Nº 5
Março/2004
ISSN 1518-6075

revista DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olímpiada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 5 (jan./dez. 2004). Goiânia: IME/UFG, 2004-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Arte da Capa: Leonardo M. Pelá

Tiragem	**Postagem**
2.500 exemplares	2º semestre de 2004

Revista da Olimpíada, nº 5, 2004
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
Caixa Postal 131
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 521 1208, Fax: (62) 521 1180
site: www.mat.ufg.br

Apresentação

Caro Leitor,

A Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e alunos do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Convidamos o leitor que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado aos seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação, ver endereço a 1ª contra capa.

Lembramos que devemos estar sempre atentos para o fato de que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade.

Esperamos que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, 2004.

Os Editores.

Índice

Coletâneas de Problemas e Soluções

Problema 1. João e Pedro dão uma volta em uma praça no mesmo sentido e contam as casas. Como não começam a contar da mesma casa, a quinta casa do João é a décima segunda do Pedro e a quinta casa do Pedro é a trigésima de João. Quantas casas existem em volta da praça? (Pré olimpíadas de Portugal/www.spm.pt)

Solução. A quinta casa de João é a décima segunda de Pedro e após João contar 25 casas, ele irá para a trigésima e Pedro estará na quinta, mas para Pedro voltar novamente para a décima segunda casa, e completar assim uma volta, faltarão 7 casas. Podemos concluir que existem 32 casas.

Problema 2. Os números reais α e β são tais que

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0, \quad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

Encontre $\alpha + \beta$.

Solução. Defina $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$. Vamos mostrar que $f(\alpha) + f(\beta) = 6$ implica $\alpha + \beta = 2$. Como $f(x) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3$, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha) - 3 &= (\alpha - 1)^3 + 2(\alpha - 1) \\ f(\beta) - 3 &= (\beta - 1)^3 + 2(\beta - 1) \end{aligned}$$

Adicionando temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha - 1)^3 + (\beta - 1)^3 + 2\alpha + \beta - 2) \\ &= (\alpha + \beta - 2)[(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)(\beta - 1) + (\beta - 1)^2 + 2] \end{aligned}$$

e como o segundo fator é positivo, obtemos o resultado. (Observação: este problema foi retirado da *Sixth Irish Mathematical Olympiad. CRUX with MAYHEM On-line, página 9, n.01, vol.1, 1997. http://journals.cms.math.ca/CRUX/*

Problema 3. Azambuja escreveu ◯4 ◯ 1 ◯ 6 ◯ 3◯ no quadro de sua sala de aula. Disse para seus colegas que eles dispunham dos algarismos 9, 8 e 5 para colocar dois deles em dois círculos vazios, apagar os círculos não preenchidos e assim obter um número de seis algarismos diferentes. Quais algarismos devem ser escolhidos e onde colocá-los para formar o maior número possível que seja divisível por 6? (Olimpíada Cearense de Matemática)

Solução. Vamos chamar de n o número procurado, como n é divisível por 6 então n deve ser par e para que isso ocorra o 8 deve estar dentro do último círculo de n. Como 9 e 5 são maiores que quatro, para que n seja o maior possível, ou 5 ou 9 deve estar no primeiro círculo de n, mas quando se faz isto com o nove $n = 941638$ que não é divisível por 3, logo nos resta então que $n = 541638$.

Problema 4. Qual é o resto da divisão de 2^{20} por 5? (A.M.P.F.)

Solução. Observamos que $2^{20} = 2^{2^{10}} = 4^{10}$. Como quatro é da forma $5k - 1, 4^2 = (5k - 1)^2 = 25k^2 - 10k + 1 = 5 \cdot (5k^2 - 2k) + 1 = 5q + 1$ e facilmente se verifica que $(5k - 1)^3$ é da forma $5k - 1$, logo vemos que quando um número da forma $5 \times k - 1$ elevado a uma n-ésima potência par deixa resto 1. Logo 2^{20} deixa resto 1 quando dividido por 5.

Problema 5. Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é igual a 25? (A.M.P.F.).

Solução. $25 = 9 + 9 + 7$, logo o menor algarismo que os números que estamos procurando pode ter é 7, e além disso o 7 não pode aparecer duas vezes pois $7 + 7 + 9 = 23 < 25$. Logo existem 3 números desse tipo que possui o dígito 7: 799, 979 e 997. O dígito 8 não pode aparecer juntamente com o dígito 7 pois $7+8+9 = 24 < 25$, porém pode aparecer juntamente com outro dígito 8 pois $8+8+9 = 25$, logo existem 3 números dessa forma: 988, 898 e 889. Finalmente, existem 6 números dessa forma.

Problema 6. Um cubo de madeira com aresta de $9cm$ é pintado completamente, sendo depois repartido em 27 cubos iguais de aresta de $3cm$. Qual é a área total das faces não pintadas desses cubos pequenos? (Olimpíada Portuguesa de Matemática)

Solução. Os 27 cubos obtidos têm no total 6×27 faces, das quais 6×9 foram pintadas (9 por cada uma das faces do cubo inicial). Temos assim

$6 \times 27 - 6 \times 9 = 108$ faces que não foram pintadas, e cuja área total é de $108 \times 9cm^2 = 972cm^2$.

Problema 7. A fração $\frac{1}{6}$ pode ser representada como uma diferença das seguintes formas

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30}.$$

De quantas maneiras a fração $\frac{1}{2175}$ pode ser representada na forma

$$\frac{1}{2175} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$$

onde x e y são inteiros positivos?
Solução. Observe que se

$$\frac{1}{2175} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

temos que

$$x = \frac{2175y}{y + 2175} = 2175 - \frac{2175^2}{y + 2175}.$$

Assim x será um inteiro se e somente se $y + 2175$ for um fator de 2175^2 e x será positivo sempre que y for, como $2175^2/(y + 2175) < 2175$ e y é positivo sempre que $y + 2175 > 2175$, vamos buscar os fatores de 2175^2 maiores do que 2175. Mas $2175^2 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 29^2$ tem $(2+1)(4+1)(2+1) = 45$ fatores positivos, um dos quais é sua raiz quadrada, 2175. Como os fatores de 2175^2 tomados os pares cujo produto é 2175^2, são exatamente a metade dos outros 44 fatores que excedem 2175, temos 22 soluções nos inteiros positivos. A menor é $x = 300$ e $y = 348$. Isto pode ser generalizado imediatamente para soluções inteiras positivas de $1/n = 1/x - 1/y$. Como $\tau(n^2)$ (o número de divisores de n^2) é ímpar para um quadrado perfeito, existem $(\tau(n^2) - 1)/2$ soluções para a equação $1/n = 1/x - 1/y$.
CRUX with MAYHEM On-line, página 443, n.07, vol. 23, 1997.
http://journals.cms.math.ca/CRUX

Problema 8. Três círculos de raio ρ (iguais) são internos a um triângulo ABC, tangentes a dois de seus lados e passam por um ponto T. Mostre que

(i) $t = \frac{rR}{R+r}$, onde r é o raio do círculo inscrito e R círculo circunscrito ao triângulo ABC;

(ii) T está no segmento de reta definido pelos centros dos círculos circunscrito e inscrito do ΔABC.

Problema 9. Seja $S = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ o conjunto dos quadrados inteiros positivos.

(a) Encontre o quadrado t tal que $t + 43$ também está em S.

(b) Para quais quadrados u em S, $u + 420$ também está em S?

Solução. Para resolver $x^2 + n = y^2$, escrevemos a equação como $n = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. Assim, $y - x$ e $y + x$ são fatores de n da mesma paridade.

(a) Para $n = 43$, podemos ter $43 = (y-x)(y+x)$ somente se $y-x = 1$ e $y + x = 43$ ou $x = 21$, $y = 22$. Verificamos que $21^2 + 43 = 22^2$, assim o quadrado desejado é $t = 21^2 = 441$.

(b) Para $n = 420 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, podemos ter $420 = (y - x)(y + x)$ com $y - x = 2d$ onde d é um divisor de $3 \cdot 5 \cdot 7$ tal que $d < (3 \cdot 5 \cdot 7)/d$. Existem 4 tais divisores, $d = 1, 3, 5$, ou 7 e daí existem 4 quadrados x^2 tais que $x^2 + 420$ também é quadrado. Estes quadrados podem ser encontrados como segue:

$d = 1$	$y - x = 2$,	$y + x = 210$	$x = 104$,	$y = 106$	$x^2 = 104^2 = 10816$
$d = 3$	$y - x = 6$,	$y + x = 70$	$x = 32$,	$y = 38$	$x^2 = 32^2 = 1024$
$d = 5$	$y - x = 10$,	$y + x = 42$	$x = 16$,	$y = 26$	$x^2 = 16^2 = 256$
$d = 7$	$y - x = 14$,	$y + x = 30$	$x = 8$,	$y = 22$	$x^2 = 8^2 = 64$

http://www.math.okstate.edu/ hsc/exams

Problema 10. Quantos números inteiros positivos N, de dois algarismos, têm a propriedade de que a soma de N com o número obtido pela inversão da ordem dos dígitos de N é um quadrado perfeito? (American mathematics competitions: http://www.unl.edu/amc/e-exams)

Solução. Procuramos os números que satisfazem a seguinte equação: $ac + ca = p^2$. Como $ac = 10 \times a + c$ e $ca = 10 \times c + a$ a equação é equivalente a: $10 \times (a + c) + a + c = p^2$, $(a + c) \times 11 = p^2$. Daí concluímos que $a + c = 11$, pois só assim a soma será um quadrado perfeito. Como a e c são números de 1 a 9, os pares a e c que satisfazem a equação acima são : 2 e 9, 3 e 8, 7 e 4, 6 e 5. Temos portanto quatro pares ordenados, mas como existem dois números para cada par ordenado concluímos que existem $2 \times 4 = 8$ números que possuem essa propriedade.

Problema 11. Se $2^{1998} - 2^{1997} - 2^{1996} + 2^{1995} = k \times 2^{1995}$, qual o valor de k? (www.unl.edu/amc/e-exams)

Solução. $k \times 2^{1995} = 2^3 \times 2^{1995} + 2^{1995} - 2^2 \times 2^{1995} - 2 \times 2^{1995} = 8 \times 2^{1995} + 2^{1995} - 4 \times 2^{1995} - 2 \times 2^{1995} = 9 \times 2^{1995} - 6 \times 2^{1995} = 3 \times 2^{1995} = k \times 2^{1995}$, portanto $k = 3$.

Problema 12. Considere os números obtidos do número 12345, efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual é o lugar ocupado pelo número 43521? (www.somatematica.com.br/desafios)

Solução. Colocando-se as permutações obtidas pelos 5 algarismos em ordem crescente temos: $4! = 24$ números da forma $1xxxx$, $4!$ números da forma $2xxxx$, $4!$ números da forma $3xxxx$, $3! = 6$ números da forma $41xxx$, $3!$ números da forma $42xxx$, $2! = 2$ números da forma $431xx$, $2!$ números da forma $432xx$ finalmente $2!$ números da forma $435xx$.

Somando todas as possibilidades e observando que 43521 é o maior número nesta seqüência vemos este está na 90^o posição.

Problema 13. Um homem gastou tudo o que tinha no bolso em três lojas. Em cada uma gastou 1 real a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto o homem tinha ao entrar na primeira loja? (www.somatematica.com.br/desafios)

Solução. Vamos considerar que quando o homem entrou na primeira loja ele tinha N reais. Então o nosso objetivo é achar o valor de N. O problema diz que em cada loja o homem gastou 1 real a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Na loja 1 o homem entrou com N e gastou $(N/2) + 1$. Portanto o homem ficou com: $N - ((\frac{N}{2}) + 1) = N - (\frac{N}{2}) - 1 = \frac{(2N-N-2)}{2} = \frac{(N-2)}{2}$. Na loja 2 o homem entrou com $\frac{(N-2)}{2}$ e gastou $\frac{(N-2)}{4} + 1 = \frac{(N+2)}{4}$. Portanto o homem ficou com: $\frac{(N-2)}{2} - (\frac{(N+2)}{4}) = \frac{(2N-4-N-2)}{4} = \frac{(N-6)}{4}$. Na loja 3 o homem entrou com $\frac{(N-6)}{4}$ e gastou $\frac{(\frac{(N-6)}{4})}{2} + 1 = \frac{(N-6)}{8} + 1 = \frac{(N+2)}{8}$. Como o homem ficou com zero reais concluímos que o dinheiro que ele entrou na loja 3 menos o dinheiro que ele gastou na loja 3 é igual a zero: $\frac{(N-6)}{4} - (\frac{N+2}{8}) = 0$, $\frac{(2N-12-N-2)}{8} = 0$, $2N - 12 - N - 2 = 0$, $N = 14$. Portanto, quando o homem entrou na primeira loja ele tinha 14 reais.

Problema 14. Você quer cozinhar um ovo por 2 minutos. Entretanto você só possui 2 relógios de areia, um de 5 minutos e outro de 3 minutos. Como você poderia colocar o ovo para cozinhar e tirá-lo dentro de 2 minutos exatos? (www.somatematica.com.br/desafios)

Solução. Você vira os dois relógios de areia ao mesmo tempo. Quando o de 3 minutos acabar você coloca o ovo e quando o de 5 minutos acabar você retira o ovo.

Problema 15. Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?
(www.somatematica.com.br/desafios)

Solução. Podemos escrever a expressão da seguinte forma: $\frac{x+99}{x+19} = 1 + \frac{80}{x+19}$. Este número é inteiro se, e somente se, $x + 19$ for divisor de 80. Como 80 tem 20 divisores inteiros, então existem 20 valores de x.

Problema 15. A igualdade $3^{100} + 7^{100} = 8^{100}$ é verdadeira ou falsa? (Kvant selecta: Algebra and Analysis, I, AMS, Vol.14, 1991)

Primeira Solução. Vamos olhar para o último dígito dos números do lado esquerdo e do lado direito da igualdade: 3 ao quadrado é 9, 3 ao cubo termina com 7, 3 a quarta potência termina com 1, 3 a quinta potência termina com 3, 3 a sexta potência termina com 9, e assim sucessivamente. Depois da quarta potência, o último dígito repete, e assim o número 3^{100} o último dígito de 3^4, a saber 1. Da mesma forma, podemos verificar que o último dígito de 7^{100} é 1, enquanto o último dígito de 8^{100} é 6. Portanto, a igualdade é falsa.

Segunda Solução. Observe que $3 + 7$ é maior que 8. Mas $3^2 + 7^2 = 58$ é menor que $8^2 = 64$. Além disso, $3^{100} + 7^{100} = (3^2)^{50} + (7^2)^{50} < (3^2 + 7^2)^{50} = 58^{50} < 64^{50} = 8^{100}$. Portanto, a igualdade é falsa.

Terceira Solução. O número da esquerda é divisível por 2, mas não é por 4. De fato, o quadrado de qualquer número ímpar tem resto 1 quando dividido por 4, pois $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$. A soma $(3^{50})^2 + (7^{50})^2$ tem resto 2, quando dividida por 4. Por outro lado, 8^{100} é divisível por 4. Portanto, a igualdade é falsa.

Problema 16. Quantas são as seqüências de 10 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero? (Matemática do ensino médio, Elon Lages Lima).

Solução. Chamando de x_n o número de seqüências com n termos que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero, o valor de x_{n+2} será a soma de:

i) O número de seqüências de $n+2$ termos que começam por 1 e não possuem dois zeros consecutivos. Mas isso é precisamente igual a x_{n+1}, pois se o primeiro termo é 1, para formar a seqüência basta determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de x_{n+1} modos.

ii) o número de seqüências de $n+2$ termos que começam por 2 e não possuem dois zeros consecutivos. Analogamente, isto é igual a x_{n+1}.

iii) O número de seqüências de $n+2$ termos que começam por 0 é $2x_n$ pois, haverá duas possibilidades depois do zero. Logo, $x_{n+2} = 2\times x_{n+1}+2\times x_n$. É fácil ver que $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$. Daí temos, $x_{10} = 24960$.

Problema 17. Prove que um quadrado perfeito n nunca deixa resto 7 quando dividido por 10. (Artur M.P.F)

Solução. Como n é um quadrado perfeito, existe um p tal que, $p^2 = n$. Representando p na base 10 temos, $p = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_n \times 10^n$. Efetuando p^2 temos: $p^2 = a_0^2 + 10 \times k$, logo o resto da divisão de n por 10 é o resto da divisão de a_0^2 por 10, e como $a_0 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$, temos : $1^2 = 1, 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64,\ 9^2 = 81, 0^2 = 0$, que nunca deixará resto 7 quando dividido por 10.

Problema 18. Seja n um número inteiro positivo. Prove que $n^3-n = k$ é sempre um múltiplo de 6. (Artur M.P.F)

Solução. $n^3 - n = n \times (n^2 - 1) = n \times (n+1) \times (n-1)$. Suponha que n não é um múltiplo de 2, isto implica que $n + 1$ e $n - 1$ são múltiplos de 2 e portanto, k é um múltiplo de 2. Analogamente suponha que n não é um múltiplo de 3, então $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, com k um número inteiro. Se $n = 3k + 1,\ n - 1 = 3k$ e portanto k é um múltiplo de 3 também. Se $n = 3k + 2,\ n + 1 = 3(k + 1)$ e k é um múltiplo de 3. Em qualquer hipótese k é um múltiplo de 3 e um múltiplo de 2, logo, k é um múltiplo de 6.

Problema 19. O conjunto A possui quatro elementos e o conjunto B sete elementos. Quantas funções $f : A \longmapsto B$ existem? Quantas são injetoras? (Matemática do ensino médio, Elon Lages Lima).

Solução. Como os quatro elementos do domínio podem se ligar aos outros sete sem restrição temos que o número de funções é $7\times7\times7\times7 =$

2401. Vamos agora calcular quantas são injetoras. Vamos supor que B têm quatro elementos, mas se isso fosse verdade então é fácil observar que existiriam 4! funções injetoras, mas como B tem 7 elementos, esses sete elementos podem ser combinados em grupos de quatro a quatro de (combinação de 7 elementos quatro a quatro) maneiras logo, o número total de funções injetoras é: (combinação de 7 quatro a quatro)$\times 4! = C \times 24 = \frac{7!}{3! \times 4!} \times 24 = 7 \times 5 \times 24 = 840$.

Problema 20. Uma pessoa vai comprar um presente e leva $R\$1200,00$ Quando lhe perguntaram quantos custou o presente, ela disse: "Sobrou troco, mas não direi nem o troco nem o preço do presente. digo apenas que o preço do presente, sendo lido ao contrário é o valor de nove presentes e que o preço do presente é maior ou igual a $R\$1000,00$". Quanto custou o presente? (Desafio/www.somatematica.com.br)

Solução. O valor do presente é um número de quatro algarismos, sendo 1 o primeiro deles, o último algarismo só poderia ser o 9, pois só assim poderíamos inverter o número e obter 9 vezes o primeiro. Assim, sabemos que o número é $1ab9$. como $9ba1$ é múltiplo de 9, $1ab9$ também será, para que tal número seja múltiplo de 9, $a + b = 8$, dos pares (a, b), que satisfazem esta condição e a condição de que o preço seja menor que 1200 são: $(0, 8)$, $(1, 7)$, testando ambos, chegamos que o preço do presente é $R\$1089$.

Problema 21. Sejam R_1, R_2, R_3 circunferências de raios respectivamente r, r_1 e r_2 , com $0 < r_1 < r_2 < r$. As circunferências R_1 e R_2, são tangentes internamente a R em dois pontos distintos A e B e também tem interseção em dois pontos distintos. Mostre que o segmento AB passa por um dos pontos de intersecção de R_1 com R_2, então $r = r_1 + r_2$. 1-XV Garra Nazionale di Matematica (1999).

Solução. Os triângulos OAB, $O1_1AC$ e O_2BC são semelhantes, portanto os lados opostos do quadrilátero OO_1O_2C são iguais e ele é um paralelogramo e $r = OA = OO_1 + O_1A = OO_2 + O_2B = r_1 + r_2$.

Problema 22. Se p e $8p^2 + 1$ são números primos positivos, prove que $p = 3$. (Olimpíada Cearense de matemática)

Solução. Suponha por contradição que p seja um número qualquer da forma $3 \times k + 1$, então $8p^2 + 1 = 2 \times (4p^2 - 1) + 3 = 2 \times (2 \times p + 1) \times (2 \times p - 1) + 3$, substituindo p temos : $2 \times (2 \times (3 \times k + 1 + 1) \times$

$(2 \times (3 \times k + 1 - 1) + 3 = 2 \times (2 \times (3 \times k + 2) \times (2 \times (3 \times k)) + 3 = 3 \times [2 \times ((3 \times (2 \times k + 1) + 1) \times (2 \times (k)))] + 3 = 3 \times q + 3 = 3 \times (q + 1)$, onde q é a parcela entre colchetes, assim chegamos a uma contradição pois $8p^2 + 1$ será um múltiplo de 3 e não será primo. Analogamente se prova para $p = 3 \times k + 2$. Logo nos resta que $p = 3k$, mas como p é primo então $k = 1$ e portanto $p = 3$.

Problema 23. Ache todas soluções reais positivas (se existir) de : $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$, e $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$. (Olimpíada do Canadá/http://www.cms.math.ca/Olympiads/CMO)

Solução. Seja $f(x, y, z) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z)$, onde $f(x, y, z) = 0$. Se $x,\ y,\ z \geq 1$, então $f(x, y, z) \geq 0$ com igualdade somente se $x = y = z = 1$. Mas se $x = y = z$, então a segunda equação não será satisfeita. Logo em qualquer solução do sistema, pelo menos uma das variáveis é menor que 1. Sem perda de generalidade, suponha que $x < 1$. Então $x^2 + y^2 + z^2 > y^2 + z^2 \geq 2yz > xyz$. Sendo assim, o sistema não tem soluções reais positivas.

Problema 24. Um número positivo n é dito prático se todo inteiro positivo menor ou igual a n pode ser escrito como uma soma de divisores distintos de n. Por exemplo, os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6. Temos então,

$$1 = 1,\ 2 = 2,\ 3 = 3,\ 4 = 1 + 3,\ 5 = 2 + 3,\ 6 = 6,$$

portanto 6 é prático. (Olimpíada do Canadá: http://www.cms.math.ca/Olympiads/CMO). Prove que o produto de dois números práticos é também prático.

Solução. Considere p e q práticos. Para qualquer $k \leq pq$, nós podemos escrever: $k = a \times q + b$ com $0 \leq a \leq p, 0 \leq b \leq q$. Como p e q são práticos, nós podemos escrever: $a = c_1 + ... + c_m, b = d_1 + ... + d_n$ onde os c_i's são divisores distintos de p e os d_j's são divisores distintos de q. Agora : $k = (c_1 + ... + c_m) \times q + (d_1 + ... + d_n) = c_1 \times q + ... + c_m \times q + d_1 + \cdots + d_n$. Como qualquer $c_i \times q$ e d_j divide $p \times q$. Como $d_j < q \leq c_i \times q$ para qualquer $i,\ j$, os c_i's e d_j's são todos distintos, concluímos então que $p \times q$ é prático.

Problema 25. Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5^a casa de João é a 12^a de Pedro e a 5^a casa de Pedro é a 30^a de João. Quantas casas existem em volta da praça?

Problema 26. Se a metade de cinco fosse nove, quanto seria a terça parte de dez?

Problema 27. Pouco se sabe sobre a biografia de Diofanto, que foi um notável matemático da Antigüidade. Tudo o que se conhece a respeito dele foi extraído de sua sepultura, onde havia uma inscrição composta sob a forma de um exercício matemático. Leia-o e descubra a idade que ele tinha quando morreu.

"Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto. E os números podem, ó milagre! Revelar quão dilatada foi sua vida, cuja sexta parte constitui sua linda infância. Transcorrera $\frac{1}{12}$ de sua vida, quando seu queixo se cobriu de penugem. A sétima parte de sua existência, transcorreu num matrimônio estéril. Passado um qüinqüênio, fê-lo feliz o nascimento de seu precioso primogênito, o qual entregou seu corpo, sua formosa existência, que durou apenas a metade da de seu pai, à Terra. E com dor profunda desceu à sepultura, tendo sobrevivido quatro anos ao falecimento de seu filho."

Problema 28. Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

Problema 29. Determinar como 1000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

a)A numeração das caixas, de 1 até 10, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.

b)É possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1000 dinares, sem precisar abrir as caixas.

Problema 30. A equação $x^3+px+q=0$ tem três raízes reais distintas. Prove que $p<0$.

Solução. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação. Pelas Relações de Girard temos:

$$x_1+x_2+x_3=0 \qquad \text{e} \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p.$$

Logo,

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

$$\Longrightarrow 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p \Longleftrightarrow p = -\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2}.$$

Como x_1, x_2, x_3 são distintos então $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$ e $p < 0$.

(XIV OBM Sênior, ver Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª , Problemas e resoluções, SBM, 2003.

Esta seção contou com a colaboração de:

Artur Monteiro Prado Fernandes
Aluno do 3ª série de Matemática/UFG
Bolsista da PROEC/2003.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 5, 2004, 12-14

Classificados na *XII* OMEG, 2003

Nível 1 (5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

  Alice Duarte Scarpa - Colégio Pré-Médico

- Segundo Lugar

  Sóstenes Gutembergio Mamedio Oliveira - Instituto Presbiteriano de Educação

- Terceiro Lugar

  David Issa Matos - Colégio Crescer
  Isadora Vianna Rodrigues - Instituto Maria Auxiliadora

- Menção Honrosa

  Alexandre Ferrari Amaral - Externato São José
  Arthur Marcus da Silveira - Colégio Objetivo
  Cleuter Antônio Pigorelli Carneiro - Colégio Disciplina
  Danilo Sulino Silveira Pinto - Colégio Disciplina
  Felipe Giovanni de Moura Santos - Colégio Sol Nascente
  Felipe Sales Nogueira Amorim Canêdo - Colégio Nova Opção
  Guilherme Nogueira - Colégio Fonte de Luz
  Maira Nunes Costa Neves - Instituto Presbiteriano de Educação
  Simone Alves - Núcleo Educativo
  Vaniele Guimarães Carvalho - Educandário Nascentes do Araguaia

Nível 2 (7ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

  Francisco Habib Issa Matos - Colégio Crescer

- Segundo Lugar

  André Rodrigues Salerno - Instituto Presbiteriano de Educação

- Terceiro Lugar

  Erick Assis Lima - Colégio Marista

- Menção Honrosa

  Ana Paula Rodrigues de Magalhães - Colégio Agostiniano

  Cássio Sobocinski Castro - Colégio Integrado Jaó

  Elissa Stein Naves de Brito - Colégio Marista

  Érika Goulart Rodrigues - Instituto Presbiteriano de Educação

  Fernanda Toledo de Moraes Antoniolli - Educandário Nascentes do Araguaia

  Guilherme Augusto Sousa Alcântara - Centro Educacional Paulo Freire-Anglo

  Henrique Tadeu de Pina Jayme - Colégio Disciplina

  Laís de Souza Meireles - Núcleo Educativo

  Leto Miranda Garcia - Colégio Delta

  Lucas de Oliveira Serra - Colégio Marista

  Luiza Niron de Souza Melo - Colégio Agostiniano

  Marcel Campos Guimarães - Colégio Delta

  Marco Túlio Soares Andrade - Colégio Marista

  Milena Dias Vasconcelos - Instituto Presbiteriano de Educação

  Ney César de Melo Filho - Colégio Crescer

  Nicolle Araújo Belchior Teixeira - Colégio Disciplina

  Patrícia Eliza Floriano de Carvalho - Colégio Einstein

  Raquel de Oliveira Morais - Colégio Integrado Jaó

  Rodrigo Silva Miranda - Instituto Maria Auxiliadora

  Sávio Augusto Teixeira e Silva - Colégio Einstein

Thalles Melo de Oliveira Lopes - Colégio Agostiniano

Vantuir Santos Júnior - Colégio Intercom 2000

Vinícius Queiroz de Almeida - Colégio Disciplina

Nível 3 (Ensino Médio)

- PRIMEIRO LUGAR

  Guilherme Rodrigues Salerno - Colégio Visão

- SEGUNDO LUGAR

  Gustavo de Souza Pinto - Colégio Progressivo
  Leno Silva Rocha - Colégio Mega

- TERCEIRO LUGAR

  Lidiane Pires Antoneli - Colégio Objetivo

- MENÇÃO HONROSA

  Danilo Borim do Nascimento - Colégio Santa Clara

  Ewerton Martins de Menezes - Colégio Anglo de Campinas

  Hugo Alves Akitaya - Colégio Integrado Jaó

  Ivo Takao Futida - Colégio Agostiniano

  Rafael Prudente Mamare - Colégio Visão

  Ralph Canhete Ribeiro Silva - Colégio Visão

  Thiago Carneiro Elias - Colégio Mega

Notícias

≫≫ *Olimpíadas:*

• A *XIII* **Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** será realizada no dia **25 de setembro de 2004** das 13:30h às 17:30h, nos campi da UFG de: Goiânia, Catalão, Jataí e Rialma, nos campi da UEG de: Anápolis, Iporá e Porangatu e Itumbiara.

Para participar a escola deve estar cadastrada. A ficha de cadastramento e de inscrição se encontram no final desta revista.

O cadastramento e as inscrições deverão ser enviadas à Coordenação de Olimpíadas, em **Goiânia**, até **29 de agosto de 2004**. Poderão participar, por escola, até:

▷ 5 alunos no nível 1 (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental);

▷ 5 alunos no nível 2 (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental);

▷ 10 alunos no nível 3 (Ensino Médio).

A seleção dos alunos participantes na Olimpíada Regional fica a critério da escola, podendo ser utilizada a prova da 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM para esta seleção.

• A **26ª Olimpíada Brasileira de Matemática** será realizada nos níveis 1, 2 e 3 em três fases:

▷ 1º fase 05/06/2004 na escola;

▷ 2º fase 11/09/2004 na escola;

▷ 3º fase 16 e 17/10/2004, no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Para participar a escola deve se cadastrar na Secretaria da OBM. A ficha pode ser encontrada no site: www.obm.org.br

• A **26ª Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário** será realizada em duas fase. A primeira fase será em 11 de setembro de 2004 e a segunda fase será nos dias 16 e 17 de outubro de 2004 no Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Poderão participar alunos de qualquer curso universitário.

• A **Olimpíada Internacional de Matemática** é a mais importante competição internacional, realizada desde 1959. Participam dessa competição cerca de 100 países de todo o mundo, representados por equipes de até 6 estudantes secundários ou que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente, na data da celebração da Olimpíada. Este ano a 45ª IMO será realizada no período de 17 a 26 de setembro na Espanha.

• **VI Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária** será em 6 de novembro de 2004.

▷ Para maiores informações sobre outras Olimpíadas de Matemática sugerimos os *sites*: http://www.obm.org.br ou http://www.sbm.org.br

≫≫ *Eventos:*

• **VIII Encontro de Matemática e Estatística (XVIX Semana da Matemática)** em Goiânia no período de 18 a 22 de outubro de 2004. Maiores informações pelo telefone 521-1208, pelo e-mail eme@mat.ufg.br ou no site www.mat.ufg.br.

• O **Simpósio de Matemática - XV Jornada de Matemática de Catalão** será realizada no Campus Avançado de Catalão em outubro de 2004. Maiores informações com o professor Carlos Alberto Pereira dos Santos pelo e-mail crsantos@mat.unb.br ou pelo telefone (0XX62) 447 56 42.

• O **II Encontro de Matemática e Educação Matemática de Jataí (ENEM)** será realizada no Campus Avançado de Jataí em setembro de 2004. Maiores informações com o professor Lúcio Aurélio Purcina pelo e-mail lapurcina@bol.com.br ou pelo telefone 99 55 05 73.

• A **VIII Jornada de Matemática de Rialma** será realizada de 13 a 17 dezembro de 2004 em Rialma. Maiores informações por e-mail: jhilario@mat.ufg.br ou no site: www.mat.ufg.br/cursos/rialma.

▷ Para maiores informações sobre outros eventos sugerimos uma visita em: http://www.sbm.org.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 5, 2004, 17-32

Soluções das Provas da XII OMEG, 2003

Nível 1

1ª Questão. Uma fração da forma $\frac{1}{m}$, onde m é um número inteiro positivo, é chamada de unitária.

a) Calcule a soma das frações unitárias

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}.$$

b) Calcule as frações unitárias $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ tais que $\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{59}{70}$.

c) Escreva as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{11}{13}$ como soma de frações unitárias distintas.

Solução apresentada por: Alice Duarte Scarpa.

a)
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}.$$

b)
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{59}{70}-\frac{35}{70}=\frac{24}{70}=\frac{12}{35}.$$

O mínimo múltiplo comum de m e n deve ser 35, logo $m=7$ e $n=5$.

c) Temos

$$\frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14},\qquad \frac{11}{13}=\frac{44}{52}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{52}.$$

2ª QUESTÃO. As figuras abaixo mostram uma folha de papel sendo dobrada, um recorte na folha dobrada e o resultado do recorte. A figura 1 mostra a folha inteira, a figura 2 mostra a folha sendo dobrada no segmento médio MN, a figura 3 mostra um corte numa folha dobrada na forma de um triângulo PQR retângulo em Q e a figura 4 mostra a folha desdobrada mostrando o buraco na forma de um quadrilátero ($PQRQ'$) com dois ângulos retos, em Q e Q'.

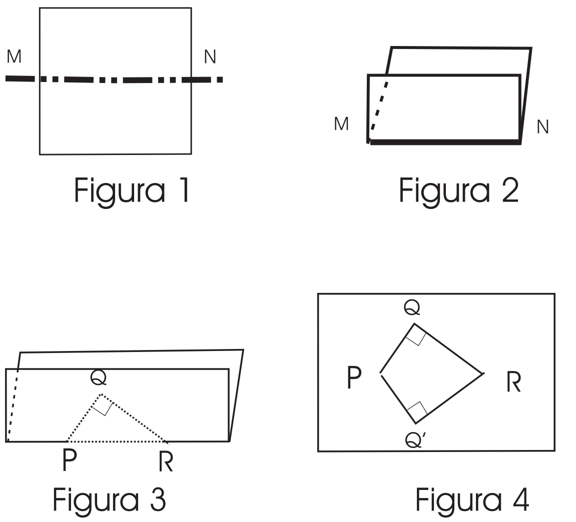


Figura 1.1: Recortes de folhas

Para responder cada um dos ítens abaixo faça um desenho do recorte a ser efetuado, como o da figura 3, e o resultado do recorte, como o da figura 4.

a) Como devemos recortar a folha dobrada para termos um quadrado?

b) Como devemos recortar a folha dobrada para termos um triângulo?

c) Como devemos recortar a folha dobrada para obtermos um retângulo?

Solução apresentada por: Alice Duarte Scarpa, David Issa Mattos.

a) Corte a folha dobrada em um retângulo cuja altura tenha a metade da largura.

b) Corte a folha dobrada na forma de um triângulo, com um lado perpendicular à dobra.

c) Corte a folha dobrada na forma de um quadrado.

3ª Questão.

a) Considere 3 baldes com capacidades de 8 litros, 5 litros e 3 litros. Estando inicialmente o balde de maior capacidade cheio e os outros dois vazios descreva um procedimento (transferência da água entre os baldes) para que possamos dividir em duas partes iguais 8 litros de água usando apenas os três baldes.

b) Considere 3 baldes com capacidades de 12 litros, 7 litros e 5 litros. Estando inicialmente o balde de maior capacidade cheio e os outros dois vazios descreva um procedimento para que possamos dividir em duas partes iguais 12 litros de água usando os três baldes.

Solução apresentada por: Alice Duarte Scarpa, David Issa Mattos, Sóstenes Gutembergio Mamedio Oliveira.

a) Transfira toda a água do balde de 8 litros para os baldes de 5 e de 3 litros. Depois transfira a água do de 3 para o de 8, deixando o de 3 vazio. Coloque a parte da água do de 5 que cabe no de 3, deixando o de 3 com 3 litros, o de 5 com 2 litros e o de 8 com 3 litros. Passe a água do de 3 para o de 8, e do de 5 para o de 3, assim o de 8 fica com 6, o de 5 vazio e o de 3 com 2. Passe a parte que cabe do de 8 para o de 5 deixando assim: o balde de 8 litros com 1 litro, o balde de 5 com 5 litros e o balde de 3 litros com 2 litros. Passe a parte que cabe do 5 para o 3, deixando-o com 4. Passe o que há no balde de 3 litros para o de 8 deixando assim: O balde de 8 com 4 litros, o balde de 5 com 4 litros e o balde de 3 vazio.

b) Transfira toda a água do balde de 12 litros para os baldes de 7 e 5 litros. Depois transfira água do balde de 7 litros para o balde de 12 litros, deixando o de 7 vazio. Passe o que há no balde de 5 para o de 7, deixando assim: o balde de 12 litros com 7 litros, o balde de 7 litros com 5 litros e o balde de 5 litros vazio. Passe 5 litros de água do balde de 12 litros para o balde de 5 litros. Passe dois litros do balde de 5 litros para o balde de 7 litros. Passe o que há no balde de 7 litros para o balde de 12 litros, ficando este com 9 litros. Passe os 3 litros do balde de 5 para o balde de 7 litros, ficando o balde de 5 litros vazio. Passe 5 litros do balde de 12 litros para o balde de 5 litros, e passe 4 litros do balde de 5 litros para o de 7, restando no balde de 5 litros apenas um litro. Passe 7 litros do balde de 7 para o balde de 12 litros. Ficando este com 11 litros. Passe 1 litro que restou balde de 5 para o de 7. Passe 5 litros do balde de 12 para o de 5 e o que restou no balde de 5 para o de 7, assim o balde de 12 e o de 7 fica com 6 litros.

4ª Questão. Determine o número fantasma de seis algarismos que está escondido na última linha. Nas três primeiras linhas há também números de seis algarismos e ao lado de cada um deles está anotado quantos algarismos há em comum com o número fantasma: os números na coluna B (bom) indicam quantos estão colocados na mesma posição no número fantasma e na coluna R (regular) indica quantos algarismos estão no número fantasma, mas em posição não correta.

						B	R
1	3	5	2	4	6	2	0
5	7	9	6	8	0	2	2
2	6	0	4	8	1	2	2
——	——	——	——	——	——	6	0

Solução apresentada por: Isadora Vianna Rodrigues.

Escolhendo 1 na primeira e 2 na quarta posição, isto é, $\underline{1}\ \_\_\ \_\_\ \underline{2}\ \_\_\ \_\_$, nas outras posições só podem ser 7, 8, 9 ou 0, pois são os únicos que não estão na primeira fila. Os números 1 e 2 foram escolhidos porque nas suas colunas só haviam números da primeira fila, que seriam R se fossem escolhidos, o que não podia acontecer. Logo, a solução é: $\underline{1}\ \underline{7}\ \underline{0}\ \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{9}$.

5ª Questão. Seja m um número inteiro positivo formado por quatro algarismos e n o número escrito na ordem inversa dos algarismos de m. Por exemplo, os números 2476 e 6742 estão em escritos em ordem inversa. Mostre que $m + n$ é sempre um múltiplo de 11.

Solução apresentada por: David Issa Mattos.

Seja

$$m = 1000 \times A + 100 \times B + 10 \times C + D, \quad n = 1000 \times D + 100 \times C + 10 \times B + A,$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$. Escrevendo

$$\begin{aligned} m &= (1001 \times A - A) + (99 \times B + B) + (11 \times C - C) + D, \\ n &= (1001 \times D - D) + (99 \times C + C) + (11 \times B - B) + A, \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} m &= 1001 \times A + 99 \times B + 11 \times C - A + B - C + D, \\ n &= 1001 \times D + 99 \times C + 11 \times B - D + C - B + A. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} m + n &= 1001 \times A + 1001 \times D + 99 \times B + 99 \times C + 11 \times C + 11 \times B \\ &= 1001(A + D) + 110(B + C), \end{aligned}$$

e como 1001 e 110 são múltiplos de 11 segue o resultado.

6ª Questão. A polícia prendeu uma dupla que cometera um delito em conjunto e que a polícia tem evidências suficientes da culpa de ambos, mas não possui elementos suficientes para incriminá-los. O promotor estima que o tempo de prisão para ambos deveria ser de 2 anos. O delegado irá interrogar os dois prisioneiros, que não têm possibilidade de comunicação na cadeia, e adota a seguinte estratégia: Para cada um o delegado propõe o seguinte jogo: *Se você confessar o crime implicando o seu parceiro e ele por sua vez não confessar você sairá livre enquanto ele terá 10 anos de prisão. Se ambos confessarem o crime o tempo de prisão será de 05 anos para cada um. Se ambos não confessarem o crime então vocês ficarão presos por dois anos.*

O dilema de cada prisioneiro é o seguinte: qual a melhor estratégia racional a ser adotada para minimizar seu tempo na cadeia, confessar ou não?

Descreva a melhor estratégia para cada prisioneiro no jogo descrito justificando claramente sua resposta.

Solução apresentada por: Alice Duarte Scarpa, Isadora Vianna Rodrigues.

Não confessando o crime, podem ficar 2 ou 10 anos presos. Confessando podem ficar nenhum ou 5 anos presos. Confessando o pior que pode acontecer é ficar 5 anos presos e não confessando o pior é ficar 10 anos. Confessando há chance de libertação e no caso de ambos confessarem a pena é menor. Logo o melhor é confessar.

Nível 2

1ª Questão. Uma fração da forma $\frac{1}{m}$, onde m é um número inteiro positivo, é chamada de unitária.

a) Calcule a soma das frações unitárias

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{115}.$$

b) Calcule frações unitárias $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ tais que $\frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{59}{70}$.

c) Escreva as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{11}{13}$ como soma de frações unitárias distintas.

Solução apresentada por: Vinícius Queiroz de Almeida.

a)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{115}=\frac{345}{690}+\frac{239}{690}+\frac{46}{690}+\frac{6}{690}=\frac{627}{690}=\frac{209}{230}.$$

b) Sabendo que o denominador da fração $\frac{59}{70}$ é o mínimo múltiplo comum (mmc) entre 2 e mais dois números, estes podem ser 5 e 7 e

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{35}{70}+\frac{14}{70}+\frac{10}{70}=\frac{59}{70}.$$

Logo, $m=7$ e $n=5$.

c) Como $\frac{5}{7}$ tem denominador 7, $\frac{1}{7}$ é uma parcela da soma procurada. Considerando que outra parcela é $\frac{1}{2}$, temos $\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{9}{14}$. Sabendo que $\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$, falta $\frac{1}{14}$ na soma anterior para dar $\frac{5}{7}$. Logo,

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}.$$

Usando os mesmos argumentos para $\frac{11}{13}$, sabemos que a fração $\frac{1}{13}$ é uma parcela da soma procurada. Considerando $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ como parcelas, obtemos a soma $\frac{71}{78}$, que não é equivalente a $\frac{11}{13}$. Assim, vamos considerar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ como parcelas, temos a soma $\frac{43}{52}$. Como $\frac{44}{52}$ é equivalente a $\frac{11}{13}$, acrescentamos $\frac{1}{52}$ e obtemos,

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}++\frac{1}{52}=\frac{11}{13}.$$

2ª Questão. Um n-minó é um polígono formado colocando-se n quadrados justapostos através de seus lados. Abaixo temos desenhado um 3-minó e um 5-minó. Em ambos casos a soma dos ângulos internos é igual a 720^o.

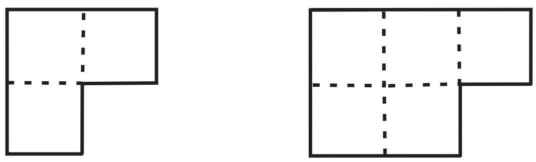


Figura 1.2: 3-minó e 5-minó

a) Desenhe todos os 4-minós.

a) Qual o valor mínimo da soma dos ângulos internos de um 4-minó. E o valor máximo? Justifique a sua resposta.

c) Qual o valor mínimo da soma dos ângulos internos de um n-minó? Justifique a sua resposta.

Solução apresentada por: André R. Salerno, Erick Assis Lima, Francisco H. Issa Mattos.

a) Desenhar 5 figuras, (considere congruentes as rotações das figuras) sendo:

i) 4 quadrados um em cima do outro formando um retângulo vertical;

ii) 3 quadrados um em cima do outro e um no rodapé inferior formando um L;

iii) 3 quadrados um em cima do outro e um colado no meio à esquerda;

iv) 2 quadrados um em cima do outro colados em outros 2 da mesma forma na mesma altura, formando um quadrado grande;

v) 2 quadrados um em cima do outro e um no rodapé em cima do outro.

b) Observe que na junção de dois quadrados 4 dos ângulos retos desaparecem (pois ângulos rasos não definem ângulos internos nem vértices). Assim, o valor mínimo dos ângulos internos de um 4-minó é $360°$, e ocorre no quadrado grande, figura i) e iv) do item a). O valor máximo é de $12 \times 90° = 1080°$, e ocorre na figura 1.2 iii).

c) O valor mínimo da soma dos ângulos internos de um $n-$minó é $360°$, e ocorre, por exemplo, na configuração tipo i) e iv) onde se empilham os n quadrados formando um retângulo.

3ª Questão. Seja m um número inteiro positivo formado por quatro algarismos e n o número escrito na ordem inversa dos algarismos de m. Por exemplo, os números 2476 e 6742 estão em escritos em ordem inversa.

a) Mostre que $m + n$ é sempre um múltiplo de 11.

b) Generalize o item a) supondo um número inteiro positivo formado por um número par de algarismos.

a) **Solução apresentada por: Francisco H. Issa Mattos**.

Sejam a, b, c e d os algarismos do número m, assim:

$$\begin{aligned} m &= a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d \\ &= (1001 \times a - a) + (99 \times b + b) + (11 \times c - c) + d \\ &= 11(91 \times a + 9 \times b + c) - a + b - c + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \\ &= (990 \times d + 10 \times d) + (110 \times c - 10 \times c) + (22 \times b - 12 \times b) + a \\ &= 11(90 \times d + 10 \times c + 2 \times b) + 10 \times d - 10 \times c - 12 \times b + a \end{aligned}$$

$m + n = 11(91 \times a + 10 \times b + 10 \times c + 91 \times d)$.

b) **Solução apresentada pela Comissão**.

Seja $m = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_{2n+1} 10^{2n+1}$ e $n = a_{2n+1} + a_{2n} 10 + \cdots + a_1 10^{2n} + a_0 10^{2n+1}$, então

$$\begin{aligned} m + n =& (a_0 + a_{2n+1})(10^{2n+1} + 1) + (a_1 + a_{2n})(10^{2n} + 10) + \\ & (a_2 + a_{2n-1})(10^{2n-1} + 10^2) + \cdots + (a_n + a_{n+1})(10^{n+1} + 10^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m + n =& (a_0 + a_{2n+1})(10^{2n+1} + 1) + 10(a_1 + a_{2n})(10^{2n-1} + 1) + \\ & 10^2(a_2 + a_{2n-1})(10^{2n-3} + 1) + \cdots + 10^n(a_n + a_{n+1})(10 + 1). \end{aligned}$$

Usando indução finita, prova-se que $10^{2n+1} + 1$ é múltiplo de 11 para todo n natural.

Portanto $m + n$ é divisível por 11.

4ª Questão. A polícia prendeu uma dupla que cometera um delito em conjunto e que a polícia tem evidências suficientes da culpa de ambos, mas não possui elementos suficientes para incriminá-los. O promotor estima que o tempo de prisão para ambos deveria ser de 2 anos. O delegado irá interrogar os dois prisioneiros, que não têm possibilidade de comunicação na cadeia, e adota a seguinte estratégia: Para cada um o delegado propõe o seguinte jogo. *Se você confessar o crime implicando o seu parceiro e ele por sua vez não confessar você sairá livre enquanto ele terá 10 anos de prisão. Se ambos confessarem o crime o tempo de* *prisão será de 05 anos para cada um. Se ambos não confessarem o crime então vocês ficarão presos por dois anos.*

O dilema de cada prisioneiro é o seguinte: qual a melhor estratégia a ser adotada para minimizar seu tempo na cadeia, confessar ou não?

Descreva a melhor estratégia para cada prisioneiro no jogo descrito justificando claramente sua resposta.

Solução apresentada por: Luiza N. de Souza Melo.

A melhor opção seria confessar, pois se o outro prisioneiro não confessar ele corre sério risco de pegar uma pena de 10 anos de prisão.

5ª Questão. Usando os algarismos 1, 1, 2, 2, 3, 3 pode-se formar o número 312132 que possui a seguinte propriedade: Entre os algarismos 1, temos um algarismo, entre os algarismos 2 temos dois algarismos e entre os algarismos 3 temos três algarismos.

a) Usando os algarismos 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 forme um número de 8 algarismos de modo que entre os algarismos i $(i = 1, 2, 3, 4)$ tenhamos i algarismos.

b) Mostre que o problema análogo ao anterior com os algarismos 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5 não possui solução.

a) **Solução apresentada por: Erick Assis Lima**.

Como o número deve ser formado por 8 algarismos, usando a propriedade, primeiro coloca-se os dois 4 (os maiores algarismos), distando um do outro 4 "casas": $\underline{4}$ _ _ _ _ $\underline{4}$ _ _, depois os dois 3: $\underline{4}$ _ $\underline{3}$ _ _ $\underline{4}$ $\underline{3}$ _ com a restrição de não ser na casa 2. A seguir coloca-se os dois 2 (com a restrição de não ser na quarta casa e nem na segunda, pelo fato de que os dois 1 devem ser colocados de tal maneira que distem 1 casa um do outro podendo ser apenas a segunda e a quarta. Sobrando as casas 5 e 8 para os dois números 2. Ficando assim: $\underline{4}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}$.

b) **Solução apresentada pela Comissão**.

Seja a_j a posição do primeiro j que aparece no número. Então $a_j + (j+1)$ é a posição do segundo j. Assim

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{2n} i = \frac{2n(2n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = 2\sum_{k=1}^{2n} a_j + \sum_{j=1}^{n} j + n. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2), temos

$$2\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2-n}{2},$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{3n^2-n}{4}.$$

Como cada a_j é inteiro, $3n^2 - n$ é divisível por 4. Se $n = 5$, $3n^2 - n = 70$ que não é divisível por 4. Logo o problema não tem solução.

6ª Questão. Existem números naturais n com a seguinte propriedade:

"n e 3^n possuem o mesmo algarismo das unidades."

Por exemplo, 7 e $3^7 = 2187$, 1**3** e $3^{13} = 159432\mathbf{3}$; 2**7** e $3^{27} = 762559748498\mathbf{7}$.

Se colocarmos todos os números inteiros positivos que possuem esta propriedade ordenadamente em uma seqüência crescente, qual é o número de ordem 2003?

Solução apresentada por: André Rodrigues Salerno, Francisco H. Issa Mattos.

Observando a tabela:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	36
algarismos das unidades de 3^n	3	9	7	1	3	9	7	1	$\cdots$	1

Os números n que obedecem a propriedade são 7, 13, 27, 33. O que nos leva a dizer que os próximos serão 47, 53, 67,73, $\cdots$.

Assim, 7 é o primeiro, 13 é o segundo, 27 o terceiro, vemos que se a posição de um número dessa seqüência for par, ele terminará em 3 e se for ímpar em 7. Os demais algarismos de n são sua posição menos 1, por exemplo: o 24º número da seqüência será 233 pois 4 é par (portanto as unidades serão 3) e 23+1 é igual a 24. Assim o 2003º número será 20027, porque 2003 é ímpar e 2002+1=2003.

Solução apresentada pela Comissão.

O algarismo das unidades é o resto da divisão do número por 10. Temos, $3^1 = 0 \times 10 + 3$, $3^2 = 0 \times 10 + 9$, $3^3 = 2 \times 10 + 7$, $3^4 = 8 \times 10 + 1$, $3^5 = 24 \times 10 + 3, \cdots$. Podemos comprovar que a partir de 3^5 o resto se repete na ordem das 4 primeiras potências: 3, 9, 7, 1. Assim os números naturais n com a propriedade citada são: $7,\ 13,\ 27,\ 33, \cdots$, e o número de ordem 2003 é igual 20027.

Nível 3

1ª Questão. Uma fração da forma $\frac{1}{m}$, onde m é um número inteiro, é chamada de unitária.

a) Calcule a soma das frações unitárias

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{115} + \frac{1}{230}.$$

b) Calcule frações unitárias $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ tais que $\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{59}{70}$.

c) Escreva as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{11}{13}$ como soma de frações unitárias distintas.

d) Dado um número primo p escreva a fração unitária $\frac{1}{p}$ como soma de duas frações unitárias, isto é, resolva a equação

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \quad m,\ n\ \in \mathbb{N}.$$

Solução apresentada por: Danilo B. do Nascimento.

a) Temos,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{115} + \frac{1}{230} = \frac{27}{30} + \frac{3}{230} = \frac{1}{10}(9 + \frac{3}{23}) = \frac{21}{23}.$$

b) Temos

$$\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{59}{70} - \frac{1}{2} = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}.$$

Logo $m = 7$ e $n = 5$.

c) **Solução apresentada pela Comissão**.
Temos

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}, \quad \frac{11}{13} = \frac{44}{52} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{52}.$$

d) Por cálculo direto observamos que as únicas soluções são: $m = n = 2p$ ou $m = p + 1,\ n = p(p + 1)$.

2ª Questão. a) Para todo $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{n}$.

b) Mostre que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2003} > 6$.

Solução apresentada por: Guilherme Rodrigues Salerno.

a) Para $n = 2$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ é verdadeiro. Para todo n maior que 2, $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$, assim toda a soma é maior que $\frac{1}{n}$.
b) A soma $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2003}$ é maior que $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{512}{1024}$, pois $\frac{2}{4} < \frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; $\frac{4}{8} < \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}, \cdots$, e de modo geral,

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Como $1 + \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \cdots + \frac{2^9}{2^{10}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 = 6$, temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2003} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{512}{1024} = 6.$$

3ª Questão. Seja Δ um triângulo de lados a, b, e c e alturas h_a em relação ao lado a, h_b em relação ao lado b e h_c em relação ao lado c. Dizemos que Δ é um *triângulo altitude* se ele for semelhante a um triângulo Δ_h cujos lados são as alturas h_a, h_b e h_c.

a) Mostre que se Δ com lados $a > b > c$ é um triângulo altitude então $\frac{a}{h_c} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_a}$.

b) Mostre que Δ com lados $a > b > c$ é um triângulo altitude se, e somente se, $b^2 = ac$.

Solução apresentada por: Gustavo de Souza Pinto.

a) Sendo a área de Δ igual a $A = \frac{b \cdot h}{2}$, quanto maior o lado, menor é a altura em um mesmo triângulo, pois sendo b (base) o lado e h a altura relativa a esse lado, $h = \frac{2A}{b}$. Assim, para uma mesma área (A), quanto maior a base, menor é a altura. Sendo $a > b > c$, tem-se: $a > b \longrightarrow h_b > h_a$ e $b > c \longrightarrow h_c > h_b$, logo $h_c > h_b > h_a$, sendo h_c, h_b e h_a os lados de Δ. Fazendo a razão de semelhança entre os lados dos triângulos Δ (triângulo altitude de lados $a > b > c$) e Δ_h (triângulo semelhante a Δ, com lados $h_c > h_b > h_a$), tem-se:

$$\frac{a}{h_c} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_a}.$$

b) Das relações para um triângulo altitude $\dfrac{a}{h_c} = \dfrac{b}{h_b} = \dfrac{c}{h_a}$ segue que

$$b = \frac{c \cdot h_b}{h_a} \quad \text{e} \quad h_c = \frac{a \cdot h_a}{c}.$$

Tem-se

$$A_\Delta = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

o que implica $h_b = \dfrac{c \cdot h_c}{b}$, logo

$$b = \frac{c \cdot \frac{c \cdot h_c}{b}}{h_a}, \quad \text{ou seja,} \quad b^2 = c^2 \cdot \frac{h_c}{h_a} = c^2 \cdot \frac{\frac{a \cdot h_a}{c}}{h_a} = a \cdot c,$$

assim prova-se que Δ com lados $a > b > c$ é um triângulo altitude se, e somente se, $b^2 = ac$.

4ª Questão. Considere um polinômio real $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, possuindo duas raízes reais x_1 e x_2. Mostre que se $|x_i| \leq 1$ ($i = 1, 2$) então $-(a + c) \leq b \leq (a + c)$ e $c^2 \leq a^2$.

Solução apresentada por: Lidiane Pires Antoneli.

Observe que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a}, \\ \\ x_1 \cdot x_2 &= \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

Como $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$, segue que $-1 \leq \dfrac{c}{a} \leq 1$. De $a > 0$ tem-se $-a \leq c \leq a$. Portanto, $|c| \leq a$ e $c^2 \leq a^2$.

Observe ainda que $p(1) = a+b+c = (a+c)+b$ e $p(-1) = a-b+c = (a+c)-b$, e como $a > 0$ e $|x_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, temos que $p(1) \geq 0$ e $p(-1) \geq 0$ o que implica $b \geq -(a+c)$ e $b \leq a+c$, respectivamente.

5ª Questão. Existem números naturais n com a seguinte propriedade: "*n e 3^n possuem o mesmo algarismo das unidades.*"

Por exemplo, 7 e $3^7 = 2187$, 1**3** e $3^{13} = 159432\mathbf{3}$; 2**7** e $3^{27} = 762559748498\mathbf{7}$.

Se colocarmos todos os números inteiros positivos que possuem esta propriedade em uma seqüência crescente, qual é o número de ordem 2003?

Solução apresentada por: Gustavo de Souza Pinto, Lidiane Pires Antoneli.

a) Observando as primeiras potências de 3 e seus algarismos das unidades obtém-se a seguinte seqüência de números com a propriedade desejada:

$$7, 13, 27, 33, 47, 53, 67, 73, 87, 93, \cdots.$$

Os elementos de ordem ímpar da seqüência acima têm algarismo das unidades igual a 7 e vale a seguinte regra: o n-ésimo termo da seqüência, com n ímpar, é dado por $10(n-1)+7$. Assim o 2003º termo da seqüência é $10 \cdot 2002 + 7 = 20027$.

6ª Questão. Seja $\alpha > 0$ um número irracional e defina para todo $n \in \mathbb{N}$ o número inteiro $\lfloor n\alpha \rfloor$ como sendo o maior inteiro menor que $n\alpha$. Por exemplo, $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ e $\lfloor 5\sqrt{2}\rfloor = 7$.

a) Suponha $1 < \alpha < 2$, α um número irracional. Mostre que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = \lfloor n\alpha \rfloor$ não é sobrejetiva, isto é, existe pelo menos um número natural p tal que $p \neq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sejam α e β irracionais positivos tais que $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Defina também $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $g(n) = \lfloor n\beta \rfloor$. Mostre que $f(\mathbb{N}) \cap g(\mathbb{N}) = \emptyset$ e $f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, onde $f(\mathbb{N}) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ e $g(\mathbb{N}) = \{g(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Assim os conjuntos $f(\mathbb{N})$ e $g(\mathbb{N})$ definem uma partição em $\mathbb{N}$.

c) Existe $\alpha > 0$ irracional tal que $f(n) = \lfloor n\alpha \rfloor$ não seja injetiva, isto é, existem números distintos $m,\ n \in \mathbb{N}$ tais que $f(m) = f(n)$?

Solução apresentada pela Comissão.

a) Suponhamos $\frac{3}{2} \geq \alpha < 2$. Neste caso tem-se $\lfloor \alpha \rfloor = 1, \quad \lfloor 2\alpha \rfloor = 3$ e portanto $2 \neq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $\frac{4}{3} < \alpha < \frac{3}{2}$ tem-se $\lfloor \alpha \rfloor = 1, \quad \lfloor 2\alpha \rfloor = 2, \quad \lfloor 3\alpha \rfloor = 4$ e portanto $3 \neq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em geral para $\frac{n+2}{n+1} < \alpha < \frac{n+1}{n}$ tem-se que $f(n) = n$ e $f(n+1) = n+2$ e portanto f não é sobrejetiva.

b) Primeiro prova-se que $f(\mathbb{N}) \cap g(\mathbb{N}) = \emptyset$. Seja $f(m) = g(n) = k$. Logo,

$k < m\alpha < k+1$ e $k < n\beta < k+1$ pois α e β são irracionais.

Portanto tem-se,

$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k}, \qquad \frac{n}{k+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n}{k}.$$

Assim obtém-se,

$$\frac{m}{k+1} + \frac{n}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{m}{k} + \frac{n}{k}.$$

Como $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ por hipótese obtém-se, $\frac{m+n}{k+1} < 1 < \frac{m+n}{k}$ que é equivalente a $k < m+n < k+1$. Isto é uma contradição pois encontra-se um número inteiro $m+n$ entre dois números inteiros consecutivos.

A seguir mostra-se que $f(\mathbb{N}) \cup g(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Por contradição suponha que exista um inteiro k tal que $k \neq f(n), k \neq g(m)$. Logo,

$$m\alpha < k < k+1 < (m+1)\alpha, \quad n\beta < k < k+1 < (n+1)\beta.$$

Repetindo o procedimento anterior obtém-se as desigualdades,

$$\frac{m}{k} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m+1}{k+1}, \quad \frac{n}{k} < \frac{1}{\beta} < \frac{n+1}{k+1}.$$

Somando as duas desigualdades,

$$\frac{m+n}{k} < \frac{1}{\alpha} < 1 < \frac{m+n+2}{k+1}.$$

Logo, $m+n < k < k+1 < m+n+2$ que é uma contradição.

c) Tomando $\alpha < 1/2$ tem-se $1\alpha < 1$ e $2\alpha < 1$. Logo $f(1) = f(2) = 0$.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 5, 2004, 33-43

Equações do Segundo Grau e Geometria Plana

Ronaldo Garcia

Resumo. Neste artigo são obtidos resultados relacionando a geometria do triângulo, dos polígonos convexos e das cônicas com as equações do segundo grau.

1.1 Introdução

A *geometria euclidiana plana* é fonte secular de problemas de matemática de variados graus de dificuldade. A sua síntese e resultados inspiraram por várias gerações grandes descobertas, inclusive a *geometria não euclidiana*. O desenvolvimento da geometria no período grego foi um grande marco. Os conceitos de *distância* e *ângulo* são tão atuais quanto a vinte e seis séculos atrás.

Neste pequeno artigo, direcionado a alunos do ensino fundamental e médio, recordamos alguns conhecimentos clássicos e apresentamos, no contexto da geometria plana, alguns assuntos que continuam sendo desenvolvidos com técnicas mais sofisticadas de análise, álgebra e geometria. Para uma apresentação dos conhecimentos atualmente ensinados no ensino médio sugerimos ao leitor consultar os livros citados na bibliografia, [6].

1.2 Relações métricas no triângulo

Nesta seção recordamos algumas relações métricas do triângulo.

Considere um triângulo de lados a, b e c com ângulos internos α, β e γ. Veja figura 1.1. Definimos o semi-perímetro, s, do triângulo $\Delta(a, b, c)$

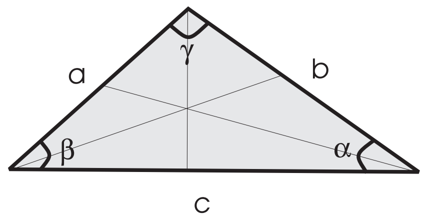


Figura 1.1: Triângulo $\Delta(a,b,c)$ com ângulos internos α, β, γ.

por $s = (a+b+c)/2$. Temos os seguintes resultados que deixamos a cargo do leitor certificá-los.

$$\begin{array}{ll}
A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) & \text{(Fórmula da Área ou de Héron)} \\
a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha & \text{(Lei dos cossenos)} \\
\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma} & \text{(Lei dos senos)} \\
cotg\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4A}, & cotg\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} \\
sen\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}, & \cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}
\end{array} \tag{1.1}$$

Relações análogas para os ângulos β e γ são válidas. Para um estudo mais apurado de geometria elementar sugerimos o leitor as seguintes referências, [1], [2] e [7].

1.3 Deslocamento paralelo ao triângulo Δ

Dado um triângulo $\Delta = \Delta(a,b,c)$ e número real $r > 0$ consideramos o conjunto dos pontos $p \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(p, \Delta) = r,$$

onde $d(., \Delta)$ denota a distância de p ao triângulo Δ e a mesma é definida como sendo a menor distância de p aos vértices e aos segmentos de retas suportes do triângulo.

Como o triângulo Δ delimita duas regiões no plano, o mesmo possui duas orientações (interna e externa) e temos que $\{p \in \mathbb{R}^2 : d(p,\Delta) = r\}$ possui duas componentes conexas, $\Delta^+(r)$ e $\Delta^-(r)$; as quais sãos chamadas de *deslocamentos paralelos* de Δ. Mais precisamente temos,

Lema 1. *Seja* $\Delta = \Delta(a,b,c)$ *um triângulo. Então:*

i) Para todo $r > 0$ *o conjunto* $\Delta^+(r)$ *é formado de segmento de retas e arcos de circunferências (círculos) e está contido na região exterior ao triângulo* Δ*.*

ii) Para $r > 0$ *pequeno, o conjunto* $\Delta^-(r)$ *é um triângulo semelhante a* Δ *e está contido na região interna ao triângulo* Δ*. Veja a figura 1.2.*

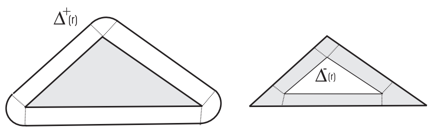


Figura 1.2: Conjuntos $\Delta^+(r)$ e $\Delta^-(r)$ equidistantes ao triângulo Δ.

Demonstração. Para cada ponto de $p \in \Delta$ consideramos um círculo centrado em p e raio r, o qual denotamos por $C_p(r)$. Os conjuntos $\Delta^+(r)$ e $\Delta^-(r)$ são as componentes conexas do envelope da família de círculos $\{C_p(r) : p \in \Delta\}$. Relembramos que o *envelope* é, intuitivamente, o *conjunto tangente* à família considerada. Claramente o conjunto $\Delta^+(r)$ é formado de segmentos de retas paralelas aos lados do triângulo Δ e de arcos de círculos que faz a concordância com estes segmentos. Veja figura 1.3.

Já o conjunto $\Delta^-(r)$ é formado somente de segmentos de retas e define um triângulo. Observamos que os vértices de $\Delta^-(r)$ estão nas bissetrizes dos ângulos de Δ e a distância r dos lados de Δ. Logo, pelas propriedades de semelhança de triângulos conclui-se que $\Delta^-(r)$ é semelhante a Δ. □

Observação 1. *Sugerimos ao leitor uma consulta ao livro de J. Lucas, [7], para um estudo sobre as congruências e semelhanças de triângulos.*

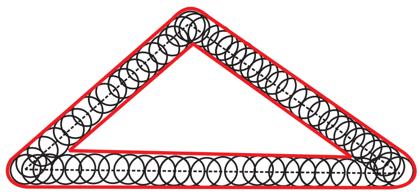


Figura 1.3: Envelope de círculos que definem os conjuntos $\Delta^+(r)$ e $\Delta^-(r)$, equidistantes ao triângulo Δ.

Observação 2. *Observamos que a operação de deslocamento paralelo não é simétrica. Por exemplo, o deslocamento paralelo de $\Delta^-(r)$ não tem Δ como uma das componentes conexas do envelope associado.*

Proposição 1. *Seja A a área da região delimitada pelo triângulo Δ e $s = (a+b+c)/2$ o seu semi perímetro. Então:*

i) A área da região delimitada por $\Delta^+(r)$ é $A + 2sr + \pi r^2$.

ii) A área da região delimitada por $\Delta^-(r)$ é $A - 2sr + \frac{s^2}{A} r^2$.

Demonstração. Consideramos as figuras 1.2 e 1.4. O acréscimo em área a região delimitada por Δ corresponde a de três retângulos cujas bases são os lados do triângulo Δ e altura r e de três arcos circulares de raio r e ângulos centrais iguais a $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ e $\pi - \gamma$.

Portanto a área de $\Delta^+(r)$ é dada por

$$A + r(a+b+c) + \frac{1}{2} r^2 (\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma).$$

Como $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ segue o resultado do item i).

A área de $\Delta^-(r)$ é dada por

$$\begin{aligned} &A - r(a - h_b - h_c) - r(b - h_a - h_c) - (c - h_a - h_b) - rh_a - rh_b - rh_c \\ =&A - r(a+b+c) + r(h_a + h_b + h_c), \end{aligned}$$

onde denotamos por h_a, h_b e h_c os lados dos triângulos formados nos vértices, veja figura 1.4.

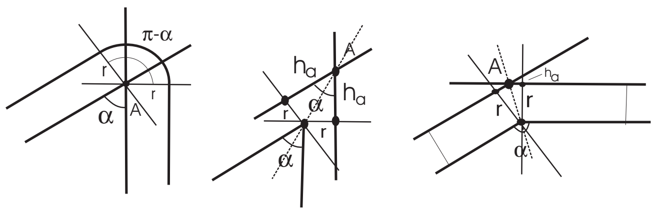


Figura 1.4: Conjuntos $\Delta^+(r)$ (esquerda) e $\Delta^-(r)$ (centro e direita) na vizinhança dos vértices (ângulo agudo e obtuso) do triângulo Δ.

Observamos que $h_a = rcotg(\frac{\alpha}{2})$, $\quad h_b = rcotg(\frac{\beta}{2})$, $\quad h_c = rcotg(\frac{\gamma}{2})$. Logo a área de $\Delta^-(r)$ é dada por:

$$A - (a+b+c)r + r^2[cotg(\frac{\alpha}{2}) + cotg(\frac{\beta}{2}) + cotg(\frac{\gamma}{2})].$$

De (1.1) temos que

$$\begin{aligned} cotg(\frac{\alpha}{2}) + & cotg(\frac{\beta}{2}) + cotg(\frac{\gamma}{2}) = \\ & = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} \\ & = \frac{s^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{s^2}{A}. \end{aligned}$$

□

Corolário 1. *O raio do círculo inscrito a um triângulo* $\Delta(a,b,c)$ *é* $r = \frac{A}{s}$.

Demonstração. Pela Proposição 1 a área do triângulo $\Delta^-(r)$ é igual a

$$A - 2sr + \frac{s^2}{A}r^2 = \frac{(A-sr)^2}{A}.$$

Temos que a área da região delimitada por $\Delta^-(r)$ é igual a zero quando $\Delta^-(r)$ reduzir a um ponto, digamos p_0. Pela definição p_0 é equidistante aos três lados de Δ e é o incentro associado. Portanto $A = sr$ e r é o raio do círculo inscrito. □

1.4 Deslocamento paralelo a um polígono convexo

Nesta seção generalizamos o resultado da seção 1.3 para polígonos convexos.

Proposição 2. *Seja A a área da região delimitada por um polígono convexo Δ e L o seu perímetro (comprimento). Seja $\Delta^+(r) = \{p \in \mathbb{R}^2 \setminus int(\Delta) : d(p, \Delta) = r\}$. A área da região delimitada por $\Delta^+(r)$ é $A + Lr + \pi r^2$.*

Demonstração. Sejam a_i os lados do polígono Δ, α_i os ângulos internos e β_i os correspondentes ângulos externos. De forma análoga ao caso do triângulo a contribuição angular de área, correspondente a cada vértice do polígono, é $\frac{1}{2}r^2(\pi - \alpha_i) = \frac{1}{2}r^2\beta_i$. Logo a área de $\Delta^+(r)$ será:

$$A + r(\sum_i a_i) + \frac{1}{2}r^2(\sum_i \beta_i).$$

Como $\sum_i \beta_i = 2\pi$ (soma dos ângulos externos de um polígono convexo) segue o resultado. □

Observação 3. *A função Área $(\Delta^+(r)) = A + Lr + \pi r^2$ é geometricamente correta apenas para $r > 0$. Especulando que o seu discriminante seja positivo obtemos a seguinte inequação $L^2 - 4\pi A \geq 0$. De fato esta inequação é sempre verdadeira e é de fundamental importância em matemática, conhecida como* desigualdade isoperimétrica. *Veja [4].*

Proposição 3. *Seja A a área da região delimitada por um polígono convexo Δ de ângulos internos α_i e L o seu perímetro (comprimento). Seja $\Delta^-(r) = \{p \in int(\Delta) \subset \mathbb{R}^2 : d(p, \Delta) = r\}$. A área da região delimitada por $\Delta^-(r)$ é $A - Lr + [\sum_i cotg(\frac{\alpha_i}{2})]r^2$.*

Demonstração. Denotamos por a_i os lados do polígono Δ e por α_i os ângulos internos correspondentes aos seus vértices.

Analogamente ao caso do triângulo a área de $\Delta^-(r)$ é obtida a partir da área de Δ subtraindo as áreas dos n retângulos de altura r e bases $a_i - h_i - h_{i+1}$ e dos $2n$ triângulos de base r e altura h_i. Portanto temos,

$$\begin{aligned}
&A - r(a_1 - h_1 - h_2) - r(a_2 - h_2 - h_3) - \cdots - (a_n - h_n - h_1) \\
&-(rh_1 + rh_2 + \cdots + rh_n) \\
=&A - r(\sum_i a_i) + r(\sum_i h_i),
\end{aligned}$$

onde denotamos por h_i os lados dos triângulos formados nos vértices, veja figura 1.4. Como $h_i = rcotg(\frac{\alpha_i}{2})$ segue o resultado.

$\square$

Observação 4. *O coeficiente* $\sum_{i=1}^{n} cotg(\frac{\alpha_i}{2})$ *para o cálculo da área de* $\Delta^-(r)$ *em geral não tem uma simplificação simples como no caso do triângulo. Isto ocorre porque* n *lados não determinam univocamente o polígono quando* $n > 3$. *Somente para* $n = 3$ *temos rigidez, i.e., os ângulos internos e externos do triângulo são determinados pelos seus lados.*

1.5 Conjuntos Equidistantes no Plano

Os resultados anteriores nos sugerem considerar outras situações geométricas no plano euclidiano. Nesta seção iremos definir a parábola, a hipérbole e a elipse usando os conceitos de conjuntos equidistantes.

Começamos observando que o conjunto equidistante a duas retas concorrentes no plano é uma reta, denominada *bissetriz*. O conjunto equidistante a dois pontos é uma reta chamada *mediatriz* e o conjunto equidistante a único ponto é um *círculo* ou *circunferência*. Observamos que não fazemos diferença entre círculo e circunferência.

Proposição 4. *Considere dois círculos* $C_a(r)$ *e* $C_b(R)$. *Defina o conjunto* $E(r, R, a, b) = \{\ p \in \mathbb{R}^2 : d(p, C_a(r)) = d(p, C_b(R))\ \}$.

i) Suponha que $C_a(r)$ *e* $C_b(R)$ *sejam disjuntos e que não possuem região interior em comum, então* $E(r, R, a, b)$ *é um ramo de hipérbole.*

ii) Suponha que $C_a(r)$ *e* $C_b(R)$ *sejam disjuntos e que possuam região interior em comum, então* $E(r, R, a, b)$ *é uma elipse se* $a \neq b$ *e é um círculo de raio* $\frac{1}{2}(r + R)$ *quando* $a = b$.

iii) Considere uma reta ℓ *disjunta do círculo* $C_a(r)$ *e considere o conjunto* $E(r, a, \ell) = \{\ p \in \mathbb{R}^2 : d(p, C_a(r)) = d(p, \ell)\ \}$. *Então* $E(r, a, \ell)$ *é uma parábola.*

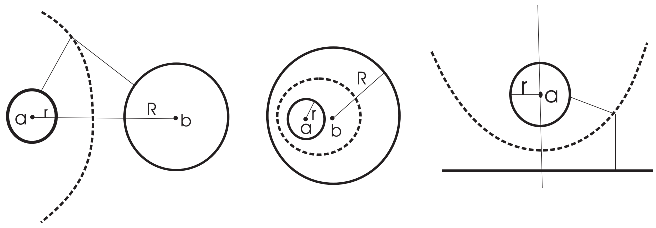


Figura 1.5: Ramo de hipérbole, elipse e parábola

Demonstração. Na situação descrita no item i) temos que $d(p, C_a(r)) = |p-a| - r$, onde $|p-a|$ é a distância euclidiana entre p e a. Também, $d(p, C_b(R)) = |p-b| - R$. Logo $d(p, C_a(r)) = d(p, C_b(R))$ se, e somente se, $|p-a| - r = |p-b| - R$ que é equivalente a $|p-b| - |p-a| = R - r$. A equação anterior é exatamente a definição geométrica de hipérbole: "*é o lugar geométrico tais que a diferença entre as distâncias a dois pontos fixados é constante.*".

Na situação descrita no item ii) temos que $d(p, C_a(r)) = |p-a| - r$ e $d(p, C_b(R)) = R - |p-b|$. Logo $d(p, C_a(r)) = d(p, C_b(R))$ se, e somente se, $|p-a| - r = R - |p-b|$ que é equivalente a $|p-b| + |p-a| = R + r$. Esta equação é a definição geométrica da elipse: "*é o lugar geométrico tais que a soma das distâncias a dois pontos fixados é constante.*".

Na situação descrita no item iii) temos que $d(p, C_a(r)) = |p-a| - r$. Logo $d(p, C_a(r)) = d(p, \ell)$ se, e somente se, $|p-a| - r = d(p, \ell)$ que é equivalente a $|p-a| = d(p, \ell) + r = d(p, \tilde{\ell})$, sendo $\tilde{\ell}$ uma reta paralela e uma distância r de ℓ. Esta equação é a definição geométrica da parábola: "*é o lugar geométrico tal que a distância a um ponto e uma reta é constante.*".

$\square$

A demonstração da proposição a seguir é um exercício elementar de álgebra (eliminação de radicais) e será confiada ao leitor atencioso.

Proposição 5. *A equação canônica da hipérbole é uma equação do segundo grau da forma*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A equação canônica da elipse é uma equação do segundo grau da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A equação canônica da parábola é uma equação do segundo grau da forma

$$y = ax^2.$$

Observação 5. *As formas canônicas acima relacionam de forma evidente a álgebra com a geometria analítica. É comum nos livros textos a apresentação das cônicas (elipse, hipérbole, parábola) a partir das suas correspondentes equações algébricas. Esta relação* álgebra × geometria *é um capítulo importante dos* Fundamentos e História da Matemática.

Também observamos que as cônicas desempenharam papel central na determinação, pelos físicos e astrônomos, da órbita e período do movimento da terra em relação ao sol. Lei da Gravitação Universal de Newton, Leis de Kepler, Problema dos n corpos, Teoria da Relatividade de Einstein, etc. Veja por exemplo [3] para uma introdução ao assunto.

Finalmente observamos que as propriedades focais da elipse *são fundamentais no estudo dos* bilhares.

Para finalizar esta seção apresentamos o seguinte problema clássico.
Problema: *Dado uma reta L no plano consideramos dois pontos F_1 e F_2 num semi plano definido por L. Determine um ponto $P \in L$ tal que $d(P, F_1) + d(P, F_2)$ seja mínimo?*

A solução mais comum deste problema consiste em refletir F_1 em torno de L e traçar uma reta L_1 ligando este ponto refletido ao ponto F_2. A intersecção $L \cap L_1$ é o ponto P_1 procurado.

Uma outra solução consiste em tomar uma família de elipses E_λ com focos F_1 e F_2. A elipse E_{λ_0} tangente a reta L tem a seguinte propriedade.

"Se $P = E_{\lambda_0} \cap L$, então os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ formam ângulos iguais com a reta L." Portanto $P = P_1$. Justifique!

1.6 Conclusão

Espero que este artigo seja oportuno para o leitor, especialmente para os alunos do ensino médio, e que também possa ser usado pelos professores como fonte de material complementar para o ensino dos conceitos aqui apresentados. Num próximo trabalho pretendemos explorar conceitos introduzidos neste artigo e generalizar várias noções geométricas.

Por exemplo, deixamos para o leitor investigar as estruturas *geométrica* e *algébrica* do conjunto de pontos $p \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(p, c_1) + d(p, c_2) + d(p, c_3) = cte,$$

onde c_1, c_2 e c_3 são três pontos dados e $d(p, q) = |p - q|$ é a distância entre dois pontos. Observamos que em vários casos analisados obtivemos que este conjunto é *convexo.* Além disso, analogamente as cônicas, este conjunto também pode ser definido em temos de distâncias a círculos com centros nos pontos c_i e de raios apropriados.

Outra noção que apresentamos ao leitor é a definição de *distância média* de um ponto a um conjunto. Dados n pontos c_i no plano consideramos o conjunto finito $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n\}$ e definimos

$$d_m(p, C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(p, c_i).$$

Assim a elipse é o conjunto de pontos do plano tais que a distância média ao conjunto de dois pontos (focos) é constante.

Quando o conjunto C considerado for um *contínuo* definimos a função $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(p, x)$ e

$$d_m(p, C) = \int_C f(x)dx / \int_C dx,$$

onde dx representa a medida apropriada e a formulação do conceito exige conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral, veja [5]. No caso mais simples quando C é unidimensional e tem comprimento finito, dx representa o elemento de comprimento.

Por exemplo, para $C = [a, b] \times \{0\}$, $a \neq b$ e $p = (0, c)$ temos que

$$d_m(p, C) = \frac{1}{2(b-a)}[b\sqrt{b^2 + c^2} - a\sqrt{a^2 + c^2} + c^2 ln \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}}].$$

Se $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $p \in D$, por exemplo $p = (1, 0)$, temos que $d_m(p, D) = \frac{32}{9\pi} = 1,131768484....$ De fato, neste caso

$$d_m(p, D) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} dydx = \frac{32}{9\pi},$$

onde $\pi = \text{Área}(D)$.

Para obter o resultado acima é necessário o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis.

Para $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ e $p = (0,0)$ temos que $d_m(p,C) = 1$. Para finalizar desafiamos ao leitor a definir e a calcular $d_m(p,C)$ para $p = (0,0)$ e $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Bibliografia

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., (1980).

[2] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Redécouvrons la Géométrie*, Éditions Jacques Gabay, (1997).

[3] D. Figueiredo e A. Neves, Equações Diferenciais Aplicadas, 2ª edição. Coleção Matemática Universitária, IMPA, (2001).

[4] R. Garcia e H. Castro, *Propriedades Extremais em Geometria Plana*, Revista da Olimpíada de Matemática, IME/UFG, (2002), 90-99.

[5] E. Lima, Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, 11ª edição. (2004).

[6] E. Lima et al., *A Matemática do Ensino Médio*, vols. 01, 02 e 03, Col. do Prof. de Matemática, Soc. Bras. de Matemática, (2000).

[7] J. Lucas, *Geometria Euclidiana Plana*, Col. do Prof. de Matemática, Soc. Bras. de Matemática, (1997).

Autor: Ronaldo Alves Garcia

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
ragarcia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 5, 2004, 44-53

Geometria e Álgebra: Construções Geométricas Possíveis e Impossíveis

Edméia Silva & Marcelo Souza

Resumo. Neste artigo trataremos de alguns problemas clássicos da Geometria, relacionados com a trisseção de um ângulo qualquer, a duplicação de um cubo, e a quadratura de um círculo. Veremos que usando a Álgebra podemos provar que estas construções são impossíveis usando régua sem marcas e compasso.

1.1 Introdução

Neste artigo apresentamos uma conexão entre a Geometria Plana e a Álgebra, através do tópico construções geométricas que está relacionado com polinômios irredutíveis e extensões quadráticas de corpos.

Durante um curso de Geometria I vimos que dados segmentos de medidas a, b, o segmento $\sqrt{a^2+b^2}$, corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos a e b, e sua construção se reduz ao traçado de segmentos perpendiculares. Uma pergunta que surge então é a seguinte: quais condições garantem que se pode construir segmentos via régua e compasso? Veremos uma forma de responder a esta pergunta. Vale destacar que Gauss, aos 17 anos de idade, investigou a construção de p-gons regulares, que são polígonos regulares de p lados, onde p é primo. A construção era até então conhecida apenas para $p = 3$ e $p = 5$. Gauss descobriu que o p-gon regular é construtível se, e somente se, p é um primo da forma $2^{2^n}+1$, chamado *Primo de Fermat.* Os cinco primeiros primos de Fermat são: 3, 5, 17, 257, 65.537. Na verdade, estes são os únicos primos de Fermat conhecidos, até hoje. Em 1732, Euler fatorou $2^{2^5}+1 = 641 \times 6.700.417$, mostrando que para $n = 5$, $2^{2^n}+1$ não é primo.

Trataremos de alguns problemas clássicos da Geometria, relacionados com a não possibilidade de se construir segmentos, utilizando uma régua sem marcas e um compasso, a saber: a trisseção de um ângulo qualquer dado, a duplicação de um cubo dado (entenda duplicar seu volume), e a quadratura de um círculo dado (construir um quadrado com mesma área do círculo dado).

1.2 Corpos e Extensões Quadráticas.

Para moldar nossas idéias devemos começar examinando um pouco das construções clássicas. A chave para um entendimento mais profundo está na tradução dos problemas geométricos para uma linguagem algébrica. Problemas de construção geométrica são do seguinte tipo: um certo conjunto de segmentos de reta é dado, e um ou mais segmentos são procurados. Os segmentos podem aparecer como lados de um triângulo a ser construído, como raio de círculo, ou como coordenadas cartesianas.

Por simplicidade vamos supor que queremos construir um segmento x, a partir de outros segmentos dados. A construção geométrica implica em resolver um problema algébrico do seguinte tipo:

i) primeiro devemos encontrar uma equação entre a quantidade x e as quantidades dadas;

ii) a seguir, encontrar o valor de x resolvendo a equação;

iii) finalmente devemos determinar se esta solução pode ser obtida por um processo algébrico que corresponda a uma construção usando régua sem marcas e compasso.

Se dois segmentos a e b são dados, cujas medidas representarão tanto o segmento quanto a sua medida em relação a um segmento "unitário", então é fácil construir soma, subtração e multiplicação por racional:

$$a + b,\ a - b,\ r \cdot a.$$

De fato, sobre uma reta suporte marcamos A e C, com $\overline{AC} = a$, e com a ponta seca do compasso em C e abertura b obtemos B de modo que C pertença ao segmento AB. Daí teremos $AB = a + b$. Para a diferença basta considerar B no segmento AC que teremos $AB = a - b$. (Fig. 1.1).

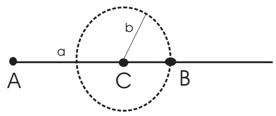


Figura 1.1:

Vejamos agora como construir $r \cdot a,\ r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Queremos construir $x = r \cdot a = \frac{m}{n} \cdot a$, logo x satisfaz à equação $\frac{n}{m} = \frac{a}{x}$, e sua construção pode ser feita usando semelhança de triângulos, da seguinte forma: trace um ângulo agudo e sobre os seus lados marque n e a no mesmo lado e m no outro, em seguida trace um segmento ligando a extremidade de n à extremidade de m, e um segmento paralelo ao anteriormente construído passando pela extremidade de a. O segmento obtido do mesmo lado de m será x (Fig.1.2).

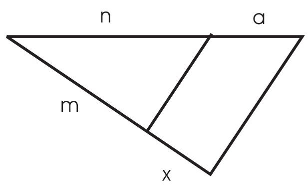


Figura 1.2:

De modo análogo, dados segmentos a e b, é possível construir os segmentos ab e $\frac{a}{b}$. Para construção de $x = \sqrt{a}$ utilize um segmento unitário DB, com $\overline{DB} = 1$, e um segmento AD, com $a = \overline{AD}$, para formar o diâmetro $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ de um semi-círculo. Levante uma reta perpendicular a este diâmetro passando pelo ponto D e obtenha o ponto de interseção desta reta com o semi-círculo, denotando este por C, teremos que $\overline{CD} = x$ é a altura relativa ao vértice C no triângulo retângulo ABC. De fato, AD e DB são projeções dos catetos AC e CB sobre a hipotenusa AB, e das relações para triângulo retângulo temos que $\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{AD}^2$ (Fig. 1.3).

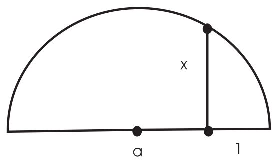


Figura 1.3:

Destas considerações segue-se que de quaisquer segmentos dados podemos construir qualquer quantidade que é expressa em termos destes, por repetidas aplicações, em número finito, de adições, subtrações, multiplicações e divisões. Um conjunto de números $\mathbb{F}$ tais que: $\alpha - \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{F}, \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{F}, \alpha \neq 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, é dito *corpo*. Como exemplo citamos o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, dos reais $\mathbb{R}$, e dos números complexos $\mathbb{C}$.

Dizemos que um corpo K é uma extensão de um corpo $\mathbb{F}$ se K contém $\mathbb{F}$. Por exemplo, $\mathbb{R}$ é uma extensão de $\mathbb{Q}$.

Dado $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{F}$, o conjunto $\mathbb{F}[\sqrt{\alpha}] = \{a + b\sqrt{\alpha} | a, b \in \mathbb{F}\}$ é um exemplo de subcorpo de $\mathbb{R}$, ou seja, um subconjunto que com as mesmas operações do corpo é também um corpo. Este é denominado corpo da adjunção de $\sqrt{\alpha}$ a $\mathbb{F}$. Observamos que:

a) Se $x = a + b\sqrt{\alpha}$, $x \neq 0$, então

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{a^2 - \alpha b^2} - \frac{b}{a^2 - \alpha b^2}\sqrt{\alpha},$$

onde $a^2 - \alpha b^2 \neq 0$, pois caso contrário teríamos $\alpha \in \mathbb{F}$.

b) $\mathbb{F}[\sqrt{\alpha}]$ é o menor corpo que contém $\mathbb{F}$ e $\sqrt{\alpha}$. De fato, se L é um corpo tal que $\mathbb{F} \subseteq L$ e $\sqrt{\alpha} \in L$, então $a + b\sqrt{\alpha} \in L, \forall a, b \in \mathbb{F}$. Portanto $\mathbb{F}[\sqrt{\alpha}] \subseteq L$.

Dizemos que $\mathbb{F}[\sqrt{\alpha}]$ é uma extensão quadrática de $\mathbb{F}$.

Façamos agora a seguinte pergunta:

O que têm em comum os três problemas clássicos da Geometria grega: a trisseção de um ângulo qualquer θ, a duplicação de um cubo de aresta a, e a quadratura de um círculo de raio a?

Resposta: Estes problemas da Geometria grega não têm solução, isto é, eles não são resolvidos, em geral, por meio de régua sem marcas e de um compasso, e como veremos ao longo deste trabalho, eles estão relacionados com o problema de se construir, a partir de um dado segmento

a, os segmentos: $y_1 = acos\frac{\theta}{3}$, $y_2 = a\sqrt[3]{2}$, $y_3 = a\sqrt{\pi}$.

Vamos agora definir um número real construtível.

Seja $\mathbb{F}$ um subcorpo qualquer de $\mathbb{R}$. O conjunto $P = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{F}\}$, é dito plano de $\mathbb{F}$.

Uma reta que contém dois pontos de P tem uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{F}$. Uma circunferência C em P é uma circunferência cujo centro $(\xi, \eta) \in P$ e cujo raio $r \in \mathbb{F}$ e é dada pela equação $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 = r^2$ que é equivalente a $x^2+y^2+ax+by+c = 0$, onde $a = -2\xi$, $b = -2\eta$, $c = \xi^2 + \eta^2 - r^2$.

As seguintes operações em P:

(I) Interseção de duas retas em P;

(II) Interseção de uma reta em P e uma circunferência em P;

(III) Interseção de duas circunferências em P,

são ditas operações elementares em P.

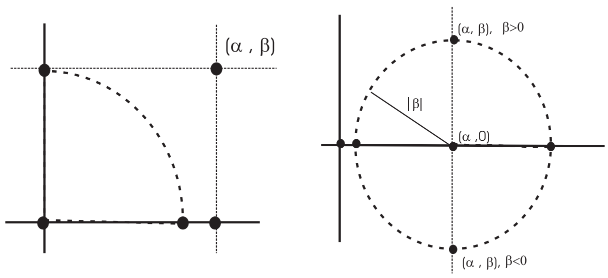
Observe que a operação (III) pode ser vista como a operação (II), pois se $C_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $C_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, são duas circunferências em $\mathbb{F}$ que se interceptam, temos a interseção está sobre a reta $r_1 : (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$, e pode ser obtida pela interseção de C_1 ou C_2 com r_1.

Definição 1. *Um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ é dito* construtível *a partir de P se é possível determinar A através de um número finito de operações elementares em P. Um número real α é dito* construtível *se o ponto $(\alpha, 0)$ é construtível.*

O conjunto $\mathbb{F} = \{\alpha \in \mathbb{R}|\alpha \text{ é construtível}\}$ é um corpo, pois se $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$, então $\alpha \pm \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha\beta \in \mathbb{F}$ e $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{F}$, $\beta \neq 0$.

Proposição 1. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o ponto (α, β) é construtível se, e somente se, α e β são construtíveis.*

Prova: Suponhamos que (α, β) é construtível, logo em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares xoy podemos, usando régua e compasso, traçar por (α, β) uma reta paralela ao eixo x e outra paralela ao eixo y, obtendo assim na interseção com o eixo x o ponto $(\alpha, 0)$, e com o eixo y o ponto $D = (0, \beta)$. Agora com centro em $O = (0, 0)$ e raio $\overline{OD}$ obtemos o ponto $(\beta, 0)$ (Fig.1.4 (a)).



(a) (b)

Figura 1.4:

Supondo agora que α e β são construtíveis, temos que o ponto (α, β) é obtido pela interseção de $C : (x-\alpha)^2 + y^2 = \beta^2$ (circunferência de centro $(\alpha, 0)$ e raio $|\beta|$) com a reta $x = \alpha$ (paralela ao eixo y passando por $(\alpha, 0)$) (Fig. 1.4 (b)). $\diamondsuit$

Por definição, um número real $\alpha > 0$ é construtível a partir de $\mathbb{Q}$, o corpo dos números racionais, se podemos construir um segmento de comprimento α através de um número finito de aplicações das operações elementares (I) e (II). Uma extensão $\mathbb{F}$ de $\mathbb{Q}$ é dita *extensão construtível* a partir de $\mathbb{Q}$ se todo $\alpha \in \mathbb{F}$ é construtível a partir de $\mathbb{Q}$.

Sabemos que se $\alpha > 0$ é construtível, $\sqrt{\alpha}$ também o é. Assim se $\mathbb{F}$ é uma extensão construtível de $\mathbb{Q}$ e se $\alpha \in \mathbb{F}$ é tal que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{F}$, a extensão quadrática $\mathbb{F}[\sqrt{\alpha}] = \{a + b\sqrt{\alpha} | a, b \in \mathbb{F}\}$ é uma extensão construtível de $\mathbb{F}$, e conseqüentemente uma extensão construtível de $\mathbb{Q}$.

Vejamos agora que se α é construtível existe uma extensão $\mathbb{F}$ construtível a partir de $\mathbb{Q}$, tal que $\alpha \in \mathbb{F}[\sqrt{\gamma}]$, onde $\gamma \in \mathbb{F}$ e $\sqrt{\gamma} \notin \mathbb{F}$.

Antes de mais nada, vamos mostrar que se um ponto Q está na interseção de uma reta r e uma circunferência C_1, em um corpo $\mathbb{F}$, então Q é um ponto em $I\mathbb{F}$ ou em $\mathbb{F}[\sqrt{\gamma}]$, onde $\gamma \in \mathbb{F}$ e $\sqrt{\gamma} \notin \mathbb{F}$.

De fato, sejam $r : ax+by+c = 0$ e $C_1 : x^2+y^2+dx+ey+f = 0$, com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$. Obviamente a e b não são simultaneamente nulos, isto é, $a^2 + b^2 \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos $b \neq 0$. Assim substituindo $y = \dfrac{-c - ax}{b}$ na equação de C_1, obtemos a equação

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

onde $A = a^2 + b^2$, $B = 2ac + b^2d - abe$, $C = b^2f - bce + c^2$, são elementos de $\mathbb{F}$. As soluções desta equação são dadas por:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \text{ onde } \Delta = B^2 - 4AC.$$

Como $y = \dfrac{-c - ax}{b}$, obtemos $y = \dfrac{-bc + aB \mp a\sqrt{\Delta}}{2Ab}$.

Portanto a interseção de r e C_1 é um ponto no plano de $\mathbb{F}$ (se $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{F}$) ou no plano de $\mathbb{F}[\sqrt{\Delta}]$ (se $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{F}$).

Logo se $\alpha \in \mathbb{R}$ é um número construtível a partir de $\mathbb{Q}$, pelo exposto acima e pela definição de número construtível, existem números reais $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, tal que $\gamma_1 \in \mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma_1} \notin \mathbb{Q}, \gamma_2 \in \mathbb{F}_1 = \mathbb{Q}[\gamma_1]$ e $\sqrt{\gamma_2} \notin \mathbb{F}_1$, $\gamma_3 \in \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_1[\sqrt{\gamma_2}] = \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}]$, $\sqrt{\gamma_3} \notin \mathbb{F}_2, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{F}_{n-1} = \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \cdots, \sqrt{\gamma_{n-1}}]$, $\sqrt{\gamma_n} \notin \mathbb{F}_{n-1}$ e tal que $\alpha \in \mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{n-1}[\sqrt{\gamma_n}] = \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \cdots, \sqrt{\gamma_n}]$.

Podemos resumir tudo isto da seguinte forma:

Teorema 1. *Um número real α é construtível se, e somente se, existem números reais $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, tal que $\gamma_1 \in \mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma_1} \notin \mathbb{Q}$, $\gamma_2 \in \mathbb{F}_1 = \mathbb{Q}[\gamma_1]$ e $\sqrt{\gamma_2} \notin \mathbb{F}_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{F}_{n-1} = \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \cdots, \sqrt{\gamma_{n-1}}]$, $,\sqrt{\gamma_n} \notin \mathbb{F}_{n-1}$ e tal que $\alpha \in \mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{n-1}[\sqrt{\gamma_n}] = \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \cdots, \sqrt{\gamma_n}]$.*

Corolário 1. *Se um número real α é construtível então existe um polinômio $p(x)$ com coeficientes racionais de grau potência de 2 tal que $p(\alpha) = 0$.*

Prova: Pelo Teorema 1 existem $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \in \mathbb{F}_n = \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \cdots, \sqrt{\gamma_n}]$ e $\alpha \notin \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}, \cdots, \sqrt{\gamma_{n-1}}]$. Vamos mostrar que α é raiz de um polinômio em $\mathbb{Q}$ de grau 2^n.

Se $n = 1, \alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{\gamma_1}], \gamma_1 \in \mathbb{Q}$, logo existem $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{\gamma_1}$, $\alpha - a_1 = b_1\sqrt{\gamma_1}$ e $\alpha^2 - 2a_1\alpha + a_1^2 - b_1^2\gamma_1 = 0$. Vemos que α é raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 2a_1x + a_1 - b_1^2\gamma_1$, com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

Mostremos por indução sobre $l, 0 \leq l \leq n$, que α é raiz de um polinômio de grau 2^l em $\mathbb{F}_{n-l} = \mathbb{F}_{n-(l+1)}[\sqrt{\gamma_{n-(l+1)}}]$. Se $l = 0$, como $\alpha \in \mathbb{F}_n$, segue que α é raiz de $p(x) = x - \alpha$ de grau $2^0 = 1$. Se $l = 1$, observamos que $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{n-1}[\sqrt{\gamma_n}]$, logo existem $a, b \in \mathbb{F}_{n-1}$ tal que $\alpha = a + b\sqrt{\gamma_n}$ e $\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 = b^2\gamma_n$. Portanto α é raiz de $p(x) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2\gamma_n$, cujos coeficientes estão em $\mathbb{F}_{n-1}$.

Suponhamos que α é raiz de um polinômio de grau 2^l em $\mathbb{F}_{n-l}, 0 \leq l \leq n$, e mostremos que α é raiz de um polinômio de grau 2^{l+1} em $\mathbb{F}_{n-(l+1)} \subseteq \mathbb{F}_{n-l}$.

Seja $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio em $\mathbb{F}_{n-l}$ de grau $k = 2^l$ tal que $p(\alpha) = 0$, isto é,

$$a_k \alpha^k + a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0 \quad (*).$$

Como $a_j \in \mathbb{F}_{n-l} = \mathbb{F}_{n-(l+1)}[\sqrt{\gamma_{n-(l+1)}}]$, $0 \leq j \leq k$, existem $c_j, d_j \in \mathbb{F}_{n-(l+1)}$ tal que

$$a_j = c_j + d_j\sqrt{\gamma_{n-(l+1)}}, \ 0 \leq j \leq k.$$

Substituindo a_j em $(*)$ obtemos a seguinte equação

$$c_k\alpha^k + \cdots + c_1\alpha + c_0 = -(d_k\alpha^k + d_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + d_1\alpha + d_0)\sqrt{\gamma_{n-(l+1)}},$$

e elevando ao quadrado ambos os lados encontramos um polinômio $f(x)$ de grau $2k = 2^{l+1}$, com coeficientes em $\mathbb{F}_{n-(l+1)}$ do qual α é raiz. Assim, se $l = n$, α é raiz de um polinômio de grau 2^n em $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$. ♢

Definição 2. *Um número x, real ou complexo, é dito* algébrico *sobre $\mathbb{Q}$ se ele é raiz de uma equação algébrica da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (n \geq 1, \ a_n \neq 0)$$

onde os coeficientes $a_k \in \mathbb{Q}$. Um número que não é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ é dito transcendente sobre $\mathbb{Q}$.

O número $\sqrt{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$, já os números $e, \pi, 2^{\sqrt{2}}$ não são algébricos sobre $\mathbb{Q}$, ver [BW] e [Djairo].

Pelo Corolário 1, vemos que todo número construtível é algébrico. Na verdade, na demonstração do Corolário 1, apresentamos uma maneira de obter um polinômio em $\mathbb{Q}$ do qual α é raiz. E mais, este polinômio assim construído é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Temos então o seguinte resultado.

Corolário 2. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz de um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$, cujo grau não é uma potência de 2, então α não é construtível.*

Agora podemos responder as perguntas feitas no início do artigo.

1) É possível trissectar um ângulo qualquer dado?

Em geral, a resposta é não. É claro que alguns ângulos podem ser trissectados porque podemos construir a sua terça parte, por exemplo, para $0°$, $90°$, $145°$ e $180°$. O que iremos mostrar é que a trisseção não é um procedimento válido para todo ângulo. Para a prova, é suficiente então mostrar que o ângulo de $60°$ não pode ser trissectado.

De uma maneira geral, construir um ângulo θ é equivalente a construir o ponto $A = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, pois em um sistema de coordenadas de origem O, o ângulo θ é formado pelo eixo x e pela semi-reta de origem O que contém A. Assim para verificar se um ângulo é construtível é suficiente saber se o seu cosseno é construtível, uma vez que $\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$. Assim, a solução deste problema é equivalente a construir um segmento de medida $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{18}\right)$. Seja $\theta = \frac{2\pi}{18}$, então $3\theta = \frac{2\pi}{6}$ e $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$.

Relembrando a identidade trigonométrica

$$\cos\theta = x = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right),$$

obtemos a seguinte equação: $8\alpha^3 - 6\alpha = 1$. Logo α é raiz de $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$, o qual é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e pelo Corolário 2, α não é construtível. ♢

Observamos aqui que se não seguimos as regras podemos trissectar um ângulo por meio de um método de Arquimedes (usando uma régua com marcas e deslizando a régua, o que não é permitido pelas regras da construção geométrica) (ver [W], fig 118). Na Figura 1.5, dado o ângulo x calcule y.

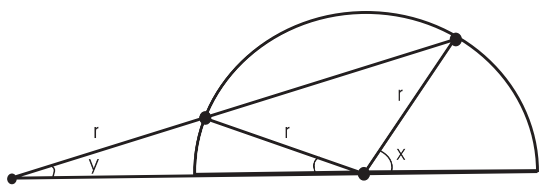


Figura 1.5:

2) É possível duplicar o cubo, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o volume do cubo de aresta α tenha o dobro do volume de um cubo de aresta 1?

Este problema é equivalente a construir um segmento de medida α tal que $\alpha^3 = 2$, isto é, encontrar α construtível raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 2$. Este é um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$, e pelo Corolário 2, α não é construtível.

Observamos que verificar que um polinômio de grau 3 é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ é equivalente a mostrar que este não possui raiz racional.

3) É possível encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o quadrado de lado α tenha área igual a do círculo de raio 1?

Este problema é conhecido como quadratura do círculo e é equivalente a determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^2 = \pi$, isto é, $\alpha = \sqrt{\pi}$. Isto equivale a dizer que π é um número algébrico sobre $\mathbb{Q}$, e isto não é verdade, ver [Djairo].

Bibliografia

[BW] Bongiovanni V. and Watanabe R., *Pi acaba?, RPM* **19**, *1991, 1-8.*

[CR] Courant, R. and Robbins, H., What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1996.

[Djairo] Figueiredo D.G., Números Irracionais e Transcendentes, Cap.3 e 7. Rio de Janeiro, SBM, 1980.

[G] Gonçalves, A., Álgebra Moderna, Projeto Euclides, IMPA-RJ,1990.

[H] Herstein, I.N., Topics in Algebra,University of Chicago, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York,1975.

[W] Wagner, E., Construções Geométricas, Projeto Euclides, IMPA - RJ, 1994.

Autores: Edméia Silva & Marcelo Souza

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
edmeia@mat.ufg.br, msouza@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 5, 2004, 54-66

Alguns Exemplos de Curvas Planas

Maurílio Márcio Melo

Resumo. Nestas notas apresentamos algumas curvas no plano, por exemplo as cônicas, a ciclóide, a astróide, a hipocilóide, a cardióide e a cissóide. Outras curvas são apresentadas nos exercícios.

1.1 Introdução

Primeiramente gostaríamos de enfatizar que estas notas foram escritas com a intenção de torná-las acessíveis a estudantes que ainda não entraram na universidade, por este motivo os exemplos são tratados exigindo apenas conhecimentos básicos a este nível de escolaridade. Esperamos que estes exemplos, venham despertar aos leitores, interesse pela matemática, independente de suas áreas de vocações para o estudo.

Nosso principal objetivo com estas notas é mostrar aos estudantes de matemática, especialmente para os alunos de nível médio, que existem maneiras diferentes de apresentar as equações satisfeitas por um conjunto de pontos (x, y) do plano. A maneira mais conveniente, depende do que se pretende com este conjunto.

Inicialmente, daremos os exemplos bem conhecidos dos alunos, em geral, estudados em disciplinas de geometria e geometria analítica, que são a reta e as cônicas.

Usaremos algumas curvas para mostrar que suas equações nas coordenadas cartesianas usuais, se tornam um tanto quanto complicadas, inviabilizando seu uso, quando se pretende, por exemplo, esboçar o gráfico da mesma. Nestes casos o uso de um outro sistema de coordenadas, por exemplo, as coordenadas polares, podem facilitar as expressões, viabilizando o manuseio.

Lembramos aos leitores que um estudo um pouco mais aprofundados de curvas, em geral, é feito a nível universitário, logo nas primeiras disciplinas de um curso de ciências exatas.

Para um estudo mais avançado, recomendamos [2] e [5].

Nossos agradecimentos ao professor Ronaldo Garcia pelo incentivo na preparação destas notas.

1.2 Curvas

A seguir daremos alguns exemplos de curvas, apresentando algumas maneiras diferentes de representar certos conjuntos de pontos no plano.

1.2.1 Equações Paramétricas de uma Curva

Em nossas notações P representa um ponto de $\mathbb{R}^2$, isto é, $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Uma curva em $\mathbb{R}^2$ ou uma curva plana é um conjunto de pontos da forma $P(t) = (x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais de um parâmetro t pertencente a um intervalo $\mathbf{I}$. Nas aplicações físicas, em geral, o parâmetro t representa o tempo e o conjunto de pontos $P(t)$ representa a trajetória de um movimento.

A seguir daremos exemplos de algumas curvas.

Exemplo 1. Sejam $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ pontos de $\mathbb{R}^2$. O conjunto de pontos $P = P(t)$ tais que $\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1}$, e portanto,

$$P(t) = (x_0 + (x_1 - x_0)t,\ y_0 + (y_1 - y_0)t) \quad \text{ou} \quad P(t) = (x_0 + at,\ y_0 + bt),$$

representa a *reta* no plano definida pelos pontos P_0 e P_1.

Exemplo 2. O conjunto de pontos

$$P = (x, y) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\,\mathrm{sen}\,t),\ t \in [0, 2\pi],$$

representa o *círculo* de centro em (x_0, y_0) e raio R. De fato, de $x = x_0 + R\cos t$ e $y = y_0 + R\,\mathrm{sen}\,t$, obtemos a relaç ão

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

que é a equação cartesiana do *círculo* de centro em (x_0, y_0) e raio R.

Exemplo 3. O conjunto de pontos

$$P = (x, y) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\,\mathrm{sen}\, t),\ t \in [0, 2\pi],$$

representa a *elipse* de centro em (x_0, y_0) e eixos paralelos aos eixos coordenados de comprimentos $2a$ e $2b$. De fato, de $x = x_0 + a\cos t$ e $y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\, t$, obtemos a relação

$$(\frac{x - x_0}{a})^2 + (\frac{y - y_0}{b})^2 = 1,$$

que é a equação cartesiana da *elipse*.

Exemplo 4. O conjunto de pontos $P = (x, y) = (t, at^2),\ t \in \mathbb{R}$, representa uma *parábola* de vértice na origem e eixo paralelo ao eixo y.

Exemplo 5. O conjunto de pontos

$$P = (x, y) = (x_0 + a\cosh t, y_0 + b\,\mathrm{senh}\, t),\ t \in \mathbb{R},$$

representa uma *hipérbole*. De fato, lembrando que $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\mathrm{senh}\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, obtemos de $x = x_0 + a\cosh t$ $y = y_0 + b\,\mathrm{senh}\, t$ a expressão

$$(\frac{x - x_0}{a})^2 - (\frac{y - y_0}{b})^2 = 1,$$

que é a equação cartesiana da *hipébole* com eixos paralelos aos eixos coordenados.

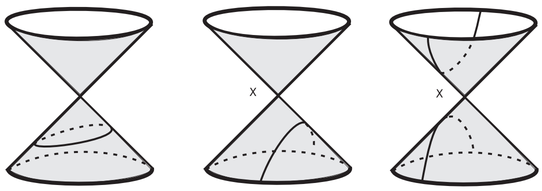


Figura 1.1:

As curvas *elipse, parábolas* e *hipérbole* são obtidas como interseção de um cone com planos, conforme fig.1.1, por isso elas são chamadas cônicas. Observemos que a *parábola* é uma situação intermediária entre *elipse* e *hipérbole*.

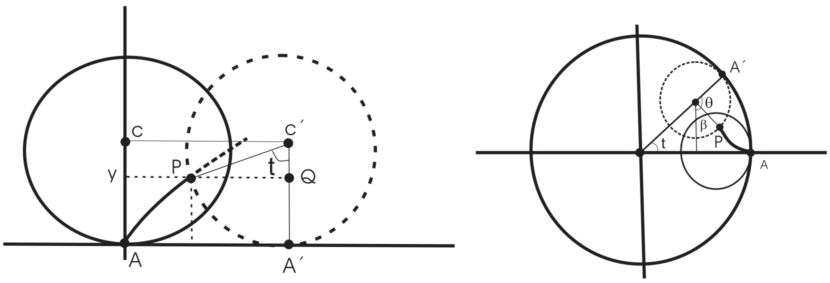
A seguir daremos exemplos de curvas obtidas por movimentos de pontos no plano.

Exemplo 6. O conjunto de pontos

$$P = (x, y) = (Rt - R\operatorname{sen} t, R - R\cos t),\ t \in \mathbb{R},$$

representa a trajetória de um ponto pertencente a um círculo de raio R posto a girar, sem deslizar, ao longo de uma reta situada num plano horizontal; por esta razão esta curva é chamada de *ciclóide*, fig.1.2a. Observemos que $\overline{AA'} = \widehat{A'P} = Rt$, e que

$$\begin{aligned} x &= \overline{AA'} - PQ = Rt - R\operatorname{sen} t \text{ e} \\ y &= A'C' - QC' = R - R\cos t. \end{aligned}$$



(a) (b)

Figura 1.2:

Exemplo 7. O conjunto de pontos

$$P = (x, y) = ((R - r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t, (R - r)\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen}\frac{R-r}{r}t),$$

$t \in \mathbb{R}$, representa a trajetória de um ponto pertencente a um círculo de raio r posto a girar, sem deslizar, ao longo de outro círculo de raio R, conforme fig.1.2b. De fato, observamos primeiramente que os ângulos t, β e θ que aparecem na fig.1.2b satisfazem a relação

$$\beta = 90 - \theta + t. \tag{1.1}$$

Da fig.1.2b, observamos também que as coordenadas de um ponto P da curva satisfazem as relações

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos t + r \operatorname{sen} \beta \\ y &= (R-r)\operatorname{sen} t - r\cos\beta. \end{aligned}$$

Substituindo nas expressões anteriores o valor de β obtido em (1.1), obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos t + r\cos(t-\theta) \\ y &= (R-r)\operatorname{sen} t + r\operatorname{sen}(t-\theta). \end{aligned} \tag{1.2}$$

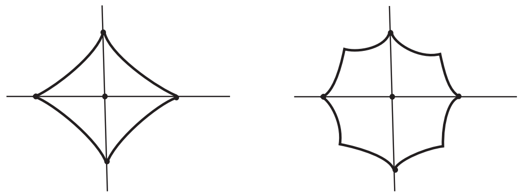
Da fig. 1.2b, podemos observar que os ângulos t e θ satisfazem a relação $Rt = r\theta$, e portanto $\theta = \frac{R}{r}t$, que substituída em (1.2) fornece as expressões

$$\begin{aligned} x &= (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t \\ y &= (R-r)\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen}\frac{R-r}{r}t. \end{aligned}$$

A curva descrita no exemplo anterior é conhecida como *hipociclóide,* ver [1]. No caso particular $R = 4r$ a curva é conhecida por *astróide.* Observemos que neste caso, a curva toma a forma $(R\cos^3 t,\, R\operatorname{sen}^3 t)$. A fig. 1.3a mostra a curva neste caso. A fig. 1.3b mostra a *hipociclóide* no caso $R = 8r$, i.e.,

$$(7r\cos t + r\cos 7t, 7r\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen} 7t).$$

Outra observação que podemos fazer é que quando R e r estão relacionados por um número racional, isto é $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$, p e q inteiros primos entre si, a curva fecha-se após n voltas e que se esta relação for um número irracional a curva jamais fecha-se. Um bom exercício é demonstrar as afirmações anteriores, ver exercício 2, bem como calcular em função de p e q o número de voltas n necessários para o fechamento da curva.



(a) (b)

Figura 1.3:

Exemplo 8. A curva, cujas equações paramétricas são dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= a + a\cot t - \ell\cos t \\ y(t) &= \ell\,\mathrm{sen}\, t, \end{aligned}$$

representa o movimento da extremidade A de uma escada apoiada numa caixa na forma de um cubo de aresta a, quando a extremidade B é posta a deslizar para a esquerda no sentido da parede, fig.1.5.

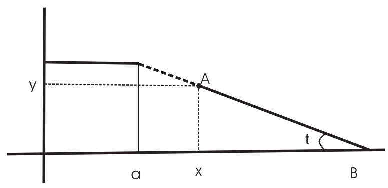
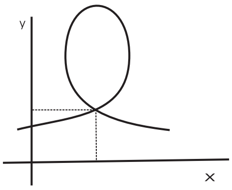


Figura 1.4:

Observemos que $y = \ell\,\mathrm{sen}\, t$, e por semelhança de triângulos, obtemos a relação

$$\frac{a}{y} = \frac{x - a + \ell\cos t}{\ell\cos t},$$

de onde tiramos, usando a expressão de y, que $x(t) = a + a\cot t - \ell\cos t$. Um caso particular, $\ell = 2$ e $a = 1$, i.e., $(1 + \cot t - 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$ é mostrado na fig. 1.5a



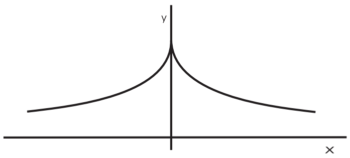


Figura 1.5:

Exemplo 9. A *tractriz* (fig.1.5b), ver [2], é a curva α tendo componentes $x(t) = t - \tanh t,\ y(t) = \sec ht$, onde $\tanh t = \frac{\operatorname{senh} t}{\cosh t},\ \sec ht = \frac{1}{\cosh t}$. A tractriz tem a propriedade que para qualquer valor do parâmetro t, o segmento de reta sobre a tangente à curva ligando o ponto $\alpha(t)$ ao eixo x, tem comprimento constante e igual a 1.

1.2.2 Coordenadas Polares

Uma outra maneira de representar uma curva no plano é usando as coordenadas r e θ, obtidas da seguinte maneira: considere uma curva e um ponto P pertencente à curva, chamamos de r o raio obtido ligando o ponto P a origem do sistema xOy e de θ o ângulo formado por este raio e o eixo Ox, fig.1.6.

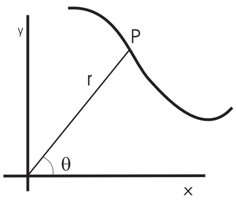


Figura 1.6:

Assim, conhecendo r e θ o ponto fica determinado pelas relações

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Reciprocamente, dados x e y, podemos determinar r e θ pelas relações

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A seguir mostraremos, através de exemplos, como as coordenadas polares podem ser úteis para simplificar certas expressões de curvas, dadas em coordenadas cartesianas

Exemplo 10. Consideremos a curva dada em coordenadas polares por

$$r = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta.$$

Atribuindo valores para θ, computando os valores correspondentes de r e usando a paridade da função cosseno, obtemos, com relativa facilidade, que o gráfico da curva é o da fig.1.7, conhecida por *rosácea* de quatro pétalas.

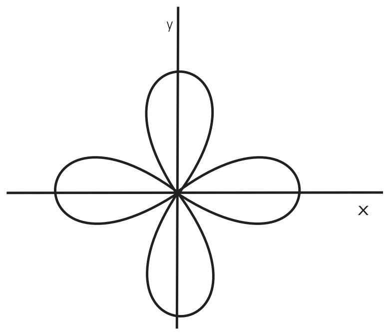


Figura 1.7:

Observemos que usando as relações de transformação dadas em (1.3) e (1.4) a equação da curva em coordenadas cartesianas x e y, fica dada por

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 - y^2,$$

que não tem muito interesse, para efeito de esboço da curva.

Exemplo 11. *(Limaçon de Pascal.)* De um ponto fixo O sobre um círculo de raio a traça-se a corda OB. A corda é prolongada ao ponto P tal que o comprimento do segmento $\overline{BP}$ seja constante e igual a k. Vamos encontrar o lugar dos pontos P quando o ponto B percorre o círculo.

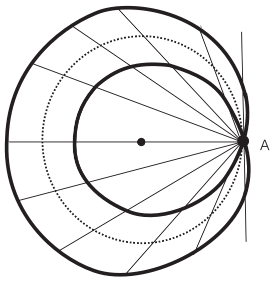


Figura 1.8:

Escolhendo o sistema de coordenadas de modo que o ponto O seja a origem e o círculo tenha centro $(a, 0)$. Usando coordenadas polares a equação do círculo passa ser $r = 2a\cos\theta$. Assim temos que

$$r = |\overline{OP}| = \overline{OB} + \overline{BP} = \overline{OB} + k,$$

e portanto,

$$r = 2a\cos\theta + k.$$

Existem três casos a ser considerados, $k < 2a,\ k = 2a$, e $k > 2a$. O caso $k < 2a$ é ilustrado na fig.1.9a.

Exemplo 12. A curva

$$r = 1 + \cos\theta,$$

tem representação, no sistema xOy, dada pela fig.1.9b e é conhecida por *cardióide*.

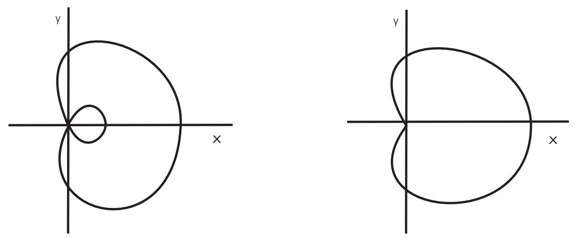


Figura 1.9:

Exemplo 13. A curva que apresentaremos a seguir é conhecida por *cissóide de* Diócles, ver [5]. Consideremos o lugar geométrico descrito pela interseção da tangente à parábola $y = -\frac{1}{4b}x^2$, $b > 0$ com a normal a esta, passando pela origem, fig.1.10.

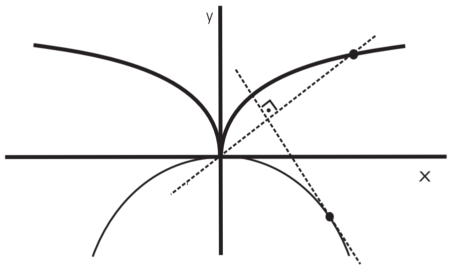


Figura 1.10:

Seja $y = mx + k$ a reta tangente à parábola no ponto (x_0, y_0). O sistema

$$\begin{aligned} y_0 &= mx_0 + k \\ y_0 &= -\frac{1}{4b}x_0^2, \end{aligned}$$

deve ter única solução. Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos a equação em x_0

$$x_0^2 + 4bmx_0 + 4bk = 0,$$

impondo a condição de tangência, obtemos que $m = -\sqrt{\frac{k}{b}}$ e assim $y_{0} = -\sqrt{\frac{k}{b}}x_0 + k$, que fornece a seguinte equação em k

$$k^2 + 2y_0k + y_0^2 = (k + y_0)^2 = 0,$$

e portanto $k = -y_0$. Assim a equação da tangente toma a forma $y = -\sqrt{-\frac{y_0}{b}}x - y_0$, ou usando a relação $y_0 = -\frac{1}{4b}x_0^2$,

$$y = -(\frac{x_0}{2b}x + y_0). \tag{1.5}$$

A equação da normal a esta passando pela origem é dada por

$$y = \frac{2b}{x_0}x. \tag{1.6}$$

Assim o lugar geométrico procurado é o conjunto de pontos (x, y), soluções do sistema constituído pelas equações (1.5) e (1.6) quando (x_0, y_0) varia sobre a parábola. Eliminando (x_0, y_0) nas equações (1.5) e (1.6), obtemos a equação

$$bx^2 - y(x^2 + y^2) = 0,$$

que é a equação pretendida. Observemos que a equação desta curva em coordenadas polares toma a forma

$$r = b\cos\theta\cot\theta.$$

Uma aplicação desta curva é encontrada no problema da duplicação do cubo, ver [5].

1.3 Exercícios

1) Mostre que a *astróide,* exemplo 7, tem equação cartesiana dada por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$. Mostre que esta curva é algébrica, isto é, existe um polinômio $p(x, y)$ tal que a curva é representada pela equação $p(x, y) = 0$.

2) Mostre que a *hipocilóide,* exemplo 7, é uma curva fechada, caso $\frac{R}{r} = \frac{p}{q}$ e aberta, caso contrário. No primeiro caso determine o número mínimo de voltas necessário para a curva fechar-se.

3) Encontrar as condições que a e l devem satisfazer para que a curva do exemplo 8, tangencie a parede, i.e., o eixo y; observe que esta é a situação ideal, caso alguém queira subir na escada.

4) Use um recurso gráfico para estudar a variação das curvas da família dada parametricamente por

$$x = 2a\cos^2 t,\ y = 2a\cos t \operatorname{sen} t$$

5) Esboce a curva dada parametricamente por

$$x(t) = t^2 - t,\ \ y(t) = t^3.$$

Mostre que de fato esta curva é algébrica, encontrando um polinômio $p(x,y)$ tal que $p(x(t), y(t)) = 0$.

6) Esboce a curva dada em coordenadas polares por $r = a \operatorname{sen} b\theta$, nos casos $b = 4, 2/3$. Mostre que se $b = \frac{p}{q}$, então a curva é algébrica; encontre o grau do polinômio, ver [5].

7) Obtenha as equações paramétricas da curva obtida ao girar sobre um círculo de raio R, um círculo de raio r, tangente exteriormente ao círculo maior.

8) Mostre que a curva dada em coordenadas polares por $r = \cos \frac{p}{q}\theta$, p e q inteiros é fechada.

9) Mostre que a cissóide pode ser obtida fazendo a seguinte construção geométrica: considere o círculo de diâmetro b e centro $(0, \frac{b}{2})$. Para um ponto P sobre a reta $y = b$ tracemos o segmento $\overline{OP}$. Seja Q a interseção de $\overline{OP}$ com o círculo, marquemos o ponto A tal que $\overline{OA} = \overline{QP}$. Variando o ponto P sobre a reta $y = b$ o ponto A descreve a cissóide.

10) Obtenha a *conchóide de Nicomedes* $(y-a)^2(x^2+y^2) = b^2y^2$, construída da seguinte maneira: Para cada ponto P pertencente à reta $y = a$ marquemos sobre a reta OP dois segmentos $\overline{PA} = \overline{PA'} = b$, onde b é um valor fixo; os pontos A e A' descrevem a *conchóide.*

11) Mostre que as curvas dadas por $z(t) = 2be^{it}\cos nt$, $b > 0$ representam rasáceas de $2n$ pétalas se n é par e n pétalas se n é ímpar. Esboce as curvas nos casos $n = \frac{1}{2}, 3,\ 4$. (sug.: fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$).

Bibliografia

[1] H. ANTON, *Cálculo um Novo Horizonte, vol. 1, 6^a* edição, editora Bookman, 1992.

[2] C. G. GIBSON, *Elementary Geometry of Differentiable Curves,* Cambridge Universty Press, 2001.

[3] C. H. LEHMANN, *Analytic Geometry,* Editora John Wiley & Sons, New-York 1942.

[4] K. TENENBLAT, *Introdução à Geometria Diferencial,* Editora UnB, 1990.

[5] I. VAINSENCHER, *Introdução às Curvas Algébricas Planas,* Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro 1996.

Autor: Maurílio Márcio Melo

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
melo@mat.ufg.br

REVISTA DA OLIMPÍADA - IME - UFG, nº 5, 2004, 67-85

Equações Polinomiais Sobre Matrizes[1]

Robert Lee Wilson

Resumo. Neste artigo são estudadas equações polinomiais com coeficientes a anéis de matrizes.

1.1 Introdução

Aqui estão dois fatos bem conhecidos sobre equações polinomiais sobre o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$):
(I) (Teorema de Vieta) Para quaisquer números complexos $x_1, ..., x_n$ (não necessariamente distintos), existe um único polinômio mônico sobre $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ &= (x - x_1)...(x - x_n) \end{aligned}$$

tal que a equação $f(x) = 0$ tem raízes $x_1, ..., x_n$ (contando multiplicidades). Então

$$a_{n-i} = (-1)^i \sum_{j_1 < ... < j_i} x_{j_1} ... x_{j_i}.$$

(II) (Teorema Fundamental da Álgebra) A equação sobre $\mathbf{C}$

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

tem uma raiz. Conseqüentemente, tem exatamente n raízes (contando multiplicidades).

[1]Este artigo foi tema de uma conferência proferida pelo Prof. Robert Lee Wilson, quando esteve visitando o IME/UFG em 2003; a Profª. Shirlei Serconek, gentilmente, fez a tradução para a Revista da Olimpíada.

Neste trabalho, descrevemos afirmações similares que podem ser feitas sobre uma equação polinomial

$$X^n + A_{n-1}X^{n-1} + ... + A_1X + A_0 = 0$$

sobre $M_k(\mathbf{C})$, a álgebra das matrizes k por k sobre $\mathbf{C}$. Para simplificar assumiremos $n = 2$ e $k = 2$. Todos os resultados podem ser estendidos para n e k arbitrários, porém a notação se torna mais complicada. Tais problemas para polinômios de grau pequeno (particularmente para $n = 2$) foram tratados por diversos autores pois eles surgem naturalmente em teoria de controle e em análise funcional. Veja, por exemplo, [GHR, LR]. Para n arbitrário, a solução do caso diagonalizável foi estudada por Fuchs e Schwarz [FS]. As diferenças entre a situação para equações sobre os números complexos e a situação para equações sobre matrizes surge por duas razões: a multiplicação em $M_k(\mathbb{C})$ não é comutativa e nem todas as matrizes em $M_k(\mathbb{C})$ são invertíveis. Se $A \in M_2(\mathbb{C})$ denotaremos por $Nul\ A$ o núcleo de A, também chamado o espaço nulo de A. Se $S \subset \mathbb{C}^2$ denotaremos por *Span* S o espaço gerado por S.

1.2 Análogos do Teorema de Vieta

Sejam X_1 e X_2 raízes da equação quadrática $X^2 + A_1X + A_0 = 0$ sobre uma álgebra (não necessariamente comutativa - por exemplo, $M_k(\mathbb{C})$). Então temos

$$X_1^2 + A_1X_1 + A_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad X_2^2 + A_1X_2 + A_0 = 0.$$

Tomando a diferença temos

$$X_1^2 - X_2^2 + A_1(X_1 - X_2) = 0.$$

Substituamos $X_1^2 - X_2^2$ por $X_1(X_1 - X_2) + (X_1 - X_2)X_2$. (Esta é a versão não comutativa da bem conhecida fórmula $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ que é válida no caso comutativo.) Obtemos

$$X_1(X_1 - X_2) + (X_1 - X_2)X_2 + A_1(X_1 - X_2) = 0.$$

Logo,

$$-A_1(X_1 - X_2) = X_1(X_1 - X_2) + (X_1 - X_2)X_2. \tag{1.1}$$

Isto tem duas conseqüências:

Primeiro, se $X_1 - X_2$ é invertível, podemos multiplicar à direita pelo seu inverso e obter

$$-A_1 = X_1 + (X_1 - X_2)X_2(X_1 - X_2)^{-1}.$$

Para melhorar a notação, escrevamos

$$y_1 = X_1 \qquad \text{e} \qquad y_2 = (X_1 - X_2)X_2(X_1 - X_2)^{-1}.$$

Então, $-A_1 = y_1 + y_2$ e $A_0 = -X_1^2 - A_1X_1 = -y_1^2 + y_1^2 + y_2y_1$. Em outras palavras:

$$A_1 = -(y_1 + y_2) \qquad \text{e} \qquad A_0 = y_2y_1.$$

Estas são fórmulas análogas às do caso comutativo, mas elas envolvem funções racionais, não apenas polinômios. Esta generalização do Teorema de Vieta (que pode ser estendida a equações de grau n usando a teoria de quase-determinantes) foi feita por Gelfand e Retakh.

Segundo, a equação (1) pode ser reescrita como

$$-(X_1 + A_1)(X_1 - X_2) = (X_1 - X_2)X_2. \tag{1.2}$$

Agora, trabalhemos em $M_2(\mathbb{C})$ e tomemos

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$(X_1 - X_2)X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mas as linhas da matriz $-(X_1 + A_1)(X_1 - X_2)$ devem estar contidas no espaço-linha da matriz

$$X_1 - X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo é impossível satisfazer (2) e daí não existem equações quadráticas sobre $M_2(\mathbb{C})$ com raízes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3 Soluções de equações polinomiais - quantas soluções podem existir?

Alguns exemplos:

(1) $X^2 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ não tem soluções.

Para ver isto, suponha que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é uma solução e observe que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $a + d \neq 0$. Mas $c(a + d) = 0$, então $c = 0$. Logo, (comparando os elementos da diagonal) $a^2 = d^2 = 0$, e $a = d = 0$, uma contradição.

Retornaremos a este exemplo mais tarde e veremos um outro modo, menos computacional, de analisá-lo.

(2) $X^2 = 0$ tem infinitas soluções. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para todo $x \in \mathbb{C}$.

(3) $X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0$ tem quatro soluções: $X = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$. É claro que estas quatro matrizes são soluções. Para ver que não existem outras soluções, considere $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então, como anteriormente,

$$X^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

então

$$0 = b(a + d) = c(a + d).$$

Se $a + d \neq 0$, então $b = c = 0, a^2 = 1, d^2 = 4$, dando as quatro soluções listadas. Se $a + d = 0$, então $a = -d$ e $a^2 = d^2$. Daí, $1 = a^2 + bc = bc + d^2 = 4$, uma contradição.

(4) $X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$ tem infinitas soluções.

A mesma análise de (3) mostra que $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ é uma solução quando $a^2 + bc = 1$. Se $b = c$, estas são exatamente as matrizes de reflexões em $\mathbb{C}^2$.

Observação 6. *Aqui está uma pergunta que responderemos: Para que valores de l existe uma equação quadrática*

$$X^2 + A_1X + A_0 = 0$$

com exatamente l soluções? Até agora, sabemos que existe uma equação se $l = 0, 4 ou \infty$. Não temos ainda a resposta para $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...$

$$\begin{bmatrix} l & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & ... & \infty \\ 7 & X & ? & ? & ? & X & ? & ? & ? & ... & X \end{bmatrix}.$$

Queremos encontrar todas as soluções de

$$X^2 + A_1X + A_0 = 0. \tag{1.3}$$

Primeiramente, precisamos descobrir como especificar uma solução X. Existem várias maneiras de fazer isto:

(a) Escreva os elementos de X, i.e., $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Escreva $X \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (a primeira coluna de X) e $X \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (a segunda coluna de X). Por exemplo,

$$X \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

descreve a mesma matriz de (a).

(c) Escreva $X\mathbf{v}_1$ e $X\mathbf{v}_2$ para uma base arbitrária $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{C}^2$. Por exemplo,

$$X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

descreve a mesma matriz de (a) e (b).

(d) Escreva uma base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para $\mathbb{C}^2$ consistindo de autovetores de X e especifique o autovalor correspondente a cada autovetor. (Recorde que um vetor não-nulo $\mathbf{v}$ é um *autovetor* para X com correspondente *autovalor* λ se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.) Note que exigir que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ seja um autovetor para X com correspondente autovalor 1 e que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ seja um autovetor para X com correspondente autovalor 3 descreve a mesma matriz de (a), (b) e (c). Observe que substituindo $\mathbf{v}_i$ por $c_i\mathbf{v}_i$ onde $c_1, c_2 \neq 0$ descreve a mesma matrix. Logo, se

$$S = \{\begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} | u \in \mathbb{C}\} \cup \{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

podemos assumir que os autovetores são escolhidos de S. É importante observar que nem toda matriz pode ser escrita deste modo. As matrizes que podem ser descritas desta maneira são chamadas *diagonalizáveis*.

1.4 Soluções diagonalizáveis

Podemos agora encontrar todas as soluções diagonalizáveis da equação (3). Seja X uma tal solução e seja $\mathbf{v}$ um autovetor de X com correspondente autovalor λ. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = 0\mathbf{v} &= (X^2 + A_1X + A_0)\mathbf{v} = X^2\mathbf{v} + A_1X\mathbf{v} + A_0\mathbf{v} \\ &= \lambda^2\mathbf{v} + \lambda A_1\mathbf{v} + A_0\mathbf{v} = (\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Isto equivale a requerer que

$$\det(\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} \in Nul\ (\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0).$$

Logo λ é uma raiz da equação

$$\det(t^2 I + tA_1 + A_0) = 0,$$

uma equação de grau 4. Cada uma de suas raízes é um possível autovalor de X e os correspondentes autovetores podem ser tomados dentre os elementos não nulos de

$$S \cap Nul\ (\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0).$$

Agora, a matriz

$$t^2 I + tA_1 + A_0$$

é uma matriz com elementos em $\mathbb{C}[t]$. Um resultado geral (Forma canônica racional) diz que

$$P(t)(t^2 I + tA_1 + A_0)Q(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & 0 \\ 0 & f_2(t) \end{bmatrix}$$

onde $P(t)$ e $Q(t)$ são matrizes invertíveis sobre $\mathbb{C}[t]$, $\det P(t) = \det Q(t) = 1$ e $f_1(t), f_2(t)$ são polinômios mônicos em t com $f_1(t)$ dividindo $f_2(t)$. (O polinômio $f_1(t)$ é o máximo divisor comum de todos os elementos da matriz $t^2I + tA_1 + A_0$.) Então $\det(t^2I + tA_1 + A_0) = f_1(t)f_2(t)$ e λ é uma raiz de $t^2I + tA_1 + A_0 = 0$ se e somente se $(t-\lambda)|f_2(t)$. Além disso, se $(t-\lambda)|f_1$, então $\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0 = 0$ e $Nul\ (\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0) = \mathbb{C}^2$. Se $(t-\lambda) \not| f_1$ mas $(t-\lambda)|f_2(t)$, então

$$Nul\ (\lambda^2 I + \lambda A_1 + A_0) = Span\{Q(\lambda)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$$

é um subespaço de dimensão 1. Podemos agora descrever como encontrar todas as soluções diagonalizáveis da equação (3). Denote as raízes de $t^2I + tA_1 + A_0 = 0$ por $\lambda_i, 1 \leq i \leq m$ onde $1 \leq m \leq 4$. Primeiro, suponha que $f_1(t) = 1$. Então, para todo $i, 1 \leq i \leq m$ temos

$$dim\ Nul\ (\lambda_i^2 I + \lambda_i A_1 + A_0) = 1.$$

Daí esse espaço é gerado por um único vetor de S. Denote esse vetor por $\mathbf{v}_i$. Então, para todo par $(i,j), 1 \leq i < j \leq m$ com $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_j$, existe uma solução X da equação (3) tal que $\mathbf{v}_i$ é um autovetor com autovalor λ_i e $\mathbf{v}_j$ é um autovetor com autovalor λ_j. Toda solução diagonalizável da equação (3) surge desta maneira. Note que neste caso existem no máximo $6 = \binom{4}{2}$ soluções diagonalizáveis.

Agora suponhamos que $f_1(t) = 0$ tem uma única raiz λ_1. Então, $m \leq 3$ (pois $f_2(t) = 0$ tem no máximo três raízes, uma das quais é λ_1). Neste caso,

$$dim\ Nul\ (\lambda_1^2 I + \lambda_1 A_1 + A_0) = 2$$

e

$$dim\ Nul\ (\lambda_i^2 I + \lambda_i A_1 + A_0) = 1$$

para $2 \leq i \leq m$. Daí, $Nul\ (\lambda_i^2 I + \lambda_i A_1 + A_0$ é gerado por um único vetor de S. Denote este vetor por $\mathbf{v}_i$. Agora, como

$$Nul\ (\lambda_1^2 I + \lambda_1 A_1 + A_0) = \mathbb{C}^2,$$

$\lambda_1 I$ é uma solução. Também, se $2 \leq i \leq m$, se $\mathbf{v}_1 \in S$ e $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_i$, there é a solução X to equação (3) such that $\mathbf{v}_1$ é um autovetor para X com autovalor λ_1 e $\mathbf{v}_i$ é um autovetor para X com autovalor λ_i. Aqui existe uma infinidade de escolhas para $\mathbf{v}_1$ logo uma infinidade de soluções. Se $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_3$, existe uma solução X da equação (3) tal que $\mathbf{v}_2$ é um autovetor para X com autovalor λ_2 e $\mathbf{v}_3$ é uma autovetor para X com autovalor λ_3. Toda solução diagonizável da equação (3) surge deste modo. Observe que neste caso, existe uma infinidade soluções diagonalizáveis se e somente se $m > 1$.

Finalmente, suponha que $f_1 = 0$ tem duas raízes λ_1 e λ_2. Então, $f_1(t) = f_2(t)$ e λ_1 e λ_2 são as únicas raízes de

$$\lambda_1^2 I + \lambda_1 A_1 + A_0 = 0.$$

Além disso,

$$dim\ Nul\ (\lambda_i^2 I + \lambda_i A_1 + A_0) = 2,\ 1 \leq i \leq 2.$$

Então $\lambda_1 I, \lambda_2 I$ são soluções e para todo par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de elementos distintos de S existe uma solução X da equação (3) tal que $\mathbf{v}_1$ é um autovetor de X com autovalor λ_1 e $\mathbf{v}_2$ é um autovetor de X com autovalor λ_2. Toda solução diagonizável da equação (3) surge deste modo. Neste caso existem infinitas soluções diagonizáveis. Essa discussão se aplica sem sérias mudanças para o caso de grau n sobre $M_k(\mathbb{C})$. O número máximo de soluções diagonizáveis é $\binom{nk}{k}$. Esse número máximo finito de soluções diagonizáveis (e a análise do problema usando autovalores e autovetores) deve-se a Fuchs e Schwarz [FS].

Exemplos:

(1) Encontre todas as soluções diagonizáveis de $X^2 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$. Os possíveis autovalores são as raízes de

$$0 = \det(t^2 I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = t^4.$$

Logo 0 é o único possível autovalor. Os possíveis autovetores são os elementos não nulos de

$$Nul \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estes são exatamente os múltiplos não nulos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, não podemos encontrar uma base para $\mathbb{C}^2$ consistindo de autovetores de X, e então, não existem soluções diagonizáveis.

(2) Encontre todas as soluções diagonizáveis de $X^2 = 0$.

Os possíveis autovalores são as raízes de

$$0 = \det(t^2 I) = t^4$$

então, novamente, 0 é o único possível autovalor. Os possíveis autovetores são os elementos não nulos do núcleo da matriz nula, i.e., todos os vetores não nulos em $\mathbb{C}^2$. Logo, podemos tomar qualquer base de $\mathbb{C}^2$ e declarar que ambos os elementos da base são autores com correspondentes autovalores 0. Isto significa que X é a matriz zero. Logo, existe apenas uma solução diagonizável.

(3) Encontre todas as soluções diagonizáveis de $X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0$.

Os possíveis autovalores são as raízes de

$$\begin{aligned} 0 &= \det(t^2 I - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} t^2 - 1 & 0 \\ 0 & t^2 - 4 \end{bmatrix}) \\ &= (t^2 - 1)(t^2 - 4) = (t-1)(t+1)(t-2)(t+2). \end{aligned}$$

Logo, os possíveis autovalores são $1, -1, 2$ e -2. Se 1 ou -1 é um autovalor, o autovetor correspondente deve ser um elemento não nulo de $Nul \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, i.e., um múltiplo não nulo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se 2 ou -2 é um autovalor, o correspondente autovetor deve ser um elemento não nulo de $Nul \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, i.e., múltiplo não nulo de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então, para determinar X existem duas escolhas (1 e -1) para o autovalor de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e duas escolhas (2 e -2) para o autovalor de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo, existem quatro soluções diagonalizáveis.

(4) Encontre todas as soluções diagonalizáveis de $X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$.

Os possíveis autovalores são as raízes de

$$0 = \det(t^2 I - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} t^2 - 1 & 0 \\ 0 & t^2 - 1 \end{bmatrix}) = (t-1)^2(t+1)^2.$$

Logo, os possíveis autovalores são 1 e -1. Em qualquer dos casos, todo vetor de S é um possível autovetor. Então podemos escolher $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

como um par qualquer de elementos distintos de S, e declarar ambos autovetores para 1. Isto nos dá a matrix identidade. Podemos também declarar ambos os elementos autovetores de -1. Isto nos dá $-I$. Mas podemos também declarar $\mathbf{v}_1$ como um autovetor correspondente a 1 e $\mathbf{v}_2$ como um autovetor correspondente a -1. Deste modo, existem infinitas maneiras de fazer isto, e logo, existe uma infinidade de soluções. (Observe que se escolhemos uma base ortogonal de $\mathbb{C}^2$ este procedimento produz a matriz de uma reflexão.)

1.5 Soluções não-diagonalizáveis

É bastante conhecido que se uma matriz k por k tem k autovalores distintos, então a matriz é diagonalizável. Logo se uma matriz 2 por 2 não é diagonalizável, pode ter somente um autovalor.

Observe que se

$$X^2 + A_1X + A_0 = 0$$

e colocamos

$$Y = X + rI$$

então

$$Y^2 + (A_1 - 2rI)Y + (r^2I - rA_1 + A_0) = 0.$$

Como λ é um autovalor de X se e somente se $r + \lambda$ é um autovalor de Y, podemos assumir, substituindo X por $X + rI$ para um apropriado r, que 0 é um autovalor de X.

Dai, é suficiente considerar soluções nilpotentes de

$$X^2 + A_1X + A_0 = 0.$$

Como estamos assumindo que X não é diagonalizável, $X \neq 0$. Então existe um conjunto linearmente independente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ tal que

$$X\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad X\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1.$$

Logo,

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 = (X^2 + A_1X + A_0)\mathbf{v}_1 = X^2\mathbf{v}_1 + A_1X\mathbf{v}_1 + A_0\mathbf{v}_1 = A_0\mathbf{v}_1 \quad \text{e}$$

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_2 = (X^2 + A_1X + A_0)\mathbf{v}_2 = X^2\mathbf{v}_2 + A_1X\mathbf{v}_2 + A_0\mathbf{v}_2 = A_1\mathbf{v}_1 + A_0\mathbf{v}_2$$

Recorde que $\mathbb{C}[t]$ denota a álgebra dos polinômios em t com coeficientes no corpo dos números complexos. Denotaremos por (t^2) o ideal em $\mathbb{C}[t]$ gerado por t^2, isto é, o conjunto de todos os polinômios divisíveis por t^2. Então a álgebra quociente

$$\mathbb{C}[t]/(t^2)$$

denota a álgebra dos polinômios onde fazemos $t^2 = 0$. Escrevemos

$$(\mathbb{C}[t]/(t^2))^2$$

para o conjunto das matrizes

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

onde $g_1(t), g_2(t) \in \mathbb{C}[t]/(t^2)$. Note que $M_2(\mathbb{C}[t])$ age em $(\mathbb{C}[t]/(t^2))^2$ por multiplicação de matrizes. Observe também que podemos escrever todo elemento em

$$(\mathbb{C}[t]/(t^2))^2$$

univocamente na forma $\mathbf{w}_1 + t\mathbf{w}_2$ onde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{C}^2$.

Agora, considere $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ como acima; isto é,

$$0 = A_0\mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad 0 = A_1\mathbf{v}_1 + A_0\mathbf{v}_2$$

Observe que isto é equivalente a

$$(t^2 I + tA_1 + A_0)(\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2) = 0 \tag{1.4}$$

em $(\mathbf{C}[t]/(t^2))^2$.

Recorde que $P(t)(t^2 I + tA_1 + A_0)Q(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & 0 \\ 0 & f_2(t) \end{bmatrix}$ onde $P(t)$ e $Q(t)$ são matrizes invertíveis sobre $\mathbb{C}[t]$, $\det P(t) = \det Q(t) = 1$ e $f_1(t), f_2(t)$ são polinômios mônicos em t com $f_1(t)$ dividindo $f_2(t)$. A mesma decomposição é válida sobre $\mathbb{C}[t]/(t^2)$.

Note que (4) não tem solução a menos que $t^2 | f_2(t)$; daí, de agora em diante assumiremos que $t^2 | f_2(t)$.

Note que se $t^2 | f_1(t)$ então nossa equação é $X^2 = 0$ e que o conjunto de soluções é o conjunto de todas as matrizes nilpotentes.

Fazendo $t^2 = 0$, a primeira coluna de $Q(t)$ pode ser escrita como $\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$ e a segunda coluna pode ser escrita como $\mathbf{q}_1 + t\mathbf{q}_2$, onde $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{C}^2$. Note que $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\}$ é linearmente independente, pois $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{q}_1$ são as colunas da matriz invertível $Q(0)$.

Se $f_1(t) = t$, então o conjunto das soluções de (4) é

$$Q(t)\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + Q(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Q(t)\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \mathit{Span}\{t\mathbf{p}_{\mathit{1}}, \mathbf{q}_{\mathit{1}} + t\mathbf{q}_{\mathit{2}}, t\mathbf{q}_{\mathit{1}}\}.$$

Logo existe uma solução X com

$$X(a\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2) = \mathbf{q}_1, X(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}$$

sempre que $\{a\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1\}$ é linearmente independente. Como $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\}$ é linearmente independente, existe uma infinidade de soluções.

Se $t \not| f_1(t)$, então (4) tem solução

$$Q(t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Q(t)\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \mathit{Span}\,\{\mathbf{q}_{\mathit{1}} + t\mathbf{q}_{\mathit{2}}, t\mathbf{q}_{\mathit{1}}\}.$$

Se $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ é linearmente independente então existe uma única solução nilpotente X com $X\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1, X\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$. Se $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ é linearmente dependente, não existem soluções nilpotentes.

Exemplo: Achar todas as soluções nilpotentes de

$$X^2 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Escrevemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 & -1 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^4 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$$

Como o conjunto

$$\{\mathbf{0}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

é linearmente dependente, não existem soluções nilpotentes.

Exemplo: Achar todas as soluções nilpotentes de

$$X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Aqui

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t^2+t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2+t & 1 \\ 0 & t^2-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t^2+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^4-t^2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e existe uma única solução nilpotente.

1.6 Quantas soluções podem existir?

Podemos agora responder nossa pergunta anterior: Quantas soluções a equação

$$X^2 + A_1X + A_0 = 0$$

pode ter?

Vimos que se essa equação tem um número finito de soluções, então o número de soluções diagonalizáveis é no máximo $\binom{m}{2}$ onde m é o número de raízes distintas de

$$\det(t^2I + tA_1 + A_0) = 0. \tag{1.5}$$

Vimos também que a equação pode ter uma solução nilpotente se e somente se 0 é uma raiz de (5) com multiplicidade maior que 1. Além disso, o número de soluções nilpotentes é $0, 1$ ou ∞.

Daí, se (5) tem quatro raízes distintas e o número de soluções é finito, esse número é no máximo 6. Se (5) uma única raiz repetida (que podemos assumir ser igual a 0) e o número de soluções é finito, existe no máximo uma solução não-diagonalizável e $3 = \binom{3}{2}$ soluções diagonalizáveis. Finalmente, se (5) tem duas raízes repetidas e o número de soluções é finito, existem no máximo duas soluções não-diagonalizáveis (uma correspondendo a cada raiz de (5)). Também, $m = 2$, e então há no máximo $1 = \binom{2}{2}$ solução diagonalizável. Logo, em qualquer caso, o número máximo finito de soluções é 6.

Os seguintes exemplos mostram que para cada $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty$ existe uma equação com exatamente l soluções. Cada exemplo pode ser analisado usando os métodos acima.

1.7 Exemplos

(0) $X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ não tem soluções.

(1a) $X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ tem uma única solução (nilpotente).

Temos

$$\det \begin{bmatrix} t^2 + t & 1 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} = t^3(t+1),$$

e então os possíveis autovalores para uma solução X são 0 e -1. Os possíveis autovetores correspondentes a 0 são os elementos não nulos do espaço nulo de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O único elemento de S nesse espaço é $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Os possíveis autovetores correspondentes a -1 são os elementos não nulos do espaço nulo de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O único elemento de S nesse espaço é $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Daí não existem soluções diagonalizáveis.

Agora $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 + t & 1 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t^2 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^4 + t^3 \end{bmatrix}$. Logo

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e então há uma única solução nilpotente $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(1b) $X^2 + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ tem uma única solução (diagonalizável).

Temos

$$\det \begin{bmatrix} t^2 + 2t + 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} = t^2(t+1)^2,$$

e então os possíveis autovalores para uma solução X são 0 e -1. Os possíveis autovetores correspondentes a 0 são os elementos não nulos do espaço nulo de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O único elemento de S nesse espaço é $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Os possíveis autovetores correspondentes a -1 são os elementos não nulos do espaço nulo de $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O único elemento de S nesse espaço é $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo existe uma única solução diagonalizável $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Agora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -(2t+3)t^2 & 1-(2t+3)t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t+1)^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2t & -t^2 \\ 2t+3 & (t+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2(t+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e então não existem soluções nilpotentes.

Uma solução não-diagonalizável X dessa equação com autovalor -1 de multiplicidade 2 corresponderia (substituindo X por $X+I$) a uma solução nilpotente da equação $X^2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+(2t-3)t^2 & (2t-3)t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & (t-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t+3 & (t-1)^2 \\ 1+2t & -t^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2(t-1)^2 \end{bmatrix}.$$

Logo, neste caso,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e então não existem soluções nilpotentes. Daí, não existe solução não-diagonalizável com autovalor -1 da equação original.

(2) $X^2 + X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ tem duas soluções, e nenhuma delas é diagonalizável.

Temos

$$\det \begin{bmatrix} t^2+t & 1 \\ 0 & t^2+t \end{bmatrix} = t^2(t+1)^2,$$

e então os possíveis autovalores para uma solução X são 0 e -1 e os possíveis autovetores correspondentes são os elementos não nulos no espaço nulo de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e os únicos elementos de S nesses espaços são, respctivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo não existem soluções diagonalizáveis.

Agora,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t^2-t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2+t & 1 \\ 0 & t^2+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t^2+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2(t+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e então existe uma única solução nilpotente $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Uma solução não-diagonalizável X desta equação com autovalor -1 de multiplicidade 2 corresponderia (substituindo X por $X+I$) a uma solução nilpotente da equação $X^2 - X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t^2+t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2-t & 1 \\ 0 & t^2-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t^2-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2(t-1)^2 \end{bmatrix}.$$

Logo, neste caso,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e então existe uma única solução nilpotente $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ela corresponde à solução

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

da equação original. Esta é a única solução não-diagonalizável com autovalor -1.

(3) $X^2 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ tem três soluções, uma nilpotente e duas diagonalizáveis.

Temos

$$\det \begin{bmatrix} t^2 + t & 1 - t \\ 0 & t^2 - t \end{bmatrix} = t^2(t+1)(t-1),$$

e então os possíveis autovalores para uma solução X são $0, 1, -1$.

Os possíveis autovetores correspondentes são os elementos não nulos dos espaços nulos de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, respectivamente, e os únicos elementos de S nesse espaços são $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, respectivamente.

Logo existem duas soluções diagonalizáveis: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Agora

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(t^3 + t^2 - 2t)/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 + t & 1 - t \\ 0 & t^2 - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & t - 1 \\ 1 + \frac{t}{2} & t^2 + t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2(t+1)(t-1) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e então existe uma única solução nilpotente $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) $X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0$ tem quatro soluções (diagonalizáveis).

Temos

$$\det \begin{bmatrix} t^2 - t & 0 \\ 0 & t^2 - 4t \end{bmatrix} = (t-1)(t+1)(t-2)(t+2).$$

Como este se decompõe em fatores lineares distintos, todas as soluções são diagonalizáveis. Anteriormente, achamos todas as soluções.

(5) $X^2+\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$ tem cinco soluções (diagonalizáveis).
Temos

$$\det\begin{bmatrix}t^2-3t+2 & -2t-2\\ 0 & t^2+t\end{bmatrix}=t(t-1)(t+1)(t-2),$$

e então os possíveis autovalores para uma solução X são $0,1,-1,2$. Os possíveis autovetores correspondentes são os elementos não nulos dos espaços nulos de

$$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -4\\ 0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -6\\ 0 & 6\end{bmatrix},$$

respectivamente, e os únicos elementos de S nesses espaços são

$$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\text{ respectivamente.}$$

As cinco soluções diagonalizáveis correspondem aos pares de autovalores $(0,1),(0,-1),(-1,1),(-1,2),(1,2)$.

(6) $X^2-\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}=0$ tem seis soluções(diagonalizáveis).
Temos

$$\det\begin{bmatrix}t^2-t-2 & t+1\\ -2t+1 & t^2-t-2\end{bmatrix}=t(t-1)(t+1)(t-2),$$

e os possíveis autovalores para uma solução X são $0,1,-1,2$. Os possíveis autovetores correspondentes são os elementos não nulos dos espaços nulos de

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0 & 0\\ 6 & 0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

respectivamente, e os únicos elementos de S nesses espaços são

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\text{ respectivamente.}$$

Existe uma solução diagonalizável correspondente a cada par de possíveis autovalores distintos. Logo os pares

$$(0,1),\ (0,-1),\ (1,-1),\ (-1,2),\ (1,2),\ (0,2)$$

correspondem, respectivamente, a

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(∞) $X^2 = 0$ tem uma infinidade de soluções.

Bibliografia

[FS] D. Fuchs e A. Schwarz, *A Matrix Vieta Theorem*, E. B. Dynkin Seminar, Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2, vol.169, 1996.

[GHR] I. Gohberg, P. Lancaster, e L. Rodman, *Matrix polynomials*, Academic Press, 1982.

[GR1] I. Gelfand e V. Retakh, *Noncommutative Vieta Theorem and Symmetric Functions*, Gelfand Mathematical Seminars 1993-95, Birkhauser, 1996.

[GR2] I. Gelfand e V. Retakh, *Quasideterminants*, I Selecta Math, vol. 3, issue 4, 1997.

[LR] P. Lancaster e L. Rodman, *Algebraic Riccati Equations*, Clarendon Press, 1995.

Autor: Robert Lee Wilson

Endereço: Rutgers University, Piscataway, NJ 08854-8019
Department de Mathematics
Piscataway, NJ 08854-8019
rwilsonmath.rutgers.edu

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás

INSCRIÇÃO: Somente online: http://www.mat.ufg.br

ENDEREÇOS:

1. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - CAMPUS SAMAMBAIA -GOIÂNIA
   Instituto de Matemática e Estatística
   Rodovia Goiânia/Nerópolis - Campus II
   74001-970 - Goiânia - GO   Fone: (62) 521-1208
2. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - CAMPUS AVANÇADO DE CATALÃO
   Departamento de Matemática, CP: 56
   Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120 - Setor Universitário
   75405-000 - Catalão - GO   Fone: (62) 441-3484
3. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - CAMPUS AVANÇADO DE JATAÍ
   Departamento de Matemática
   Rua Riachuelo, 150 0 Bairro Samuel Grahan
   75800-000 Jataí - GO   Fone: (62) 631 1184
4. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - EXTENSÃO RIALMA
   Rua Luiz Benedito Dias, s/n, Setor Alvorada
   76310-000 Rialma - GO   Fone: (62) 397 1556
5. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - ANÁPOLIS
   Av. JK, nº 146, Bairro Jundiaí
   75110-390 - Anápolis - GO   Fone: (62) 328-111
6. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - ITUMBIARA
   Av. Tabelião B. Dias da Rocha, s/n, Conj. Hab. Paranaíba, Planalto
   75533-140 Itumbiara - Goiás   Fone: (64) 343 19250
7. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - IPORÁ
   Av. R-2, Qd. 01, Jardim Novo Horizonte II
   76200-000 Iporá - GO   Fone: (62) 674 1651
8. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - PORANGATU
   Av. Brasília n^{o} 32, Setor Leste - Cx.P 91
   76550-000 Quirinópolis - Goiás
9. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - QUIRINÓPOLIS
   Av. Brasil, Qd. 03, Lt. 01 - Conjunto Hélio Leão
   75870-000 Quirinópolis - Goiás

Objetivo e Política Editorial

A Revista da Olimpíada do Estado de Goiás tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em $\TeX$ ou $\LaTeX$ podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres ad hoc e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131
CEP: 74001-970 Goiânia - GO

http://www.mat.ufg.br/extensao/olimpiada
E-mail: omeg@mat.ufg.br

Fone: (062) 521 1208 /Fax: (062) 521 1180