Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 12, outubro de 2017. 37-57

Passeios Aleatórios Simples: Uma Aplicação em Jogos

Valdivino V. Junior, Tiago M. Vargas e Divaldo Portilho F. Junior

Resumo. Considere o seguinte jogo realizado em etapas ou rodadas. Um jogador chega a uma banca de jogos com C_0 reais em dinheiro para "tentar a sorte". Admita que ele participe de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta, ele recebe um real em caso de vitória e caso contrário perde um real. A chance de vitória em cada aposta é p e consequentemente de derrota $1 - p = q$. Admita que os recursos da banca são ilimitados, isto é, por mais sorte que o jogador tenha, não consegue "quebrar a banca". Suponha que ele jogue indefinidamente. Neste artigo é feita uma análise probabilística desse problema.

Introdução

A teoria de probabilidade surge ainda na Idade Média num contexto onde havia grande interesse em melhorar as chances de ganhos em jogos de azar. As primeiras teorias envolvendo jogos e apostas se devem aos matemáticos italianos Gerônimo Cardano (1501 - 1576), Galileu Galilei (1564-1642), Luca Pacioli (1445 - 1517) e Niccolo Tartaglia (1499- 1557). Seus estudos envolviam a dinâmica de jogos de dados trabalhando a ideia de espaço amostral e de eventos pertencentes a este conjunto. Ao longo dos séculos, diversos matemáticos apresentaram contribuições valiosas para a teoria de probabilidade. Podemos destacar dentre muitos Blaise Pascal, Jacob Bernoulli, Pierre Simon Laplace, dentre outros. Em 1934, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987) apresentou a formatação da teoria de probabilidade em termos axiomáticos. Daí a teoria ganha um tratamento rigoroso e surgem diversas linhas de pesquisa na área.

A teoria de passeio aleatório surge no início do Século XX. Karl Pearson fez uma publicação na Revista Nature ([3]) onde propôs uma versão bidimensional desse processo. O modelo foi reconhecido por Rayleigh como um problema análogo a um modelo de moléculas resolvido por ele. Atualmente, passeios aleatórios aparecem em aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento humano, incluindo, estatística, economia, computação, ecologia etc.

Neste trabalho apresentamos a dinâmica de um jogo realizado em rodadas onde o lucro obtido pelo jogador pode ser escrito como um passeio aleatório simples. Na seção dois apresentamos definições básicas de conceitos de probabilidade enquanto que na seção três focamos em resultados elementares da teoria de passeio aleatório simples. Na seção quatro, definimos o modelo $\mathcal{M}(p)$. Basicamente, um jogador chega a uma banca de jogos para "tentar a sorte". Ele participa de um jogo que consiste de apostas independentes. Em cada aposta ele recebe um real em caso de vitória e perde um real em caso de derrota. A chance de vitória em cada aposta é p e consequentemente de derrota $1-p=q$. Admita que os recursos da banca são ilimitados, isto é, por mais sorte que o jogador tenha, não consiga "quebrar a banca". Suponha que ele jogue indefinidamente. Esse jogo, é uma aplicação imediata da teoria de passeios aleatórios simples. Apresentamos diversos resultados e exemplos bem interessantes a respeito dessa dinâmica.

Definições Básicas

Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias. Informalmente falando, uma variável aleatória nada mais é que um número associado a um experimento aleatório. Assim, há um conjunto de índices T onde para cada $t \in T$ temos uma variável aleatória. O conjunto T normalmente é identificado como instantes de tempo. Um passeio aleatório é um tipo específico de processo estocástico. Antes de definir o conceito desse processo apresentaremos noções básicas de teoria da probabilidade.

Definição 1. *Um modelo probabilístico é uma tripla* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *onde* Ω *é o espaço amostral que consiste dos possíveis resultados do experimento,* $\mathcal{F}$ *é uma classe de eventos aleatórios, constituída de eventos e* $\mathbb{P}$ *é uma probabilidade.*

Definição 2. *Uma Probabilidade é uma função* $\mathbb{P}(.)$ *a valores reais definida em uma classe* $\mathcal{F}$ *de eventos aleatórios de um espaço amostral* Ω*,* *tal que*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- *Aditividade enumerável: para qualquer sequência* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *de eventos dois a dois disjuntos:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Observação 1. *Uma probabilidade* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *é uma função conjunto, isto é, os elementos do domínio são conjuntos. O conjunto imagem dessa função é o intervalo* $[0;1]$.

Exemplo 1. *Uma urna possui oito bolas verdes e duas bolas vermelhas. Um jogo é realizado do seguinte modo. O jogador retira duas bolas da urna uma a uma ao acaso e com reposição. Em cada retirada ganha dez reais se sair bola vermelha e paga cinco reais se sair bola verde. Temos o seguinte espaço amostral* $\Omega = \{GG, GR, RG, RR\}$ *onde* G *representa bola verde e* R *representa bola vermelha. Uma classe de eventos aleatórios neste caso é dada por* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{GG\}, \{GR\}, \{RG\}, \{RR\}, \{GG, GR\}, \{GG, RG\}, \{GG, RR\}, \{GR, RG\}, \{GR, RR\}, \{RG, RR\}, \{GG, GR, RG\}, \{GG, GR, RR\}, \{GG, RG, RR\}, \{RG, GR, RR\}, \Omega\}$. *A função probabilidade satisfaz* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\{GG\}) = \frac{16}{25}$, $\mathbb{P}(\{GR\}) = \mathbb{P}(\{RG\}) = \frac{4}{25}$, $\mathbb{P}(\{RR\}) = \frac{1}{25}$. *Por fim, se* $A \in \mathcal{F}$ *então* $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$.

Definição 3. *Seja* Ω *um espaço amostral equiprovável, isto é, um espaço onde todos os casos possíveis têm a mesma probabilidade. Então*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \text{ para todo } A \in \mathcal{F}.$$

Isto é, a probabilidade de A *é a razão entre o número de casos favoráveis a ocorrência de* A *e o número de casos possíveis.*

Definição 4. *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função a valores reais definida em Ω, tal que*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F};$$

Observação 2. *Uma variável aleatória X pode ser vista como uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que associa a cada elemento de Ω um número real.*

Definição 5. *Seja X uma variável aleatória discreta, ou seja, uma variável que assume no máximo uma quantidade enumerável de valores. A função $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ é chamada função de probabilidade de X.*

Observação 3. *A função de probabilidade de X possui as seguintes propriedades:*

- $p(x) \geq 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\sum_x p(x) = 1$.

A função $p(x)$ dá a distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

Exemplo 2. *Voltando ao Exemplo 1 seja X o lucro (ou prejuízo) do jogador após as duas retiradas. Note que $X \in \{-10, 5, 20\}$. Assim,*

$$p(20) = \mathbb{P}(X = 20) = \mathbb{P}(\{RR\}) = \frac{1}{25};$$
$$p(-10) = \mathbb{P}(X = -10) = \mathbb{P}(\{GG\}) = \frac{16}{25} \ e$$
$$p(5) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(\{GR, RG\}) = \mathbb{P}(\{GR\}) + \mathbb{P}(\{RG\}) = \frac{8}{25}.$$

Definição 6. *A esperança (média ou valor esperado) de uma variável aleatória discreta X é definida por*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x xp(x).$$

Definição 7. *A Variância de uma variável aleatória discreta X é definida por*

$$Var(X) = \sum_x (x - \mathbb{E}(X))^2 p(x).$$

E o desvio padrão de X é dado por $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

Exemplo 3. *Voltando ao Exemplo 1 seja X o lucro (ou prejuízo) do jogador após as duas retiradas.*

$$\mathbb{E}(X) = 20.\frac{1}{25} + 5.\frac{8}{25} + (-10).\frac{16}{25} = -4$$

e

$$Var(X) = (20-(-4))^2.\frac{1}{25} + (5-(-4))^2.\frac{8}{25} + (-10-(-4))^2.\frac{16}{25} = 72.$$

Definição 8. *Seja um modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
a) Dizemos que os eventos aleatórios $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são independentes se o conhecimento da ocorrência de eventos de qualquer subgrupo deles não afeta probabilidadades relacionadas aos eventos que não estão neste subgrupo.
b) Dizemos que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são independentes se o conhecimento da ocorrência de quaisquer eventos associados a um subgrupo delas não afeta probabilidades de eventos relacionados as outras variáveis que não estão neste subgrupo.

Definição 9. *Seja um modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
Dizemos que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são identicamente distribuídas se todas elas possuem a mesma função de probabilidade.

Exemplo 4. *Considere a seguinte adaptação do Exemplo 1. Ao invés de duas retiradas são realizadas n retiradas. A premiação a cada bola retirada é mantida. Nesse caso, seja*

$$X_i = \begin{cases} -5, & \text{se o jogador retira bola verde na } i\text{-ésima retirada} \\ 10, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que neste caso os eventos $A_{i,k} = \{X_i = k\}, i \geq 1$ são independentes. Além disso, as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídas.

Observação 4. *A soma de variáveis aleatórias $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ é uma função de variáveis aleatórias e é propriamente uma variável aleatória. S_n possui as propriedades dadas na proposição que segue:*

Proposição 1. *Seja* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) A média de S_n, $\mathbb{E}(S_n)$, *é dada por:*

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

b) Se as variáveis $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *são independentes,*

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

Demonstração. Veja [4]. □

Exemplo 5. *No Exemplo 4 temos*

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[-5.\frac{8}{10} + 10.\frac{2}{10} \right] = -2n.$$

Assim,a cada retirada há um prejuízo médio de dois reais. Além disso,

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[(-5-(-2))^2.\frac{8}{10} + (10-(-2))^2.\frac{2}{10} \right] \\ &= 36n. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_{S_n} = 6\sqrt{n}$. *O desvio padrão* σ_{S_n} *é uma medida de dispersão da variável aleatória* S_n *que dá uma ideia de quanto os valores da variável oscilam em torno da média.*

Teorema 1 (Lei Forte dos Grandes Números). *Seja* $X_1, X_2, X_3, ...$ *uma sequência de variáveis independentes e i denticamente distribuídas, com média comum* μ *finita* ($\mu < \infty$). *Defina* $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. *Então,*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \right) = 1.$$

Demonstração. Veja [1]. □

Observação 5. *Podemos observar na figura 1.1, que, a partir de um certo índice n, a média* $\frac{S_n}{n}$ *fica em uma faixa próxima da média* μ. *Isto nos dá a idéia intuitiva da Lei Forte dos Grandes Números.*

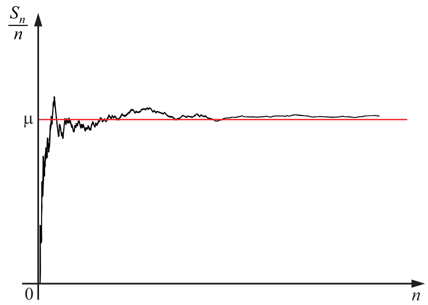


Figura 1.1: Lei Forte dos Grandes Números

Exemplo 6. *No Exemplo 1 quando $n \to \infty$ com probabilidade 1, $\frac{S_n}{n} \to -2$. Isto é para n grande $S_n \approx -2n$.*

Teorema 2 (**Teorema Central do Limite).** *Seja $X_1, X_2, X_3, ...$ uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas, com média μ ($\mu < \infty$) e variância σ^2 ($0 < \sigma^2 < \infty$). Defina*

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \text{ e } Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Então, para n grande

$$\mathbb{P}(Z_n \leq z) \approx \Phi(z),$$

onde $\Phi(z)$ é a área acima do eixo das abscissas, sob a curva dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

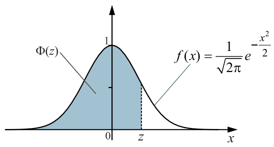
à esquerda de z (ver figura 1.2).

Demonstração. Veja [1]. □

Exemplo 7. *No Exemplo 1 suponha $n = 25$.*

$$\mathbb{P}(S_{25} \leq 0) = \mathbb{P}(Z_{25} \leq 1,67) \approx 0,9525.$$

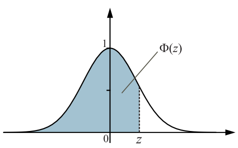
Isto é, com probabilidade próxima de 0,9525 o jogador não estará com lucro após 25 retiradas.



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z < z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde $z = 0{,}00$ até $z = 3{,}59$

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Observação:
Se $z < 0$, então $\Phi(z) = P(-\infty < Z < z) = 1 - \Phi(-z)$



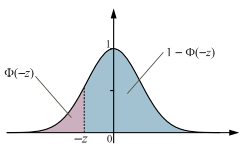


Figura 1.2: valores tabelados de $\Phi(z)$.

Passeios Aleatórios Simples

Um passeio aleatório é a formalização matemática de uma trajetória a partir de uma sequência de passos dados de forma aleatória. A cada momento o processo aumenta em uma unidade ou decresce em uma unidade. A seguir, apresentamos as principais características desse processo.

Definição 10. *Sejam $X_1, X_2, \cdots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que*

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Seja $S_0 = c$ e

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1.$$

O processo $\{S_n, n \geq 0\}$ é chamado passeio aleatório simples. Se além disso, $p = q$ temos um passeio aleatório simples simétrico.

Definição 11. *Seja um passeio aleatório simples, onde $S_0 = i$. O tempo de primeira passagem é definido por*

$$T_{i,k} = \min\{n > 0; S_n = k\}.$$

Quando $i = k$, a variável aleatória $T_{k,k}$ é chamada tempo de retorno de k. Nesse caso, escrevemos simplesmente T_k.

Definição 12. *Sejam $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Uma variável aleatória é dita tempo de parada para esta seqüência se o evento $\{N = n\}$ é independente de $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ para todo n=1,2,$\cdots$*

No caso de um passeio aleatório, o tempo de primeira passagem é um exemplo de tempo de parada. Intuitivamente falando, assistindo ao processo é possível saber o instante em que T_j ocorre. Em outras palavras, se $\{T_j = n\}$, paramos após observar $X_1, ..., X_n$ e antes de observar $X_{n+1}, X_{n+2}, ...$

Teorema 3 (**Equação de Wald**). *Se $X_i, i \geq 1$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $\mathbb{E}(|X_i|) < \infty$ e se N é um tempo de parada para $X_1, X_2, \cdots$ com $\mathbb{E}[N] < \infty$, então*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$

Demonstração. Veja [5]. □

Teorema 4. *Seja $\{S_n, n \geq 0\}$ um passeio aleatório simples com $S_0 = 0$. Então*

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$$

se $n + k$ é par e $|k| \leq n$. Caso contrário, $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$.

Demonstração. Considere um trajeto do passeio aleatório de $(0,0)$ para (n, S_n) com r passos positivos e s passos negativos. Se $S_n = k$ então $r - s = k$ e $r + s = n$. Logo, $r = \frac{n+k}{2}$ e $s = \frac{n-k}{2}$. O número de tais trajetos é $\binom{n}{r}$ e cada um tem a mesma probabilidade, a saber $p^r(1-p)^s$. Então

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{r} p^r(1-p)^s.$$

□

Lema 1. *Seja $\{S_n, n \geq 0\}$ um passeio aleatório simples com $S_0 = 0$. Defina $N_n(0, x)$ como o número de trajetos possíveis de $(0,0)$ para (n, x) (número de trajetos de comprimento n saindo de 0 e chegando a x). Então, se $n + x$ é par*

$$N_n(0, x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}}.$$

Demonstração. Considere um trajeto do passeio aleatório de $(0,0)$ para (n, S_n) com r passos positivos e s passos negativos. Se $S_n = x$ então $r - s = x$ e $r + s = n$. Logo, $r = \frac{n+x}{2}$ e $s = \frac{n-x}{2}$. □

Proposição 2 (**Princípio da Reflexão**). *Seja* $\{S_n, n \geq 0\}$ *um passeio aleatório simples com* $S_0 = 0$. *Defina* $N_n^b(0, x)$ *como o número de trajetos possíveis de* $(0, 0)$ *para* (n, x) *que passam em* b *pelo menos uma vez. Então*

$$N_{n-1}^b(0, b-1) = N_{n-1}(0, b+1).$$

Demonstração. Seja $\mathbb{C}$ um trajeto que visita b no caminho de $(0, 0)$ para $(n-1, b-1)$. Seja L o momento da última visita a b. Faça a reflexão do trajeto após L passos na reta $y = b$. Temos um trajeto $\mathbb{C}'$ de $(0, 0)$ para $(n-1, b+1)$. Reciprocamente, qualquer trajeto de $(0, 0)$ para $(n-1, b+1)$ pode refletir o segmento em $y = b$ após sua última visita a b, dando o caminho $\mathbb{C}$ de $(0, 0)$ para $(n-1, b-1)$ (Ver figura 1.3). Logo, esses dois conjuntos estão em correspondência biunívoca. $\square$

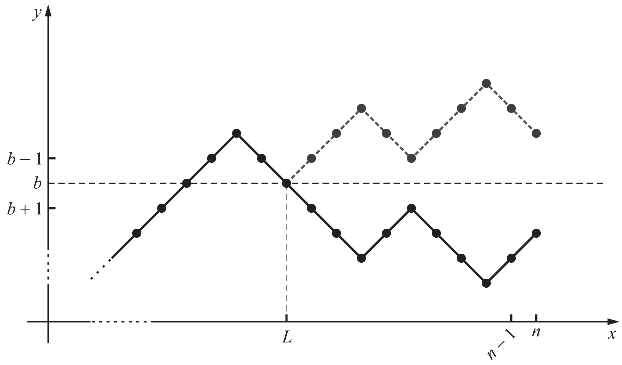


Figura 1.3: Princípio da Reflexão

Teorema 5 (**Teorema do Primeiro acerto**). *Seja* $b > 0$. *Então num passeio aleatório simples com* $S_0 = 0$

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n}\mathbb{P}(S_n = b).$$

Demonstração. Observe que se $T_{0,b} = n$ então $X_n = 1$ e $S_{n-1} = b - 1$. Logo, existem $N_{n-1}(0, b-1)$ trajetos de $(0, 0)$ para $(n-1, b-1)$ dos quais $N_{n-1}^b(0, b-1)$ visitam b no caminho. Cada um desses trajetos tem probabilidade $p^{\frac{n+b}{2}-1}q^{\frac{n-b}{2}}$. Usando o Princípio da reflexão:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{0,b}=n) &= p(N_{n-1}(0,b-1)-N_{n-1}(0,b+1))p^{\frac{n+b}{2}-1}q^{\frac{n-b}{2}}\\ &= \left[\binom{n-1}{\frac{n+b}{2}-1}-\binom{n-1}{\frac{n+b}{2}}\right]p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}\\ &= \frac{b}{n}\mathbb{P}(S_n=b).\end{aligned}$$

□

Teorema 6 (**Teorema de Ballot**). *Seja $\{S_n, n \geq 0\}$ um passeio aleatório simples com $S_0 = 0$. Dado que $S_{2n} = 2r$, a probabilidade de que o passeio aleatório não retorne a origem até o $2n$-ésimo passo é $\frac{r}{n}$.*

Demonstração. A ideia é inicialmente contar os passeios como na prova do Teorema do Primeiro Acerto. Considere o número $N^0_{2n-1}(1, 2r)$ de passeios de $(1, 1)$ para $(2n, 2r)$ que visitam a origem. Assim, podemos refletir o passeio no eixo x. Daí vemos que

$$N^0_{2n-1}(1, 2r) = N_{2n-1}(-1, 2r).$$

Como todos os $N_{2n}(0, 2r)$ passeios de $(0, 0)$ para $(2n, 2r)$ são equiprováveis segue que a probabilidade desejada é dada por

$$\begin{aligned}\frac{N_{2n-1}(1,2r)-N^0_{2n-1}(1,2r)}{N^0_{2n}(0,2r)} &= \frac{N_{2n-1}(1,2r)-N_{2n-1}(-1,2r)}{N^0_{2n}(0,2r)}\\ &= \frac{\binom{2n-1}{n+r-1}-\binom{2n-1}{n+r}}{\binom{2n}{n+r}}.\end{aligned}$$

□

O Modelo $\mathcal{M}(p)$

Definimos o modelo $\mathcal{M}(p)$ como a evolução do lucro obtido por um jogador que participa de um jogo disputado em rodadas onde em cada rodada lucra um real com probabilidade p e perde um real com probabilidade $1-p$, independente do que ocorre em outras rodadas. Trata-se de um passeio aleatório $\{S_n, n \geq 0\}$ com parâmetro p e $S_0 = 0$. Aqui X_i é o lucro ou prejuízo obtido pelo jogador na i-ésima rodada.

Teorema 7. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$ com $p < \frac{1}{2}$. Seja N o número de rodadas até o jogador atingir um prejuízo k ($k < 0$). Temos*

$$\mathbb{E}(N) = \frac{k}{2p-1}.$$

Demonstração. Temos que $\mathbb{E}(X_i) = 1p + (-1)(1-p) = 2p - 1$. O resultado segue do Teorema 3. □

Exemplo 8. *Considere a seguinte versão do jogo Par ou Ímpar. Um dos jogadores escolhe a opção par e o outro ímpar. Então, num mesmo instante, cada jogador apresenta, com os dedos, um número de um a cinco. Se o total de dedos mostrados for par, ganha o jogador que escolheu par, caso contrário o outro jogador ganha. Suponha dois jogadores jogando Par ou Ímpar em diversas rodadas, apostando um real em cada rodada. Um dos jogadores chamaremos de Estrategista e o outro de Leigo. O Leigo joga de forma aleatória e nunca adota estratégia. O Estrategista adota estratégia de assumir que o outro joga aleatoriamente e joga de forma a maximizar suas chances de ganho. Assim, quando pede par apresenta uma quantidade ímpar de dedos e quando escolhe ímpar apresenta uma quantidade par de dedos. Assim, sua chance de ganho em cada rodada é $0,6$ e do Leigo $0,4$. Seja S_n o lucro do Estrategista após n rodadas. Em média, demorará cinquenta rodadas para ele alcançar um lucro de dez reais.*

Teorema 8. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$. A distribuição de probabilidade do lucro do jogador após n rodadas é tal que*

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+k}{2} \end{pmatrix} p^{\frac{n+k}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}} \tag{1.1}$$

se $n + k$ é par e $|k| \leq n$. Caso contrário, $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$. Além disso, para n grande

$$\mathbb{P}(S_n \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s - n(2p-1)}{2\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{1.2}$$

Demonstração. A Equação (1.1) segue do Teorema 4, enquanto (1.2) segue do Teorema 2. □

Exemplo 9. *Considere o jogo do Par ou Ímpar definido no Exemplo 8. A probabilidade do Estrategista não estar com lucro após 24 rodadas é aproximadamente* $\Phi(-1) = 0,1587$, *enquanto que em 600 rodadas é aproximadamente* $\Phi(-5) = 0$.

Teorema 9. *Considere o modelo* $\mathcal{M}(p)$. *A distribuição de probabilidade do lucro do jogador após n rodadas é tal que*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = (2p-1)\right) = 1.$$

Assim, com probabilidade 1, para n grande $S_n \approx n(2p-1)$.

Demonstração. Aplicação imediata do Teorema 1. □

Exemplo 10. *Considere o jogo do Par ou Ímpar definido no Exemplo 8. Com alta probabilidade, em mil rodadas o lucro do Estrategista estará próximo de duzentos reais.*

Teorema 10. *Considere o modelo* $\mathcal{M}(p)$. *Seja* $T_{0,b}$ *o número de rodadas até o jogador atingir um lucro de b (*$b > 0$*) reais pela primeira vez. A distribuição de probabilidade de* $T_{0,b}$ *satisfaz*

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n) = \frac{b}{n}\begin{pmatrix} n \\ \frac{n+b}{2} \end{pmatrix} p^{\frac{n+b}{2}}(1-p)^{\frac{n-b}{2}} \tag{1.3}$$

se $n + k$ *é par e* $|k| \leq n$. *Caso contrário,* $\mathbb{P}(T_{0,b}) = 0$. *Além disso, se* $n - b$ *grande e* $n + b$ *é par,*

$$\mathbb{P}(T_{0,b} = n) \approx (2n)^n \sqrt{\left(\frac{2}{\pi n}\right)\left(\frac{b}{n+b}\right)\left(\frac{b}{n-b}\right)\left(\frac{p}{n+b}\right)^{n+b}\left(\frac{1-p}{n-b}\right)^{n-b}}. \tag{1.4}$$

Demonstração. A Equação (1.3) segue do Teorema 5. Já (1.4) segue da aproximação de Stirling:

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

□

Teorema 11. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$. Suponha que após $2n$ rodadas o lucro do jogador é $S_{2n} = r$. Então a probabilidade de que o jogador esteve em lucro durante todas as rodadas é $\frac{r}{n}$.*

Demonstração. Aplicação imediata do Teorema 6. □

Teorema 12. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$ com $p = \frac{1}{2}$ isto é, o jogador participa de um jogo justo. Então, com probabilidade 1, em algum momento o jogador ficará com lucro 0.*

Demonstração. Seja $h_i = \mathbb{P}(S_n = 0 \text{ para algum } n \text{ finito} | S_m = i)$ para algum instante m fixado. Em palavras, h_i é a probabilidade de que em algum momento o capital do jogador retorne ao capital inicial dado que na rodada m seu lucro era de i reais. Então, usando a fórmula da probabilidade total (veja [2], página 54, Teorema (3)),

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_i &= \frac{1}{2}h_{i+1} + \frac{1}{2}h_{i-1} \text{ para i=1,2,...} \end{aligned}$$

Assim, h é a solução minimal não negativa desta recorrência, cuja solução geral é

$$h_i = A + Bi.$$

Mas a restrição $0 \leq h_i \leq 1$ força $B = 0$. Assim, $h_i = 1$ para todo i. Daí segue o resultado desejado. □

Definição 13. *Seja $C_n, n \geq 0$ o capital do jogador após n rodadas. Então, se o jogador inicia o jogo com a reais, temos:*

$$C_0 = a \text{ e } C_n = a + S_n.$$

Teorema 13. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$. Suponha que o jogador decide parar de jogar se alcançar um lucro de b reais ou se perder todo o capital inicial, digamos $C_0 = a$. A probabilidade do jogador sair do jogo com lucro de b reais é*

$$f_{a,a+b} = \begin{cases} \frac{a}{a+b}, & \text{se} \quad p = \frac{1}{2}, \\ \\ \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}, & \text{se} \quad p \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Demonstração. Seja $f_{i,a+b}$ a probabilidade do jogador sair do jogo com capital de $a+b$, partindo de i reais $0 \leq i \leq (a+b)$. Assim, $f_{0,a+b} = 0$ e $f_{a+b,a+b} = 1$. Primeiramente, consideramos o caso $p \neq \frac{1}{2}$. Pela fórmula da probabilidade total,

$$f_{i,a+b} = pf_{i+1,a+b} + (1-p)f_{i-1,a+b}.$$

Assim,

$$f_{i+1,a+b} - f_{i,a+b} = \left(\frac{1-p}{p}\right)(f_{i,a+b} - f_{i-1,a+b}). \tag{1.6}$$

Utilizando o mesmo procedimento para $i = 1$ e $i = 2$, temos, respectivamente:

$$f_{2,a+b} - f_{1,a+b} = \left(\frac{1-p}{p}\right) f_{1,a+b},$$

e

$$f_{3,a+b} - f_{2,a+b} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 f_{1,a+b}.$$

Assim, para $i = 0, 1, 2, \cdots a+b$,

$$f_{i,a+b} - f_{i-1,a+b} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-1} f_{1,a+b}. \tag{1.7}$$

Fazendo $i = a+b$ em (1.6) e (1.7) temos

$$f_{a+b,a+b} - f_{a+b-1,a+b} = \left(\frac{1-p}{p}\right)(f_{a+b-1,a+b} - f_{a+b-2,a+b}), \tag{1.8}$$

e

$$f_{a+b,a+b} - f_{a+b-1,a+b} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b-1} f_{1,a+b}, \tag{1.9}$$

respectivamente.

Podemos escrever

$$f_{i,a+b} - f_{1,a+b} = \sum_{j=1}^{i-1}(f_{j+1,a+b} - f_{j,a+b}). \tag{1.10}$$

Assim, de (1.7), (1.8), (1.9) e (1.10),

$$f_{i,a+b} - f_{1,a+b} = \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j\right] f_{1,a+b}.$$

No entanto,

$$\sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)},$$

pois se trata da soma de termos de série geométrica, logo,

$$f_{i,a+b} = f_{1,a+b} \cdot \left[\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1-\frac{1-p}{p}}\right]. \tag{1.11}$$

Fazendo $i = a+b$ e $f_{a+b,a+b} = 1$ em (1.11) segue:

$$f_{1,a+b} = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.$$

Assim, podemos reescrever (1.11) como

$$f_{i,a+b} = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}. \tag{1.12}$$

fazendo $i = a$ em (1.12), segue o resultado.

Para o caso $p = \frac{1}{2}$,

$$f_{i,a+b} = \frac{1}{2} f_{i+1,a+b} + \frac{1}{2} f_{i-1,a+b}.$$

fazendo $i = 1$ e $i = 2$, temos, respectivamente:

$$f_{2,a+b} - f_{1,a+b} = f_{1,a+b},$$

e

$$f_{3,a+b} - f_{2,a+b} = f_{1,a+b}.$$

Continuando esse processo, concluímos que

$$f_{i,a+b} - f_{i-1,a+b} = f_{1,a+b}.$$

Assim,

$$f_{i,a+b} - f_{1,a+b} = \sum_{j=1}^{i-1}(f_{j+1,a+b} - f_{j,a+b}) = (i-1)f_{1,a+b}. \tag{1.13}$$

Fazendo $i = a + b$ em (1.13), temos $f_{1,a+b} = \frac{1}{a+b}$. Fazendo $i = a$ em (1.13), o resultado é imediato. □

Exemplo 11. *Considere o jogo do Par ou Ímpar definido no Exemplo 8. Suponha que os dois jogadores comecem com vinte reais cada. Admita que o jogo acaba quando um dos jogadores ficarem sem dinheiro. A probabilidade do Leigo em algum momento perder todo seu dinheiro é 0,982954.*

Corolário 1. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$ com $p > \frac{1}{2}$. Suponha que o jogador decide parar de jogar se alcançar um lucro de b reais ($b \to \infty$) ou se perder todo o capital inicial, digamos $C_0 = a$. A probabilidade do jogador sair do jogo com lucro de b reais é*

$$\lim_{b\to\infty} f_{a,a+b} = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

Isto é, para um valor grande de b:

$$f_{a,a+b} \approx 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a.$$

Demonstração. Se $p > \frac{1}{2}$ podemos tomar $b \to \infty$ na Equação (1.5). □

Exemplo 12. *Considere o jogo do Par ou Ímpar definido no Exemplo 8. Suponha que o Estrategista inicia o jogo com dez reais e o Leigo com um milhão de reais. Admita que o jogo acabe quando um dos jogadores* *ficar sem dinheiro. A probabilidade do Leigo em algum momento perder todo seu dinheiro é aproximadamente*

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\approx 0,982658.$$

Teorema 14. *Considere o modelo $\mathcal{M}(p)$, com $p\neq\frac{1}{2}$. Suponha que o jogador decide parar de jogar se alcançar um lucro de b reais ou se perder todo o capital inicial, digamos $C_0=a$. Seja B o número de rodadas até o jogo terminar. Então,*

$$\mathbb{E}(B)=\frac{1}{(2p-1)}\left[(a+b)\left(\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}\right)-a\right].$$

Demonstração. B é número de rodadas até o capital atingir $a+b$ ou 0. Logo,

$$B=\min\{n\geq 0: C_n=0 \text{ ou } C_n=a+b\}.$$

Temos

$$C_n=a+S_n=a+\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

Logo,

$$B=\min\left\{n\geq 0:\sum_{i=1}^{n}X_i=-a \text{ ou } \sum_{i=1}^{n}X_i=b\right\}.$$

Mas $\mathbb{E}(X_i)=1p+(-1)(1-p)=2p-1$. Da equação de Wald segue

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{B}X_i\right)=\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(B)=(2p-1)\mathbb{E}(B).$$

Mas

$$\sum_{i=1}^{B}X_i=\begin{cases} b, & \text{com probabilidade } \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}},\\ -a, & \text{com probabilidade } 1-\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.\end{cases}$$

Daí,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{B} X_i\right) = b\left[\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}\right] - a\left[1-\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}\right]$$
$$= (a+b)\left[\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}\right] - a.$$

Assim,

$$(2p-1)\mathbb{E}(B) = (a+b)\left[\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}\right] - a.$$

□

Exemplo 13. *Considere o jogo do Par ou Ímpar definido no Exemplo 8. Suponha que os dois jogadores comecem com vinte reais cada. Admita que o jogo acaba quando um dos jogadores ficarem sem dinheiro. A média de duração do jogo, em rodadas, é* $\mathbb{E}(B) \approx 96,59$.

Considerações finais

Este trabalho apresenta um modelo de simples compreensão com resultados bastante interessantes. Ele pode servir de motivação para estudantes que queiram se dedicar ao estudo da teoria de probabilidade. Em particular, os passeios aleatórios apresentam importantes aplicações em diversas áreas do conhecimento humano. É um modelo aparentemente simples mas com grande poder na modelagem estocástica.

Bibliografia

[1] B. R. James. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário.* Projeto Euclides, IMPA (2015).

[2] D. Stirzaker. *Elementary Probability.* Cambridge University Press (2003).

[3] K. Pearson. *The problem of the random walk.* Nature, **72** (1905), 342–342.

[4] S. M. Ross. *Probabilidade- Um Curso Moderno com Aplicações.* Bookman (2010).

[5] S. M. Ross. *Stochastic Processes.* Wiley (1995).

Autores: Valdivino Vargas Junior, Tiago Moreira Vargas e Divaldo Portilho Fernandes Junior
Endereço: Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística
e-mail: `vvjunior@gmail.com`

Divaldo Portilho Fernandes Junior
Endereço: Colégio Dinâmico e Colégio Fractal