que $a_{k+1} \leq a_k + 1,\ \ a_1 = 1$. Mostre que $a_k \leq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

iii) Seja $sen(x) \neq 0$ e considere a seqüência $a_k = |\operatorname{sen}(kx)/\operatorname{sen}(x)|$. Mostre que $a_k \leq k$ e conclua que $\operatorname{sen}^2(kx) \leq k^2 \operatorname{sen}^2(x)$.

iv) Seja $x_k = \dfrac{\pi}{2k}$. Mostre que $sen(x_k) \geq \dfrac{2}{\pi} x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Interprete o resultado geometricamente.

i) **Solução apresentada por Matheus Minelle de Carvalho**: Provemos que $|ab| = |a||b|$:

$$\begin{aligned} |ab| &= \max\{-ab, ab\}; \\ |a||b| &= \max\{(-a)(-b), (-a)(b), (a)(-b), (a)(b)\}; \\ &= \max\{-ab, ab\}. \end{aligned}$$

Logo, $|ab| = |a||b|$.

Vamos provar que $|a + b| \leq |a| + |b|$:
a) $a \geq 0$ e $b \geq 0$ implica $|a + b| = a + b = |a| + |b|$;
b) $a > 0,\ b < 0$ e $|a| \geq |b|$ implica $|a + b| = a + b \leq a - b = |a| + |b|$;
c) $a > 0,\ b < 0$ e $|a| \leq |b|$ implica $|a + b| = -a - b \leq a - b = |a| + |b|$;
d) $a \leq 0$ e $b \leq 0$ implica $|a + b| = -a - b = |a| + |b|$, logo

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

ii) **Solução apresentada por Matheus Minelle de Carvalho:** Seja a seqüência de números reais $a_{k+1} \leq a_k + 1, a_1 = 1$. Temos

$$\begin{aligned} &a_2 \leq a_1 + 1 \Longrightarrow a_2 \leq 2 \Longrightarrow a_2 + 1 \leq 3, \\ &a_3 \leq a_2 + 1 \leq 3 \Longrightarrow a_3 \leq 3 \Longrightarrow a_3 + 1 \leq 4, \\ &a_4 \leq a_3 + 1 \leq 4 \Longrightarrow a_4 \leq 4 \Longrightarrow a_4 + 1 \leq 5, \\ &\vdots \\ &a_{k+1} \leq a_k + 1 \leq k + 1 \Longrightarrow a_{k+1} \leq k + 1 \Longrightarrow a_{k+1} + 1 \leq k + 2, \\ &a_{k+2} \leq a_{k+1} + 1 \leq k + 2 \Longrightarrow a_{k+2} \leq k + 2. \end{aligned}$$

Logo, $a_k \leq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

iii) **Solução apresentada por Matheus Minelle de Carvalho:** Seja $\operatorname{sen} x \neq 0$. Temos

$$a_k = \left| \frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x} \right|.$$

I) $a_1 = 1$ implica $a_1 + 1 = 2$;

II) $a_2 = \left|\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\right| = |2\cos x| \leq 2$ implica $a_2 + 1 \leq 3$.

III) Suponhamos que $a_k \leq k$ implica $\left|\dfrac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} x}\right| \leq k$.

Logo, sendo

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \left|\frac{\operatorname{sen}(kx + x)}{\operatorname{sen} x}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} kx \cos x + \operatorname{sen} x \cos kx}{\operatorname{sen} x}\right|; \\ &= \left|\frac{\operatorname{sen}(kx)}{\operatorname{sen} x}\cos x + \cos kx\right|, \end{aligned}$$

temos $a_{k+1} \leq k + 1$.

Logo, sabendo que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{\operatorname{sen} x}\right| \leq k,\ k > 0$, temos $\dfrac{\operatorname{sen}^2(kx)}{\operatorname{sen}^2 x} \leq k^2$, implica em $sen^2(kx) \leq k^2 \operatorname{sen}^2 x$.

iv) **Solução apresentada pela Comissão:**

Observe que $\operatorname{sen}(x_k) > 0$ e portanto temos

$$1 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(k\frac{\pi}{2k}) = \operatorname{sen}(kx_k) \leq k \operatorname{sen}(x_k) = \frac{\pi}{2x_k}\operatorname{sen}(x_k).$$

Logo, $\operatorname{sen}(x_k) \geq \frac{2}{\pi}x_k$. Geometricamente a desigualdade corrobora o fato de que no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ o gráfico da função $sen(x)$ está acima do gráfico da reta (função linear) que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Deixamos ao leitor a tarefa de fazer um gráfico comprovando a afirmação.

Problema 5)

i) Mostre que a área de um um triângulo equilátero é dada por $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$, onde ℓ é o lado do triângulo.

ii) É possível construir um triângulo equilátero de área $A = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ e contido na região delimitada por um círculo de raio 1? Justifique.

iii) É possível construir um triângulo equilátero com área de $A = 2\sqrt{3} - 3$ e contido na região delimitada por um quadrado de lado 1? Justifique.

iv) É possível construir uma curva poligonal fechada formada de 4 segmentos retilíneos justapostos com comprimentos $\ell_i > 0$, contida na região delimitada por um círculo de raio 1, e que possua comprimento total $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4$ maior que 2π? Justifique.

Solução apresentada por Luciana M.R. Salgado:

i) Temos $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{\ell}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\ell}$, portanto, $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

$A = \frac{b \cdot h}{2}$ implica $A = \frac{\ell \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}$ e portanto $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

ii) A área do círculo é $A_C = \pi r^2$ e para $r = 1$ tem-se que $A_C = \pi$.

Assim não é possível construir um triângulo equilátero como pede o problema, pois $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2$ (área do triângulo) $> \pi$ (área do círculo).

iii) Temos

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} - 3 = \frac{8\sqrt{3} - 12}{4}$$

logo

$$\ell^2 = \frac{8\sqrt{3} - 12}{\sqrt{3}} = \frac{24 - 12\sqrt{3}}{3} = 8 - 4\sqrt{3}.$$

Portanto $\ell = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e com esta medida é possível construir um triângulo como pedido, por exemplo, construa um triângulo com um vértice coincidindo com um vértice do quadrado e simétrico em relação a diagonal do quadrado contendo este vértice.

iv) $L = 2\pi r$. Sim, se um deles passar pelo diâmetro e os outros 3 muito rentes ao primeiro, a soma excederá o comprimento do círculo de raio $r = 1$, que é $C = 2\pi$.

Problema 6) Observe, por exemplo, que $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\cdots = 0{,}\overline{142857}$. Esta fração tem dízima periódica sendo o período formado por 6 algarismos. Se considerarmos $N_1 = 142$ e $N_2 = 857$ temos $\frac{1}{7} = 0{,}N_1N_2N_1N_2\cdots = 0{,}\overline{N_1N_2}$ e $N_1 + N_2 = 999$.

De uma forma geral, seja $q > 3$ primo e p tal que $1 \leq p < q$. Suponha que o período da fração $\frac{p}{q}$ seja um número formado por $2n$ algarismos, digamos, $N = a_1a_2\ldots a_{2n}$, $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, $1 \leq i \leq 2n$. Defina $N_1 = a_1a_2\ldots a_n$ e $N_2 = a_{n+1}\ldots a_{2n}$. Mostre que $N_1 + N_2 = 99\cdots 9$, com n algarismos 9.

Solução apresentada pela Comissão:

Escreva $N = 10^n \times N_1 + N_2$. Temos que

$$\frac{p}{q} = \frac{N}{10^{2n} - 1},$$

se e somente se, $(10^{2n}-1)\times p = q\times N$, isto significa que q divide $10^{2n}-1$. Como q é primo, q deve dividir 10^n-1 ou 10^n+1. Se q divide 10^n-1, existe um inteiro r positivo tal que $10^n-1 = qr$ e $q = (10^n-1)/r$. Assim

$$\frac{p}{q} = \frac{rp}{10^n-1},$$

que é uma fração com um período formado por n algarismos, o que contradiz nossa hipótese inicial. Logo, 10^n-1 e q são primos entre si.

De $(10^{2n}-1)p = qN$ temos

$$(10^n-1)(10^n+1)p = q(10^n-1)N_1 + (N_1+N_2),$$

donde segue que

$$(10^n-1) \text{ divide } q(10^n-1)N_1 + (N_1+N_2)$$

e assim

$$(10^n-1) \text{ divide } q(N_1+N_2).$$

Como 10^n-1 e q são primos entre si, (10^n-1) divide (N_1+N_2). Mas N_1 e N_2 são números de n algarismos, onde nem todos são iguais a 9, logo $N_1+N_2 < 2(10^n-1)$. Portanto,

$$N_1+N_2 = 10^n-1 = 99\cdots 9.$$

Editora da seção: Edméia Fernandes da Silva

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
edmeia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 46-63

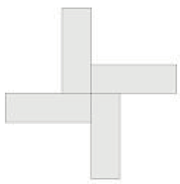
Soluções Comentadas das Provas da 2ª Fase da 1ª OBMEP - 2005

Marina Tuyako Mizukoshi

Resumo. Nesta seção apresentamos soluções formuladas por participantes goianos na 2ª Fase da 1ª OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). Em algumas questões a redação foi adaptada preservando, contudo, o argumento do estudante.

• Nível 1

Questão 1. Tia Anastácia uniu quatro retângulos de papel de $3cm$ de comprimento por $1cm$ de largura, formando a figura ao lado.



A) Qual é o perímetro da figura?

B) Qual é o menor número de retângulos de $3cm$ de comprimento por $1cm$ de largura que é necessário juntar a essa figura para se obter um quadrado? Faça um desenho ilustrando sua resposta.

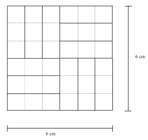
C) Qual é a área do quadrado obtido no item anterior?

Solução da Questão 1 por Jean Carlos de Aguiar/Escola Estadual Jardim Novo Mundo - Goiânia - GO.

A) Notemos que a figura possui quatro lados medindo $3cm$ cada, quatro medindo $1cm$ cada e três medindo $2cm$ cada. Como o perímetro é a soma da medida dos lados, temos que

$$\text{Perímetro} = 4\times(3cm)+4\times(1cm)+3\times(2cm) = 12cm+4cm+8cm = 24cm.$$

B) Conforme a figura serão necessários 8 (oito) retângulos de $3cm$ de comprimento por $1cm$ de largura para obtermos um quadrado.



C) Como o quadrado é uma figura que têm a altura e a largura com medidas iguais, temos que a área será obtida multiplicando-se essas duas dimensões, ou seja, área $= (6cm) \times (6cm) = 36cm^2$.

QUESTÃO 1. Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

1. Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.

2. Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4K$$

$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83K$$

A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Solução da Questão 2 por Carlos Antônio de Morais Jr./Escola Municipal Prof^{a}. Carneiro A. Dias - Goiânia - GO.

A) $45 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 4 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 8 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 16 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 1.$

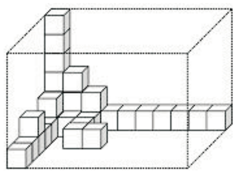
B) $345 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 34 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 3 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 6 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 12 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 1.$

C) Dado um número qualquer podemos considerar dois casos para a análise desta situação:

i) Se o número considerado for um algarismo da unidade, então devemos dobrar até obtermos um número decimal e então apagar o algarismo da unidade;

ii) Se o número considerado não for um algarismo, devemos apagar o algarismo das unidades correspondente até restar um algarismo, então, dobramos o número até obtermos um decimal e por fim devemos apagar a unidade.

Questão 3. Emília quer encher uma caixa com cubos de madeira de 5 cm de aresta.Como mostra a figura, a caixa tem a forma de um bloco retangular, e alguns cubos já foram colocados na caixa.



A) Quantos cubos Emília já colocou na caixa?

B) Calcule o comprimento, a largura e a altura da caixa.

C) Quantos cubos ainda faltam para Emília encher a caixa completamente, se ela continuar a empilhá-los conforme indicado na figura?

Solução da Questão 3 por Antônio Silva de Oliveira/ Escola Municipal Pedro Costa de Medeiros - Goiânia - GO.

A) A Emília já colocou 31 cubos. Sendo 10, 7 e 6 respectivamente em relação ao comprimento, largura e altura da caixa, mas como uma das peças que se encontra no canto é contada três vezes, teremos até aqui $10 + 7 + 6 - 2 = 21$ e mais as outras peças, 10 no total, teremos 31 peças.

B) Considerando o item A) e sabendo que cada cubo tem $5cm$ de aresta, temos:
comprimento $= 10 \times (5cm) = 50cm$;
largura $= 7 \times (5cm) = 35cm$;
altura $= 6 \times (5cm) = 30cm$.

C) Para Emília encher a caixa completamente faltam 389, porque para enchermos a caixa necessitaríamos 429 cubos e pelo item A) Emília já colocou 31 cubos.

QUESTÃO 4. A caminhonete do Tio Barnabé pode carregar até 2000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Você acha possível que o Tio Barnabé faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?

B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Solução Da Questão 4 por Mayra Soares da Silva Costa/Colégio Estadual Carlos Drumond de Andrade - Município de Novo Gama - GO.

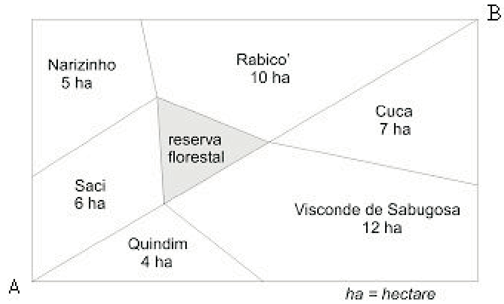
A) Não, porque 150 sacas de arroz de 60 quilos e 100 sacas de milho de 25 quilos totalizariam $11500 = 150 \times 60 + 100 \times 25$ quilos, que divididos por 5 dará $2300 = 11500 \div 5$ quilos para cada viagem e assim, tio Barnabé terá que fazer 6 viagens.

B) Se para cada viagem ele levar 25 sacas de arroz e 16 de milho, restarão 4 sacas de milho. Assim, ele deverá levar em cada uma das cinco viagens 25 sacas de arroz e 16 de milho e na 6^a viagem 25 sacas de arroz e 20 sacas de milho.

QUESTÃO 5. Dona Benta dividiu o Sítio do Picapau Amarelo entre seis personagens, mantendo uma parte do Sítio como reserva florestal. A divisão está indicada na figura, onde a área de cada personagem é dada em hectares e a área sombreada é a reserva florestal. O Sítio tem formato retangular e AB é uma diagonal.

A) Qual é a área da reserva florestal?

B) Para preparar os terrenos para o plantio, cada um dos seis personagens gastou uma quantia proporcional à área de seu terreno. O Quindim e a Cuca gastaram, juntos, R\$2.420,00. Quanto foi que o Saci gastou?



Solução Da Questão 5 por Juliany Cristine Liberato de Oliveira do Colégio Imaculada Conceição - Ceres - GO.

A) A área da reserva florestal é de 2 hectares. O resultado foi obtido da seguinte maneira:

i)somei os dados da metade do retângulo que fornece a medida de todas as áreas, $4 + 12 + 7 = 23$ hectares;

ii) somei os dados referentes a outra metade, $6+5+10 = 21$ hectares.

Como as medidas de i) e ii) deveriam ter dado o mesmo resultado, temos que a área da reserva florestal $= 23ha - 21ha = 2ha$.

B) O Saci gastou com sua área de 6 hectares o total de $R\$1320,00$. O resultado foi obtido da seguinte maneira:

i) Somar o total de hectares do Quindim e da Cuca, ou seja, $4ha + 7ha = 11ha$;

ii) Dividir o total que os dois pagaram pelo valor obtido no item i), ou seja, R$2420,00 \div 11 =$ R$220,00$;

iii) Multiplicando o valor obtido no final do item ii) pela área do Saci temos R$220,00 \times 6ha =$R$1320,00$.

Questão 6. Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

A) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?

B) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

Solução da Questão 6 por Deivid Rodrigues Mendonça/ Escola Estadual Conego Ramiro - Luziânia - GO.

A) Os números entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12 e possuem apenas dois algarismos iguais são: 282, 228, 255, 336, 363, 633, 822, 525, 552, 606, 660. Logo, 11 números satisfazem as condições pedidas.

B) Nenhum número é formado apenas por algarismos ímpares, pois a soma de dois números ímpares é par que somado com um número ímpar nos dá um número ímpar e 12 é par.

• Nível 2

Questão 1. Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

1. Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.

2. Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\textit{dobra}} 406 \xrightarrow{\textit{apaga}} 40 \xrightarrow{\textit{apaga}} 4\mathrm{K}$$

$$4197 \xrightarrow{\textit{apaga}} 419 \xrightarrow{\textit{dobra}} 838 \xrightarrow{\textit{apaga}} 83\mathrm{K}$$

A) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

B) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

C) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Solução da Questão 1 por Thiago Teixeira de Melo/Escola Municipal Profa. Marília Carneiro A. Dias - Goiânia - GO.

A) $45 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 90 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 9 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 18 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 1.$

B) $345 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 34 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 3 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 6 \stackrel{\text{dobra}}{\longrightarrow} 12 \stackrel{\text{apaga}}{\longrightarrow} 1.$

C) Dado um número qualquer podemos considerar dois casos para a análise desta situação:

i) Se o número considerado for de um único algarismo, então devemos dobrar até obtermos um número entre 10 e 19 para apagar o algarismo da unidade e chegar em 1;

ii) Se o número considerado tiver dois ou mais algarismos, devemos apagar até obtermos um número de um algarismo que será dobrado até chegarmos a um número entre 10 e 19 para podermos apagar o algarismo das unidades.

Questão 2. A caminhonete do Beremiz pode carregar até 2 000 quilos. Ele aceita um serviço para transportar uma carga de 150 sacas de arroz de 60 quilos cada e 100 sacas de milho de 25 quilos cada.

A) Você acha possível que Beremiz faça esse serviço em cinco viagens? Por quê?

B) Descreva uma maneira de fazer o serviço em seis viagens.

Solução da Questão 2 por Raquel Ramos Siqueira/CPMG Unidade Hugo de Carvalho Ramos - Goiânia - GO.

A) Sejam:

- n o peso total das sacas de açúcar;
- x o peso total das sacas de milho;
- z o peso das sacas de milho com as de açúcar;
- y total de viagens.

Temos que: $n = 150\times(60kg) = 9000kg$ e $x = 100\times(25kg) = 2500kg$.

Logo, $z = 9000kg + 2500kg = 11500kg$. Assim, como a capacidade da caminhonete é de 2000 quilos, temos

$$y = \frac{z}{2000kg} = \frac{11500kg}{2000kg} = 5,75.$$

Beremiz não conseguirá, pois se ele fosse transportar essa carga em 5 viagens, para cada viagem ele teria que transportar um peso maior que a capacidade da caminhonete.

B) Temos que:

- peso total do açúcar: $9000kg$;
- peso de uma saca de açúcar: $60kg$;
- peso total do milho: $25000kg$;
- peso de uma saca de milho: $25kg$.

Logo, pelo item A), o número de viagens para transportar açúcar é

$$\frac{9000kg}{2000kg} = 4,5$$

e o número de viagens para transportar milho é $\dfrac{2500kg}{2000kg} = 1,25$.

Temos que em cada uma das 4 viagens ele levaria $8000kg$ de açúcar, restando $1000kg$ e em 1 viagem levaria $1000kg$ de milho, restando $500kg$ para ser transportado.

Agora, se m, a e v são respectivamente, a carga de milho, açúcar e o total dos dois a ser transportado, temos: $m + a = v$, isto é, $500kg + 1000kg = v$, ou ainda, $v = 1500kg$ e o número de viagens é

$$\frac{1500}{\text{capacidade do caminhonete}} = \frac{1500kg}{2000kg} = 0,75.$$

Logo, Beremiz teria que levar 4 cargas de açúcar (total de $8000kg$), depois uma carga de milho (total de $2000kg$) e uma viagem de $1500kg$.

Questão 3. Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

A) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?

B) Quantos botões há na caixinha?

Solução da Questão 3 por Fernanda Nunes Gonzaga/Escola Municipal Prof$^{\underline{a}}$ Deushaydes Rodrigues de Oliveira - Goiânia - GO.

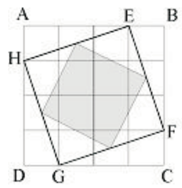
A) Observando a tabela abaixo,

Pretos		Brancos		Marrons	
pequeno e		pequeno e		pequeno e	
médio e	ou médio e ◯	médio e	ou médio e ◯	médio e	ou médio e ◯
-		grande e	ou grande e ◯	grande e	ou grande e ◯

podemos dizer que há 3 botões quadrados na caixinha.

B) Considerando o tamanho, a cor e a forma, teríamos $3 \times 3 \times 2 = 18$ botões na caixinha. Mas, como na caixa não tem botões pequenos (pretos, brancos, marrons) e redondas e nem grande na cor preta, redonda ou quadrada, temos $13 = 18 - 3 - 2$ botões.

QUESTÃO 4. O quadrado ABCD da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais.



O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado EFGH.

A) A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

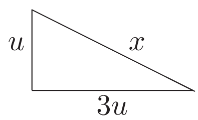
B) Se o quadrado ABCD tem 80 cm^2 de área, qual é o lado do quadrado sombreado?

Solução da Questão 4 por Diego Luis Marques Vieira/Escola Paroquial Santo Antônio - Anápolis - GO.

A) Chamando o lado de cada quadradinho de u unidades de medida, temos que o lado do quadrado $ABCD$ é igual a $4u$. Sendo l^2 a área de um quadrado, temos que a área de $ABCD$ é

$$(4u)^2 = 16u^2 \tag{1.2}$$

Olhando a figura, percebemos que o quadrado $EFGH$ forma triângulos retângulos com os lados do $ABCD$ nos pontos localizados a $\frac{1}{4}$ e a $\frac{3}{4}$ de seus vértices, assim



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$x^2 = u^2 + (3u)^2 = u^2 + 9u^2 = 10u^2 \tag{1.3}$$

Se x é o lado do quadrado $EFGH$, temos que a sua área é x^2, ou seja, $10u^2$ é a área de $EFGH$. De (1.2) e (1.3) segue que $k/100$ de $16u^2$ é igual a $10u^2$, o que é dado por $(k/100)16u^2 = 10u^2$, então $k/100 = \frac{5}{8}$, ou seja, $EFGH$ corresponde a $\frac{5}{8}$ da área de $ABCD$.

B) Se a área do do quadrado $ABCD$ é $80cm^2$, então $l = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Se a área de $EFGH$ corresponde a $\frac{5}{8}$ da área de $ABCD$, então sua área será

$$\frac{5}{8}80cm^2 = 50cm^2 \tag{1.4}$$

e se $\overline{HF} = d$ é a diagonal do quadrado, aplicando o Teorema de Pitágoras temos que a área é $\frac{d^2}{2}$.

A diagonal HF divide $EFGH$ em dois triângulos. Como o quadrado sombreado tem seus vértices nos pontos médios desses triângulos, aplicando o Teorema da Base Média ($\overline{\text{Base Média}} = \frac{\text{base correspondente}}{2}$) sendo l o lado do quadrado sombreado a **base média** e a diagonal HF a **base correspondente**. Temos então que, $l = \frac{\overline{HF}}{2}$ e como por (1.4) $l^2 = 50cm^2$, temos que $(\frac{\overline{HF}}{2})^2 = 50cm^2$, então

$$HF^2 = 100cm^2 \tag{1.5}$$

e

$$l^2 = (\frac{HF}{2})^2 = \frac{(HF)^2}{4}. \tag{1.6}$$

Substituindo (1.5) em (1.4), temos

$$l^2 = (100/4)cm^2 = 25cm^2 \ \Rightarrow \ l = 5cm^2.$$

Questão 5. Em uma festa o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser 26%.

A) Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos casais?

B) Quantos homens e quantas mulheres haviam na festa depois da chegada dos casais?

Solução da Questão 5 por Diógenes da Silva Oliveira/Colégio Estadual José de Assis - Santo Antônio do Descoberto - GO *e*

Paulo Augusto Mendonça Silva/Escola Paroquial Santo Antônio - Anápolis - GO.

A) Sejam, x a percentagem de homens na festa; e, $y = 4x$ a percentagem de mulheres na festa. Logo, $4x = y$ e $x + y = 100$, nos dá $4x + x = 100$, então $x = 20\%$ e $y = 4 \times 20 = 80\%$.

B) Temos que $5x + 10$ é a percentagem total de homens e mulheres na festa depois da chegada dos cinco casais, mas como a percentagem de homens era de 26%, segue que

$$26(5x + 10)/100 = x + 5 \;\Rightarrow\; x = 8.$$

Logo, se havia oito homens e 32 mulheres antes dos 5 casais, a festa passou a ter 13 homens e 37 mulheres.

Questão 6. A Princesa Telassim cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados $1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15$ e 18 centímetros cada um.

A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?

B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?

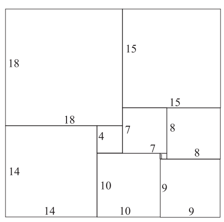
C) A Princesa Telassim precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Solução da Questão 6 por Elaine Rodrigues Rosa/Instituto Educacional Emmanuel da IEC - Goiânia - GO

A) A área da folha é igual a soma da área de todos os quadrados, ou seja, $1 + 16 + 49 + 64 + 81 + 100 + 196 + 225 + 324 = 1056cm^2$.

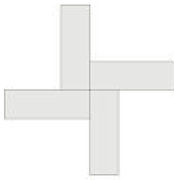
B) Como a área é o produto dos lados, ou seja, $xy = 1056 = 2^5 \times 3 \times 11$, temos que as medidas da folha, antes de ser cortada eram $32cm$ e $33cm$.

C)



• Nível 3

QUESTÃO 1. Quincas Borba uniu quatro blocos retangulares de madeira, cada um com $4cm$ de comprimento, $1cm$ de largura e $1cm$ de altura, formando o objeto mostrado na figura.



A) Qual é o volume deste objeto?
B) Quantas arestas tem este objeto?
C) Qual a área da superfície deste objeto?

Solução da Questão 1 por Tatiane Carvalho Silva/Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás - Goiânia - GO

A) Temos que:

$$V_{\text{BLOCO}} = 1 \times 1 \times 4 = 4cm^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{OBJETO}} = 4 \times 4 = 16cm^3.$$

Como cada bloco retangular possui $4cm^3$ de volume. O volume do objeto, que é formado por 4 blocos, é a soma dos volumes destes quatro blocos, isto é, $16cm^3$.

B) Cada bloco possui 12 arestas e assim o total de arestas dos 4 blocos é $4 \times 12 = 48$ arestas. Como na união dos blocos, cada bloco "perde" 3 arestas de suas extremidades, que ficam unidas, ou seja, perde $3 \times 4 = 12$ arestas. Assim, o objeto possui $48 - 12 = 36$ arestas.

C) Temos: $A_{\text{Superfície Superior}} = 4cm \times 4cm = 16cm^2$;

$$A_{\text{Superfície Inferior}} = 4cm \times 4cm = 16cm^2;$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Superfície Lateral}} &= 4cm \times 3cm + 4cm \times 4cm + 4cm \times 1cm \\ &= 12cm^2 + 16cm^2 + 4cm^2 = 32cm^2. \end{aligned}$$

Logo, $A_{\text{Superfície Objeto}} = 64cm^2$.

QUESTÃO 2. A seqüência $0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, \ldots$ é formada a partir do numero 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 mais o primeiro, o terceiro é 4 mais o segundo,o quarto é 3 mais o terceiro, o quinto é 4 mais o quarto e assim sucessivamente.

A) Escreva os 20 primeiros termos desta seqüência.

B) Qual é o termo desta seqüência?

C) Algum termo desta seqüência é igual a 2000? Por quê?

Solução da Questão 2 por Adail José de Paula Barbosa de Oliveira Veloso/Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás - Goiânia - GO

A) Basta calcular os 20 primeiros elementos

1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0
0	$0+3=3$	$3+4=7$	$7+3=10$	$10+4=14$	$14+3=17$

7^0	8^0	9^0	10^0	11^0
$17+4=21$	$21+3=24$	$24+4=28$	$28+3=31$	$31+4=35$

12^0	13^0	14^0	15^0	16^0
$35+3=38$	$38+4=42$	$42+3=45$	$45+4=49$	$49+3=52$

17^0	18^0	19^0	20^0
$52+4=56$	$56+3=59$	$59+4=63$	$63+3=66$

B) Para obtermos o 1000^0 termo devemos transformar a seqüência em uma P.A. de razão 7. Os termos desta nova seqüência corresponderiam aos termos de posição ímpar da seqüência obtida no item A), excluindo-se os pares.

1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0
0	$0+7=7$	$7+7=14$	$14+7=21$	$21+7=28$	$28+7=35$

7^0
$35+7=42$

.

Logo, pode-se obter uma fórmula que relaciona a posição dos termos da seqüência do item A) com esta nova da seguinte maneira:

$$\frac{x+1}{2} = y,$$

onde x, y são respectivamente as posições das seqüências do item A) e da nova.

Assim, para o 1001º termo: $\dfrac{1001+1}{2} = y$, então $y = 501$º . Utilizando a fórmula da Progressão aritmética, temos:

$$a_{501} = a_1 + 500r = 0 + 500 \cdot 7 = 3500.$$

Temos que 3500 é o 1001º , para obtermos o 1000º , basta subtrair 4, e $3500 - 4 = 3496$.

C) Para que 2000 pertença à seqüência, ele deve ser múltiplo de 7 ou de $7x + 3$. Como $2000 = 7 \cdot 285 + 5$, ele não é múltiplo de 7, pois não é divisível por 7 de forma que o quociente seja um número natural e $2000 = 7x+3$, implica que $x = 285,28$, o qual também não é um número natural.

Portanto, 2000 não pertence à seqüência.

QUESTÃO 3. Numa certa cidade existem apenas duas empresas de táxi, a Dona Leopoldina e a Dom Pedro II. A empresa Dona Leopoldina cobra uma taxa fixa de R$3,00 reais mais R$0,50 por quilômetro rodado. Já Dom Pedro II cobra uma taxa fixa de R$1,00 mais R$0,75 por quilômetro rodado.

Os amigos Bento, Sofia e Helena trabalham nesta cidade e sempre voltam de táxi do trabalho para casa. Para pagar menos, Helena sempre usa os taxis da Dona Leopoldina e, pelo mesmo motivo, Bento só usa os da Dom Pedro II. Sofia usa os taxis das duas empresas, porque paga o mesmo preço em ambas.

A) Quanto Sofia paga para ir de táxi do trabalho para casa?

B) Qual dos três amigos percorre, de táxi, a menor distância entre seu trabalho e sua casa?

Solução da Questão 3 por Rafael Ferreira Peixoto/ CEPAE (Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação)/ UFG - Goiânia - GO

A) Representemos por r o km rodado. A fórmula da tarifa de Dona Leopoldina é $3+0,5r$ e a fórmula da tarifa de Dom Pedro II é $1+0,75r$.

Como Sofia paga o mesmo preço em ambas,

$$3 + 0,5r = 1 + 0,75r \;\Rightarrow\; r = 8km \text{ rodados.}$$

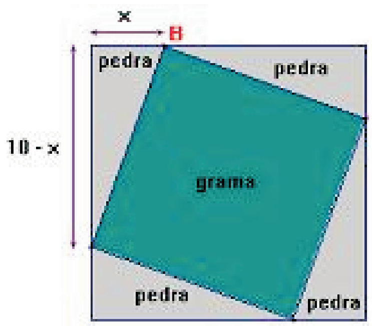
Logo, ela paga $3 + 0,5 \cdot 8 = 7$ reais.

B) Quem anda menos que $8km$ compensa ir pelo táxi Dom Pedro II e quem anda mais do que $8km$ compensa ir pelo táxi Dona Leopoldina. Logo, Bento anda menos que $8km$, andando menos que Sofia ($8km$) e anda menos ainda que Helena que anda mais de $8km$.

Isso tudo se deve pela diferença da taxa de R\$$2,00$ e a diferença de R\$$0,25$ por km rodado, $\frac{2}{0{,}25} = 8$.

Se $r > 8$, temos $3 + 0,5r < 1 + 0,75r$;
Se $r < 8$, temos $3 + 0,5r > 1 + 0,75r$;
Se $r = 8$, temos $3 + 0,5r = 1 + 0,75r$.

Questão 4. Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10m de lado, que terá canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura.



O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento deste segmento AB está indicado por x na figura.

A) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.

B) Escreva a expressão sa área do canteiro de grama em função de x.

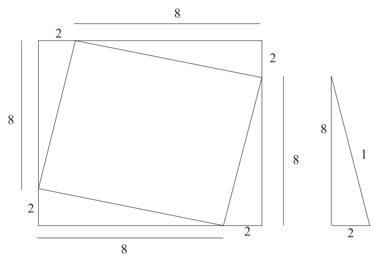
Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$$4,00$ por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$$3,00$ por metro quadrado. Use esta informação para responder os dois ítens a seguir:

C) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cincos canteiros?

D) Se o prefeito tem apenas $R\$358,00$ para gastar com os cincos canteiros, qual é a a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

Solução da Questão 4 por Karen Terossi/Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás - Jataí - GO

A) Considere a figura para $x = 2$



Pelo Teorema de Pitágoras,

$$l^2 = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68 \Rightarrow l = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}m.$$

Logo, $A_{\text{grama}} = (2\sqrt{17})^2 = 68m^2$.

B) Seja l o comprimento do canteiro da grama, então

$$l^2 = x^2 + (10 - x)^2.$$

Portanto, $A_{\text{grama}} = l^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

C) Quantia $= 4(2x^2 - 20x + 100) + 3[100 - (2x^2 - 20x + 100)]$
$= 2x^2 - 20x + 400$.

Logo, valor mínimo $= -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-(20^2 - 4 \times 2 \times 400)}{4 \times 2}$
$= -\dfrac{400 - 3200}{8} = 350$ reais.

D) Pelo item C), $2x^2 - 20x + 400 = 358 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$. Como $\Delta = 100 - 84 = 16$,

$$x = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow x' = 7 \text{ ou } x'' = 3.$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras para os valores encontrados, temos

$$A_{\text{grama}} = 9 + 49 = 58m^2.$$

Questão 5.Em um jogo cada participante recebe um cartão com 4 números distintos de 1 a 20, dispostos em duas linhas e duas colunas.

Os números são sucessivamente sorteados de uma caixa que contém 20 bolas idênticas, que foram numeradas de 1 a 20. Ganha o participante que for o primeiro a ter sorteados dois números de uma linha ou dois números de uma coluna.

A) Os cartões $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \\ \hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline\end{array}$ são equivalentes, porque se um deles ganha o jogo então o outro ganha também. Descreva todos os cartões equivalentes a $\begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 2 \\ \hline 9 & 4 \\ \hline\end{array}$.

B) Qual é a probabilidade de que o cartão $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 12 & 3 \\ \hline\end{array}$ ganhe logo na segunda bola sorteada?

Solução da Questão 5 por Fredson Alves Pinho/Colégio Estadual Prof José Monteiro Lima - Padre Bernardo/GO

A) Serão equivalentes todos os cartões que possuírem os mesmos números $(2, 4, 7, 9)$ e apresentarem numa mesma diagonal o 2 e o 9, note que se 2 e 9 estão em uma mesma diagonal, então 4 e 7 também estarão. Logo,

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 7 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 9 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 7 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 7 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 9 & 4 \\ \hline 7 & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 9 & 7 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 9 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline\end{array}$$

são equivalentes à

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 2 \\ \hline 9 & 4 \\ \hline\end{array}.$$

B) O espaço amostral é de $20 \cdot 19 = 380$.
As combinações dos resultados nas quais o cartão será premiado são

$$(1, 5),\ (1, 12),\ (5, 1),\ (5, 3),\ (3, 5),\ (3, 12),\ (12, 1),\ (12, 3),$$

ou seja, 8 combinações. Logo, a probabilidade é,

$$\frac{8}{380} = \frac{2}{95},$$

isto é, 2 chances em 95.

Questão 6. Capitu cortou uma folha de papel retangular em 9 quadrados de lados $1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15$ e 18 centímetros cada um.

A) Qual era a área da folha antes de ser cortada?
B) Quais eram as medidas da folha antes de ser cortada?
C) Capitu precisa montar a folha de novo. Ajude-a mostrando, com um desenho, como fazer esta montagem.

Solução da Questão 6 por Pablo Alencar de Carvalho Marques/Colégio Estadual Antensina Santana - Anápolis/GO

A) A área inicial da folha é igual à soma das áreas dos quadrados,

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056.$$

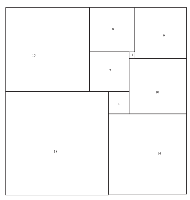
A folha tem $1056cm^2$ de área.

B) Como a medida dos lados dos quadrados são números naturais, as dimensões da folha também devem ser números naturais. Também não deve ter menos que $18cm$, pois um dos quadrados têm essa dimensão.

Assim, nos restam as opções: $22 \times 48, 24 \times 44$ e 32×33.

22×48 não é possível, pois a única possibilidade seria um dos lados do quadrado medindo 18 e 4 e teríamos $14cm$ livres ao longo desse lado e o mesmo aconteceria se medisse 24×44. Logo, a folha deverá medir $32 \times 33cm$.

C) É interessante notar que, com exceção dos quadrados de lados $1, 4$ e 7, todos os lados dos outros quadrados são iguais a soma dos lados de outros dois ou mais quadrados.



Editora da seção: Marina Tuyako Mizukoshi

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
tuyako@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 64-76

Legendre e o Postulado das Paralelas

Geraldo Ávila[1]

1.1 Introdução

Muita gente pensa que os matemáticos mais competentes sejam bastante seguros em suas atividades profissionais e não cometam erros. Isto é falso; matemáticos que se dedicam à pesquisa freqüentemente incorrem em erros, que ficam registrados em seus escritos e são mais tarde descobertos e corrigidos por eles mesmos ou por outros matemáticos, em novas publicações. Isso é muito natural pois o progresso científico não segue uma trajetória retilínea, feita apenas de avanços. Ao contrário, o caminho das descobertas é tortuoso, cheio de acertos e desacertos; e o estudo da evolução das idéias, do desenrolar dos acontecimentos que levam às descobertas, é com freqüência rico em ensinamentos.

O objetivo deste artigo é precisamente o de descrever um desses episódios, de que foi protagonista o eminente matemático francês Legendre e que encerra lições de valor pedagógico. O fato que vamos expor é uma bela tentativa de demonstração do chamado "postulado das paralelas". Por muitos anos Legendre publicou e republicou suas "demonstrações", sempre reparando erros anteriores quando, na verdade, o que ele tentava demonstrar era indemonstrável! No entanto, acompanhar o seu raciocínio em uma dessas "demonstrações" é tarefa gratificante, tanto pela argúcia de seu gênio criador como pelas sábias lições que daí podemos tirar.

[1]Este artigo foi originalmente publicado em 1992, na Revista do Professor de Matemática, SBM, nº 22.

1.2 Quem foi Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foi um ilustre matemático francês dos séculos XVIII e XIX. Embora não fosse tão rico, tinha recursos suficientes para dedicar-se ao estudo e à pesquisa sem ter de se preocupar com "ganhar a vida". Mas não deixou de ter empregos remunerados, pois ocupou vários cargos públicos, como professor, educador ou acessor científico. Fez parte, por exemplo, da comissão encarregada de propor um sistema racional de pesos e medidas, de cujo o trabalho resultou no sistema métrico como o conhecemos hoje.

Legendre produziu várias pesquisas de grande importância, em Matemática pura e aplicada. Assim é que seu nome está ligado tanto a questões de Astronomia, Mecânica e Física Matemática, como de Análise, Equações Diferenciais e Teoria dos Números. (Veja referência a ele na RPM 19, p. 21)

Além de ser um cientista de grande mérito, Legendre foi também um autêntico "professor", que se preocupava até mesmo com questões de ensino elementar. Neste domínio seu trabalho mais importante foi um livro chamado *Élements de Géometrie*, publicado no final do século XVIII e que dominaria o ensino da Geometria por cerca de 100 anos. Esse livro ficou muito popular, pois era bem (mais) acessível aos estudantes que o antigo e difícil tratado original de Euclides. Tanto assim que o livro de Legendre, além de ser usado nas escolas francesas, foi traduzido em vários outros países, inclusive no Brasil, onde foi largamente usado, alcançando mais de 25 edições! (Há edições do livro de Legendre nas bibliotecas do ICMC da USP de São Carlos, da UnB e do IMPA.)

As várias tentativas que Legendre fez para demonstrar o postulado das paralelas aparecem, de 1794 a 1833, sucessivamente nas diversas edições de seu livro, acima referido. Em 1833, ano de sua morte, vem a lume sua monografia *Réflections sur differentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle.*

1.3 Euclides e o postulado das paralelas

Existem várias formulações equivalentes do postulado das paralelas, das quais daremos primeiro uma das mais simples e freqüentemente encontrada nos livros. Embora já fosse conhecida de Proclus (410-485 d.C.) na antigüidade, tornou-se divulgada nos tempos modernos por um livro escrito pelo matemático escocês John Playfair (1748-1819), de quem leva o nome.

> **Postulado de Playfair.** Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada.

O postulado das paralelas é também conhecido como "5º postulado de Euclides", justamente por ocupar o último lugar no grupo de cinco postulados enunciados no livro Elementos de Eulclides.

Falemos um pouco dos Elementos de Euclides, escrito por volta do ano 300 a.C. Essa obra é uma coletânea de treze unidades ou capítulos, cada uma delas chamada "livro": Livro I, Livro II, Livro III, etc., até Livro XIII. Trata-se de uma das obras mais famosas na história da ciência, que reúne quase todo o que se sabia de Matemática na época em que foi escrita, não somente de Geometria, mas também de Aritmética e Álgebra, embora a apresentação destas disciplinas também seja feita numa linguagem pesadamente geométrica. E foi muito usadas nas escolas, até uns 200 anos atrás, aproximadamente.

Esse livro faz uma apresentação admiravelmente bem-feita da Geometria, tudo organizado na roupagem da lógica. Os resultados aparecem como "proposições" (nós diríamos, hoje em dia, "teoremas"), cada uma das quais demonstrada com base nas precedentes. Assim, cada proposição depende de alguma ou várias das anteriores, de sorte que, para que o processo possa ter começo, é preciso formular algumas proposições iniciais, que ficam sem demonstração. Estas são os chamados "postulados" ou "axiomas" Euclides formula cinco postulados, os quatro primeiros dos quais, traduzidos e interpretados em nossa linguagem, podem ser assim enunciados:

1. *Por dois pontos passa uma reta e somente uma.*

2. *A partir de qualquer ponto de uma dada reta é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta.*

3. *É possível descrever um círculo de centro e raio dados.*

4. *Todos os ângulos retos são iguais.* (Euclides define "ângulo reto" como sendo igual ao ângulo formado por duas retas que se cortam de maneira a formar quatro ângulos iguais.)

Finalmente, o 5º postulado é assim enunciado por Euclides:

> **Postulado de Euclides.** Se uma reta t corta duas outras r e s (todas num mesmo plano) de modo que um dos pares dos ângulos colaterais internos tem soma inferior a dois ângulos retos, então as retas r e s, quando prolongadas suficientemente, se cortam do lado de t em que se encontram os referidos ângulos colaterais internos.

Embora mais complicado que o postulado de Playfair, esse enunciado torna-se claro quando acompanhado de uma atenta observação da fig. 1.

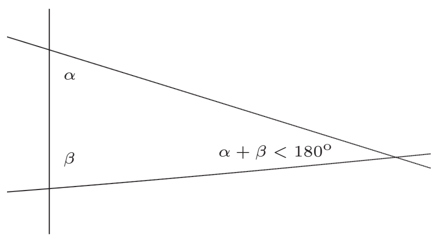


Figura 1

De agora em diante indicaremos por (P) e (E) respectivamente os enunciados de Playfair e Euclides do postulados das paralelas. Provaremos que eles são equivalentes. Para isso necessitaremos das proposições 16, 17 e 27 de Euclides. Vamos enunciá-las e demonstrá-las.

Proposição 16 (teorema do ângulo externo). Todo ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer dos dois ângulos internos não adjacentes (ao referido ângulo externo).

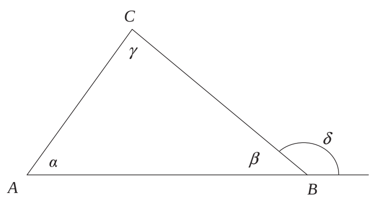


Figura 2

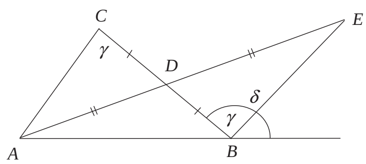


Figura 3

Isso significa, com referência à fig. 2, que $\delta > \alpha$ e $\delta > \gamma$. Observe que não podemos escrever $\delta = \alpha + \gamma$, que ainda não foi provado. Isso, aliás, é outra maneira de formular o postulado das paralelas, dada como (P3) adiante.

Demonstração. No triângulo ABC (fig. 3), seja D o meio do segmento BC. Prolonguemos AD de um comprimento $DE = AD$ (o que é possível pelo 2º postulado). Os triângulos ACD e EBD são iguais pelo caso lado-ângulo-lado (que é a proposição 4 de Euclides), o que prova em particular que o ângulo γ é igual ao ângulo EBC. Então $\delta > \gamma$, como queríamos demonstrar. Falta provar que $\delta > \alpha$. Isto se faz com o mesmo raciocínio, desta vez aplicado à igualdade dos triângulos ACD e BED (fig. 4), conseqüência da construção dos pontos D $(AD = DB)$ e E $(CD = DE)$.

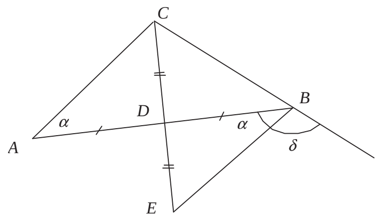


Figura 4

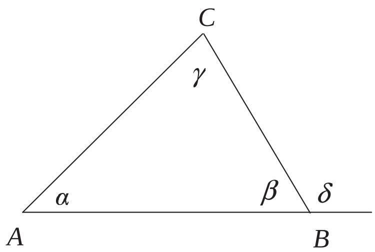


Figura 5

Proposição 17. A soma de dois ângulos de um triângulo é sempre menor que dois retos.

Demonstração. Com referência à figura 5, como pela proposição anterior $\alpha < \beta$ e como $\beta + \delta = R$ (R significará sempre "dois ângulos retos" ou "um ângulo raso"), temos que $\alpha + \beta < \delta + \beta = R$, isto é $\alpha + \beta < R$, como queríamos demonstrar.

Proposição 27. Sejam (num mesmo plano) r e s duas retas cortadas por uma transversal t. Se os ângulos alternos internos α e β são iguais (fig. 6), as retas r e s são paralelas.

Demonstração. Suponhamos que as retas r e s se encontrassem, digamos, num ponto C. Teríamos, então, um triângulo ABC, cujos ângulos γ e β somariam menos que dois retos (pela Prop. 17), isto é, $\gamma + \beta < R$. Mas $\beta = \alpha$, donde teríamos $\gamma + \alpha < R$, o que é absurdo. Somos assim levados a concluir que r e s não se encontram; logo são paralelas, como queríamos demonstrar.

É interessante observar que essa Prop. 27 garante que *por um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma paralela à reta.* Com efeito, basta construir, por P, uma reta t encontrando r em Q (fig. 7) e uma reta s fazendo com t um ângulo α tal que $\alpha + \beta = R$. Como $\alpha + \gamma = R$, vemos que $\gamma = \beta$. Então r e s não poderão se encontrar, sob pena de

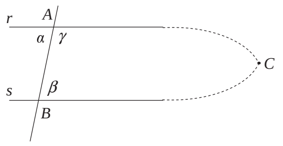


Figura 6

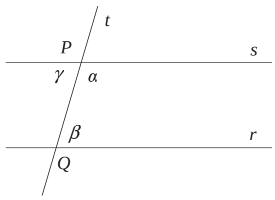


Figura 7

contradizer a Prop. 27.

Esse fato que acabamos de observar é notável. Euclides sabia que não se precisava postular a possibilidade de *traçar uma paralela a uma reta dada por um ponto fora dela;* ele sabia que isso podia ser demonstrado, como ele de fato demonstrou! Euclides só foi usar o postulado das paralelas na sua Prop. 29, onde demonstra que *duas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos iguais.* Aqui, sim, ele precisou do postulado das paralelas! A Geometria, enfim, havia atingido um alto grau de desenvolvimento e sofisticação ao tempo de Euclides.

Observe, pois, o leitor que no enunciado de Playfair não se diz que "por um ponto fora de uma reta pode-se traçar...", mas sim que "por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma...". A possibilidade de traçar uma paralela, voltamos a insistir, já está garantida pela Prop. 27.

1.4 A equivalência de (P) e (E)

Podemos agora estabelecer a equivalência de (P) e (E).

Prova de que (P) $\Rightarrow$ (E). Estamos supondo verdadeira a Prop. (P) e queremos provar a Prop. (E). Sejam r e s duas retas cortadas pela transversal t (Fig. 8), com $\alpha + \beta < R$. Queremos provar que elas se encontram num ponto P. Pelo ponto A tracemos uma reta r' tal que os ângulos alternos internos α' e γ sejam iguais, de sorte que, pela Prop. 27, r' e s são paralelas. Como $\alpha' = \gamma$, $\gamma + \beta = R$, temos que $\alpha' + \beta = R$. Daqui e de $\alpha + \beta < R$ concluímos que $\alpha < \alpha'$. Então r e r' são retas distintas pelo mesmo ponto A, e como r' é paralela a s, por (P) r não pode ser paralela a s, logo encontra s num certo ponto P, como queríamos demonstrar.

Prova de que (E) $\Rightarrow$ (P). Dada uma rata r e um ponto P fora dela,

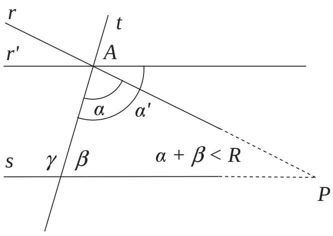


Figura 8

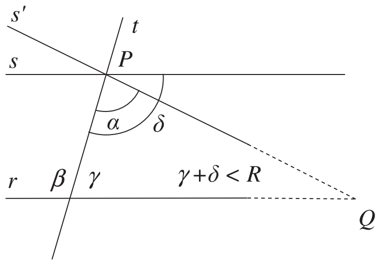


Figura 9

Queremos provar que por P não existe mais que uma paralela à reta r. Já sabemos que existe por P uma s paralela à reta r, construída como explicamos logo após a demonstração da Prop. 27 (Fig. 9), com $\alpha = \beta$, de forma que $\alpha + \gamma = R$. Qualquer outra reta por P, como s', resultará num ângulo $\delta < \alpha$, donde $\delta + \gamma < R$. Portanto, por (E), s' deve encontrar r num ponto Q. Isso prova que por P não passa mais que uma reta paralela à reta r, que é o que desejávamos provar.

1.5 A "demonstração" de Legendre

Vamos designar por (P3) outro enunciado do postulado das paralelas, equivalente a (P), que será utilizado na "demonstração" de Legendre.

Enunciado (P3). A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre R.

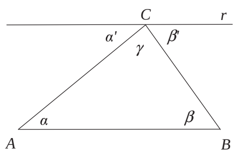


Figura 10

É fácil verificar que (P) $\Rightarrow$ (P3). De fato, dado um triângulo ABC qualquer, tracemos por seu vértice C a reta r paralela ao lado AB (Fig. 10). Dessa maneira, formamos os ângulos α' e β' iguais, respectivamente, aos ângulos α e β do triângulo ABC. Assim obtemos $\alpha + \beta + \gamma =$

$\alpha' + \beta' + \gamma = R$, como queríamos demonstrar. (Veja também págs. 32 e 33 do artigo do Prof. Elon Lima na RPM 19.)

A demonstração de que (P3) $\Rightarrow$ (P) é mais longa e não será feita aqui. (O leitor interessado poderá encontrá-la em [1], p. 103 e seguintes. Nesta referência o autor chama o postulado de Playfair de "postulado de Hilbert".) Com o próximo teorema (que enunciamos como "lema") entramos na "demonstração" de Legendre do postulado das paralelas.

Lema de Legendre. Dado um triângulo qualquer, é sempre possível construir um novo triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a soma dos ângulos internos do triângulo dado e em que um dos ângulos é menor ou igual à metade de um dado ângulo do triângulo original.

Explicação. A idéia é a seguinte: dado um triângulo ABC qualquer, desejamos provar que é possível construir um novo triângulo $A_1B_1C_1$, tal que

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma \quad \text{e} \quad \alpha_1 \leq \alpha/2.$$

Uma vez provado isso, podemos construir um segundo triângulo $A_2B_2C_2$ tal que

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \leq \alpha_1/2$$

portanto,

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha + \beta + \gamma \quad \text{e} \quad \alpha_2 \leq \alpha/2^2.$$

Continuando esse procedimento de construir triângulos sucessivamente, chegamos a um triângulo $A_nB_nC_n$ tal que

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha + \beta + \gamma \quad \text{e} \quad \alpha_n \leq \alpha/2^n. \tag{1.1}$$

Dessa maneira, podemos fazer o ângulo α_n tão pequeno quanto quisermos, tomando n bastante grande, de forma que na soma $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ o ângulo α_n conte muito pouco, a contribuição significativa desta soma estando com $\beta_n + \gamma_n$, que já sabemos ser menor que R pela Prop. 17. Essa é a idéia para se chegar à prova de que $\alpha + \beta + \gamma \leq R$.

Demonstração do Lema de Legendre. Dado um triângulo ABC qualquer, de ângulos α, β e γ (veja a fig. 11, onde $\alpha = \alpha_1 + \alpha'$), repetimos a construção feita na Fig. 2, obtendo dois triângulos iguais, ADC e EDB. Então $\alpha' = \beta_1$ e $\gamma = \delta$, de sorte que

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \alpha' + \beta + \delta = \alpha_1 + \beta_1 + \beta + \delta = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1.$$

Por outro lado, como $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha$, devemos ter $\alpha_1 \leq \alpha/2$ ou $\beta_1 \leq \alpha/2$. Se ocorrer esse último caso, é só mudar os símbolos α_1 com β_1 para terminarmos sempre com $\alpha_1 \leq \alpha/2$. Isso completa a demonstração do teorema.

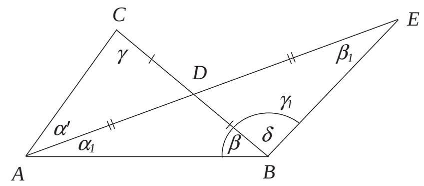


Figura 11

Teorema de Legendre. A soma dos ângulos de qualquer triângulo não supera dois ângulos retos.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, de ângulos α, β e γ. Vamos demonstrar que $\alpha + \beta + \gamma \leq R$, provando que $\alpha + \beta + \gamma < R$ nos leva a um absurdo. Suponhamos então que $\alpha + \beta + \gamma = R + \epsilon$, onde $\epsilon > 0$. Procedendo como na explicação acima, seguinte ao enunciado do Lema de Legendre, construímos um triângulo $A_nB_nC_n$, com ângulos α_n, β_n e γ_n, n de tal forma que $\alpha/2^n < \epsilon$. Daqui e de (1.1) segue-se que $\alpha_n < \epsilon$. Portanto, como também $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha + \beta + \gamma = R + \epsilon$, obtemos: $\beta_n + \gamma_n = R + \epsilon - \alpha_n > R$. Isso é absurdo em face da Prop. 17, o que completa a demonstração do teorema.

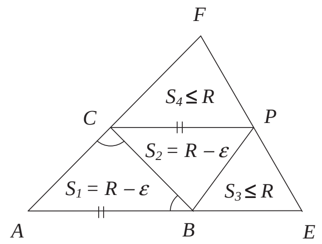


Figura 12

Finalmente estamos em condições de ver como procedeu Legendre em sua tentativa de demonstrar o postulado das paralelas. Para isso, tendo em conta o enunciado (P3), basta provar que *a soma dos ângulos de um* *triângulo qualquer é R.* É isso que Legendre procura fazer. Raciocinando por redução a um absurdo, suponhamos que ABC seja um triângulo cuja soma dos ângulos internos seja menor que R, portanto igual a $R - \epsilon$, onde $\epsilon > 0$. Pelo vértice C tracemos $CP = AB$, de forma que o ângulo ABC e o ponto P estejam do mesmo lado da reta AC que o ponto B (Fig. 12). Os triângulos ABC e PCB são iguais pelo caso lado-ângulo-lado, portanto têm a mesma soma de ângulos, $S_1 = S_2 = R - \epsilon$. Pelo ponto P tracemos uma reta que encontre as retas AB e AC em E e F respectivamente, formando os triângulos BEP e CPF. As somas dos ângulos desses triângulos são tais que $S_3 \leq R$ e $S_4 \leq R$. Então,

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq 4R - 2\epsilon. \tag{1.2}$$

Observe que a soma S do triângulo AEF é $S_1+S_2+S_3+S_4$ menos os ângulos com vértices em B, C e P. Ora, a soma dos ângulos em cada um desses vértices é R de forma que devemos subtrair $3R$ de $S_1+S_2+S_3+S_4$ para obtermos a referida soma S. Em vista de (1.2), concluímos que $S \leq R - 2\epsilon$. Isso mostra que, se existir um triângulo ABC cuja soma dos ângulos é $\leq R-\epsilon$, conseguimos construir um triângulo maior AEF, cuja soma dos ângulos é $\leq R - 2\epsilon$. Prosseguindo, poderíamos construir outro triângulo maior ainda, com soma dos ângulos $\leq R - 4\epsilon$, e assim por diante. Ora, chegaremos a construir um n-ésimo triângulo cuja a soma dos ângulos deve ser $\leq R - n\epsilon$. É claro que isso é um absurdo, pois, com n bastante grande, o número $R - n\epsilon$ fica negativo. Somos assim levados a concluir que a soma dos ângulos de qualquer triângulo não pode ser menor que R. Como já provamos também que também não pode ser maior que R, concluímos que é exatamente R.

Como o leitor vê, Legendre, com esse raciocínio, teria provado o postulado das paralelas na sua versão (P3). Ora, como já dissemos, é impossível provar esse postulado, como ficou esclarecido pelos descobridores das geometrias não euclidianas. Deve então haver um erro no raciocínio de Legendre que acabamos de apresentar. De fato, há, sim, um erro; e bastante sutil, por isso mesmo escapou à argúcia de Legendre. Como veremos logo a seguir, ele incorreu naquilo que os lógicos chamam de “tautologia” ou “círculo vicioso” e que consiste em acabar supondo verdadeiro aquilo mesmo que se deseja provar. É claro que isso é inadmissível!

Num certo estágio do raciocínio acima, referente à fig. 12, dissemos: “Pelo ponto P tracemos um reta que encontre AB e AC nos pontos E e

F respectivamente". Estamos assim admitindo a existência de tal reta EF. Vamos enunciar esse fato em destaque, como

Enunciado (P4). Por um ponto P no interior de um ângulo qualquer BAC, é sempre possível traçar uma reta que encontre os dois lados do ângulo em E e F respectivamente.

Embora Legendre não tenha percebido, esse enunciado é equivalente ao postulado das paralelas, como vamos provar. Ora, se é equivalente, não pode, como fez Legendre, ser usado em qualquer demonstração desse postulado.

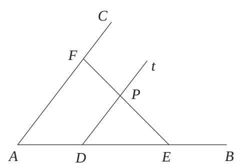


Figura 13

A demonstração de que (P4) $\Rightarrow$ (P) foi exatamente o que fizemos acima, com raciocínio referente à fig. 12. Para demonstrar que (P) $\Rightarrow$ (P4), suponhamos (P) verdadeiro. Seja BAC um ângulo qualquer e P um ponto em seu interior. Devemos provar que existe uma reta por P encontrando os dois lados do ângulo. Por P tracemos a reta t, paralela ao lado AC (Fig.13). Ela deve encontrar o lado AB, senão estaríamos tendo, pelo ponto A, duas retas, AB e AC, ambas paralelas à reta t, contradizendo (P). Seja D o ponto de encontro de t com AB. Seja E um ponto do lado AB tal que D esteja entre A e E. Provemos que a reta PE encontre o lado AC num ponto F. Do contrário, teríamos, pelo ponto P, duas retas, PE e t, ambas paralelas à mesma reta AC, novamente contrariando (P). Isso completa a demonstração de que (P4) é equivalente a (P).

1.6 Uma reflexão crítica

Episódios como esse que acabamos de descrever mostram que, embora a visualização geométrica seja um poderoso auxiliar no aprendizado da Geometria, ela pode, muitas vezes, nos levar a conclusões ou raciocínios falsos. Aliás, antes mesmo de Legendre, outros matemáticos cometeram equívocos semelhantes, um deles protagonizado por Girolamo Saccheri (1667-1733), também autor de um trabalho escrito com o objetivo de demonstrar o postulado das paralelas. Foi por causa de erros desse tipo que matemáticos começaram a perceber que estavam sendo mal guiados pela maneira como os entes geométricos – principalmente a linha reta – vinham sendo visualizados ao longo dos séculos. E acabaram descobrindo que essa visualização era apenas um modo de ser desses entes. Outros modelos deveriam existir, obedecendo aos mesmos quatro primeiros postulados de Euclides mas não o quinto. Assim nasceram as chamadas geometrias não euclidianas. Ao leitor interessado em maiores informações sobre essas geometrias aconselhamos consultar o artigo do Prof. Waldyr Lima na RPM 2 e do Prof. Manfredo do Carmo em [2].

Essas experiências de Saccheri, Legendre e outros matemáticos estimularam os estudos críticos dos fundamentos, tanto na Geometria como na Análise e em outros domínios da Matemática. No campo da Geometria, esses estudos culminaram no ano de 1899, com o aparecimento do livro de Hilbert, intitulado Fundamentos da Geometria, que foi o primeiro trabalho bem-acabado sobre a organização axiomática da Geometria.

Hilbert e outros matemáticos do século passado acabaram descobrindo que a obra de Euclides, não obstante sua admirável estrutura e organização, continha várias falhas: muitas das demonstrações estavam incompletas, por se apoiarem freqüentemente na visualização geométrica e não apenas nos postulados, como deveria ser. Mais ainda, constataram que os cinco postulados de euclides eram insuficientes, e muitos outros seriam necessários para construir o edifício da Geometria.

Do ponto de vista do ensino elementar, isso encerra uma lição importante: se matemáticos os mais eminentes levaram tanto tempo para descobrir as falhas do encadeamento lógico-dedutivo da Geometria e as "armadilhas" da intuição, como então esperar que um aluno do 2º grau tenha sensibilidade para essas sutilezas! A escola de 2º grau não é o lugar adequado para o estudos de fundamentos e axiomática, mesmo porque é impossível apreciar esses estudos e compreender a sua necessidade, sem um sólido conhecimento dos fatos geométricos e dos processos de dedução. O professor tem de se ocupar primeiro com o ensino dessas coisas, pois sem elas o aluno não poderá desenvolver o espírito crítico e ver-se em condições de perceber as falhas e lacunas em algumas demonstrações. E mesmo essa percepção só será possível com a ajuda do professor, pois seria mesmo surpreendente que alguém com tão pouca experiência pudesse descobrir falhas de um raciocínio como o de Legendre, que expusemos acima.

A axiomatização da Geometria é tarefa longa, que requer bastante tempo e não cabe no 2º grau. Importunar o aluno com sutilezas para as quais ele ainda não está preparado é um contra-senso pedagógico. O professor do 2º grau, sim, deve ser informado além daquilo que ensina, inclusive sobre fundamentos e axiomática, justamente para que possa ter senso crítico que o auxilie a decidir sensatamente sobre o que deve ensinar e como.

Referências Bibliográficas

[1] GREENBERG, M. J., Eucidean and non-euclidean geometries. New York. W. H. Freeman and CO., 1980.

[2] CARMO, M. P. do, Geometrias não-euclidianas. Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro, (6), dez. 1987.

O leitor pode ler mais sobre os Elementos de Euclides no excelente livro de Asger Aaboe, Episódios da História Antiga da Matemática, publicado pela SBM em sua coleção Fundamentos da Matemática Elementar.

Para uma visão mais completa da Geometria Dedutiva, aconselhamos o livro do Prof. João Lucas Marques Barbosa, intitulado Geometria Plana Elementar, também da coleção Fundamentos da Matemática Elementar.

Autor: Geraldo Ávila

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
gssavila@terra.com.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 77-84

Números de Fibonacci, Jacobsthal e Seqüências Binárias e Ternárias

I. M. Craveiro

Resumo. Neste trabalho damos duas novas interpretações combinatórias, uma para os números de Fibonacci e a outra para os números de Jacobsthal. A primeira interpretação combinatória é estabelecida através de uma bijeção entre uma classe das $n+1$ seqüências binárias e os ladrilhamentos possíveis de um retângulo $2 \times n$, $n \in \mathbb{N}$, com dois tipos de ladrilhos: um 2×2 azul e o outro 1×1 branco. Esses ladrilhamentos são enumerados pelo n-ésimo número de Fibonacci. A outra interpretação combinatória consiste de uma bijeção entre um conjunto formado de seqüências ternárias e os ladrilhamentos possíveis de um retângulo $3 \times n$, $n \in \mathbb{N}$, com dois tipos de ladrilhos: um 2×2 vermelho e o outro 1×1 branco. Esses ladrilhamentos são enumerados pelo n-ésimo número de Jacobshal.

1.1 Introdução

Em 1202, Fibonacci publicou o livro "Liber abbaci" (livro do ábaco), onde além de outras coisas, introduziu os números hindu-arábicos e descreveu um problema considerando a reprodução de coelhos. Os números de Fibonacci, $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, definidos por $F_1 = 1, F_2 = 2$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, aparecem em grande número de situações, uma delas é o seguinte problema de Combinatória que descrevemos abaixo.

Queremos calcular o número de ladrilhamentos possíveis para um retângulo $2 \times n$ com dois tipos de ladrilhos, um ladrilho de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor azul 2×2. Segue abaixo os dois tipos de ladrilhos:

Denotamos por L_n o número de ladrilhamentos possíveis do retângulo $2 \times n$. Temos que $L_1 = 1$, pois há apenas um ladrilhamento para o

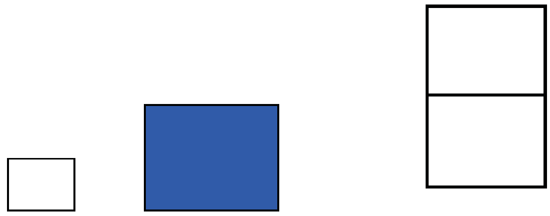


Figura 1.1: Um ladrilho de cor branca 1×1, um ladrilho de cor azul 2×2 (centro) e um ladrilhamento para um retângulo 2×1.

retângulo 2×1 com os dois tipos de ladrilhos definidos anteriormente. Veja figura 1.1.

Agora listamos os ladrilhamentos possíveis para o retângulo 2×2.

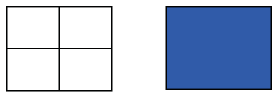


Figura 1.2: Ladrilhamentos para retângulo 2×2.

Logo, $L_2 = 2$.

O número de ladrilhamentos para o retângulo 2×3 é $L_3 = 3$.

Veja na figura 1.3 cada um desses ladrilhamentos.

Figura 1.3: Ladrilhamentos para retângulo 2×3.

Observamos que $L_4 = 5$, pois há 5 maneiras de ladrilhar o retângulo 2×4 com os dois tipos de ladrilhos já definidos. Listamos, na figura 1.4, esses ladrilhamentos.

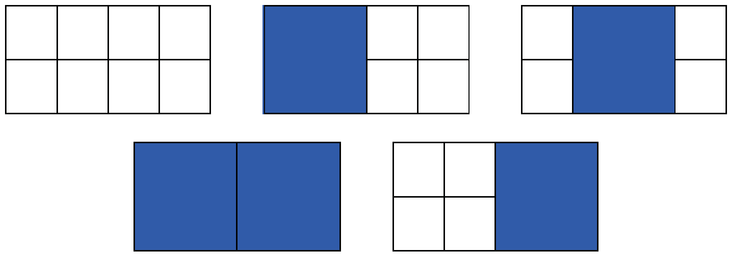


Figura 1.4: Ladrilhamentos para retângulo 2×4.

Particionamos o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ com ladrilhos de dois tipos em dois conjuntos:

• o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém na última coluna 2×1 ladrilhos de cor branca, veja a figura 1.1.

• o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém nas duas últimas colunas um ladrilho de cor azul.

Observamos que a cardinalidade do primeiro conjunto que definimos é L_{n-1}. O segundo conjunto tem cardinalidade L_{n-2}.

Portanto estabelecemos a seguinte relação de recorrência para este problema: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ com $L_1 = 1$ e $L_2 = 2$.

Observamos que esta relação de recorrência nos fornece os números de Fibonacci.

1.2 Números de Fibonacci e Seqüências Binárias

Apresentamos, a seguir, uma bijeção entre os ladrilhamentos apresentados no início deste capítulo e seqüências binárias. Dado um ladrilhamento como o da figura abaixo

• o conjunto dos ladrilhamentos $2 \times n$ que contém na última coluna 2×1 ladrilhos de cor branca.

associamos a cada ponto interno de coordenadas inteiras o valor "0" ou "1" através da seguinte regra: se todos os 4 quadrados 1×1 vizinhos do ponto são azuis associamos o valor 1 e zero caso contrário.

Para o exemplo acima a seqüência correspondente é dada por

$$(00111000100001).$$

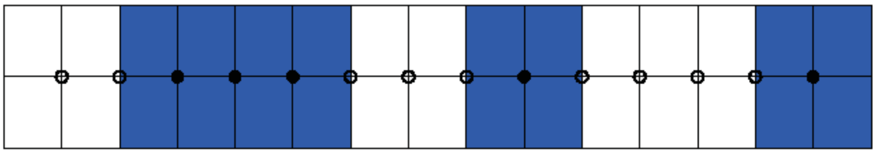


Figura 1.5: Ladrilhamento do retângulo 2×15.

É fácil verificar que não teremos, através desta bijeção, a seqüência 101 e também um número par de 1's consecutivos. Logo, pelas observações acima provamos a seguinte proposição:

Proposição 1. *O total de n-seqüências binárias, onde o padrão 101 e um número par de 1's consecutivos não ocorrem é igual a F_{n+1}.*

1.3 Interpretação Combinatória para os Números de Jacobsthal

O números de Jacobsthal

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \ldots$$

são definidos por $j_0 = 1$, $j_1 = 1$; $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$. Os números de Jacobsthal aparecem em vários problemas de Combinatória, [1], [2]. Descrevemos abaixo uma situação em que a seqüência de Jacobsthal aparece.

Queremos calcular o número de ladrilhamentos possíveis para um retângulo $3 \times n$ com dois tipos de ladrilhos, um ladrilho de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor vermelha (2×2). Segue abaixo os tipos de ladrilhos, veja figura 1.6.

Denotamos por T_n o número de ladrilhamentos para um retângulo $3 \times n$ com os dois tipos de ladrilhos descritos acima.

Definimos $T_0 = 1$. Temos que $T_1 = 1$, pois há apenas um ladrilhamento para o retângulo 3×1 com os dois tipos de ladrilhos definidos anteriormente. Veja figura 1.6.

Agora listamos os ladrilhamentos possíveis para o retângulo 3×2.

Logo $T_2 = 3$.

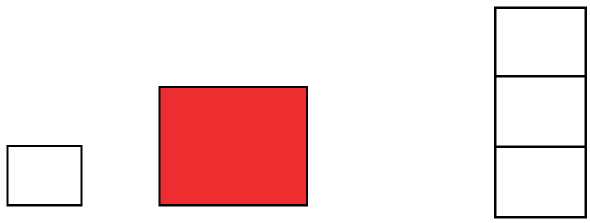


Figura 1.6: Um ladrilho de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor vermelha (2×2) e um ladrilhamento para um retângulo 3×1.

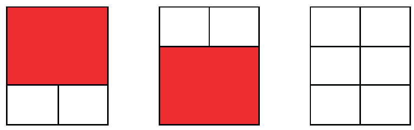


Figura 1.7: Ladrilhamentos para um retângulo 3×2.

O número de ladrilhamentos para o retângulo 3×3 com os dois tipos de ladrilhos: com um ladrilho 1×1 de cor branca e um ladrilho de cor vermelha 2×2 é $T_3 = 5$. Veja a figura 1.8 cada um desses ladrilhamentos.

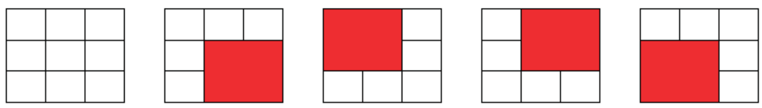


Figura 1.8: Ladrilhamentos para um retângulo 3×3.

Observamos que $T_4 = 11$, pois há 11 maneiras de ladrilhar o retângulo 3×4 com os dois tipos de ladrilhos já definidos. Listamos abaixo esses ladrilhamentos, ver a figura 1.9.

Particionamos o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ com ladrilhos de dois tipos em três conjuntos:

• o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ (com os ladrilhos de dois tipos) que contém pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×1 com ladrilhos

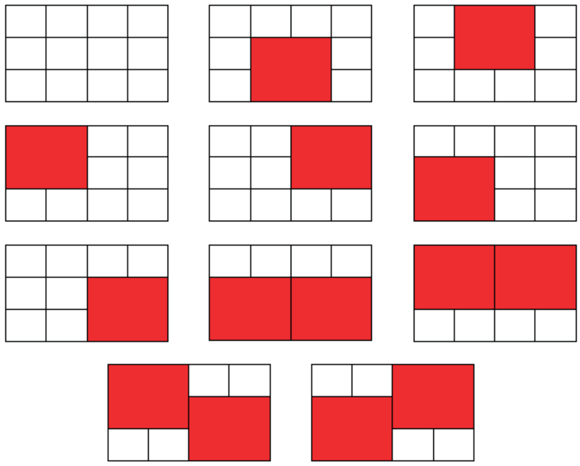


Figura 1.9: Ladrilhamentos para retângulo 3×4.

de cor branca medindo 1×1.

• o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ (com os ladrilhos de dois tipos) que contém pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com dois ladrilhos de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor vermelha 2×2, de acordo com a figura 1.10.

• o conjunto dos ladrilhamentos $3 \times n$ (com os ladrilhos de dois tipos) que contém pelo menos um ladrilhamento (à direita) 3×2 com um ladrilho de cor vermelha e dois ladrilhos de cor branca (1×1) de acordo com a figura 1.10.

Observamos que a cardinalidade do primeiro conjunto que definimos é T_{n-1}. O segundo conjunto tem cardinalidade T_{n-2} e o terceiro tem T_{n-2} elementos. Portanto estabelecemos a seguinte relação de recorrência para este problema:

$$\begin{cases} T_0 &= 1 \\ T_1 &= 2 \\ T_n &= T_{n-1} + 2T_{n-2}. \end{cases}$$

Observamos que esta relação de recorrência nos fornece os números de Jacobsthal.

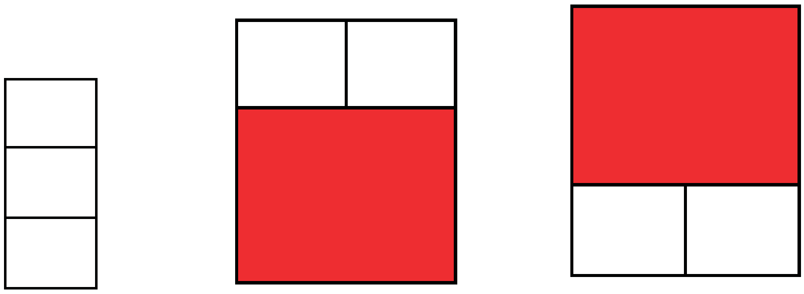
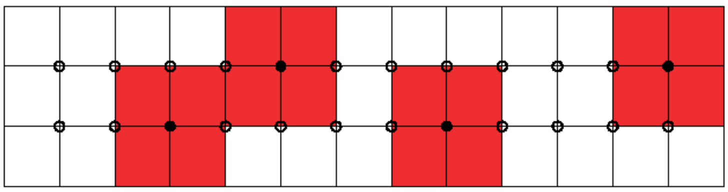


Figura 1.10: Ladrilhamentos para retângulo 3×1, Ladrilhamento 3×2 com dois ladrilhos de cor branca (1×1) e um ladrilho de cor vermelha 2×2, Ladrilhamento 3×2 com um ladrilho de cor vermelha e dois ladrilhos de cor branca (1×1).

1.4 Números de Jacobsthal e Seqüências Ternárias

Apresentamos, a seguir, uma bijeção entre os ladrilhamentos descritos no início deste capítulo e seqüências ternárias. Dado um ladrilhamento como o da figura abaixo



associamos a cada ponto interno de coordenadas inteiras o valor "0" ou "1" através da seguinte regra: se todos os quatro quadrados 1×1 vizinhos do ponto são vermelhos associamos o valor 1 e zero caso contrário.

Observamos que de acordo com esta regra estamos associando a cada ladrilhamento uma matriz $2 \times (n-1)$ de 0's e 1's. Para o exemplo acima temos a seguinte matriz associada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pode-se observar, facilmente, que não podemos ter um número par de colunas $\binom{1}{0}$ consecutivas e um número par de colunas $\binom{0}{1}$ consecutivas. Também não podemos ter estas colunas vizinhas e o vetor $\binom{1}{1}$ não ocorre. Se associamos agora, ao vetor coluna $\binom{0}{0}$ o número "0" e às colunas $\binom{1}{0}$ e $\binom{0}{1}$ os valores "1" e "2", respectivamente, teremos associado a cada ladrilhamento $3 \times n$ uma $(n-1)$-upla ternária com as restrições mencionadas acima. Desta forma provamos a seguinte proposição:

Proposição 2. *O total de n-seqüências ternárias, onde não ocorrem os padrões 21, 12 e um número par de 1's ou 2's consecutivos é igual a* j_{n+1}.

Referências Bibliográficas

[1] Sloane's Online Enc. of I. Sequences, (www.research.att.com/njas/sequences).

[2] (www.mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html).

Autora: Irene M. Craveiro

Endereço: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Departamento de Matemática
Caixa Postal 549
79070-900 - Campo Grande -MS - Brasil
irene@dmat.ufms.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 85-96

Equações Diferenças Lineares de Segunda Ordem

José Hilário da Cruz e Ronaldo Alves Garcia

Resumo. Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico e soluções periódicas para equações diferenças lineares de segunda ordem.

1.1 Preliminares

Nesta seção vamos tratar os conceitos básicos das equações diferenças lineares autônomas de segunda ordem, com coeficientes constantes, aquelas que envolvem uma única variável dependente, para os leitores interessados poderão ver em [1, 3, 5, 9] que os resultados apresentados aqui se estendem para equações de ordens superiores.

Dados $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, com $a_0 \neq 0$, a forma geral de uma equação diferença linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes é

$$a_0 x(n+2) + a_1 x(n+1) + a_2 x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

ou equivalentemente,

$$x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Uma seqüência $\{x(n)\}_{n0}^{\infty}$ ou simplesmente $x(n)$ é uma *solução* de (1.1) se satisfaz a equação.

Dados os números reais x_0 e x_1. O problema de encontrar uma solução da equação (1.1) tal que $x(0) = x_0$ e $x(1) = x_1$ é chamado de *Problema de Valor Inicial* para (1.1).

Em [2] podemos ver dois exemplos de problemas de valor inicial para (1.1), a saber, o que *gera* os *números de Fibonacci* e o que gera os *números de Jacobsthal* e interpretações combinatórias deles.

Teorema 1. *Um Problema de Valor Inicial para* (1.1) *tem uma única solução.*

Demonstração. De fato, a seqüência $x(n)$ tal que $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$ e satisfaz a equação (1.1),

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0,\\
x(1) &= x_1,\\
x(2) &= bx(1) + cx(0) = bx_1 + cx_0 := x_2,\\
x(3) &= bx(2) + cx(1) = bx_2 + cx_1 := x_3,\\
&\dots\\
x(n-2) &= bx(n-3) + cx(n-4) = bx_{n-3} + cx_{n-4} := x_{n-2},\\
x(n-1) &= bx(n-2) + cx(n-3) = bx_{n-2} + cx_{n-3} := x_{n-1},\\
x(n) &= bx(n-1) + cx(n-2) = bx_{n-1} + cx_{n-2} := x_n,\\
&\dots
\end{aligned}$$

é, naturalmente, a única solução do Problema de Valor Inicial dado. □

1.1.1 Dependência Linear

Dadas as seqüências $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$, $0 < k \in \mathbb{N}$. Dizemos que elas são *linearmente dependentes* para $n \geq n_0$ se existirem constantes reais a_1, a_2, …, a_k, não todas nulas, tais que

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_kx_k(n) = 0, \quad n \geq n_0. \tag{1.2}$$

Seja $1 \leq j \leq k$ tal que $a_j \neq 0$, então podemos multiplicar ambos os membros de (1.2) por $1/a_j$ e obter

$$\begin{aligned}
x_j(n) = -\frac{a_1}{a_j}x_1(n) - &\frac{a_2}{a_j}x_2(n) - \dots\\
&- \frac{a_{j-1}}{a_j}x_{j-1}(n) - \frac{a_{j+1}}{a_j}x_{j+1}(n) - \cdots - \frac{a_r}{a_j}x_k(n),
\end{aligned}$$

isto é,

$$x_j(n) = -\sum_{j\neq i=1}^{k} \frac{a_i}{a_j}x_i(n). \tag{1.3}$$

Isto nos diz simplesmente que cada $x_j(x)$, com coeficiente não-nulo, é uma *combinação linear* das outras $x_{j's}(n)$.

A negação da dependência linear é a *independência linear*. Isto é, dizemos que as seqüências $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ são linearmente independentes para $n \geq n_0$ se, sempre que,

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_kx_k(n) = 0,$$

para todo $n \geq n_0$, então $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Exemplo 1. *As funções $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(n) = 2^n$ e $g(n) = 3^n$ são linearmente independentes em $\mathbb{N}$. De fato, Suponha que as constantes a_1 e a_2 são tais que*

$$a_1 2^n + a_2 3^n = 0, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, para $n = 0$ temos $a_1 + a_2 = 0$ e para $n = 1$ temos $2a_1 + 3a_2 = 0$, daí temos que $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Definição 1. *O conjunto de 2 soluções linearmente independentes da equação* (1.1) *é chamado de conjunto fundamental de soluções.*

Definição 2. *Sejam $x_1(n), x_2(n)$ soluções da equação* (1.1)*, o Casoratian $C(n)$ é dado por*

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix}.$$

A seguir vamos estudar a relação entre a independência linear das soluções da (1.1) e o Casoratian. Basicamente, vamos mostrar que o conjunto de 2 soluções é um conjunto fundamental de soluções (l.i.) se o seu Casoratian não se anula.

Teorema 2. *O conjunto de soluções $\{x_1(n), x_2(n)\}$ da equação* (1.1) *é um conjunto fundamental se e somente se para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, seu Casoratian $C(n_0) \neq 0$.*

Demonstração. Sejam $x_1(n), x_2(n)$ soluções da equação (1.1). Sejam a_1, a_2 e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) = 0, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

temos também que

$$a_1x_1(n+1) + a_2x_2(n+1) = 0, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que este sistema tem uma única solução (a nula), isto é, $a_1 = 0, a_2 = 0$) se e somente se o determinante da matriz

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

for diferente de zero, mas $\det X(n) = C(n)$. $\square$

Exemplo 2. *O conjunto* $\{2^n, 3^n\}$ *é um conjunto fundamental de soluções para a equação*

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

De fato, $x_1(n) = 2^n$ é solução pois

$$\begin{aligned} x_1(n+2) - 5x_1(n+1) + 6x_1(n) &= 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n \\ &= 4 \cdot 2^n - 10 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^n = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos mostrar que $x_2(n) = 3^n$ também é solução.

Agora,

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema 2, as soluções 2^n e 3^n são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 3. *A equação* (1.1) *tem um conjunto fundamental de soluções.*

Demonstração. Pelo Teorema 1 existe uma solução $x_1(n)$, com $x_1(0) = 1$ e $x_2(1) = 0$ e uma solução $x_2(n)$, com $x_2(0) = 0$ e $x_2(1) = 1$. Logo,

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(1) & x_2(1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2 temos que $\{x_1(n), x_2(n)\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (1.1). □

Observação 1. *Existe uma infinidade de conjuntos fundamentais de soluções da equação* (1.1).

Lema 1. *Se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são duas soluções de* (1.1) *e a um número real qualquer, então*

(i) $p(n) = ax_1(n)$ *é uma solução de* (1.1).

(ii) $s(n) = x_1(n) + x_2(n)$ *é uma solução de* (1.1).

Demonstração. (i) Como $x_1(n)$ é solução de (1.1) temos que

$$x_1(n+2) + bx_1(n+1) + cx_1(n) = 0, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} p(n+2) + bp(n+1) + cp(n) &= ax_1(n+2) + b(ax_1(n+1)) + c(ax_1(n)), \\ &= a\left(x_1(n+2) + bx_1(n+1) + cx_1(n)\right) = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostramos o item (ii),

$$\begin{aligned} s(n+2) + bs(n+1) + cs(n) =& x_1(n+2) + x_2(n+2) + b(x_1(n+1) + \\ & x_2(n+1)) + c(x_1(n) + x_2(n)), \\ =& \big(x_1(n+2) + bx_1(n+1) + cx_1(n)\big) + \\ & \big(x_2(n+2) + bx_2(n+1) + cx_2(n)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4 (Princípio da Superposição). *Se $x_1(n), x_2(n)$ são soluções de* (1.1) *e a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$, então*

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n),$$

é solução de (1.1).

Demonstração. Basta combinar os ítens (i) e (ii) do Lema 1. □

Teorema 5. *Seja* $\{x_1(n), x_2(n)\}$ *um conjunto fundamental de soluções de* (1.1) *e* $x(n)$ *uma solução qualquer de* (1.1), *então existem constantes* a_1, a_2 *tais que* $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$.

Demonstração. Sejam $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$,

$$s(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

de (1.4), podemos escrever $X(n)\xi = s(n)$. Como $X(n)$ é invertível, temos que

$$\xi = X^{-1}(n)s(n).$$

Assim, basta fazer $n = n_0$ e $a_1 = \xi_1$ e $a_2 = \xi_2$. □

Definição 3. *Se* $\{x_1(n), x_2(n)\}$ *é um conjunto fundamental de soluções de* (1.1), *então a solução geral da equação* (1.1) *é dada por*

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n),$$

para constantes a_1, a_2 *quaisquer.*

1.2 Comportamento Assintótico das Soluções

O resultado a seguir já é bem conhecido, veja por exemplo [3, 4], só mudamos um pouco a forma de apresentar e demonstrar.

Uma progressão geométrica $x(n) = r^n$ para qualquer $r \in \mathbb{R}^*$ é solução da equação (1.1) se, e somente se,

$$r^2 + br + c = 0. \tag{1.5}$$

De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) &= r^{n+2} + br^{n+1} + cr^n \\ &= r^n(r^2 + br + c). \end{aligned}$$

Os ítens a, b da proposição a seguir podem ser encontrados em [8] e c em [7].

Proposição 3. *a) Se* $r_1 \neq r_2$ *são raízes reais distintas de* (1.5)*, então a solução geral de* (1.1) *é*

$$x(n) = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Se $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$*, então a solução geral da* (1.1) *é*

$$x(n) = a_1 r^n + a_2 n r^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

c) Se r_1 *e* $r_2 = \overline{r}_1 \in \mathbb{C}$*, então a solução geral da* (1.1)

$$x(n) = r^n(a_1 \cos(\theta n) + a_2 \operatorname{sen}(\theta n)), \quad n \in \mathbb{N}, \ \textit{onde } r = |r_1| \textit{ e } \theta = arg(r_1).$$

Demonstração. a), b) Deixamos como exercício. Para mostrar o item c), seja $r = |r_1|$, $\theta = \arg(r_1)$ e $i^2 = -1$, temos que

$$\phi(n) = re^{in\theta} \quad \text{e} \quad \psi(n) = re^{-in\theta}$$

satisfazem a equação (1.1). Pela linearidade da equação (1.1) as seqüências dadas por

$$\alpha(n) = \frac{1}{2}(\phi(n) + \psi(n)) \quad \text{e} \quad \beta(n) = \frac{1}{2i}(\phi(n) - \psi(n))$$

são soluções (l.i.) de (1.1). Logo, a solução geral de (1.1) é dada por

$$x(n) = r^n(a_1 \cos(\theta n) + a_2 \operatorname{sen}(\theta n)). \tag{1.6}$$

Assim, as soluções da equação (1.1) tendem a zero se, e somente se, os módulos das raízes da equação característica forem menores do que 1.

Proposição 4. *O módulo das raízes da equação* (1.5) *é menor do que 1 se, e somente se,*

$$1 - b + c > 0, \quad 1 + b + c > 0 \quad e \quad b < 1.$$

Para demonstrar a Proposição 4, mostraremos primeiro dois lemas.

Lema 2. *Sejam* r_1, r_2 *as raízes da equação* (1.5)*, com* $b^2 - 4c \geq 0$*. Afirmamos que:*

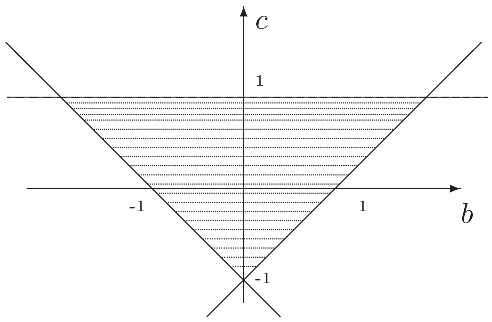


Figura 1.1: A região onde o módulo das raízes é menor do que 1.

(i) As raízes r_1 *e* r_2 *são negativas se, e somente se,* $b > 0, c > 0$.

(ii) As raízes r_1 *e* r_2 *são positivas se, e somente se,* $b < 0, c > 0$.

(iii) Uma raiz é positiva e a outra é negativa se, e somente se, $c < 0$.

Demonstração. Definimos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x^2 + bx + c,$$

que pode ser escrita na forma

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

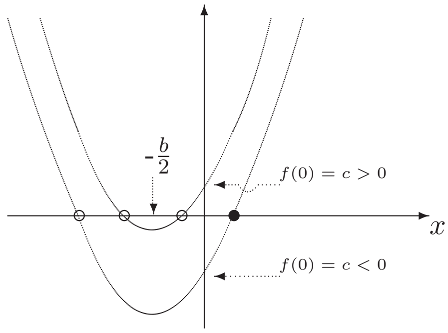
Como $b^2 - 4c \geq 0$, temos que em $x = -b/2$ a função f assume o seu menor valor, isto é, $f(x) \geq f(-b/2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, veja a figura 1.2. Temos os seguintes casos a considerar:

a) Se $b > 0$ e

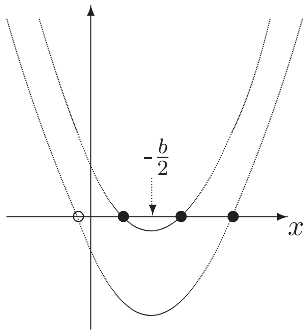
$$\begin{cases} f(0) = c \geq 0, & \text{então as duas raízes são não positivas.} \\ f(0) = c < 0, & \text{então uma raiz é negativa e a outra positiva.} \end{cases}$$

b) Se $b < 0$ e

$$\begin{cases} f(0) = c \geq 0, & \text{então as duas raízes não negativas.} \\ f(0) = c < 0, & \text{então uma raiz negativa e a outra é positiva.} \end{cases}$$



(a)



(b)

Figura 1.2: (a) mostra o caso $b > 0$ e (b) o caso $b < 0$.

Lema 3. *As raízes reais da equação* (1.5) *pertencem ao intervalo* $[-1, 1]$ *se, e somente se,*

$$b^2 - 4c \geq 0, \quad 1 + b + c > 0 \quad e \quad 1 - b + c > 0.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $b^2 - 4c \geq 0$, isto é, que as raízes de da equação (1.5) são reais. E observamos que:

a) $x^2 + bx + c = (x - 1)^2 + (b + 2)(x - 1) + (1 + b + c)$. Fazendo $y = x - 1$ temos, pelo Lema 2, que as raízes da equação

$$y^2 + (b + 2)y + (1 + b + c) = 0$$

são negativas, se e somente se,

$$b + 2 > 0 \qquad \text{e} \qquad 1 + b + c > 0.$$

b) $x^2 + bx + c = (x + 1)^2 + (b - 2)(x + 1) + (1 - b + c)$. Fazendo $w = x + 1$ temos, pelo Lema 2, que as raízes da equação

$$w^2 + (b - 2)w + (1 - b + c) = 0$$

são positivas, se e somente se,

$$b - 2 < 0 \qquad \text{e} \qquad 1 - b + c > 0.$$

Agora, vamos supor que $b^2 - 4c < 0$, isto é, as raízes são complexas

$$z = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i,$$

temos que $|z| = |c|$. Daí, neste caso, $|z| < 1$ se, e somente se, $|c| < 1$. $\square$

1.3 Soluções Periódicas

Uma seqüência $x(n)$ é periódica com período $\omega \in \mathbb{R}_+$ se $x(n+\omega) = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que se $x(n)$ uma seqüência é periódica de período 1, isto é, $x(n+1) = x(n)$ temos que $x(n+2) = x(n+1) = x(n)$. Assim, a equação (1.1) se reduz a

$$x(n+2)+bx(n+1)+cx(n) = x(n)+bx(n)+cx(n) = (1+b+c)x(n) = 0.$$

Portanto, se $1 + b + c = 0$ temos que toda seqüência de período 1 é solução da equação (1.1).

Agora, se uma seqüência periódica de período 2, $x(n + 2) = x(n)$, com por exemplo $x(n+1) = \mu x(n)$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$, implica $\mu = \pm 1$, logo $\mu = -1$, temos

$$x(n+2)+bx(n+1)+cx(n) = x(n)-bx(n)+cx(n) = (1-b+c)x(n) = 0,$$

se $x(n + 1) \neq x(n)$, dizemos que $x(n)$ é periódica de *período mínimo* 2 da (1.1). Portanto, se $1-b+c = 0$ temos que toda seqüência de período 2, com $x(n + 1) = -x(n)$ é solução da equação (1.1).

Proposição 5. *Se $b^2 - 4c < 0$, o módulo das raízes de* (1.5) *forem iguais a 1, então $c = 1$ e $b = -2\cos\theta$, onde θ o argumento das raízes. Além disso, se $\theta/2\pi$ for racional então todas as soluções de* (1.1) *são periódicas. Caso contrário, isto é, se $\theta/2\pi$ for irracional, então o conjunto $\{x(n)\}$ é denso em $[-A, A], A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.*

Demonstração. A primeira parte da proposição é imediata, pois suponha que as raízes de (1.5) tem módulo 1, isto é, $r_1 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ e $r_2 = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$, para algum $\theta \in [0, 2\pi)$, temos que $c = r_1 r_2 = 1$ e $b = -(r_1 + r_2) = -2\cos\theta$. Agora, sejam k e p inteiros tais que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{k}{p}$, isto é, $\theta = \frac{2k\pi}{p}$ e, de (1.6), temos

$$\begin{aligned} x(n+p) &= a_1 \cos\big(\frac{2k\pi}{p}(n+p)\big) + a_2 \,\mathrm{sen}\,\big(\frac{2k\pi}{p}(n+p)\big), \\ &= a_1 \cos\big(\frac{2k\pi}{p}n + 2k\pi\big) + a_2 \,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{p}n + 2k\pi\big), \\ &= a_1 \cos\big(\frac{2k\pi}{p}n\big) + a_2 \,\mathrm{sen}\,\big(\frac{2k\pi}{p}n\big), \\ &= x(n). \end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que $\theta/2\pi = \lambda$ seja irracional. Sejam $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\varphi = 2\lambda\pi$ e $\nu \in (0,1]$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} x(n) &= A\cos(\theta n - \varphi) = A\cos(2\lambda\pi n - 2\lambda\pi) = A\cos(2(n\lambda - \nu)\pi), \\ &= A\cos\big(2(n\lambda - [n\lambda] - \nu)\pi\big) = A\cos\big(2(\xi_n - \nu)\pi\big) \end{aligned}$$

onde, pelo Teorema 6 o conjunto dos pontos $\xi(n) = n\lambda - [n\lambda]$ é denso em $(0,1)$ e $\mu \in (0,1)$, fixado. Temos que o conjunto de pontos $2(\xi(n) - \nu)\pi$ é denso no intervalo $(-2\nu\pi, 2 - 2\nu\pi]$, de comprimento 2π. Logo, $x(n) = A\cos(\xi(n) - \nu)\pi)$ é denso em $[-A, A]$. $\square$

Apêndice

Um subconjunto X de $Y \subset \mathbb{R}$ é denso em Y se, e somente se, todo intervalo aberto de Y contém algum elemento de X. (Exige-se intervalo aberto para excluir o caso de um intervalo fechado degenerado $[a,a] = \{a\}$).

Notação $\lceil x \rceil$ representa a parte inteira de x.

Teorema 6 (Kronecker, Theorem 439, p. 364, [6]). *Se λ é irracional, então o conjunto dos $x_n = n\lambda - \lceil n\lambda \rceil$, $n = 1, 2, \ldots$, é denso no intervalo* $(0,1)$.

Referências Bibliográficas

[1] CAMINHA, A., *Seqüências Recorrêntes Lineares*, Revista da Olimpíada, nº4, p. 72-78, CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2003. (www.ime.ufg.br).

[2] Craveiro, I. M., *Números de Fibonacci, Jacobsthal e seqüências Binárias e Ternárias*, Revista da Olimpíada, nº6, 77-84, CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2006. (www.ime.ufg.br).

[3] Elaydi, S. N., *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag New York, 1996.

[4] Goldberg, S. , *Introduccion a Las Ecuaciones en Diferencias Finitas*, Editorial Pueblo y Educación, Cuba, 1973.

[5] Gusmão, G. P. A., *Seqüências de Fibonacci*, Revista da Olimpíada, nº3, pp. 47-73, CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2000. (www.ime.ufg.br).

[6] Hard and Wright, *The Theory of Numbers*, Oxford, 1938.

[7] Lima, E. L., *Álgebra Linear*. CMU/IMPA, 1999.

[8] Lima, E. L., Carvalho, P.C.P, Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio*. CPM/SBM, 2000.

[9] Moreira, C. G. Seqüências recorrentes: aspectos analíticos e aritméticos, II Bienal de Matemática, (2004) (www.bienasbm.ufba.br).

[10] Pollman, H. S. *Equações de Recorrência*, Eureka, n.9, 2000, pp.33-40, (www.obm.org.br/eureka).

Autores: José Hilário da Cruz e Ronaldo Alves Garcia

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
jhilario@mat.ufg.br, ragarcia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 6, 2005, 97-108

Problemas de Valor Inicial e de Contorno para Equações Diferenças

José Hilário da Cruz e Ronaldo Alves Garcia

Resumo. Neste trabalho consideramos problemas de valor inicial e de contorno para equações diferenças lineares e apresentamos aplicações em várias situações geométricas.

1.1 Introdução

Neste artigo de divulgação pretendemos mostrar propriedades básicas e interessantes de equações diferenças lineares e fazer aplicações a problemas geométricos.

Para a leitura pressupomos que o leitor tenha apenas conhecimentos básicos sobre a resolução de sistemas lineares, embora para apreciar os resultados um conhecimento mais aprofundado de Álgebra Linear seja desejável, [7].

Na seção 1.2 iremos tratar do problema de contorno para equações lineares de ordem 2. A extensão para equações diferenças lineares de ordem k é semelhante mas um pouco mais trabalhoso de ser tratado.

Na seção 1.3 aplicamos equações diferenças no cálculo de determinantes especiais.

Na seção 1.4 tratamos de propriedades de comutatividade de funções e apresentamos os polinômios de Chebyshev; estes polinômios especiais são de grande importância em vários ramos da matemática.

Na seção 1.5 exploramos uma equação diferença relacionada a distribuição aleatória de pontos em círculos e esferas.

1.2 Problemas de Contorno

A forma geral de uma equação diferença linear de ordem k homogênea com coeficientes constantes é

$$a_{n+k}x(n+k) + \cdots + a_{n+1}x(n+1) + a_n x(n) = 0, \quad a_{n+k} \neq 0.$$

ou, equivalentemente,

$$P_k: \qquad x_{n+k} = b_{n+k-1}x_{n+k-1} + \cdots + b_n x_n, \quad b_i \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Dados os números reais $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. O problema de encontrar uma solução da equação (1.1) tal que

$$x(0) = x_0, x(1) = x_1, \ldots, x(k-1) = x_{k-1}$$

é chamado de *problema de valor inicial.*

Teorema 1. *O problema de valor inicial para a equação* (1.1) *de ordem k tem uma única solução.*

Demonstração. Análoga à demonstração dada para as equações diferenças de segunda ordem. Veja, por exemplo [2] e referências contidas nele. □

Dados os números reais x_0 e x_N, $N \geq k$. O problema de encontrar uma solução da equação (1.1) tal que $x(0) = x_0$ e $x(N) = x_N$ é chamado de *problema de contorno* para a equação (1.1).

Teorema 2. *Seja N um inteiro positivo. Considere o problema de contorno,*

$$P_2: \qquad x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \;\; ab \neq 0, \;\; x_0 \;\; e \;\; x_N, \; dados. \tag{1.2}$$

Então para quase todo par (a, b) o problema de contorno (1.2) tem uma única solução.

Demonstração. Para $N = 1$ o resultado segue diretamente do Teorema 1. Para $N = 2$ dados x_0 e x_2 encontramos, para $a \neq 0$, $x_1 = (x_2 - bx_0)/a$. Portanto conhecidos x_0 e x_1 recaímos no problema de valor inicial e, pelo Teorema 1, a solução é única. Quando $a = 0$ o problema só tem solução (não única) quando $x_2 = bx_0$. Assim a expressão "para quase todo par (a, b)" no enunciado do teorema significa que dados x_0 e x_2

temos unicidade de solução se $a \neq 0$. Para $N = 3$, devemos resolver o sistema linear (variáveis x_1 e x_2):

$$-x_2 + ax_1 = -bx_0, \quad ax_2 + bx_1 = x_3.$$

O sistema acima tem solução única se, e somente se, $a^2 + b \neq 0$ e é dada por:

$$x_2 = \frac{ax_3 + b^2 x_0}{a^2 + b}, \quad x_1 = \frac{x_3 - abx_0}{a^2 + b}.$$

Neste caso, o problema de contorno (1.2) tem solução única para todo par (a, b) com $a^2 + b \neq 0$.

Em geral, para qualquer N inteiro positivo, resolver o problema de contorno (1.2) é equivalente a resolver um sistema linear de ordem $N-1$ ($A_{N-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) e cuja representação matricial é:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bx_0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ x_N \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

O determinante da matriz A_{N-1}, o qual denotaremos por f_{N-1}, satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n, \ \ f_0 = 1, \ \ f_1 = a, \ \ f_2 = a^2 + b. \tag{1.4}$$

Para obter o resultado fazemos o desenvolvimento do determinante em relação a primeira linha e usamos as propriedades do determinante. Observamos que o determinante da matriz A_k é calculado usando a mesma equação de recorrência do problema (1.4).

Explicitamente, $f_{N-1} = f_{N-1}(a, b)$ é um polinômio de grau $N - 1$ nas variáveis a e b. Se $f_{N-1} \neq 0$ o problema de valor inicial (1.4) tem uma única solução. Como soluções de equações algébricas são curvas no plano (a, b) temos que para quase todo par (a, b) o problema de contorno (1.2) tem solução única. $\square$

Observação 2. *Quando o determinante da matriz A_{N-1} definida pela equação* (1.3) *for zero devemos discutir o sistema linear correspondente* *para determinar a existência de soluções para o problema de contorno* (1.2). *Deixamos a cargo do leitor curioso a discussão completa deste caso.*

Corolário 1. *Dados $a \neq 0$ e $b > 0$ o problema de valor inicial (1.4) tem uma única solução.*

Demonstração. Se $a > 0$ e $b > 0$ temos $f_1 = a > 0$ e $f_2 = a^2 + b > 0$. Logo, $f_n > 0$ para todo $n \geq 3$. Quando $a < 0$ observamos que $f_3 = a(f_2 + b) < 0$, $f_4 = f_2^2 + ba^2 > 0$, $f_5 = a(f_2^2 + b^2 + bf_2 + ba^2) < 0$. Por indução segue que $f_{2n} > 0$ e $f_{2n+1} < 0$. $\square$

1.3 Aplicações a Problemas de Cálculos de Determinantes

Na próxima proposição iremos aplicar equações diferenças para fazer cálculos de determinantes especiais.

Proposição 6. *Seja a seqüência de funções f_n definida pelo determinante de ordem n,*

$$f_n(x) = det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & x \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Então f_n é um polinômio de grau n, que possui n raízes reais simples contidas no intervalo $(-2, 2)$ e tem a seguinte representação em termos de funções não polinomiais:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}} \left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \right)^n - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} \right)^n \right], & |x| > 2, \\ (1+n)(-1)^n, & x = -2, \\ 1+n, & x = 2, \\ \cos\left(n \arccos(\frac{x}{2})\right) + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \operatorname{sen}\left(n \arccos(\frac{x}{2})\right), & |x| < 2. \end{cases}$$

Demonstração. Desenvolvendo o determinante em relação a primeira linha obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \ \ f_1(x) = x, \ \ f_2(x) = x^2 - 1.$$

Para resolver o problema acima, consideramos que $f_n = \lambda^n$ satisfaz a equação diferença linear dada e obtemos o polinômio $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

Assim, se $|x| > 2$ temos λ_1, λ_2 reais e distintas, logo existem a e b tais que $f_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ satisfaz o problema de valor inicial. Usando as condições iniciais ($f_1(x) = x, \ \ f_2(x) = x^2 - 1$) obtemos a seguinte representação de f_n em termos de funções reais não polinomiais envolvendo raízes quadradas.

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \left[\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^n \right], \quad n \geq 1.$$

Se $|x| = 2$ temos dois casos a considerar:

i) $x = 2$ e $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e assim, $f_n = a\lambda^n + bn\lambda^n$. Logo, $f_n = 1 + n$.

ii) $x = -2$ e $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ assim, $f_n = (1 + n)(-1)^n$.

Agora, se $|x| < 2$ temos λ_1 e $\overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$ e $f_n = r^n \left(a\cos(n\theta) + b\,\mathrm{sen}(n\theta) \right)$. Além disso, como $\lambda_1\lambda_2 = 1$ temos que $r = |\lambda_1| = 1$ e $\theta = \arg(\lambda_1) = \arccos(\frac{x}{2}) \in (0, \pi)$. Assim,

$$f_n = a\cos\left(n \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + b\,\mathrm{sen}\left(n \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

e das condições iniciais $f_1 = x$ e $f_2 = x^2 - 1$ temos $a = 1$ e $b = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

As raízes de $f_n(x) = 0$ pertencem ao intervalo $(-2, 2)$ e são dadas explicitamente por $x_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}), \ k = 1, \ldots, n$. Para chegar a esta conclusão observamos que $|f_n(x)| > 0$ se $|x| \geq 2$ e para $|x| < 2$ a equação $f_n(x) = 0$ é equivalente a $\mathrm{sen}(n + 1)\theta = 0, \ \theta = \arccos(\frac{x}{2})$. □

Exercício 1. *Verifique que o problema de valor inicial*

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - x^2 p_{n-1}(x), \ \ p_1(x) = x, \ \ p_2(x) = 0. \tag{1.5}$$

define a seqüência de funções p_n definida pelo determinante de ordem n,

$$p_n(x) = det \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & x & x \end{pmatrix}_{n\times n}$$

que tem a seguinte representação em termos de funções polinomiais:

$$p_n(x) = x^n \left(\cos(n\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{3}) \right).$$

Exercício 2. *Resolva o problema de valor inicial*

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) + p_{n-1}(x), \;\; p_1(x) = 1, \;\; p_2(x) = x. \tag{1.6}$$

1.4 Polinômios de Chebyshev

Inicialmente observamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo par de inteiros positivos m, n temos definidas as potências x^n e x^m satisfazendo:

$$(x^m)^n = (x^n)^m = x^{mn}. \tag{1.7}$$

É de interesse saber se esta *curiosidade* é satisfeita somente pelos polinômios $p_k(x) = x^k$. Em outras palavras queremos resolver a equação

$$p_m(p_n(x)) = p_m(p_n(x)) = p_{mn}(x) \tag{1.8}$$

para uma família de polinômios $p_k(x)$ de grau $k \in \mathbb{N}$.

É claro que a primeira idéia seria resolver formalmente este sistema de equações lineares de ordem infinita.

Se definirmos $p_0(x) = 1, \; p_1(x) = x$, os polinômios de grau 2 que cumprem a equação (1.8) para $0 \leq m, n \leq 2$ são da forma $p_2(x) = ax^2 + bx + (1 - a - b)$. De fato, seja $p_2(x) = ax^2 + bx + c$. Da condição $p_2(p_0(x)) = p_0(p_2(x)) = 1$ obtemos que $a + b + c = 1$.

Em particular, para $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x$, definimos a seqüência de polinômios da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= 2xp_1(x) - p_0(x) = 2x^2 - 1,\\
p_3(x) &= 2xp_2(x) - p_1(x) = x(4x^2 - 3),\\
p_4(x) &= 2xp_3(x) - p_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
p_5(x) &= 2xp_4(x) - p_3(x) = x(16x^4 - 20x^2 + 5),\\
p_6(x) &= 2xp_5(x) - p_4(x) = (2x^2 - 1)(16x^4 - 16x^2 + 1),\\
p_7(x) &= 2xp_6(x) - p_5(x) = x(64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7),\\
&\dots\\
p_8(x) &= 2xp_7(x) - p_6(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1,\\
&\dots\\
p_n(x) &= 2xp_{n-1}(x) - p_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Esta seqüência de polinômios é conhecida como *polinômios de Chebyshev* e cumpre a condição (1.8). Precisamente temos:

Proposição 7. *A seqüência de polinômios definida recursivamente pelo problema de valor inicial*

$$p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x), \;\; p_0(x) = 1, \;\; p_1(x) = x \tag{1.9}$$

é dada explicitamente por

$$p_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n - (x - \sqrt{x^2-1})^n\right], & |x| \geq 1,\\ \cos(n\arccos(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{sen}(n\arccos(x)), & |x| < 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

e cumpre a condição (1.8).

Demonstração. A seqüência dos polinômios de Chebyshev por ser solução do problema de valor inicial é a única que satisfaz a equação de recorrência (1.9) e pode ser obtida de forma análoga ao desenvolvimento realizado na seção anterior. Para mostrar que cumpre a condição (1.8), afirmamos que

$$p_n(x) = \begin{cases} \cosh(ncosh^{-1}(x)), & |x| \geq 1\\ \cos(n\arccos(x)), & |x| < 1, \end{cases}$$

De fato, para $|x| < 1$ temos,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x) =& \cos((n+1)\arccos(x)),\\
=& \cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) -\\
& \qquad\qquad \operatorname{sen}(n\arccos(x))\operatorname{sen}(\arccos(x)),\\
=& xp_n(x) - \operatorname{sen}(n\arccos(x))\operatorname{sen}(\arccos(x)),\\
=& xp_n(x) - \frac{1}{2}[\cos((n-1)\arccos(x)) - \cos((n+1)\arccos(x))],\\
=& xp_n(x) - \frac{1}{2}[p_{n-1}(x) - p_{n+1}(x)],\\
p_{n+1}(x) =& 2xp_n(x) - p_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Como $p_0(x) = \cos(0\arccos(x)) = 1$, $p_1(x) = \cos(1\arccos(x)) = x$ temos que $p_n(x) = \cos(n\arccos(x))$ cumpre o problema de valor inicial (1.9).

Temos também que:

$$\begin{aligned}
p_n(p_m(x)) =& \cos(n\arccos(\cos(m\arccos(x)))) = \cos(nm\arccos(x))\\
=& \cos(mn\arccos(x)) = \cos(m\arccos(\cos(n\arccos(x))))\\
=& p_m(p_n(x)).
\end{aligned}$$

Para $|x| \geq 1$, de forma análoga, temos que $p_n(x) = \cosh(ncosh^{-1}(x))$ e cumpre a condição (1.8). □

Observação 3. *A questão da unicidade da família dos polinômios de Chebyshev satisfazendo a equação de comutatividade* $p_n \circ p_m = p_m \circ p_n$ *não será discutida. A natureza deste problema foge ao caráter elementar tratado neste trabalho.*

Observação 4. *A família de funções*

$$f_n(x) = \operatorname{sen}(n\operatorname{arcsen}(x)),\ f_0(x) = 0,\ f_1(x) = x$$

também cumpre a condição $f_n(f_m(x)) = f_m(f_n(x))$*, mas não é polinomial. De fato,* $f_2(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Mais geralmente, qualquer função invertível $h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *define uma família* $f_n(x) = h(nh^{-1}(x))$ *que cumpre a condição (1.8).*

Exercício 3. *Encontre polinômios de grau* n *que verifique a seguinte equação*

$$p_n(x + \frac{1}{x}) = x^n + \frac{1}{x}^n.$$

Alguns exemplos são:

$$p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2 - 2,\ \ p_3(x) = x^3 - 3x \ \ e \ \ p_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2.$$

1.5 Aplicações a Problemas Geométricos e de Probabilidades

Esta seção tem como objetivo mostrar a diversidade das aplicações das equações diferenças. Iremos considerar equações diferenças lineares tendo como domínio o produto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Considere o problema de contorno

$$\begin{aligned} p_{n,N} &= \frac{1}{2}(p_{n-1,N-1} + p_{n,N-1}) \\ p_{1,N} &= \frac{1}{2^{N-1}}, \quad p_{n,N} = 1,\ N \leq n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Uma solução de (1.11) é uma função $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que verifica a equação (1.11) e as suas condições de contorno.

Proposição 8. *[4] A solução de (1.11) para $N > n$ é dada por*

$$p_{n,N} = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N-1}{k}, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.12}$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução matemática em N. Fixado n temos que $P_{n,N} = 1$ para todo $N \leq n$. Para $N = n+1$, temos

$$p_{n,n+1} = \frac{1}{2}(p_{n-1,n} + p_{n,n}), \qquad \text{isto é,} \qquad p_{n,n+1} = \frac{1}{2}(p_{n-1,n} + 1).$$

Como $p_{1,2} = 1/2$, temos,

$$\begin{aligned} p_{2,3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2^2}(1+2) = \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}, \\ p_{3,4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}(1+2) + 1\right) = \frac{1}{2^3}(1+2+2^2) = \frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{2}\binom{3}{k}, \end{aligned}$$

e assim, sucessivamente. Deixamos a cargo do leitor mostrar por indução matemática em n que:

$$p_{n,n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}.$$

Portanto, para $N = n + 1$, vale (1.12).

Agora, vamos supor que vale para $N = n + m$ para $m > 1$ e mostrar que vale para $N = n + m + 1$, isto é,

$$p_{n,n+m+1} = \frac{1}{2^{n+m}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m}{k}.$$

De fato, pela equação (1.11) temos,

$$\begin{aligned}
p_{n,n+m+1} &= \frac{1}{2}(p_{n-1,n+m} + p_{n,n+m}), \text{ e por hipótese de indução,}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n+m-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+m-1}{k} + \frac{1}{2^{n+m-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}\right),\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+m-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k}\right),\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+m-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+m-1}{k+1} + 1\right),\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+m}{k+1} + 1\right), \text{ pois } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m}{k}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Exercício 4. *Mostre que, em particular,* $p_{2,N} = \frac{N}{2^{N-1}}$ *e* $p_{3,N} = \frac{N^2-N+2}{2^N}$. *Além disso, vale a equação de dualidade* $p_{m,\,m+n} + p_{n,\,m+n} = 1$.

Observação 5. *O número de regiões que* N *hiperplanos no espaço euclideano* $\mathbb{R}^n$*, todos passando pela origem, determina é:*

$$Q_{n,N} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{N-1}{k},$$

onde o seguinte problema de contorno é satisfeito

$$Q_{n,N} = Q_{n,N-1} + Q_{n-1,N-1}, \quad Q_{1,N} = 2, \;\; Q_{n,1} = 2.$$

Temos $Q_{2,N} = 2N$ *e* $Q_{3,N} = N^2 - N + 2$. *Veja [1] para o cálculo destes números.*

1.5.1 Comentários

Para $n = 2$, $p_{2,N}$ representa a probabilidade de N pontos no círculo unitário (o mesmo que circunferência), distribuídos aleatoriamente, pertencerem a uma semi-circunferência, i.e., pertencerem a um arco de círculo de comprimento π.

Para $n = 3$, $p_{3,N}$ representa a probabilidade de N pontos na esfera unitária, distribuídos aleatoriamente, pertencerem a um hemisfério, i.e., pertencerem a uma calota esférica de área 2π. Mostrar diretamente que $p_{3,4} = 7/8$ é um belo exercício.

Para $n > 3$ a interpretação é simular, embora um pouco mais abstrata. Também pode ser mostrado que $p_{n,N}$ descreve probabilidade no lançamento de uma moeda. Maiores detalhes em [4].

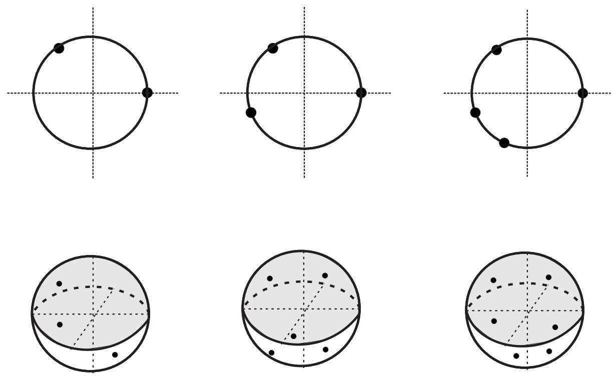


Figura 1.1: Distribuição aleatória de pontos em círculos e esferas

Referências Bibliográficas

[1] Gomes, A., Castro, H. e Garcia, R. *Configurações de Retas, Planos e Círculos*, Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, (2003), **04**: 87-102. (www.ime.ufg.br).

[2] Cruz, J. H. e Garcia, R. *Equações Diferenças lineares de segunda ordem*, Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, (2006), **06**: 85-96. (www.ime.ufg.br).

[3] Lima, E. L., Álgebra Linear. CMU/IMPA, 1999.

[4] Wendel, J. G. , *A Problem in Geometric Probability.* Math. Scandinava, (1962), **11**: 109 - 111. (www.mscand.dk).

Autores: José Hilário da Cruz e Ronaldo Alves Garcia

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
jhilario@mat.ufg.br, ragarcia@mat.ufg.br

Objetivo e Política Editorial

A Revista da Olimpíadatem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e Aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em TEX ou LATEX podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres ad hoc e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.