Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olimpíada/ Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística
Nº16 (nov.2021/nov.2022) Goiânia: Editora da UFG, 2021-v. Anual
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Postagem
2° semestre de 2021

Revista da Olimpíada, n° 16, 2021
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
74.690-900 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 3521 1208
Versão eletrônica disponível em:
https://revistadaomeg.ime.ufg.br/

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural*, *integração Universidade/Escola*, *espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática*.

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, 07 de março 2021
Os Editores.

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - CEP 74.690-900 - Goiânia-GO
E-mail: revista.omeg.ime@ufg.br Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180
Site: https://revistadaomeg.ime.ufg.br/

Classificados na XXIX OMEG - 2020

Nível 1 (6^o e 7^o anos do Ensino fundamental)

MEDALHA DE OURO

★ Sarah Antunes Vilela de Aguiar (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

★ Lucas Amaral Marques Vêncio (COLÉGIO WRJ)

★ Theo Maciel Machado de Araújo (COLÉGIO INTEGRADO JAÓ)

MEDALHA DE PRATA

★ Vitor Emanuel Ferrado Melo Fernandes (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

★ Geovana Oliveira Becker (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

★ Maria Eduarda Magalhães Ferreira (COLÉGIO MARISTA DE GOIÂNIA)

★ Ana Luiza Cordeiro Simão (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

★ Mateus Carneiro Beraldo (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

MEDALHA DE BRONZE

★ Pedro de Moraes Dumont (COLÉGIO WRJ)

★ Matheus Porto de Carvalho Nunes (COLÉGIO WRJ)

★ Enzo Ribeiro Alves (STUDIUM ENSINO FUNDAMENTAL)

★ Anna Luiza Gonzaga Fernandes (COLÉGIO MARISTA DE GOIÂNIA)

★ Nicolas Barros de Sá Rodrigues (COLÉGIO MARISTA DE GOIÂNIA)

★ Igor Carvalho Felix (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

★ Luana Vilarinho Wolkweis Hélia (COLÉGIO VICTORIA FIGUEIREDO - OS PEQUENINOS)

★ Marina Laurenti Gheller (STUDIUM ENSINO FUNDAMENTAL)

MENÇÃO HONROSA

- ★ Eloah Gayatri Macario dos Santos
- ★ Maria Paula Monteiro Godinho
- ★ Angela de Souza Mota
- ★ Lara Rezende de Abreu
- ★ Enzo Gama Cunha
- ★ Arthur Batista Moreira
- ★ Marcelo Salgado Calazanas
- ★ Beatriz Bastos Ferreira
- ★ Murilo Fleury Luciano
- ★ João Naves de Oliveira
- ★ Henrique Pontieri Ruiz

Nível 2 (8^o e 9^o anos do Ensino fundamental)

MEDALHA DE OURO

- ★ Arthur Moizes dos Santos (CEPMG PROFESSOR JOSÉ REIS MENDES/ TRINDADE)
- ★ Mateus de Souza Mota (COLÉGIO ESTADUAL DA POLICIA MILITAR ARLINDO COSTA/ ANAPOLIS)

MEDALHA DE PRATA

- ★ Carolina Bressan Vieira Sá Leitão (ESCOLA INTERAMERICA)
- ★ Bruno Sardinha de Paula (STUDIUM ENSINO FUNDAMENTAL)
- ★ Ana Clara Gomes Vieira (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)
- ★ Artur Amaro Rodrigues Oliveira (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)
- ★ Angelo Sartoratto (COLEGIO WRJ)
- ★ Gabriella Ficher de Assis Faria (COLEGIO EXTERNATO SAO JOSE)

MEDALHA DE BRONZE

- ★ Matheus Macedo de Sousa (FARIAS BRITO JOVEM SUL)
- ★ Rodolfo de Melo Neto (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)

- ★ Pedro Paulo Monteiro Godinho (COLÉGIO MARISTA DE GOIÂNIA)
- ★ Sofia Pyloridis Lustosa (COLEGIO WRJ)
- ★ João Vitor de Castro Carvalho (ESCOLA INTERAMERICA)
- ★ Valentina Fernandes Cintra (COLEGIO WRJ)
- ★ Henrique Teixeira Nunes (STUDIUM ENSINO FUNDAMENTAL)
- ★ Luiz Miguel Morato Costa Yamada Rodrigues (COLÉGIO MARISTA DE GOIÂNIA)
- ★ Paulo Augusto (COLEGIO PREVEST CENTRO)
- ★ Ulisses Calixto Aquino Fontoura (STUDIUM ENSINO FUNDAMENTAL)

MENÇÃO HONROSA

- ★ Arthur Diniz Cabral
- ★ Bruno Nascimento Miranda Freitas
- ★ Davi Abreu da Silveira
- ★ José Viana Neto
- ★ Letícia Oliveira da Silva
- ★ Mariana Guimarães Naves
- ★ Brenda Gomes Oliveira
- ★ Gabriela de Souza Mota
- ★ Miguel Lemos Monteiro Belem
- ★ Artur Andreaza e Lemos
- ★ Lucas Rosolen
- ★ Rafael Campos Veloso
- ★ Renan Machado Amorim

Nível 3 (Ensino Médio)

MEDALHA DE OURO

- ★ Jonatan de Lima Santos (COLÉGIO ARENA)
- ★ Pedro Porto de Carvalho Nunes (COLÉGIO ARENA)
- ★ Larissa Lemos Afonso (COLÉGIO INTEGRADO JAÓ)

MEDALHA DE PRATA

- ★ Bruno de Moraes Dumont
- ★ Carlos Samuel Duarte dos Santos (COLÉGIO SIMBIOS)
- ★ Miguel Lima (COLÉGIO INTEGRADO JAÓ)
- ★ Iago Jacob de Souza Ramos (COLÉGIO SIMBIOS)
- ★ Rafael Alvez Padilha (IF GOIANO - CAMPUS IPORÁ)

MEDALHA DE BRONZE

- ★ Carlos Eduardo de Sousa (COLÉGIO ARENA)
- ★ Daniel Rocha de Andrade (CEPMG Dr. Negreiros/ NEROPOLIS)
- ★ Gabriela Nascimento Gonçalves (COLÉGIO VISÃO SEB)
- ★ Caio de Paula Colnago (COLÉGIO AGOSTINIANO NOSSA SENHORA DE FÁTIMA)
- ★ Luís Gabriel França Reis (COLÉGIO INTEGRADO JAÓ)
- ★ Enzo Morato de Assis Machado (INSTITUTO FEDERAL DE GOIÁS (IFG) CAMPUS GOIÂNIA)
- ★ Felipe Nunes de Souza Camargo (COLÉGIO INTEGRADO JAÓ)

MENÇÃO HONROSA

- ★ Andre Novais Xavier Rodrigues
- ★ Brian Matheus Rodrigues Ribeiro
- ★ Daniel Kenji Tomo Watanabe
- ★ Juliano Kanzo Watanabe Santana
- ★ Arthur Fernandes de Melo
- ★ Fabio Junior Silva Costa
- ★ Geovanna Bispo Almeida

★ Gustavo Prager Freitas

★ Hunter Aleixo Rezende

★ Juliana Costa de Morais

★ Laura Lucena Lisboa Borges

★ Leonardo Adorin de Araújo

★ Lídio Gabriel Ribeiro Sousa

★ Luiza Lacerda Faria

★ Matheus Guilherme de Oliveira Moreno

★ Nicole Elise Vieira Mendonça

★ Paulo Roberto de Almeida

★ Paulo Octavio de Paula

★ Rickmann Silva Borges

★ Thiago Fernandes Cardoso Muniz

REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 15

Resolução Comentada das Provas da XXVIII OMEG

Ana Paula de A. Chaves[1] | Francisco B. de L. Holanda[2] | Kamila da S. Andrade[3] | Otávio Marçal L. Gomide[4] | Rosane G. Pereira[5] | Tiago M. Vargas[6] | Valdivino V. Júnior[7]

Neste artigo apresentamos uma resolução comentada das questões da segunda fase da OMEG de 2020 e listamos as questões relativas a primeira fase. Sugerimos que, antes de simplesmente ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, todos os problemas são apresentados primeiro e, depois, as soluções e comentários. Por fim, apresentamos alguns problemas adicionais para o leitor.

[1,3,4,5,6,7]Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goiás
[2]Faculdade de Administração, Ciências Contábeis e Ciências Econômicas - Universidade Federal de Goiás

Contato
[1]apchaves@ufg.br
[2]bholanda@ufg.br
[3]kamila.andrade@ufg.br
[4]otaviomarcal@ufg.br
[5]rosanegope@ufg.br
[6]vargas@ufg.br
[7]vvjunior@ufg.br

1 | INTRODUÇÃO

Usualmente as provas da OMEG eram realizadas no último terço do ano. A prova constava de uma única fase com questões discursivas. No ano de 2020 essa realidade foi alterada. No início deste ano o planeta viu se espalhar por toda parte um vírus que alterou a dinâmica de vida de quase toda a humanidade. Desde então, nosso planeta vive a pandemia causada por uma variedade de coronavírus. A doença causada por esse vírus, a COVID-19, afetou milhões de pessoas mundo afora causando a morte de milhões de pessoas. Apenas no Brasil, até novembro de 2021, o número de mortes já supera a casa das 600 mil vidas. Um impacto gigantesco na vida de milhões de pessoas que perderam amigos e entes queridos. Impacto muito grande também dentro das instituições. O IME-UFG, por exemplo, perdeu para a COVID-19 em 2020, o professor Doutor Eduardo Abierto Alarcon. Lembrando que o instituto perdeu em 2021, o professor doutor Helvécio Pereira de Castro. Embora o segundo não tenha perdido a vida em decorrência da COVID-19 fica a menção aos dois. Não poderíamos deixar de destacar que os professores Eduardo e Helvécio deram valiosas contribuições para consolidação e crescimento do IME. Por fim, destacamos que a UFG perdeu em decorrência da COVID-19 mais de trinta profissionais entre professores e técnicos administrativos.

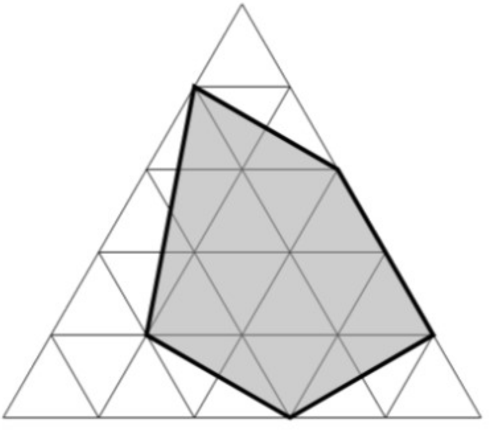
Assim, os anos de 2020 e 2021 foram de muitas adversidades. Eventos educacionais, artísticos, culturais e esportivos foram cancelados, adiados ou realizados sem ausência de público. Escolas e universidades adotaram modelos remotos ou híbridos para manterem o ensino. Diversas olimpíadas de matemática também sofreram adiamentos ou mudanças em seus formatos. A XVI OBMEP prevista inicialmente para 2020 foi adiada para ser realizada em 2021, sendo sua segunda fase realizada em novembro de 2021. A 42^a Olimpíada Brasileira de Matemática, prevista para 2020, foi realizada no ano de 2021 em formato virtual. A XXIX OMEG também teve seu formato e época de aplicação alterados. A competição passou a ser realizada no formato virtual e a contar com duas etapas. Na primeira fase a prova contou com quinze questões de múltipla escolha em cada nível. Na segunda fase o número de questões foi de quatro para cada nível. A prova inicialmente prevista para 2020, foi aplicada em 2021.

Neste artigo apresentamos uma resolução comentada das questões da segunda fase da OMEG de 2020 e listamos as questões relativas à primeira fase. O artigo é dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos as questões relativas à segunda fase da prova da OMEG. Na Seção 3 as soluções das questões apresentadas na Seção 2 são detalhadas. Por fim, na Seção 4 apresentamos as questões de múltipla escolha relativas a primeira fase.

2 | PROVAS DA XXIX OMEG- ENUNCIADO DAS QUESTÕES RELATIVAS A SEGUNDA FASE

2.1 | Questões relativas ao Nível 1

Problema 1:
Na figura a seguir, temos uma malha formada por triângulos equiláteros congruentes, todos de área igual a $1cm^2$. Qual é a área do pentágono cinza?



Problema 2:
Um número de seis algarismos começa, à esquerda, por 1. Se tirarmos esse algarismo 1 do início e o colocarmos no final do número, o resultado será um número três vezes maior. Qual é o número de seis dígitos inicial? Explique detalhadamente como você encontrou esse número.

Problema 3:

Na ilha Anchúria, há três tipos de pessoas: os heróis que sempre falam a verdade, os ladrões que sempre mentem e as pessoas comuns que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Certa vez, um viajante chega à ilha e encontra-se com três moradores: Arnaldo, Bernaldo e Ceraldo e escuta deles as seguintes frases:

Arnaldo: Eu sou uma pessoa comum.

Bernaldo: Arnaldo diz a verdade.

Ceraldo: Eu não sou uma pessoa comum.

Sabendo que o visitante encontrou uma pessoa de cada grupo, quem é o herói e quem é ladrão?

Problema 4:

Temos um tabuleiro 8×7 (8 linhas e 7 colunas) e em cada casa devemos colocar um número de 1 a 56 de modo que cada número apareça uma única vez no tabuleiro. É possível que:

1. A soma dos números escritos em cada coluna seja a mesma?
2. A soma dos números escritos em cada linha seja a mesma?

2.2 | Questões relativas ao Nível 2

Problema 1:

De um campeonato de xadrez, participaram alunos de 10, 11 12 e 13 anos. A soma de todas as idades era 253. O número de alunos de 12 era equivalente a 1,5 (uma vez e meia) o número de alunos de 13 anos. Quantos alunos de 12 anos havia no torneio?

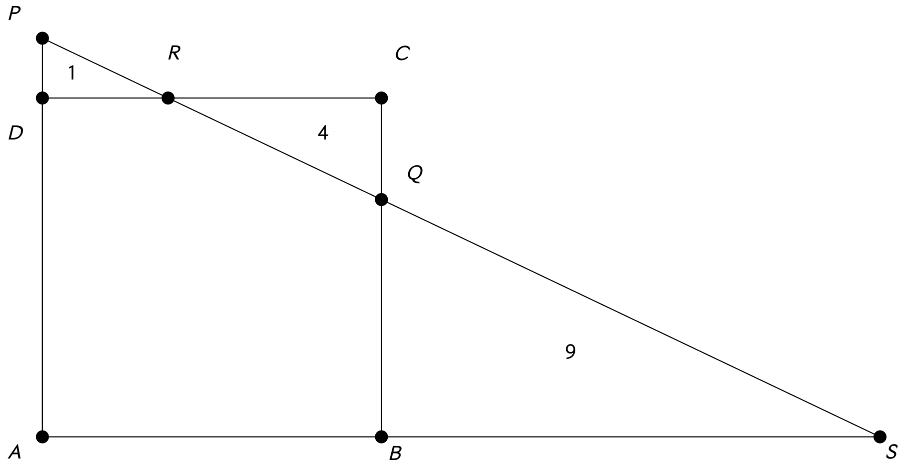
Problema 2:

Em uma lousa estão escritos os número inteiros $1, 2, \ldots, 20$.

1. De quantas formas podemos escolher três números de modo que a ordem importe?
2. De quantas formas podemos escolher três números de modo que a ordem não importe?
3. De quantas formas podemos escolher três números de modo que o produto do três números seja um múltiplo de 4 sem que a ordem importe?

Problema 3:

Na figura a seguir, temos um quadrado $ABCD$ e uma reta r que corta seus lados (ou prolongamento dos lados) nos pontos P, Q, R, S. As áreas dos triângulos cinzas estão marcados na figura. Qual é a área do quadrado?



Problema 4:
Encontre todos os inteiros n tais que a fração

$$\frac{n^2+20}{n+21}$$

é um número inteiro.

2.3 | Questões relativas ao Nível 3

Problema 1:
Encontre todos os números inteiros positivos que podem ser escritos como soma de dois números compostos.

Problema 2:
Seja $ABCD$ um quadrado e P um ponto sobre o lado BC o incírculo do triângulo ABP tem centro O_1 e raio r_1. O círculo interno ao quadrado e tangente aos segmentos CD, DA e AP tem centro O_2 e raio r_2. Seja R o raio do círculo circunscrito ao triânguo CO_1O_2. Mostre que

1. $r_1 + r_2 + R = AB$.
2. $R^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Problema 3:
Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$ há uma torre ou está vazia. Para qualquer par de torres que não se ameaçam, há uma casa vazia que é ameaçada por ambas as torres. Qual é a quantidade máxima de torres que há nesse tabuleiro?

Problema 4:
Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3 | PROVAS DA XXIX OMEG- SOLUÇÕES DAS QUESTÕES RELATIVAS A SEGUNDA FASE

3.1 | Soluções das questões relativas ao Nível 1

Problema 1: Sejam A, B, C, D, E os vértices do pentágono e sejam M, N, P, Q, R, S pontos auxiliares sobre os vértices da malha.

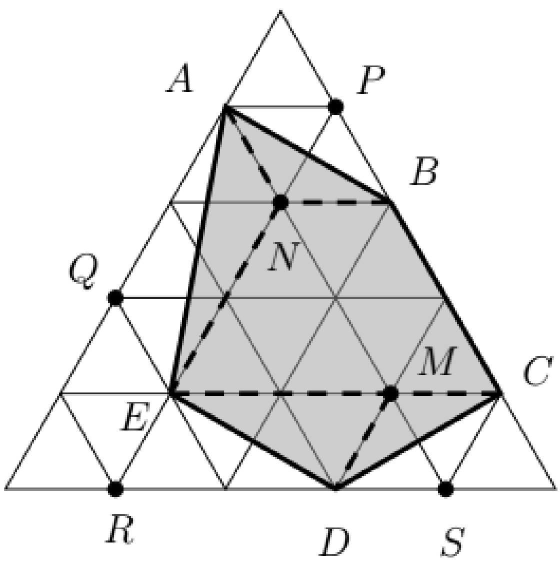


FIGURA 1 Grafo de busca

Note que o pentágono $ABCDE$ pode ser decomposto em quatro triângulos ANB, ANE, EMD, MDC mais um quadrilátero $NBCE$. Veja que o triângulo ANE é metade do paralelogramo $ANEQ$ que é formado por quatro triângulos de área 1 cm^2 cada. Assim, Área (ANE) = $\frac{4}{2}$= 2 cm^2.

De modo análogo, temos que:

- O triângulo ANB é metade do paralelogramo $APBN$ que é formado por dois triângulos de área 1 cm^2. Logo, Área (ANB) = $\frac{2}{2}$ = $1cm^2$.
- O triângulo MDC é metade do paralelogramo $MCSD$ que é formado por dois triângulos de área 1 cm^2. Logo, Área(MCD) = $\frac{2}{2}$ = 1 cm^2.
- O triângulo EMD é metade do paralelogramo $EMDR$ que é formado por quatro triângulos de área $1cm^2$. Logo,

Área $(ANB) = \frac{4}{2} = 2\ cm^2$.

Além disso, o quadrilátero $NBCE$ é formado por oito triângulos de área 1 cm^2. Logo, Área $(NBCE) = 8\ cm^2$.

Portanto, Área $(ABCDE) = 2 + 1 + 1 + 2 + 8 = 14\ cm^2$.

Problema 2: Seja x o número de seis algarismos começando por 1. Temos que ele pode ser escrito como:

$$x = \overline{1abcde},$$

onde $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, e considere y o número que é o resultante de tirarmos o algarismo 1 de x e colocá-lo no final, ou seja,

$$y = \overline{abcde1}.$$

Outra maneira de escrevermos os números x e y é:

$$x = 1 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e,$$

$$y = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 1.$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned} y &= 3x; \\ a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 1 &= 3(1 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e) \\ 7(a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e) &= 299999 \\ a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e &= 42857. \end{aligned} \tag{1}$$

Daí, $a = 4, b = 2, c = 8, d = 5$ e $e = 7$. Logo, o número de seis dígitos inicial é $x = 142857$. **Problema 3:** Temos duas possibilidades: ou Arnaldo está mentindo, ou está dizendo a verdade. Então, iremos analisar as duas situações:

- Se Arnaldo diz a verdade, ele é uma pessoa comum. Bernaldo está dizendo a verdade e, portanto, é um herói. Uma vez que apenas pessoas comuns e heróis falar a verdade e Arnaldo já é uma pessoa comum. Neste caso, Ceraldo é um ladrão e deve mentir. Porém, quando Ceraldo afirma que não é uma pessoa comum, está falando a verdade. Contradição.
- Se Arnaldo mente, ele não é herói. Note que Bernaldo também está mentido ao afirmar que Arnaldo diz a verdade. Logo, Bernaldo também não é o herói. Por exclusão, Ceraldo é o herói.

Agora, suponha que Arnaldo é uma pessoa comum. Neste caso, Bernaldo seria o ladrão. Neste caso, ao afirmar que Arnaldo diz a verdade, Bernaldo estaria falando a verdade. Contradição. Consequentemente, Arnaldo é o ladrão e Bernaldo é a pessoa comum.

Problema 4: Observe que a soma dos números de 1 a 56 pode ser agrupada em pares cuja soma é 57:

$$1 + 56 = 2 + 55 = 3 + 54 = \cdots = 28 + 29 = 57.$$

Assim,

$$1 + 2 + \cdots + 56 = 57 \times 28 = 1596.$$

1. Se todas as linhas tiverem a mesma soma, esse valor deve ser igual a $\frac{1596}{8} = 199{,}5$ que não é um valor inteiro. Por outro lado, a soma dos inteiros escritos em qualquer linha também deve ser um número inteiro. Isso significa que é impossível fazer o que é solicitado neste item.

2. Se todas as colunas tiverem a mesma soma, esse valor deve ser igual a $\frac{1596}{7} = 228$. Agora podemos reaproveitar a simetria utilizada para calcular a soma $1 + 2 + \cdots + 56$ para construir um exemplo de tabuleiro satisfazendo às condições deste item. Veja a seguir:

1	2	3	4	5	6	7
56	55	54	53	52	51	50
8	9	10	11	12	13	14
49	48	47	46	45	44	43
15	16	17	18	19	20	21
42	41	40	39	38	37	36
22	23	24	25	26	27	28
35	34	33	32	31	30	29

3.2 | Soluções das questões relativas ao Nível 2

Problema 1: Suponha que são x, y, z, w alunos de 10, 11, 12 e 13 anos, respectivamente. Temos que $z = 1,5w$, logo w é par. Além disso, $10x + 11y + 18w + 13w = 253$. Ou seja,

$$10x + 11y + 31w = 253.$$

Que pode ser reescrita como

$$10(x + y + 3w) + (y + w) = 253.$$

Assim, $y + w$ é um número terminado em 3.

- Se $y + w = 3$, então $w = 2$ e $y = 1$. Portanto, $z = 3$. Além disso, $10(x + 7) = 250$. Logo, $x = 18$.
- Se $y + w = 13$, então $10(x + 13 + 2w) = 240$. Temos agora duas possibilidades para w: $w = 2$ que nos dá $z = 3$, $y = 11$ e $x = 7$; ou $w = 4$. Nesse caso, teremos $x = 3$, $y = 9$ e $z = 6$.

Problema 2:

1. Para calcular as maneiras de escolher os números, utilizaremos o Princípio Multiplicativo.
   Para escolher o primeiro número, temos 20 formas possíveis. Para escolher o segundo número, temos 19 formas pois não podemos repetir o número que já foi escolhido. Dado que o primeiro e o segundo número já foram escolhidos, para escolher o terceiro número, temos apenas 18 formas, pois não podemos repetir os dois números distintos que já foram escolhidos anteriormente.
   Desta maneira, temos $20 \times 19 \times 18 = 6840$ formas de escolher os três números de modo que a ordem importe.
2. Note que um conjunto de três números a, b e c pode ser ordenado de seis formas distintas: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.
   Assim, para descontar a ordem, é necessário dividir o número obtido no item anterior por 6. Neste caso, temos $6840/6 = 1140$ formas de escolher três números de modo que a ordem não importe.
3. Vamos separar os números de 1 a 20 em três conjuntos:
   a. O conjunto com elementos ímpares: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.
   b. O conjunto dos pares que não são múltiplos de 4: $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$.
   c. O conjunto dos múltiplos de 4: $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.
   Quando escolhemos três números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$, só há dois casos em que o produto não é um múltiplo de 4:
   - Quando os três números são todos ímpares.
   - Quando um dos números é par, mas não múltiplo de 4 e os outro dois são ímpares.

   No primeiro caso, como temos 10 números ímpares, há $(10 \times 9 \times 8)/6 = 120$ formas de escolhermos três números do conjunto A sem importar a ordem.
   No segundo caso, há $(10 \times 9)/2 = 45$ formas de escolhermos dois números do conjunto A sem importar a ordem. Além disso, temos 5 formas de escolher um elemento do conjunto B. Assim, obtemos o total de $45 \times 5 = 225$ possibilidades neste segundo caso.
   Com isso, o total de maneiras de escolhermos três elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ de modo que o produto seja um múltiplo de 4 sem que a ordem importe é:

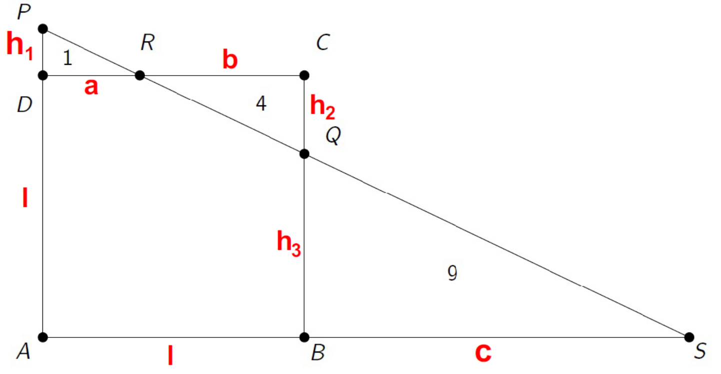
$$1140 - 120 - 225 = 795.$$

Problema 3: Sejam A_1, A_2 e A_3 as as áreas dos triângulos PDR, RCQ e SBQ, respectivamente.

$$A_1 = \frac{ah_1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{2}{a}}$$

$$A_2 = \frac{bh_2}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{h_2 = \frac{8}{b}}$$

$$A_3 = \frac{ch_3}{2} = 9 \Rightarrow \boxed{h_3 = \frac{18}{c}}$$



Como os triângulos PDR e QCR são semelhantes, segue que

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\frac{2}{a}}{\frac{8}{b}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{2b}{a} = \frac{8a}{b} \Rightarrow b^2 = 4a^2 \Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

Como os triângulos RCQ e SBQ também são semelhantes, segue que

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{\frac{8}{b}}{\frac{18}{c}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{8c}{b} = \frac{18b}{c} \Rightarrow 4c^2 = 9b^2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{3b}{2}}$$

Então obtemos,

$$h_2 = \frac{8}{b} = \frac{4}{a} \text{ e } h_3 = \frac{18}{\frac{3b}{2}} = \frac{36}{3b} = \frac{12}{b} = \frac{6}{a}$$

Como l é o lado do quadrado ABCD, temos que

$$l = a + b = h_2 + h_3 \Rightarrow a + 2a = \frac{4}{a} + \frac{6}{a} \Rightarrow 3a = \frac{10}{a} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{10}{3}}$$

E assim obtemos a área A do quadrado ABCD,

$$A = l^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 9 \cdot \frac{10}{3} = 30.$$

Problema 4: Primeiro, observe que o problema equivale a encontrar os $n \in \mathbb{Z}$ tais que $n + 21 \mid n^2 + 20$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} n+21 \mid n^2+20 \quad &\Rightarrow \quad n+21 \mid n^2+20-n(n+21) \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 20-21n \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 20-21n+21(n+21) \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 20+21^2 \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 461 \\ &\Rightarrow \quad n+21 \in \{\pm 1, \pm 461\}, \end{aligned}$$

onde na última implicação usamos o fato de 461 ser primo. Portanto, obtemos as quatro soluções $n = -482, -22, -20$ ou 440.

3.3 | Soluções das questões relativas ao Nível 3

Problema 1: Note que todo número par n maior do que 6 pode escrito como

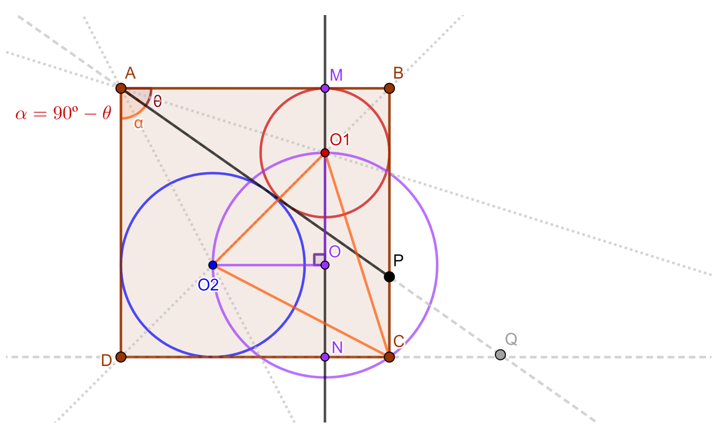
$$n = (n-4) + 4$$

que é a soma de dois compostos. Note que todo número ímpar n maior do que 11 pode escrito como

$$n = (n-9) + 9$$

que é a soma de dois compostos. Note ainda que $2, 4, 6$ não são soma de dois compostos e que $3, 5, 7, 9, 11$ não são.

Problema 2:



Sejam C_1, C_2 e C os círculos de centros O_1, O_2 e O e raios r_1, r_2 e R, respectivamente. Seja Q a interseção dos prolongamentos dos segmentos AP e DC. Desta forma, o círculo C_2 é inscrito no triângulo AQD. Sendo círculos inscritos em triângulos, sabe-se que seus centros estão localizados nas interseções das bissetrizes dos ângulos dos triângulos que os circunscrevem. Como o segmento BD está contido na bissetriz comum dos triângulos ABP e AQD

concluímos que os centros O_1 e O_2 pertencem ao segmento BD.

Fato 1: O ângulo $O_1\hat{O}O_2$ é reto.

Primeiramente, sabe-se que o $O_1\hat{O}O_2 = 2O_1\hat{C}O_2$, pois o círculo C circunscreve o triângulo O_1O_2C. Agora, seja $\theta = P\hat{A}B$ e note que $O_1\hat{C}B = O_1\hat{A}B = \frac{\theta}{2}$, já que os triângulos O_1BA e O_1BC são congruentes (critério lado, ângulo, lado) e AO_1 está contido na bissetriz de θ. Note, também, que $O_2\hat{C}D = O_2\hat{A}D = 45 - \frac{\theta}{2}$, pois os triângulos O_2DA e O_2DC são congruentes (lado, ângulo, lado) e AO_2 está contido na bissetriz de 90ž – θ ($ABCD$ é um quadrado, logo $D\hat{A}B$ = 90ž).

Observe que

$$B\hat{C}D = O_1\hat{C}B + O_1\hat{C}O_2 + O_2\hat{C}D = \frac{\theta}{2} + O_1\hat{C}O_2 + 45ž - \frac{\theta}{2}.$$

Como $ABCD$ é um quadrado, sabe-se que $B\hat{C}D$ = 90ž e obtém-se que $O_1\hat{C}O_2$ = 45ž. Portanto, $O_1\hat{O}O_2 = 2O_1\hat{C}O_2$ = 90ž e isto significa que $O_1\hat{O}O_2$ é um ângulo reto.

Fato 2: A reta que passa por O e O_1 é paralela ao lado BC (ou, equivalentemente, a reta que passa por O e O_2 é paralela ao lado AB).

Sejam M e N as interseções da reta que passa por O e O_1 com os lados AB e CD, respectivamente. Como $O_2O = O_1O = R$ e $O_1\hat{O}O_2$ é reto, segue que $O\hat{O_1}O_2 = O\hat{O_2}O_1$ = 45ž. Por outro lado, como BD está contido na bissetriz de $A\hat{D}C$ segue que $O_1\hat{D}N$ = 45ž. Daí, os triângulos O_1O2O e O_1DN são semelhantes, segue que o segmento MN é perpendicular ao lado CD e, por consequência, paralelo ao lado BC. Concluindo a prova do Fato 2.

Fato 3: $O_1M = r_1$ e $ON = r_2$ (ou análogo se fizer o raciocínio para a reta que passa por O e O_2). Como AB é tangente à C_1 e O_1M é perpendicular ao lado AB (pois AB é paralelo a CD), segue que O_1M é o raio de C_1, donde $O_1M = r_1$. Analogamente, tem-se que $O_2N = r_2$. Isto conclui a prova do Fato 3.

Para concluir o item (a), lembre que $OO_1 = R$. Agora,

$$AB = BC = MN = MO_1 + O_1O + ON = r_1 + R + r_2.$$

Para concluir o item (b), note que o triângulo ONC é retângulo em N, com $OC = R$, $ON = r_2$ e $NC = r_1$ (segue do paralelismo entre MN e BC). Assim, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $R^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Problema 3:

Problema 4: Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $a_0 = n$ e $a_{k+1} = f(a_k)$. Assim, temos pela equação funcional dada, que

$$\begin{aligned}
n = a_0 &\quad\Rightarrow\quad 3a_1 - 2a_2 = a_0,\\
n = a_1 &\quad\Rightarrow\quad 3a_2 - 2a_3 = a_1,\\
&\quad\vdots\\
n = a_k &\quad\Rightarrow\quad 3a_{k+1} - 2a_{k+2} = a_k.
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência $(a_n)_n$ é uma recorrência linear de ordem 2, cujo polinômio característico é dado por $3x - 2x^2 = 1$, com raízes 1 e 1/2. Portanto, sabemos que

$$a_k = A(1)^k + B(1/2)^k, \quad \forall k \geq 0. \tag{2}$$

Como $A+B=a_0$ e $A+B/2=a_1$, com $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, resolvendo o sistema temos $A=2a_1-a_0$ e $B=2(a_0-a_1)$, o que nos dá $A, B \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, note que (2) nos dá $B=2^k(a_k-A)$, ou seja, como $a_k, A \in \mathbb{Z}$, que 2^k divide B para todo k, isso só é possível se $B=0$. Portanto, $a_1=a_0$ e conseguimos $f(n)=n$, que é a única solução.

4 | PROVAS DA XXIX OMEG- ENUNCIADO DAS QUESTÕES RELATIVAS A PRIMEIRA FASE

4.1 | Primeira Fase - Nível 1

Problema 1: O número que devemos somar ao numerador e subtrair do denominador da fração $\frac{3180}{4735}$ para transformá-la na sua inversa é:

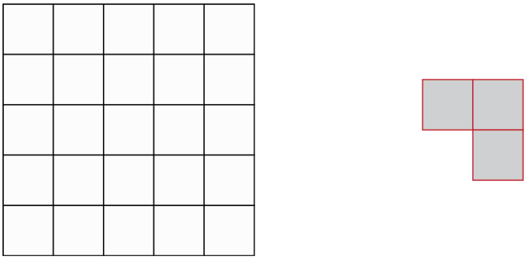
(a) 1554 (b) 1555 (c) 1556 (d) 1557 (e) 1558

resposta: (b)

Problema 2: Dizemos que dois números primos são quase gêmeos, se a diferença entre eles é igual a 4. Por exemplo, 13 e 17 são primos quase gêmeos. O número 2021 possui uma propriedade interessante: ele é o produto de dois primos quase gêmeos, $2021 = 43 \times 47$. Quantos números de até 3 dígitos também são o produto de dois primos quase gêmeos?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

resposta: (c) Problema 3: São dados um tabuleiro e uma peça, como mostrado abaixo:



De quantas maneiras podemos colocar a peça no tabuleiro, de modo que cubra completamente três casas?

(a) 64 (b) 36 (c) 25 (d) 12 (e) 49

resposta: (a)

Problema 4: Existem 9 números de um algarismo, 90 números de dois algarismos, 900 números de três algarismos, etc. Tome cada número cujo último algarismo à direita representa o número de algarismos desse número. Por exemplo, o número 1824 é um deles, pois 4 é o número de seus algarismos. Quantos números desse tipo existem ?

(a) 100 000 000 (b) 99 999 999 (c) 10 000 000 (d) 1 000 000 000 (e) 9 999 999

resposta: (a)

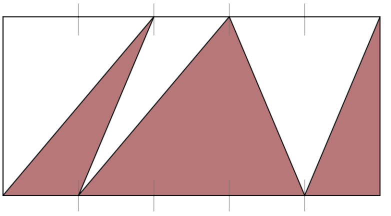
Problema 5: Se a área do retângulo dado é 24, qual é a área da figura sombreada?

(a) 12 (b) 8 (c) 10 (d) 14 (e) 20

resposta: (a)

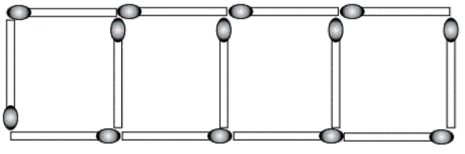
Problema 6: Han e Leia formam um estranho casal. Han mente às terças, quartas e quintas, dizendo a verdade no resto da semana. Leia mente aos sábados, domingos e segundas, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: "Amanhã é dia de mentir". O dia em que foi feita essa afirmação era:

(a) Segunda-Feira (b) Terça-feira (c) Quarta-feira (d) Quinta-feira (e) Sexta-feira



resposta: (a)

Problema 7: Maria Paula brinca de formar quadrados com palitos de fósforo como na figura a seguir:



Quantos palitos são necessários para fazer 150 quadrados?

(a) 451 (b) 310 (c) 600 (d) 512 (e) 110

resposta: (a)

Problema 8: Yan estava brincando com sua calculadora da seguinte forma: ele escolheu um número somou 3, multiplicou o resultado por 5 e subtraiu 12, para finalizar dividiu o resultado por 4 e obteve como resultado o número 22. Qual foi o número escolhido por Yan?

(a) 13 (b) 17 (c) 21 (d) 13 (e) 5

resposta: (b)

Problema 9: Sabendo que a graduação de relógios de ponteiro é feita de forma que a circunferência seja dividia em ângulos congruentes, qual é o menor ângulo entre os ponteiros quando o relógio marca 1:20?

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120° (e) 270°

resposta: (c)

Problema 10: Sabe-se que p e q são números inteiros positivos e $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$. Qual o menor valor que $q + 2$ pode assumir?

(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

resposta: (d)

Problema 11: Sete crianças estão numa brinquedoteca, ao entrarem algumas cumprimentaram outras. Joãozinho perguntou para cada uma das crianças quantos colegas haviam cumprimentado e obteve seis respostas diferentes. Quantos colegas Joãozinho cumprimentou?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

resposta: (d)

Problema 12: Maurício é dono de uma loja e estava fazendo o balanço das vendas do final de semana quando se deparou com a seguinte anotação de um de seus vendedores

$$20T + **C + 10B = R\$1425$$

Maurício sabia que:

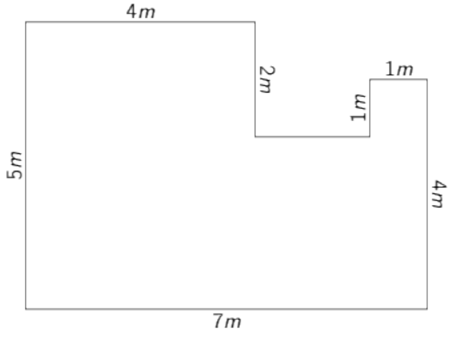
- T indicava "Toalha"e cada uma custava $R\$30,00$;
- C indicava "Calça"e cada uma custava $R\$25,00$;
- B indicava "Bolsa"e cada uma custava $R\$50,00$.

Qual a quantidade de calças deveria ter sido indicada pelo vendedor?

(a) 18 (b) 10 (c) 15 (d) 13 (e) 12

resposta: (d)

Problema 13: Napoleão precisa cercar e colocar grama em toda a extensão de uma área conforme a dada na figura abaixo:



Quanto de cerca e grama, respectivamente, Napoleão precisará?

(a) $24m$ e $35m^2$ (b) $26m$ e $30m^2$ (c) $22m$ e $30m^2$ (d) $26m$ e $35m^2$ (e) $24m$ e $30m^2$

resposta: (b)

Problema 14: Gil e Sah brincam de dar voltas na praça circular, Gil está de patinete e Sah de bicicleta, ambos em velocidade constante. Ambos saem ao mesmo instante, no mesmo sentido. Enquanto Gil dá uma volta completa é ultrapassada por Sah uma única vez e, então, chegam juntos ao ponto inicial. Quantas voltas Sah deu na praça quando Gil completou a terceira volta?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

resposta: (e)

Problema 15: Um veículo funciona com um combustível que é formado por 1 parte de querosene para 3 partes álcool e 6 partes de gasolina. O tanque do veículo está cheio com 96 litros desse combustível, no entanto houve um vazamento, detectado a tempo do mesmo não esvaziar. Após o conserto do vazamento, não havia o combustível disponível, completando assim o tanque com querosene. Feito isso, o sensor de combustível constatou 36,6 litros de querosene no tanque. Quanto de querosene extra foi colocado no tanque, em litros?

(a) 35 (b) 15 (c) 45 (d) 25 (e) 30

resposta: (e)

4.2 | Primeira Fase - Nível 2

Problema 1: O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. O produto dos algarismos de N é:

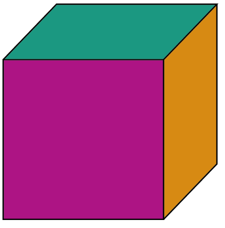
(a) 60 (b) 9 (c) 45 (d) 89 (e) 12

resposta: (a)

Problema 2: Ver Problema 2 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 3: Ver Problema 3 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 4: Lavínia tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?



(a) 6 (b) 24 (c) 48 (d) 216 (e) 120

resposta: (c)

Problema 5: O conjunto $\{121, 1221, 12221, \ldots, 1222222222221\}$ é dado por números onde as extremidades são formadas pelo algarismo 1, e entre eles todos os algarismos são iguais a 2. Sobre os elementos desse conjunto, é correto afirmar que:

(a) Todos são múltiplos de 11.

(b) Não existem múltiplos de 3 neste conjunto.

(c) Pelo menos 4 desses números são primos.

(d) Temos 4 números primos e os demais são compostos.

(e) Nenhuma das demais alternativas.

resposta: (a)

Problema 6: $ABCDE$ é um pentágono regular e ABF é um triângulo equilátero interior. O ângulo $F\hat{C}D$ mede:

(a) 38° (b) 40° (c) 42° (d) 44° (e) 46°

resposta: (c)

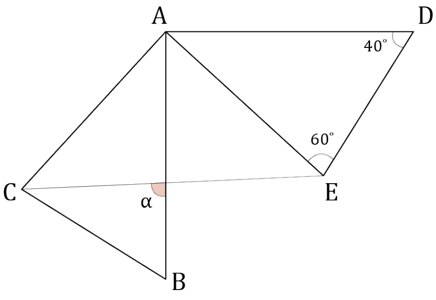
Problema 7: O triângulo ADE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de 90^o no sentido anti-horário ao redor de A, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:

(a) 125^o (b) 55^o (c) 45^o (d) 95^o (e) 145^o

resposta: (a)

Problema 8: Para as duas frações $\frac{17}{11}$ e $\frac{53}{19}$ subtraímos o mesmo número b do numerador e do denominador, tal processo fez com que as duas frações se tornassem equivalentes. Sabendo que b é a sétima parte de um número inteiro n, qual o valor de n?

(a) 65 (b) 31 (c) 43 (d) 79 (e) 57



resposta: (a)

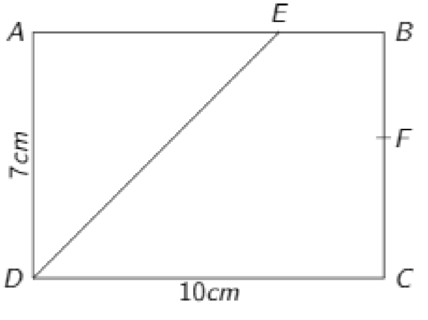
Problema 9: Vinte e cinco adolescentes resolveram pedir pizza para comemorar o aniversário de um deles. O valor total das pizzas foi de $R\$270,00$ porém alguns dos adolescentes não tinha dinheiro para contribuir. Sabendo que cada um dos que tinham dinheiro contribuiu com $R\$15,00$, quantos dos adolescentes não tinham dinheiro para contribuir?

(a) 5 (b) 6 (c) 11 (d) 7 (e) 18

resposta: (d)

Problema 10: Ver Problema 10 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 11: Considere o retângulo $ABCD$ abaixo e tome um ponto E no segmento $\overline{AB}$ de forma que o ângulo $A\hat{E}D$ seja igual a 45°. Seja F o ponto no segmento $\overline{BC}$ que faz com que $\overline{DE} + \overline{EF} = 10\sqrt{2}cm$. Qual o comprimento de $\overline{CF}$?



(a) $2\sqrt{2}cm$ (b) $2cm$ (c) $3cm$ (d) $3\sqrt{2}cm$ (e) $4cm$

resposta: (e)

Problema 12: O sobrinho de Rita estava vendendo uma rifa para ajudar com os custos de sua formatura, os bilhetes tinham números de 1000 à 9999. Rita decidiu ajudar o sobrinho e disse a ele que compraria todos os bilhetes que seguissem as seguintes regras:

- possuir exatamente dois algarismos 8;
- não iniciar com o algarismo 8;
- não possuir as sequências 78 e 89.

Quantos bilhetes da rifa Rita comprou?

(a) 56 (b) 64 (c) 169 (d) 523 (e) 1000

resposta: (c)

Problema 13: Ver Problema 14 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 14: Considere um triângulo ABC com ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e lados correspondentes a, b e c satisfazendo a equação $a\cos\hat{B} - b\cos\hat{A} = \frac{3}{5}c$. Calcule o valor de $\frac{\tan\hat{A}}{\tan\hat{B}}$.

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) 4 (d) 3 (e) 5

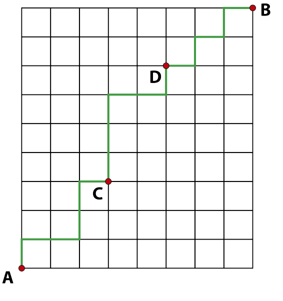
resposta: (c)

Problema 15: Ver Problema 15 da Primeira Fase do Nível 1.

4.3 | Primeira Fase - Nível 3

Problema 1: Ver Problema 3 da Primeira Fase dos Níveis 1 e 2.

Problema 2: O mapa de uma cidade está representado na figura abaixo. Todas as suas ruas são de mão única, de modo que você só pode dirigir para "leste"ou "norte". Quantas maneiras diferentes existem para chegar ao ponto B, partindo de A, e passando pelos pontos C ou D?



(a) 14160 (b) 9240 (c) 7920 (d) 3000 (e) Nenhuma das alternativas.

resposta: (a)

Problema 3: Para quantos valores de n inteiros, a fração $\frac{n^2+2021}{n+20}$ é um número inteiro?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14.

resposta: (d)

Problema 4: A quantidade de pares de números inteiros (x, y), que são solução da equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}$, onde p e q são números primos, é:

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11.

resposta: (d)

Problema 5: Para todo n natural, definimos a função:

- $f(n) = \frac{n}{2}$, se n é par;
- $f(n) = 5n + 1$, se n é ímpar.

A quantidade de soluções da equação $f(f(f(n))) = 14$ é:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

resposta: (b)

Problema 6: Sabendo que $1 \leq x < 6$ e que $y = |2x-1| + |x-6| + 5$, podemos afirmar que y é igual a:

(a)$3x-2$ (b) $3x-7$ (c) $x+10$ (d) $x-2$ (e) $x+5$

resposta: (c)

Problema 7: Ver Problema 12 da Primeira Fase do Nível 2.

Problema 8: Suponha a e b números reais positivos satisfazendo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$ e $(a-b)^2 = 4(ab)^3$. Calcule $\log_b a$.

(a) 2 (b) -1 (c) 1 (d) -2 (e) 3

resposta: (b)

Problema 9: Dados quatro pontos fixados $A(-3,0)$, $B(1,-1)$, $C(0,3)$, $D(-1,3)$ e um ponto variável P em um sistema de coordenadas, determine o valor mínimo de $|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$.

(a)$7\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ (c) $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ (d) $3\sqrt{5}+5\sqrt{2}$ (e) $5\sqrt{7}$

resposta: (c)

Problema 10: Qual será o número de soluções racionais do sistema de equações abaixo?

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xyz + z = 0 \\ xy + yz + xz + y = 0 \end{cases}$$

(a) 2 (b) 0 (c) 1 (d) 3 (e) 4

resposta: (a)

Problema 11: Ver Problema 15 da Primeira Fase dos Níveis 1 e 2.

Problema 12: As coordenadas do baricentro do triângulo obtido pela representação gráfica de $i+(-8i)^{1/3}$, $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ são:

(a) $(0,0)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (c) $(-1,0)$ (d) $(0,1)$ (e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

resposta: (d)

Problema 13: Do ponto $P(0,0)$ partem duas retas tangentes à parábola $3x = y^2 + 3$. A área do triângulo formado pelos pontos de tangência dessas retas e o foco desta parábola é:

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (d)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) 1

resposta: (d)

Problema 14: Considere três amigas: Ana, Bia e Carla. Uma das meninas torce para o time do Goiás, a outra torce para o Vila Nova e a outra torce para o Atlético Goianiense. Sabe-se que:

- Ana torce para o Goiás ou a Carla torce para o Goiás;
- Ana torce para o Vila Nova ou Bia torce para o Atlético Goianiense;
- Carla torce para o Atlético Goianiense ou Bia torce para o Atlético Goianiense ;
- Bia torce para o Vila Nova ou Carla torce para o Vila Nova.

Assim, os times que Ana, Bia e Carla torcem são, respectivamente:

(a) Goiás, Vila Nova, Atlético Goianiense

(b) Vila Nova, Atlético Goianiense, Goiás

(c) Atlético Goianiense, Goiás, Vila Nova

(d) Vila Nova, Goiás, Atlético Goianiense

(e) Goiás, Atlético Goianiense, Vila Nova

resposta: (e)

Problema 15: Para a realização de um campeonato de futebol interclubes, deve-se escolher 10 times, dentre 4 times da região norte, 5 da região centro-oeste e 6 da região nordeste. A probabilidade de que, escolhidos ao acaso esses 10 times hajam exatamente 4 da região centro-oeste e pelo menos um time de cada uma das outras regiões, é, aproximadamente:

(a) $36,4\%$ (b)$14,9\%$ (c) $34,6\%$ (d) $25,6\%$ (e) $44,2\%$

resposta: (a)

REVISTA DA OLIMPÍADA

Número 16

Semelhança De Triângulos e Potência de Ponto

Severino Rafael Gonçalves Da Silva[1]

[1]Ensino Fundamental, Colégio Municipal Jaboatão Dos Guararapes

Contato
[1]goncalvesrafael145@gmail.com

Neste material falaremos sobre potência de ponto, um tema extremamente recorrente nas olimpíadas de matemática, iremos começar falando de semelhança de triângulos, seguindo até estarmos com teoria suficiente para começarmos a falar sobre a potência de ponto em si, assim como seus teoremas, o material está recheado de problemas resolvidos e inúmeros problemas propostos, esperamos que você goste. Vamos lá!

1 | INTRODUÇÃO

Semelhança de Triângulos é a base da geometria olímpica, conhecendo bem ela conseguimos explorar diversos outros assuntos, como a potência de ponto, a homotetia e a rotohomotetia, as quais discutiremos nas próximas seções.

Durante todo o artigo utilizaremos a seguinte notação, $(A_1A_2 \ldots A_n)$ e $[A_1A_2 \ldots A_n]$ representam, respectivamente, o circuncírculo e a área do polígono $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$.

Triângulos semelhantes são, a grosso modo, triângulos que "saíram da mesma fôrma de bolo", mas a fôrma consegue mudar de tamanho, isso fica mais claro na figura 1, observe-a abaixo.

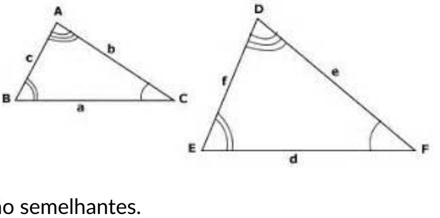


FIGURA 1 Aqui, ABC e DEF são semelhantes.

A figura é um pouco intuitiva, você já deve ter percebido o que definimos como triângulos semelhantes, definindo formalmente:

Definição 1 *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem ângulos ordenadamente congruentes e os lados* *homólogos proporcionais. Sendo k a razão entre tais lados homólogos, k é a razão de semelhança dos dois triângulos.*

Não confunda triângulos semelhantes com triângulos congruentes, dois triângulos são chamados congruentes quando $k = 1$, ou seja, quando a "fôrma"dos dois triângulos é a mesma.

-"Legal, mas como eu posso provar que dois triângulos dados são semelhantes?"

Temos 3 maneiras de provar que dois ou mais triângulos são semelhantes, os 3 casos de semelhança de triângulos.

Proposição 1 ***Caso 1 - Ângulo, Ângulo, Ângulo (AAA):*** *Dois triângulos que têm, congruentes dois a dois, os três ângulos internos são sempre semelhantes.*

Proposição 2 ***Caso 2 - Lado, Ângulo, Lado (LAL):*** *Se dois triângulos têm dois pares de lados proporcionais e os ângulos entre esses dois lados proporcionais são iguais, então esses triângulos são semelhantes.*

Proposição 3 ***Caso 3 - Lado, Lado, Lado (LLL):*** *Quando dois triângulos tem três lados correspondentes proporcionais eles são semelhantes.*

Algo interessante aqui é que a razão da área de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Exemplo 1 ***(OBM):*** *Sejam ABCD um quadrado, M o ponto médio de AD e E um ponto sobre o lado AB. P é a interseção de EC e MB. Mostre que a reta DP divide o segmento EB em dois segmentos de mesma medida.*

Solução. *Considere k a medida do lado do quadrado e J a interseção entre BP e CD, observe que como $MD//CB$ e $MD = \frac{k}{2}$, BD é base média do triângulo BJC, desse modo obtemos que $JM = MB$ e $JD = DC = k$, o que nos dá que, tomando N a interseção de PD e AB, $\triangle PNE \sim \triangle PDC$ e $\triangle PNB \sim \triangle PDJ$, juntando ambos os fatos temos que $\frac{EN}{DC} = \frac{PN}{PD} = \frac{NB}{DJ} \Rightarrow \frac{EN}{NB} = \frac{DC}{DJ} = 1$, com isso, $EN = NB$.*

Podemos usar a semelhança de triângulos para descobrir propriedades interessantes sobre cevianas gerais, em especial as bissetrizes, considere os teoremas a seguir:

Teorema 1 ***Teorema Da Bissetriz Interna e Externa:*** *Seja ABC um triângulo acutângulo, se W é o pé da bissetriz interna e R o pé da bissetriz externa sobre o lado BC, temos que*

$$\frac{BW}{Wc} = \frac{RB}{RC} = \frac{AB}{AC}$$

Considere a figura 2, trace uma paralela "r"a reta AC passando por B, e seja G a interseção de AR com r, como $\angle BAW = \angle ABG = \angle BGC = \angle WAC$, com isso temos que o triângulo AGB é isósceles, e graças ao teorema de tales nas duas retas paralelas, chegamos que $\frac{BW}{Wc} = \frac{AB}{AC}$, a prova para o pé da bissetriz externa usa argumentos semelhantes e é deixada como exercício ao leitor.

Teorema 2 ***Teorema Das Cevianas Homólogas:*** *Sejam ABC e XYZ triângulos semelhantes. Se G, Q estão sobre BC, YZ, respectivamente, temos que $\angle BAG = \angle XYQ$ se, e somente se, $\frac{BG}{CG} = \frac{YQ}{ZQ}$.*

Esse teorema é facilmente provado usando as proporções existentes entre dois triângulos semelhantes e é deixado como exercício, a dica é, tome um dos triângulos e escreva os lados do outro triângulo com base nos lados desse e use LAL para mostrar que $\triangle ABG$ e $\triangle XYQ$ são semelhantes.

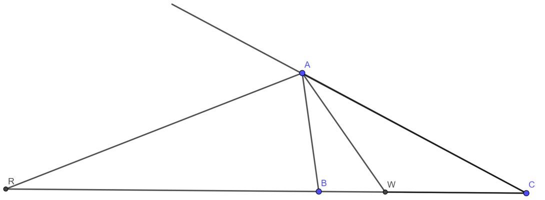


FIGURA 2 Teorema Das Bissetrizes

Por fim, encerrando essa seção, vejamos (com prova) as relações métricas no triângulo retângulo (depois de ler a seção 3 volte aqui, você verá que é bem mais fácil provar esse teorema com potência de ponto).

Teorema 3 ***Relações Métricas No Triângulo Retângulo:***

Dado um triângulo ABC, reto em $\angle A$, com altura $AD = h$ tal que $BD = n, CD = m, AB = c, AC = b, BC = a$ as seguintes relações se verificam.

1. $m + n = a$
2. $a^2 = b^2 + c^2$
3. $b^2 = am$
4. $c^2 = an$
5. $h^2 = mn$
6. $ah = bc$

Considere a figura 3, (1) é fácil de observar, e (2) é o famoso teorema de Pitágoras, caso você não saiba ainda demonstrá-lo, uma dica é posicionar 4 triângulos retângulos iguais de modo a formar um quadrado de lado $b + c$.

Vamos nos atentar agora aos itens (3),(4),(5) e (6).

Para (3),(4),(5) basta usar, respectivamente, os seguintes pares de triângulos semelhantes (por AAA), $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$, $\triangle ABC$ e $\triangle DAB$, $\triangle ADC$ e $\triangle DAB$.

Para (6) basta calcular a área do $\triangle ABC$ de duas formas, note que $[ABC] = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}$

*Além do que acabamos de provar, temos que, dado um triângulo ABC com os ângulos $\angle B, \angle C$ agudos, com D o pé da altura de A, usando a mesma nomenclatura anterior temos que as relações vistas são verdadeiras **se, e somente se**, o ângulo em A é reto!*

Acabamos de provar a implicação deste teorema, vamos, prove a recíproca!

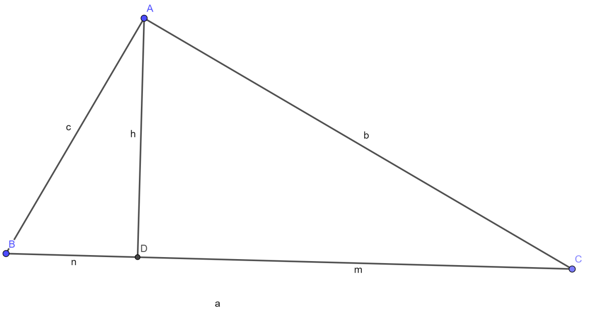


FIGURA 3 Relações Métricas

2 | HOMOTETIA E ROTOHOMOTETIA

2.1 | Homotetia

Definição 2 *Dado um ponto O e um número real k distinto de 0, a homotetia H(O,k) de centro O e razão k é a transformação geométrica que leva um ponto A a outro ponto h(A)=A', tal que* $OA' = k \times OA$ *com O,A, A' colineares.*

Dadas duas figuras homotéticas sempre temos duas homotetias relacionando estas, uma quando $k > 0$ e outra quando $k < 0$, ambas representadas nas figuras abaixo

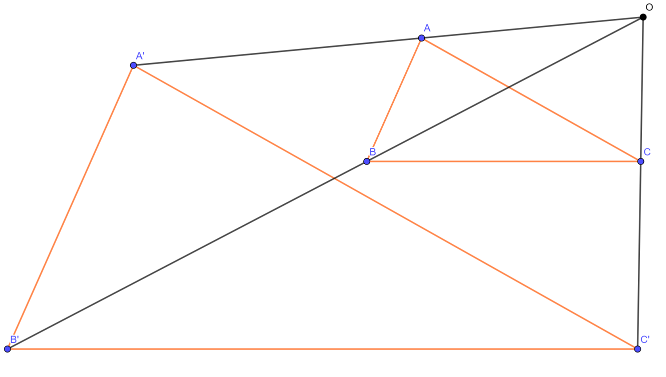


FIGURA 4 Homotetia positiva ($k > 0$)

Algumas propriedades interessantes são...

Proposição 4 *Dados dois pontos X,Y, tome uma homotetia H(O,k), então, temos que, se H(X)=X' e H(Y)=Y', então* $XY // X'Y'$.

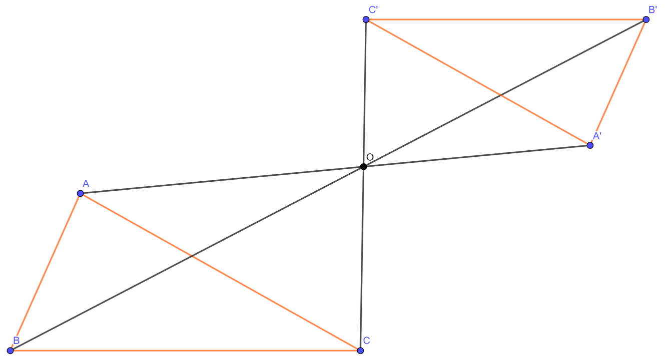


FIGURA 5 Homotetia negativa ($k < 0$)

Usando que $OY' = k \times OY$ e $OX' = k \times OX$ chegamos que $\dfrac{OX}{OX'} = \dfrac{OY}{OY'}$ o que nos dá, pelo teorema de tales, que $XY//X'Y'$.

Proposição 5 *Dados dois triângulos semelhantes ABC e DEF, de forma que $AB//DE$, $BC//EF$ e $CA//DF$, temos que ABC e DEF são homotéticos.*

A demonstração é deixada ao leitor, uma dica é, tome O como sendo a interseção de AD e BE e tome uma homotetia de centro $k = \dfrac{DE}{AB}$.

Um fato interessante é...

Corolário 1 *Tomadas duas circunferências quaisquer existem duas homotetias, uma negativa e outra positiva que leva uma na outra, e o mais legal é que podemos determinar esses centros facilmente em círculos disjuntos!*

Nesse caso, o centro da homotetia positiva é o encontro das tangentes comuns externas, e o da homotetia negativa é o encontro das tangentes comuns internas.

Anter de vermos alguns exemplos de questões envolvendo homotetia, considere o teorema a seguir.

Teorema 4 *(Teorema De Monge) Sejam $H_1(O_1, k_1)$ e $H_2(O_2, k_2)$ duas homotetias. Então, se $k_1 \cdot k_2$ é diferente de 1, então a composição $H = H_1 \circ H_2$ é uma homotetia de centro O, com O, O_1, O_2 colineares.*

A prova é consideravelmente extensa e, portanto, aqui omitida, esta pode ser encontrada em [2].

O teorema anterior é extremamente poderoso, vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 2 *(Lista Cone Sul 2017) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e sejam D, E, F os pés das alturas sobre os lados BC, CA, AB, respectivamente. Seja ω o circuncírculo de ABC, seja ω' o circuncírculo de DEF e seja P um ponto variável sobre ω. Considere uma circunferência tangente internamente a ω por P e tangente externamente a ω' em Q. Prove que a reta PQ passa por um ponto fixo sobre a reta HO.*

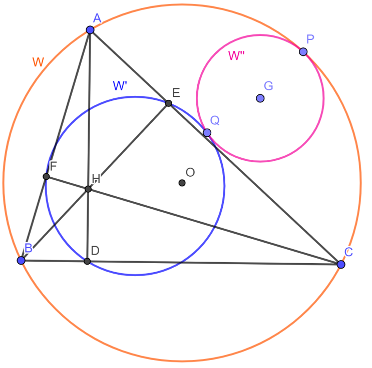


FIGURA 6 Aplicação De Monge

Solução.

Considere a figura 6, onde ω'' é a circunferência que tangência ω e ω'.

Considere a homotetia $h_1(Q, k_1)$ com $k_1 < 0$ que leva ω' em ω'' (ela, assim como as outras homotetias que definirmos aqui existem graças ao fato 1) tal que $\omega' \xrightarrow{h_1} \omega''$ e $h_2(P, k_2)$ com $k_2 > 0$ uma homotetia tal que $\omega'' \xrightarrow{h_2} \omega$, como k_1, k_2 tem sinais diferentes, claramente $k_1 \cdot k_2$ é diferente de 1, logo, por Monge, temos que o centro da homotetia h_3 que leva (DEF) em (ABC) está na reta PQ, como esse centro não depende da escolha de P, está terminado.

Exemplo 3 *(TST Cone Sul 2021/4) Seja ABCDEF um hexágono convexo tal que suas diagonais AD, BE e CF têm um ponto em comum M. Sabe-se que os triângulos MAB, MBC, MCD, MDE, MEF e MFA são acutângulos e que seus circuncentros estão todos sobre uma mesma circunferência. Prove que os quadriláteros ABDE, BCEF e CDFA possuem a mesma área.*

Solução.

Considere a figura 7, Veja que, sendo $O_1, O_2, O_3, .., O_6$ os circuncentros do enunciado, temos, por eixo radical, que O_6O_1, O_3O_4 são perpendiculares a AD, o que implica $O_6O_1O_3O_4$ um trapézio isósceles, analogamente, temos que $O_1O_2O_5O_4$ e $O_3O_2O_6O_5$ são trapézios isósceles, note também que por eixo radical temos que o ponto médio A' de AM está em O_1O_6, fazendo o mesmo para os outros lados de nosso hexágono cíclico, vemos que ao pegar uma homotetia de centro M e razão $\frac{1}{2}$, o hexágono ABCDEF é levado no hexágono formado pelas projeções de M em nosso hexágono de O's, vamos fazer algumas contas agora, claramente $MA'O_1B'$ é cíclico, então $180 - \angle A'O_1B' = \angle A'MB' = \angle O_6O_5O_2 = \alpha$ (graças ao arco O_6O_2), com isso chame de J a interseção entre $O_5O_2, C'F'$, temos que $sin\alpha = \frac{F'J}{O_5J} = \frac{JC'}{O_2J} = \frac{F'J + JC'}{O_2J + O_5J} = \frac{F'C'}{O_5O_2}$, conseguinte, obtemos $[A'B'D'E'] = \frac{A'D' \cdot B'E' \cdot sin\alpha}{2} = \frac{A'D' \cdot B'E' \cdot C'F'}{2 \cdot O_5O_2}$, usando a fórmula trigonométrica para calcular as áreas dos outros dois quadriláteros e o fato de que $O_5O_2 = O_6O_3 = O_4O_1$ (que vem dos trapézios, lembra?!) chegamos que os quadriláteros ABDE, BCEF e CDFA possuem a mesma área.

2.2 | Rotohomotetia

Definição 3 *Tomada uma figura Φ, definimos um rotohomotetia $R(\alpha, \lambda, A)$ de ângulo α, razão λ e centrada em A como a transformação geométrica que leva cada ponto P em um ponto P' tal que $AP \times k = AP'$ e $\angle P'AP = \alpha$.*

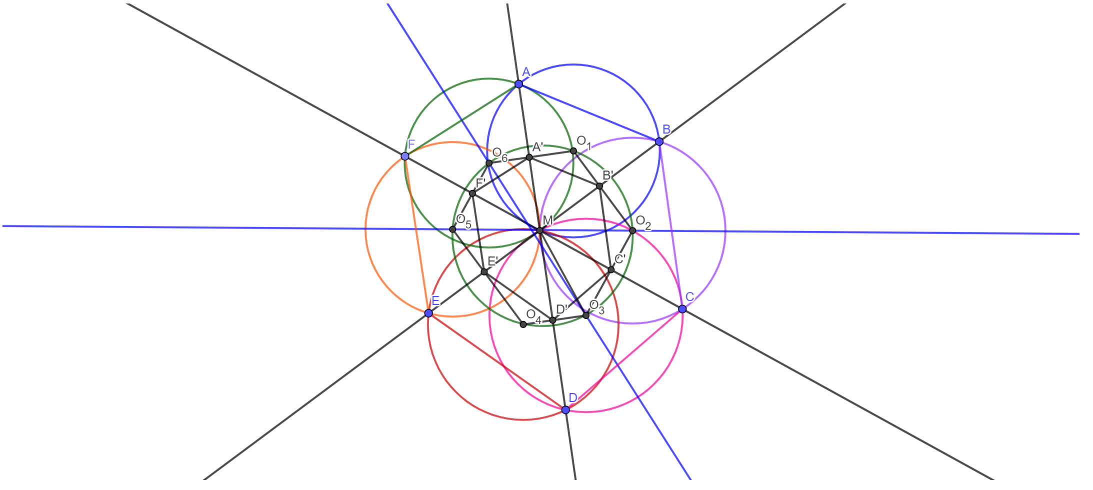


FIGURA 7 Homotetia e Trigonometria

Aqui temos a seguinte corolário (direto da definição e do caso LAL de semelhança).

Corolário 2 *Se $R(\alpha, \lambda, A)$ leva os pontos B,C em B',C' respectivamente, então, temos que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle AB'C'$.*

É interessante achar o centro da rotohomotetia que leva um segmento em outro, considere a seguinte proposição.

Proposição 6 *Dados dois segmentos quaisquer AB, CD, tais que AC encontra BD em T, temos que o centro O da única rotohomotetia que leva um segmento no outro é o segundo ponto de interseção de (XAB) e (CDX).*

A prova consiste basicamente de caça de ângulos, e novamente é deixada ao leitor, tente provar que o $\triangle OAB$ é semelhante à $\triangle OCD$.

Considere os exemplos a seguir.

Exemplo 4 *Seja ABCD um losango, onde os triângulos ABD e BCD são equiláteros. Sejam M, N pontos sobre os lados BC, CD, respectivamente, tais que $\angle MAN = 30^o$. Seja X a interseção das diagonais AC e BD. Prove que $\angle XMN = \angle DAM$ e $\angle XNM = \angle BAN$.*

Solução.

Considere a figura 8, sejam E,G, respectivamente, as interseções das perpendiculares por A à DC e BC com BD. Seja F a interseção das retas EN e AB e H a interseção das retas GM e AD. O enunciado nos dá que $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$ são equiláteros, então vamos usar isso, fazendo caça de ângulos...

$\angle ADE = 120^o$ e $\angle EAD = \angle DEA = 30^o \Rightarrow AD = DE \Rightarrow$ DN é mediatriz de AE $\Rightarrow AN = NE$.

Mas Observe que, $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAB = 30^o + 60^o = 90^o$, nos dá que o $\triangle EAF$ é retângulo e N é ponto médio da hipotenusa EF.

De maneira análoga, o $\triangle GAH$ é retângulo e M é o ponto médio da hipotenusa GH.

Façamos caça de ângulos novamente, seja $\phi = \angle DAN$.

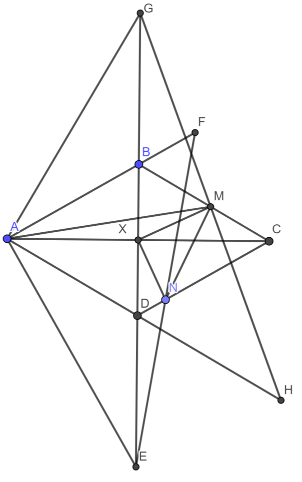


FIGURA 8 Questão que parece usar trigonometria...

Sabemos que $30^o = \angle DAX = \angle XAB = \angle MAN$, *logo,* $\angle NAC = 30^o - \phi$, $\angle CAM = \phi$ *e* $\angle MAB = 30^o - \phi$. *Desse jeito vemos que* $\angle NAE = \angle MAD = 30^0 + \phi$. *Mas* $\angle NAE = \angle NEA = \angle FEA$ *e* $\angle MAD = \angle MAH = \angle MHA = \angle GHA$, *já temos que* $30^o + \phi = \angle FEA = \angle GHA$, *daí, claramente,* $\triangle AEF \sim \triangle AHG$. *Logo, tomando a rotohomotetia que leva* $\triangle AFE$ *em* $\triangle AGH$ *(que existe, como provado) chegamos que* $\triangle AEH \sim \triangle AFG$, *daí obtemos duas coisas.*

1. *O ângulo* α *da rotohomotetia entre* $\triangle EAH$ *e* $\triangle FAG$ *é igual à* $\angle EAF = 90^o$
2. $\dfrac{EH}{FG} = \dfrac{AE}{AF}$

Note que, XN *é base média do* $\triangle EFG \Rightarrow XN//GF$, *analogamente,* $XM//EH$, *juntando com o fato que, bases médias, medem metade do lado paralelo pertencente ao triângulo temos...*

- *Graças à (1), concluímos que* $\angle NXM = 90^o \Rightarrow \angle NXM = \angle FEA$
- *Usando (2), vemos* $\dfrac{XN}{XM} = \dfrac{FG}{EG} = \dfrac{AF}{AE}$

Então, $\triangle NXM \sim \triangle FEA$, *daí* $\angle XMN = \angle FEA = 30^o + \phi = \angle DAM$.
De igual modo, $\angle XNM = \angle BAN$, *finalizando o problema.*

Exemplo 5 *Seja ABC um triângulo retângulo em* $\angle A$, *D o pé da altura relativa ao vértice A, I o incentro do triângulo ABD e E o incentro do triângulo BCD. A reta IE intersecta AB em K e AC em O. Mostre que AK=AO*

Solução. *Considere a figura 9*

Defina H como sendo a interseção de AI e DJ, $\angle MIB = 45^o$, *pois BD é altura (o resultado sai diretamente ao usarmos o teorema do ângulo externo no triângulo ABI), analogamente, achamos* $\angle IBM = 45^o$, *com isso, temos que MB é perpendicular à IH. Vamos olhar alguns quadriláteros agora,* **primeiramente**, $IDHB$ *é cíclico pois* $\angle IBD = \beta$ *e* $\angle DHI = 90^o - \angle AIL = 90^o - (90 - \beta) = \beta$, *disso tiramos* $\angle IBH = 90^o$, *concatenando os fatos anteriores, facilmente chegamos que* $MB = MI = MH \Rightarrow BI = BH$, *também vemos que* $LDJB$ *é cíclico, pois* $\angle BLI = \angle CJD$ *(basta tomar uma rotohomotetia de centro D que leva o* $\triangle ADB$ *no* $\triangle DBC$*), fazendo caça de ângulos novamente* $\angle BIM = \angle BDJ = 45^o = \angle BDH = \angle BLJ$, *logo,*

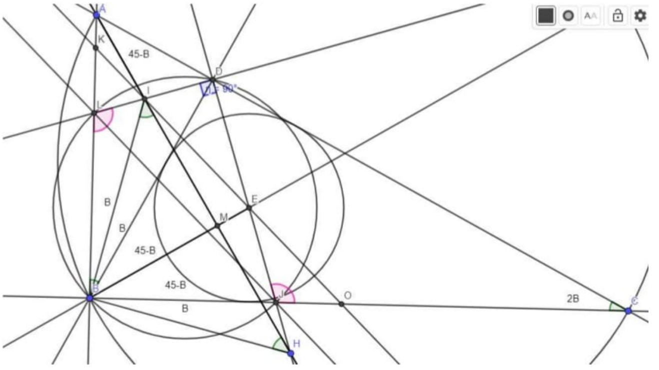


FIGURA 9 Bissetrizes e Semelhanças

$\angle LJB = 45^o$, por fim, graças a semelhança entre o $\triangle ADB$ e o $\triangle DBC$, temos que as razões entre as bissetrizes destes são iguais, ou seja, $\dfrac{DI}{IL} = \dfrac{DE}{EJ}$, portanto IE e LJ são retas paralelas , segue o resultado.

3 | POTÊNCIA DE PONTO

Definição 4 *Considere uma circunferência $\omega(O; r)$ e um ponto A qualquer no plano, definimos a potência de ponto de A em relação a r como*

$$Pot_\omega(A) = OA^2 - r^2 \tag{1}$$

O mais legal da potência de ponto é que ela pode ser calculada de várias maneiras, basta ter uma reta passando pelo ponto, vejamos.

- Caso 1: O ponto A pertence a circunferência W. Perceba que nesse caso, usando nossa definição inicial, a potência de ponto é igual a zero pois $Pot_W(A) = OA - r^2 = OA^2 - OA^2 = 0$.
- Caso 2: O ponto A está fora da circunferência.

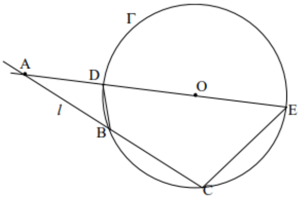


FIGURA 10 Caso 2 de PoP

Considere a figura 10.

Como BDEC é cíclico, temos que $\angle ABD = \angle DEC$ e $\angle ADB = \angle ACE$, portanto, os triângulos ADB e ACE são semelhantes, portanto, $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$, logo, $AB \times AC = AD \times AE = (OA - r) \times (OA + r) = OA^2 - r^2 = Pot_W(A)$.

- Caso 3: O ponto A está no interior da circunferência

  - Observe o esboço 11 .

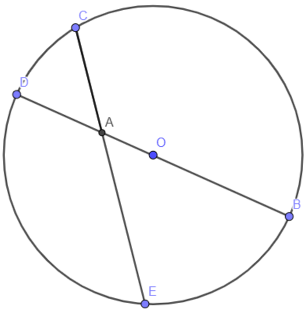


FIGURA 11 Caso 3 De PoP.

Trace uma corda qualquer CE que passe por A e a corda BD que passa por A e por O, note que, como BCDE é cíclico temos que ADC e AEB são triângulos semelhantes, com isso

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \tag{2}$$

Portanto, $AC \times AE = AB \times AD = (r + OA) \times (r - OA) = r^2 - OA^2 = -Pot_W(A)$, que nos dá $Pot_W(A) = -AC \times AE$.

- Caso 4: No caso em que um ponto A está na reta tangente à uma circunferência W, reta essa que tangência W em M, temos

  $Pot_W(A) = MA^2$

  - A prova fica como exercício

Sabendo disso, veja os exemplos a seguir.

Exemplo 6 *(USAMO 1998/2) Sejam Γ_1 e Γ_2 círculos concêntricos, com Γ_2 no interior de Γ_1. Partindo de um ponto A pertencente a Γ_1, é desenhada uma tangente AB a Γ_2 ($B \in \Gamma_2$). Seja C o segundo ponto de interseção de AB com Γ_1, e D o ponto médio de AB. Uma reta passando por A intersecta Γ_2 em E e F de tal maneira que as mediatrizes de DE e CF se intersectam em um ponto M sobre AC. Determine a razão $\frac{AM}{MC}$.*

Solução.

Considere a figura 12,

É fácil ver que B é o ponto médio de AC, já que, O é o centro das duas circunferências, vamos fazer algumas contas agora, considere $AB = BC = \frac{d}{2}$.

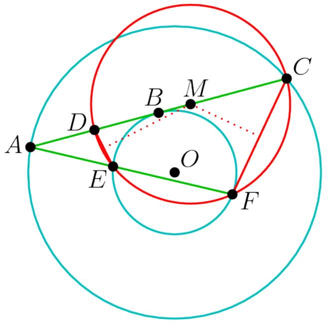


FIGURA 12 USAMO 1998

$$AC \times AD = \frac{d^2}{4} = AB^2 = AE \times AF$$

Logo, $EDCF$ é cíclico o que nos dá...

1. $MD = MC = \dfrac{3d}{8}$
2. $AM = \dfrac{5d}{8}$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{5}{3}.$$

Exemplo 7 *(IMO 2009/2) Seja ABC um triângulo com circuncentro O. Os pontos P e Q estão sobre os lados CA e AB, respectivamente. Sejam K,L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e seja W o círculo que passa pelos pontos K,L e M. Suponha que a reta PQ é tangente ao círculo W. Prove que OP=OQ.*

Solução.

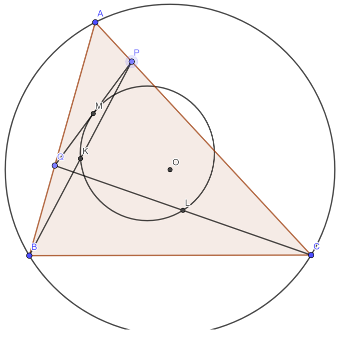


FIGURA 13 IMO P2

Considere a figura 13, o nome IMO ao lado desse problema pode lhe causar um certo receio em tentar fazê-lo, mas, parafraseando o mestre Luciano:

"Pense na coisa mais simples possível que você ainda não tentou"

Tendo isso em mente, vamos começar do mais óbvio, marcação de ângulos.

Traçando o segmento MK temos que por M e K serem pontos médios é fácil ver que MK é base média do triângulo PQB, portando $AB//MK$, consequentemente $\angle QMK = \angle AQP = \alpha$ (*), e graças a tangência $\angle QMK = \angle MLK = \alpha$, de forma análoga, como $ML//AC$ temos $\angle KML = \angle BAC = \phi$ (**). Pronto, marcação feita e agora? Bem, ângulos lembram semelhança né, então vamos lá. Opa, perceba que juntando (*) e (**), temos que os triângulos APQ e KLM são semelhantes, o que implica $\frac{AP}{KM} = \frac{AQ}{ML} \Rightarrow AQ \times 2 \times KM = AP \times 2 \times ML \Rightarrow AQ \times QB = PA \times PC \Rightarrow Pot_W(P) = Pot_W(Q) \Rightarrow OP = OQ$. Viu? Fatos simples concatenados podem destruir problemas poderosos! Lembre disso sempre.

4 | EIXO E CENTRO RADICAL

Definição 5 *Sejam Γ_1 e Γ_2 duas circunferências não concêntricas. O eixo radical de Γ_1 e Γ_2 é o lugar geométrico dos pontos P que possuem a mesma potência de ponto com relação à ambas.*

Teorema 5 *O Eixo Radical de duas circunferências Γ_1 e Γ_2 dadas é uma reta perpendicular à reta que contém os seus centros.*

A prova desse fato é desagradavelmente longa, mas mesmo assim é importante, ela será omitida aqui, mas pode ser encontrada em [6].

Um fato extremamente interessante é, dadas três circunferências, os eixos radicais das circunferências, tomadas duas a duas, concorrem em um único ponto! Isso é extremamente poderoso, e nos ajuda a relacionar potência de ponto com concorrência, é tão poderoso que virou até teorema.

Teorema 6 *Dadas três circunferências, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, não duas concêntricas, os eixos radicais destas, tomadas duas a duas, concorrem num ponto R, chamado centro radical das três circunferências.*

Considere a figura 14.

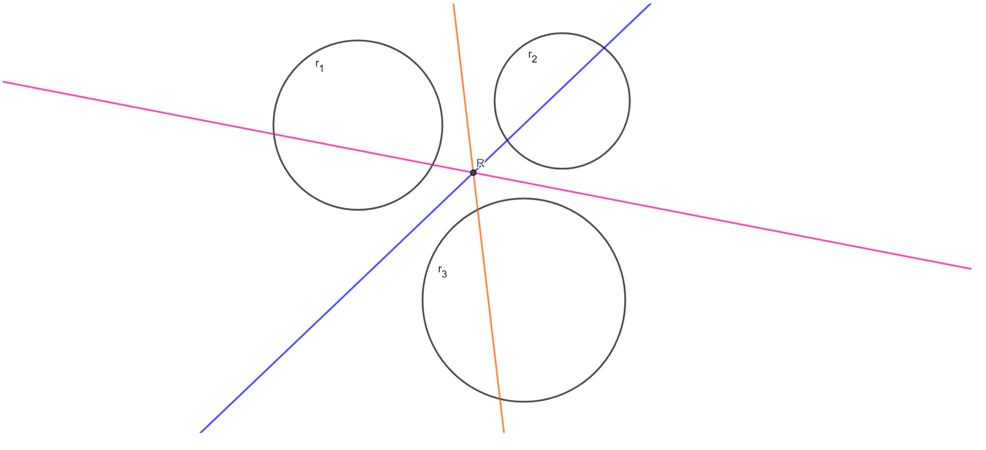


FIGURA 14 Centro Radical

Sejam a reta laranja o eixo de Γ_1, Γ_2, a reta azul o eixo de Γ_1, Γ_3 e a reta rosa o eixo de Γ_3, Γ_2, seja R a interseção das retas azul e rosa, vamos mostrar que R está na reta laranja. Note que, como R está na reta azul temos que

(I) $Pot_{\Gamma_1}(R) = Pot_{\Gamma_3}(R)$

Mas como R está na reta rosa temos também que

(II) $Pot_{\Gamma_3}(R) = Pot_{\Gamma_2}(R)$

Unindo (I) e (II) chegamos que R tem mesma potência com relação a Γ_1 e Γ_2, logo, R está na reta laranja.

Aqui temos duas observações...

Os eixos radicais de três circunferências, não duas concêntricas, sempre vão concorrer em um único ponto, porém, quando seus centros são colineares, temos que esse ponto vai para o infinito (Caso queira, consulte [4] para saber mais sobre pontos no infinito), ou seja, os eixos são paralelos

Podemos considerar circunferêndias de raio zero e usar essas propriedades normalmente! Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 8 *(Iran TST 2011/1) Considere um triângulo ABC tal que $\angle B$ é maior que $\angle C$. Seja M o ponto médio de BC e sejam E, F os pés das alturas de B e C respectivamente. Tome K e L os pontos médios de ME e MF, respectivamente, e seja T a interseção da reta KL com a paralela por A a BC. Prove que $TA = TM$.*

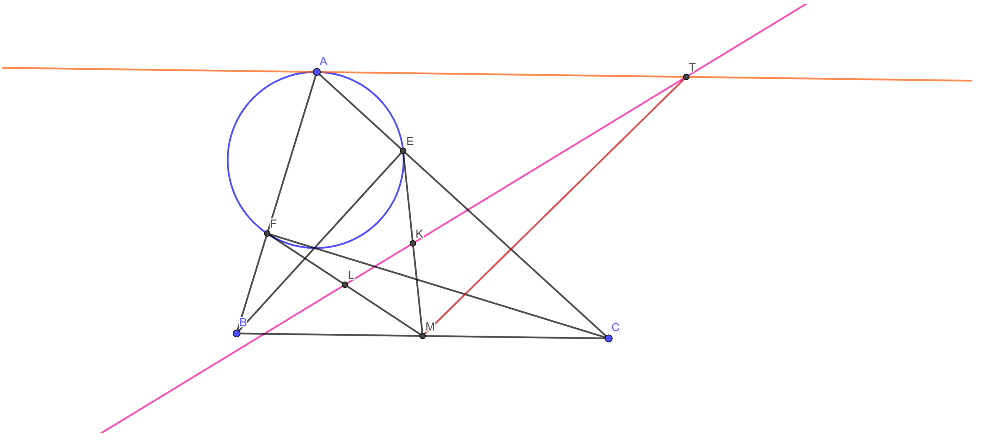


FIGURA 15 Iran TST

Solução. *Considere a figura 15, usaremos o seguinte lema.*

Lema útil: *Tome um triângulo acutângulo ABC. Sejam BE e CF alturas do $\triangle ABC$ e seja M o ponto médio de BC. Mostre que ME, MF e a linha passando por A paralela a BC são todas tangentes à (AEF).*

Demonstração do Lema. *A Demonstração consiste apenas de caça de ângulos e é deixada como exercício.*

Voltando a nossa questão, considere as duas circunferências Ω_1, Ω_2 que representam, respectivamente, o círcuncírculo do $\triangle AEF$ e a circunferência de centro M e raio zero, note que, pelo lema, sabemos que ME, MF e TA são tangentes à (AEF), ou seja, $Pot_{\Omega_1}(K) = KE^2 = KM^2 = Pot_{\Omega_2}(K)$, analogamente, $Pot_{\Omega_1}(L) = LF^2 = LM^2 = Pot_{\Omega_2}(L)$, logo, KL é eixo radical de $\Omega_1, \Omega_2 \Rightarrow Pot_{\Omega_1}(T) = TA^2 = Pot_{\Omega_2}(T) = TM^2$, segue o resultado.

Vamos agora para alguns exemplos mais gerais pra encerrar este artigo.

Exemplo 9 *(Teste Cone Sul 2007/4) Sejam AD, BE e CF as alturas do triângulo acutângulo ABC, com D sobre BC, E sobre CA e F sobre AB. Seja M o ponto médio de AC. Sabe-se que $AB > AC$. Sendo K a interseção de BM e AD, o ponto T é a interseção de BC e da reta paralela a AC que passa por K. Enfim, H é o ortocentro de ABC. Mostre que as retas DF, HT e AC são concorrentes.*

Solução *Considere a figura 16.*

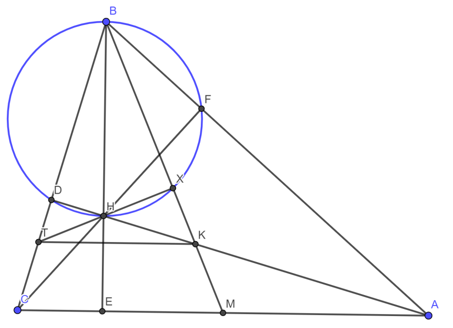


FIGURA 16 Eixo radical no TST Cone

Seja X a interseção de TH com BM, como $BH \perp TK$ e $KD \perp BT$, então $TX \perp BM$, logo, o pentágono $BFXHD$ é cíclico, veja que, se provarmos que $CHXA$ é cíclico acabamos, pois o centro radical das circunferências (BFXHD), (CHXA), (CDFA) será o ponto de interseção de HT, AC e DF, com isso basta provar o seguinte lema.

Lema *O quadrilátero $CHXA$ é cíclico.*

Demonstração. *Tome O sendo o circuncentro de ABC, vamos usar a técnica do ponto fantasma (após ver o uso dessa técnica aqui aconselho que tente fazer o problema 1 da imo 2020).*

*Seja $T = (CHA) \cap (BDHF)$, seja O_a o simétrico de O por CA e denote por W o ponto médio de BH, note que O_a é o centro de (BHC) graças a **propriedade** de que $BH = 2 \times OM$ (prove-a!). Veja que, usando eixo radical temos que $O_a W \perp HT$, mas veja que $O_a W // BM$, já que BWO_aM é paralelogramo, com isso temos BM//HT e com isso T=X e está provado.*

Exemplo 10 *(OBM N2 2019/3) Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo Γ de centro O. Seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Sejam E e F pontos sobre Γ tais que $AE = AD = AF$. Sejam P e Q os pontos de interseção da reta EF com os lados AB e AC, respectivamente. Seja X o segundo ponto de interseção de Γ com o círculo circunscrito ao triângulo APQ. Mostre que as retas XD e AO encontram-se em um ponto que está sobre Γ.*

Solução. *Considere a figura 17.*

Note que, EF é o eixo radical de Γ e da circunferência Ω de raio AD, portanto, calculando a potência de P...

$Pot_\Gamma(P) = PB \times PA = Pot_\Omega(P) = AD^2 - PA^2 \Rightarrow PA \times AB = AD^2$, *isso não lhe lembra algo?!*

Graças as relações métricas vistas no teorema 1.3 que valem se, e somente se, o triângulo for retângulo com a altura passando pelo vértice do ângulo reto (Você provou né?!), chegamos que $\angle APD = 90^o$, logo, AD é diâmetro de (APQ) $\Rightarrow$

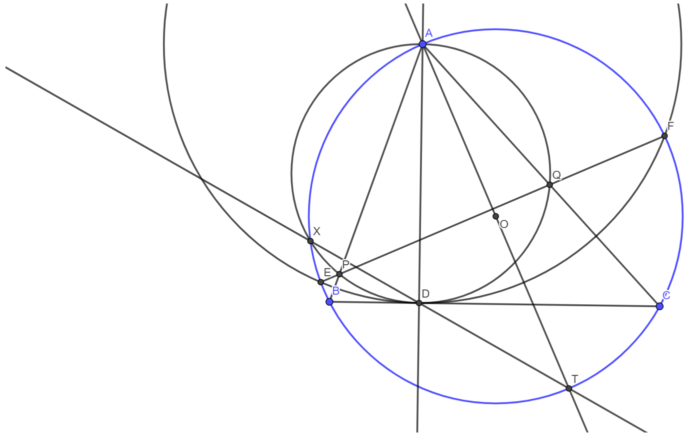


FIGURA 17 Métricas e PoP.

$\angle AXD = 90^o$, segue o resultado pelo teorema do ângulo inscrito.

Exemplo 11 *(TST Cone Sul 2013/4) Seja A um ponto fora de uma circunferência ω. Por A são traçadas duas retas, cada uma intersecta ω em dois pontos. A primeira intersecta ω em B e C, a segunda intersecta em D e F (D está entre A e E). A reta por D paralela a BC corta ω novamente em F. A reta AF corta ω novamente em T, diferente de F. As retas BC e ET se encontram em M. O ponto N é tal que M é o ponto médio de AN. Seja K o ponto médio de BC. Prove que os pontos D,E,K e N estão sobre uma circunferência.*

Solução.

Considere a figura 18.

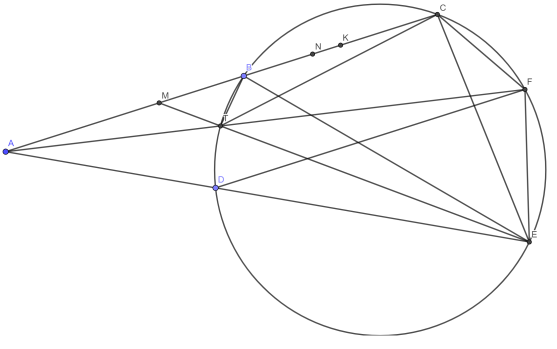


FIGURA 18 Uma razão projetiva...

Aqui usaremos o seguinte teorema.

Teorema Legal. *Considere o pentágono cíclico PABXY e uma reta S que não passa por P. Sejam A_1, B_1, X_1, Y_1 as projeções dos pontos A, B, X, Y por P em S, então temos que $\rightarrow (A, B; X, Y) = (A_1, B_1; X_1, Y_1)$, onde $(w, x; y, z) = \frac{yw}{yx} \times \frac{zx}{zw}$, para todos os pontos x,w,y,z.*

Demonstração. *Esse é um teorema de razão cruzada e sua prova consiste em aplicações extensas da lei dos senos e pode ser encontrada em [4], onde há uma exposição elementar à geometria projetiva.*

Voltando nossa questão, veja que, o quadrilátero $DEKN$ está inscrito em uma círcunferência Ω, se, e somente se, $Pot_{\Omega}(A) = AN \cdot AK = AD \cdot AE = Pot_{\omega}(A) = AB \cdot AC$. Note que $AN \cdot AK = 2 \cdot AM \cdot (\frac{AC+AB}{2})$, com isso ...

$AN \cdot AK = AB \cdot AC \Leftrightarrow$
$2 \cdot AM \cdot (\frac{AC+AB}{2}) = AB \cdot AC \Leftrightarrow$
$AM \cdot AB + AM \cdot AC = AB \cdot AC \Leftrightarrow$
$AB \cdot AM = AC \cdot MB$

Logo, basta que provemos $AB \cdot AM = AC \cdot MB$ para encerrar o problema, mas note que, usando o teorema legal.

$(A, B; M, C) = \frac{MA \cdot BC}{CA \cdot MB} = (F, B; E, C) = \frac{EF \cdot BC}{EB \cdot CF} \Rightarrow AC \cdot MB = MA \cdot \frac{EB \cdot CF}{EF}$,

Ou seja, basta provarmos $AB = \frac{EB \cdot CF}{EF} \Leftrightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{CF}{EF}$.

Observe que, como BCFD é um trapézio cíclico, então, ele é um trapézio isósceles, logo os arcos BD e CF são iguais, com isso...

$\angle AFD = \angle FAC = \angle TED = \alpha \Rightarrow \angle BED = \alpha + \angle BET = \angle CEF$.

Além disso, sendo $\beta = \angle TAE$, temos que

$\angle FCE = \angle FDE = \angle CAE$

Portanto, temos que $\triangle ABE \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{CF}{EF}$.

5 | PROBLEMAS PROPOSTOS

1. **OBM N2 2013/3.** Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto na circunferência circunscrita ao triângulo e sejam E e F os pés das perpendiculares de A até DB e DC, respectivamente. Finalmente, seja N o ponto médio de EF. Sendo M o ponto médio do lado BC, prove que as retas NA e NM são perpendiculares.

   Observação: *Suponha que o ponto N é distinto do ponto M.*
2. **Lista Cone Sul 2010:** Seja ABC um triangulo não equilátero cujo incírculo toca BC, CA e AB em A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Seja H_1 o ortocentro do triângulo $A_1B_1C_1$. Prove que H_1 está sobre a reta passando atraves do incentro e do circuncentro do triângulo $\triangle ABC$.
3. **Japão 2007:** Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC. Denote Γ_a a circunferência tangente a AB,AC e internamente a Γ em P_a. Defina P_b e P_c de modo análogo. Mostre que AP_a, BP_b, CP_c são concorrentes.
4. **OBM 2012/2** Dado um triângulo ABC, o exincentro relativo ao vértice A é o ponto de interseção das bissetrizes externas de $\angle B$ e $\angle C$. Sejam I_A, I_B e I_C os exincentros do triângulo escaleno ABC relativos a A, B e C, respectivamente, e X, Y e Z os pontos médios de I_BI_C, I_CI_A e I_AI_B, respectivamente. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Prove que as retas DX, EY e FZ têm um ponto em comum pertencente à reta IO, sendo I e O o incentro e o circuncentro do triângulo ABC, respectivamente.
5. **TST IMO 2021/2.** Seja ABC um triângulo isósceles com $BC = CA$, e seja D um ponto no interior do lado AB tal que $AD < DB$. Sejam P sobre o lado BC e Q sobre o lado CA pontos tais que $\angle DPB = \angle DQA = 90^o$. A mediatriz de PQ corta o segmento CQ em E. Os circuncírculos dos triângulos ABC e CPQ se cortam novamente

em F diferente de C. Suponha que P, E e F são colineares. Prove que $\angle ACB = 90^o$.

6. **ISL 2015 - G1.** Seja ABC um triângulo acutângulo com ortocentro H. Seja G o ponto tal que ABGH é um paralelogramo. Seja I ponto na reta GH tal que AC bissecta o segmento HI. Suponha que a reta AC intersecta o circuncírculo do triângulo GCI em J, distinto de C. Prove que IJ=AH.
7. **USAMO 2009/2.** Dados dois círculos ω_1 e ω_2 que se intersectam em X e Y, seja l_1 uma reta que passa pelo centro de ω_1, intersectando ω_2 nos pontos P e Q, e seja l_2 uma reta que passa pelo centro de ω_2 intersectando ω_1 nos pontos R e S. Prove que se os pontos P, Q, R, S estão numa circunferência, então o centro dessa circunferência está na reta XY.
8. **Cone Sul 2008.** Seja ABC um triângulo isósceles de base AB. Uma semicircunferência Γ com centro no segmento AB é tangente aos lados iguais AC e BC. Considere uma reta tangente a Γ que intersecta os segmentos AC e BC em D e E, respectivamente. Suponha que a reta perpendicular a AC por D e a reta perpendicular a BC por E se intersectam em um ponto P interior ao triângulo ABC. Seja Q o pé da perpendicular à reta AB que passa por P. Demonstre que:
$\frac{PQ}{PC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC}$.
9. **IMO 2015/3:** Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > AC$. Sejam Γ o seu circuncírculo, H o seu ortocentro, e F o pé da altura a partir de A. Seja M o ponto médio de BC. Seja Q o ponto de Γ tal que $\angle HQA = 90^o$, e seja K o ponto de Γ tal que $\angle HKQ = 90^o$. Admita que os pontos A,B,C,K e Q são todos diferentes, e estão sobre Γ nesta ordem. Prove que os circuncírculos dos triângulos KQH e FKM são tangentes.
Atenção. *Aqui é necessário o uso de lemas sobre circuncentro, estes podem ser encontrados em [5]*
10. **OBM 2019/6:** Seja $A_1A_2A_3A_4A_5$ um pentágono convexo inscritível com $\angle A_i + \angle A_{i+1} > 180^o$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, (índices módulo 5 em todo o problema). Defina B_i como a interseção das retas $A_{i-1}A_i$ e $A_{i+1}A_{i+2}$, formando uma estrela. Os circuncírculos dos triângulos $A_{i-1}B_{i-1}A_i$ e $A_iB_iA_{i+1}$ se cortam novamente em $C_i \neq A_i$, e os circuncírculos dos triângulos $B_{i-1}A_iB_i$ e $B_iA_{i+1}B_{i+1}$ se cortam novamente em $D_i \neq B_i$. Prove que as dez retas A_iC_i, B_iD_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, têm um ponto em comum.

    Atenção. *Esse problema é bem difícil! Uma dica é olhar o teorema em [1].*

Referências

[1] artofproblemsolving *https://artofproblemsolving.com/community/c6h1813119p12086815* *https://artofproblemsolving.com/community/c6h1813119p12086815*. Acessado em 25/08/2021.

[2] DE MEDEIROS, DAVI LOPES ALVES . *Ampliando Horizontes Geométricos e Encolhendo Problemas: Homotetias e Composição de Homotetias*. Acessado em 25/08/2021, disponível em https://www.obm.org.br

[3] DE MEDEIROS, DAVI LOPES ALVES . *Potência de Ponto e Lemas Potentes*. Acessado em 25/08/2021, disponível em https://www.obm.org.br

[4] Moreira, Francisco *Geometria projetiva*. Acessado em 28/08/2021, disponível em https://www.tm2.org.br

[5] Filipe, Rafael *Para Além dos Pontos Notáveis*, acessado em 25/08/2021, disponível em https://www.obm.org.br

[6] Lima, Y. G., *Potência de Ponto, Eixo Radical, Centro Radical e Aplicações.*, disponível em https://www.obm.org.br

REVISTA DA OLIMPÍADA

Número 16

Partições caóticas em um espaço finito - coincidências em uma sucessão de planos e generalização para um hipercubo

Ruy A. O. Vieira Neto[1]

[1]Afiliação livre

Contato
[1]ruy.vieiraneto@gmail.com

Esse artigo tem como objetivo explorar, munido de linguagem matemática elementar, os resultados e generalizações de um problema interessante de combinatória, instigando o estudo de um princípio muito útil, especialmente em olimpíadas de matemática.

A subseção 1.1 tem como objetivo apresentar o problema e promover uma breve discussão, enquanto a subseção 1.2 instiga o desenvolvimento de uma ideia que será útil para resolver o problema motivador. As subseções 1.3 e 1.4 são responsáveis por generalizações do problema motivador, concernentes, respectivamente, as coincidências em uma sucessão de planos e em um hipercubo k-dimensional.

O Problema 1.2 serve de artifício para uma construção mais simples da ideia por trás do Problema 1.1. O estudo desenvolvido aqui é totalmente inspirado nas ideias do Problema 1.1.

1 | PROBLEMAS, SOLUÇÕES E GENERALIZAÇÕES

1.1 | Problema motivador

Vamos estabelecer primeiramente o problema motivador desse estudo. Se possível, tente resolver todos os problemas antes de ler as soluções.

Problema 1.1. *Tem-se uma folha de papel retangular[1] e n cores distintas. Em uma face da folha estão distribuídas linhas que a dividem em n regiões e cada região está colorida com uma cor distinta. Na outra face da folha, Martín distribui*

[1]Aqui será apresentada uma solução em que a folha não precisará ser retangular. Escrevi dessa maneira porque o problema foi dado em competição assim.

a seu gosto linhas que dividem a folha em n regiões. Jorge deve colorí-las usando as n cores, com uma cor distinta para cada região. Chamaremos zonas de coincidência as zonas da folha em que a cor que Jorge usou coincide com a cor que há do outro lado da folha.

Jorge ganha se a área total de zonas de coincidência é maior ou igual que $\frac{1}{n}$ da área do papel. Caso contrário, Martín ganha. Demonstrar que Jorge sempre pode ganhar.

Vemos que esse problema não trata de partições da folha com curvas previsíveis ou padrões que se repetem. Esse problema instiga o estudo de partições que, em certo grau, não podem ser previstas. Por isso chamamos caóticas e aqui não vamos nos prender a uma definição que vai limitar esse conceito.

Note que Martín nem ao menos precisa particionar a folha com retas. Ele pode desenhar quaisquer curvas e do outro lado da folha temos uma situação tão caótica quanto. Essa natureza torna o problema tão intrigante.

Todo diagrama que tentamos desenhar não fornece nenhuma precisão satisfatória, pois as curvas podem ser tão esquisitas quanto o leitor puder imaginar.

O problema motivador está disponível em [1]. O que chama mais atenção nele é o número de combinações possíveis que o objeto de estudo permite, que parecem estar relacionadas de maneira aleatória com o objetivo do problema em si. Considero essas características vestígios da beleza de um problema de combinatória, que reforçam ainda mais o seu cunho desafiador.

1.2 | Problema auxiliar

Com o objetivo de resolver esse problema, faremos um problema secundário relacionado.

Problema 1.2. *Prove que em uma das faces da folha colorida do Problema 1.1 existe uma cor que cobre pelo menos $\frac{1}{n}$ da área da folha.*

Solução (Problema 1.2):

Chame as áreas coloridas das n distintas cores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em uma face de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente, e a área de uma face da folha de S.

Vamos usar agora o Princípio das Casas de Pombos para Médias que traz a ideia de que se a média aritmética de n elementos é M, então existem elementos maiores ou iguais a M e elementos menores ou iguais a M no conjunto cuja média dos elementos foi calculada. A área média coberta por uma cor em uma face da folha é $\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n} = \frac{S}{n}$, então, pelo Princípio das Casas de Pombos para médias, estamos feitos.

∎

Essa solução nos motivou a usar um princípio que usaremos na nossa solução do Problema 1.1 e que é muito poderoso. O *Princípio das Casas de Pombos para Médias* tem o poder de determinar algo sobre a parte que tem a ver somente com a quantidade de partes e o todo. Esses são os únicos dados que temos a respeito das partições caóticas da folha.

1.3 | Resolvendo o Problema 1.1

O objetivo principal das definições da nossa solução para esse problema é tornar nula a necessidade de imaginar as partições das folhas, definindo-as de outra maneira, usando a teoria de conjuntos e aplicações de princípios e algoritmos combinatórios sobre os conjuntos.

Vamos adaptar a aplicação do Princípio das Casas de Pombos para Médias para a pintura de duas faces, tentando dividir a folha em conjuntos que Jorge pode pintar de modo que se tornem zonas de coincidência.

Vamos começar essa solução interpretando as duas faces como apenas uma, usando a técnica de abstrair um papel transparente, estabelecendo condições para interpretar as zonas de coincidência como misturas de cores iguais (que são misturadas quando trabalhamos com apenas uma face). O primeiro parágrafo é responsável por isso, estabelecendo algumas definições que precisamos fixar com algum rigor.

As ideias de tonalidade e sub-tonalidade introduzidas na solução deixam mais palpáveis o critério que Jorge pode manipular com a pintura (que é a tonalidade) e o critério que Jorge não pode manipular (que é a sub-tonalidade).

Solução (Problema 1.1):

Nessa solução usaremos a ideia de mistura de cores e de uma folha de papel translúcida de faces de área S, reinterpretando a folha particionada caoticamente e pintada. Para isso, vamos definir que cada mistura de cores em cada ordem gera uma cor diferente, ou seja, se as cores distintas x e y são misturadas com x na primeira face e y na segunda, geramos uma cor diferente do que se x e y fossem misturadas a partir de faces diferentes. Se $x = y$ misturadas em qualquer ordem geramos a mesma cor original x.

Definição 1.1. *Defina $a_1, a_2, \dots, a_n$ as n cores originais usadas nas pinturas da primeira face (V_1) e da segunda face (V_2) bem como $a_{i_j}, i, j \in \mathbb{Z}_{[1,n]}$ as cores na tonalidade de a_i (que estabelecemos que é única para cada cor original), que são todas diferentes.*

Vamos construir as cores e partições em um papel transparente onde os traços de V_1 transparecem para V_2 e as tonalidades (tratadas na definição anterior) são definidas pelas cores em V_2, ou seja, se as cores a_i e $a_j, i, j \in \mathbb{Z}_{[1,n]}$ se misturam saindo cada uma, respectivamente, de V_1 e V_2, formaremos uma cor na tonalidade de a_j onde a *sub-tonalidade* dessa cor é a_i.

Definição 1.2. *Defina $A_{i_j}, i, j \in \mathbb{Z}_{[1,n]}$ a região pintada da cor a_{i_j} no papel transparente. Defina um campo como o conjunto de n distintas regiões no conjunto $A = \{A_{1_1}, A_{1_2}, \dots, A_{1_n}, A_{2_1}, A_{2_2}, \dots, A_{n_n}\}$ e um campo válido como um campo em que todas as regiões são pintadas de tonalidades diferentes e sub-tonalidades diferentes.*

É importante notar que A é o conjunto de todas as regiões disjuntas da folha.

Afirmação 1 *Um campo tem apenas regiões pintadas de cores originais ou pode ser recolorido por Jorge de modo a ter somente áreas pintadas de cores originais se, e somente se, ele é um campo válido.*

Prova:

Isso segue diretamente da definição de campo válido. As áreas de um campo podem ser pintadas de modo que o campo contenha somente áreas pintadas de cores originais se, e somente se, todas as subtonalidades são diferentes entre si, bem como as tonalidades, pois somente nesse caso há uma bijeção entre o conjunto das tonalidades e subtonalidades de um campo, onde essa bijeção leva a_i para $a_i \forall i \in \mathbb{Z}_{[1,n]}$, que acontece se, e somente se, Jorge pode permutar as tonalidades de modo que a sub-tonalidade e a tonalidade de uma área sempre coincidam.

Observação 1.1. *Jorge apenas pode permutar as tonalidades, não as sub-tonalidades, e ele pode fazer isso livremente, por definição do problema.*

□

Afirmação 2 *Podemos particionar o conjunto A em n campos válidos.*

A prova é simplesmente construir essa partição.

Prova:

Podemos obter a seguinte partição ζ em campos de A:

$$A = \{A_{1_2}, A_{2_3}, \ldots, A_{n_1}\} \cup \{A_{1_3}, A_{2_4}, \ldots, A_{n_2}\} \cup \{A_{1_4}, A_{2_5}, \ldots, A_{n_3}\} \cup \cdots \cup \{A_{1_1}, A_{2_2}, \ldots, A_{n_n}\}.$$

Cada índice superior dos elementos das áreas dos campos se repete somente uma vez no campo, bem como os índices inferiores, então as tonalidades e sub-tonalidades são diferentes entre os elementos para todo campo na partição ζ, portanto, esses campos são campos válidos.

A região A_{i_j} pode ser encontrada apenas na i-ésima posição do $|i - j|$-ésimo campo válido, da esquerda para a direita, com as subtrações módulo n. Esse é o critério de construção da partição. Toda região pode ser encontrada nessa partição apenas uma vez, então confirmamos que ela é uma partição.

□

Note que a área média englobada em um campo válido na partição ζ é $\frac{S}{n}$, pois temos n campos válidos na partição ζ, então, pelo Princípio das Casas de Pombos para Médidas e a Afirmação 1, estamos feitos.

■

As afirmações 1 e 2 nos permitem relacionar os problemas 1.1 e 1.2 adaptando a ideia do Problema 1.2 para o Problema 1.1. No caso onde apenas um verso da folha é trabalhado não precisamos ampliar o conceito de área colorida. No Problema 1.1, o conceito de área colorida e de n cores é um artifício que não podemos usar como chave para desenrolar a solução pelo Princípio das Casas de Pombos para Médias, mas sim como meio de conectar as duas faces da folha em um único conceito.

Podemos provar também que $\frac{S}{n}$ é o maior limitante inferior que sempre pode ser satisfeito por Jorge. De fato, provamos que ele sempre pode ser satisfeito. Vamos construir um exemplo em que ele é o maior limitante inferior e isso é suficiente para a prova. Tome então o formato do papel como retangular.

Basta dividir V_1 com $n - 1$ retas horizontais paralelas a base da folha igualmente espaçadas e dividir V_2 com $n - 1$ retas verticais igualmente espaçadas. Assim, na folha transparente, para todo campo que escolhemos, a área englobada por ele é igual a $n \cdot \frac{S}{n^2} = \frac{S}{n}$, pois obtemos um quadriculado $n \times n$ de quadrados iguais (de uma só cor cada) no papel transparente e estamos feitos para esse limitante.

1.4 | Generalizando o Problema 1.1 para m faces

Nosso objetivo agora é generalizar esse limitante (ou criar outro tão eficiente quanto) para mais faces de folhas de papel. Para isso, temos que resolver o seguinte problema.

Problema 1.4. *Suponha que existam $m \geq 2$ faces $V_1, V_2, \ldots, V_m$ de folhas de papel de iguais dimensões (e área S) em que cada face é dividida em n regiões e a face V_m é pintada de n cores distintas por Martín. As folhas são empilhadas de modo que a visão superior delas tenha sempre a forma de uma única folha. Para todo $i \in \mathbb{N}^*_{<m}$, Jorge pinta as n regiões divididas de V_i cada uma com uma cor diferente dentre as n cores. Chamaremos zonas de coincidência as zonas das folhas empilhadas em que as cores que Jorge usou coincidem entre si e com a cor que há em V_m. Jorge ganha se, e somente se, a área total de zonas de coincidência é maior ou igual que $\frac{1}{n^{m-1}}$ da área do papel.*

Mostre que Jorge sempre pode ganhar.

A ideia principal aqui é estender os conceitos da solução do Problema 1.1 e provar a Afirmação 2 por indução para mais faces.

Solução (Problema 1.4):

Para essa solução vamos pegar emprestado as definições da solução anterior de cores, de mistura de cores única e dependente da ordem e vamos generalizar algumas definições, considerando desde já os papeis transparente.

Definição 3. Defina a j-tonalidade de uma cor como a cor original usada para formar essa cor proveniente da face V_j. Defina a cor $a_{i_{1_{i_{2_{\ddots_{i_m}}}}}}$ como a cor na j-tonalidade de a_{i_j} $\forall\ j \in \mathbb{Z}_{[1,m]}$. Defina também $A_{i_{1_{i_{2_{\ddots_{i_m}}}}}}$ a área pintada de $a_{i_{1_{i_{2_{\ddots_{i_m}}}}}}$ no papel transparente.

E.g. a cor $a_{i_{1_{i_{2_{\ddots_{i_m}}}}}}$ está na 1-tonalidade de a_{i_1}.

Vamos definir campo e campo válido analogamente ao que fizemos na Definição 1.3, mas considerando A o novo conjunto total de áreas no novo papel transparente e, no caso de campo válido, considerando regiões em um campo válido com j-tonalidades distintas $\forall\ j \in \mathbb{Z}_{\leq m}$

Nesse ponto, podemos retomar a Afirmação 1.

Prova:

Isso segue diretamente da definição de campo válido. As áreas de um campo podem ser pintadas de modo que o campo contenha somente áreas pintadas de cores originais se, e somente se, todas as j-tonalidades são diferentes entre si, pois somente nesse caso Jorge pode permutar as i-tonalidades com $i \in \mathbb{N}^*_{<m}$ de modo que a a-tonalidade e a b-tonalidade de uma área sempre coincidam $\forall\ a, b\ \mathbb{N}^*_{\leq m}$. Esse é o argumento da bijeção na prova da Afirmação 1 repetido diversas vezes.

Observação 1.2. Jorge apenas pode permutar as j-tonalidades $\forall\ j \in \mathbb{N}_{[2,m]}$, e ele pode fazer isso livremente, por definição do problema.

□

Afirmação 3 *Podemos particionar o conjunto de todas as áreas em A em n^{m-1} campos válidos.*

Para essa prova vamos precisar numerar os índices de uma região a partir do mais superior para o mais inferior começando com 1 e andando de 1 em 1.

Prova:

Olhando para a prova da Afirmação 2, vemos que isso é verdadeiro para $m = 2$. Vamos provar os casos restantes por indução, tomando que a Afirmação 3 é válida para todo $m \in \mathbb{N}^*_{[2,l]}$ para um inteiro $l \geq 2$.

Note que, considerando $m = l$, cada região pode ter um índice mais inferior acrescentado em n possibilidades (pois são n cores originais) gerando exatamente n regiões do caso $m = l + 1$. Toda região no caso $m = l + 1$ pode ser escrita adicionando um índice mais inferior a uma região no caso $m = l$.

Vamos construir a partição em campos válidos para $m = l+1$ a partir da partição em campos válidos do caso $m = l$.

(i) Como a afirmação é válida para l, consideramos uma partição ζ em n^{l-1} campos válidos para $m = l$;

(ii) Para cada campo válido de ζ, escolhemos o $l+1$-ésimo índice para a primeira região desse campo como n, para a segunda como $n-1$ e assim por diante (faça essas subtrações módulo n) até a n-ésima região desse campo, gerando outro campo válido;

(iii) Para gerar mais um campo válido, escolhemos o $l + 1$-ésimo índice para a primeira região desse campo como $n - 1$ e fazemos analogamente a situação anterior, diminuindo o índice mais inferior conforme avançamos no campo;

(iv) Depois escolhemos o $l + 1$-ésimo índice para a primeira região desse campo como $n - 2$, depois $n - 3$ e assim por diante, gerando n campos válidos para esse campo, varrendo todas as possibilidades do índice mais inferior para toda região nesse campo.

Como todos os campos de ζ são diferentes, as regiões novas que achamos nunca se repetem quando fazemos isso para todos os campos, onde encontramos uma partição ζ' dos campos válidos de A para $m = l+1$ com $n^{l-1} \cdot n = n^l$ campos válidos de n elementos. Estamos feitos por indução.

□

Note que a área média englobada em um campo válido na partição ζ é $\frac{S}{n^{m-1}}$, pois temos n^{m-1} campos válidos na partição da Afirmação 3, então, pelo Princípio das Casas de Pombos para Médidas e a Afirmação 1, estamos feitos.

■

Para mostrar que esse é o maior limitante inferior possível, basta achar um exemplo em todos os campos válidos englobam a mesma área. Para $m = 2$, isso é o caso do Problema 1.1. Para $m = 3$ podemos fazer as três folhas triângulos equiláteros divididos em n áreas da seguinte maneira:

(i) Enumere os vértices sobrepostos na pilha com 1, 2 e 3, partindo de qualquer vértice;

(ii) Enumere as folhas com 1,2 e 3;

(iii) Para a folha i, para todo $i \in \mathbb{N}^*_{\leq 3}$, desenhe $n-1$ paralelas ao lado oposto ao vértice i que dividem a altura relativa ao vértice i em n segmentos iguais.

Desse modo, o papel transparente será dividido em n^3 triângulos de mesma área e cores diferentes. Qualquer campo válido que escolhemos possui a mesma área.

Deixamos a cargo do leitor o seguinte problema que deve ser formalizado corretamente para destacarmos a generalidade do limitante que obtemos.

Problema 1.4. *Generalize o processo anterior usando um m-ágono regular e se convença de que podemos fazer o processo anterior para qualquer $m \geq 2$ (que no caso anterior é 3), obtendo campos válidos de mesma área.*

Dica: Desenhe um diagrama. Isso é mais um problema de apenas formalizar essa ideia com os conhecimentos desenvolvidos ao longo das soluções.

1.5 | Generalizando o Problema 1.1 para k dimensões

O nosso objetivo agora se torna definir os elementos do problema arbitrariamente para mais dimensões, para que algumas propriedades permaneçam válidas e para que possamos descobrir propriedades do problema para mais dimensões.

Consideramos um hipercubo k-dimensional, $k > 2$, construído da seguinte maneira:

(i) Construa um quadrado de lado medindo m (que vamos interpretar como uma folha);

(ii) Arraste o quadrado ao longo da terceira dimensão em uma distância m, obtendo um hipercubo;

(iii) Arraste o hipercubo obtido em (ii) uma distância m na próxima dimensão;

(iv) Repita o processo até obter um hipercubo k-dimensional.

Esse processo de construção do hipercubo será útil para que possamos generalizar para mais dimensões a ideia de faces que pintamos, a ideia de divisão em regiões e as zonas de coincidência.

Para que possamos fazer isso, vamos estender a construção com o mínimo de faces que podemos ter, isto é, duas, para o número mínimo de dimensões que precisamos para interpretar essas faces como faces de um hipercubo, isto é, um hipercubo tridimensional (ou seja, um cubo) com duas folhas.

Considere todos os correspondentes as faces do hipercubo já divididos em n regiões cada e apenas uma face já pintada, onde Jorge pinta apenas as faces restantes.

No caso $k = 3$, podemos fazer duas faces opostas do cubo como as folhas, dividir cada folha como no Problema 1.4 e, para generalizar a ideia de divisão e pintura para a terceira dimensão, considerar que as perpendiculares a cada ponto das curvas que dividem uma folha em n regiões (para cada folha) dividem o cubo em n regiões que pintamos de cores distintas. Isso é o equivalente tridimensional a pintura.

Fazendo isso para as duas folhas, tome que cores originais diferentes misturadas não resultam em uma cor original e cores originais iguais misturadas resultam na mesma cor original. As zonas de coincidência se tornam zonas preenchidas com cores originais após a pintura de ambas as faces. Assim, pegamos a zona de coincidência mínima do Problema 1.1 que Jorge pode obter e, para calcular um limitante inferior que Jorge pode obter, basta arrastá-la ao longo da terceira dimensão numa distância m, obtendo um volume de coincidência $m^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{m^3}{n}$ para o cubo dividido.

Estender isso para as próximas dimensões não requer que saibamos como serão as novas folhas de papel nem as faces dos hipercubos. Apenas precisamos estender as zonas de coincidência ao longo de mais uma dimensão e examinar as coincidências da pintura decorrente da nova folha adicionada com as coincidências que já obtivemos para a dimensão anterior.

Para levar isso para a próxima dimensão, construindo um tesserato, basta arrastar ao longo da quarta dimensão a zona de coincidência em uma distância m e aplicar a fórmula para a "zona de coincidência com a zona de coincidência"obtida no Problema 1.4. Isso nos diz que $m^4 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^4}{n^2}$ é uma zona de coincidência que Jorge sempre pode atingir, pintando os correspondentes 4-dimensionais das faces do cubo e das divisões da maneira que desejar, partindo de uma face já pintada. Fazendo isso até a k-ésima dimensão, temos que a Jorge pode pintar as faces, de modo que a zona de coincidência seja de no mínimo $\frac{m^k}{n^{k-2}} = \frac{m^{n+1}}{n^{n-1}}$.

Agora que já generalizamos para a $n+1$-ésima dimensão, vamos explorar o seguinte problema, que é o caso particular $m = n$ da generalização para k dimensões que fizemos anteriormente.

Problema 1.5. *Considere $m = n$ no Problema 1.4 e as folhas quadrados de lado n, faces de um hipercubo $n+1$-dimensional. Considere as curvas dadas pelas projeções ortogonais das curvas que dividem cada face em n regiões, dividindo o hipercubo em n regiões para cada face que representa uma folha. No lugar de pintar as faces de n cores, vamos pintar as regiões em que dividimos o hipercubo com as projeções ortogonais de n cores distintas. Defina as zonas de coincidência como o equivalente k-dimensional a área de coincidência. Sabendo que Martín pinta só uma folha e Jorge todas as outras, prove que Jorge pode pintar as folhas de modo que as zonas de coincidência compreendem n^2 do equivalente k-dimensional a área.*

Claramente, isso é apenas a aplicação de $\frac{m^{n+1}}{n^{n-1}}$.

Referências

[1] E.W. et al, *10 matemáticos 100 problemas. 2. ed.*, SBM, Rio de Janeiro, 2016.

REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 16

Análise do método Martingale

Valdivino Vargas Júnior[1] | **Rafael lemes de Rezende** [2] | **Tiago Moreira Vargas** [3]

[1,2,3]Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goiás

Contato
[1]vvjunior@ufg.br
[2]rafael.rezende@seduc.go.gov.br
[3]vargas@ufg.br

O presente artigo apresenta conceitos básicos de Probabilidade e faz uma análise do método Martingale sob a perspectiva de jogos.

1 | INTRODUÇÃO

Os jogos fazem parte do cotidiano das pessoas desde os tempos mais remotos. Não faltam registros históricos do uso de moedas e dados na realização de disputas. Mesmo bingos, roletas e loterias já eram usados pelas pessoas em séculos passados. Muitos matemáticos ao longo dos séculos aprofundaram seus conhecimentos em teoria da probabilidade para aplicar em jogos. O objetivo era desenvolver técnicas que levassem a algum tipo de vantagem.

Atualmente as competições aumentaram bastante mundo afora. Muitos participantes buscam técnicas e táticas para obter vantagens em apostas. Uma técnica muito comum divulgada na internet é o chamado método martingale. Este método consiste em apostar repetidamente e progressivamente num mesmo tipo de resultado, até ele ocorrer. O objetivo é recuperar tudo que foi perdido na primeira vez que lucrar. A proposta é dobrar a aposta a cada rodada e o lucro surgirá após a primeira vitória. De fato, se é permitido ao jogador apostar indefinidamente num mesmo resultado, em algum momento essa vitória irá ocorrer. Neste trabalho analisamos o uso dessa técnica em apostas. Mais detalhes sobre a história dos jogos e do uso da teoria de probabilidade em dinâmicas de jogos podem ser encontradas em [4].

O trabalho é organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos algumas definições e ferramentas básicas de probabilidade e na Seção 3 estudamos o método martingale verificando se de fato este pode dar alguma vantagem a um jogador.

2 | PROBABILIDADE

Nesta seção apresentamos alguns elementos da teoria básica de Probabilidade. Estes e outros resultados e conceitos podem ser encontrados em [1] , [2] e [3]. Começamos com a formulação de modelo matemático para um experimento. Um experimento aleatório pode ser formalizado a partir de uma tripla matemática $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde Ω é um espaço amostral com os resultados do experimento, $\mathcal{F}$ uma classe de eventos aleatórios e $\mathbb{P}$ uma probabilidade.

A classe de eventos aleatórios $\mathcal{F}$ possui todos os eventos para os quais atribuíremos probabilidade. Ela deve satisfazer propriedades que permitam um tratamento matemático adequado ao modelo. Ao evento certo atribuímos probabilidade 1, ao evento impossível probabilidade 0. Se atribuímos probabilidade a um dado evento, é de interesse atribuir probabilidade ao seu complementar. Por fim, se atribuímos probabilidade a um grupo de eventos, é fundamental que possamos atribuir probabilidade aos eventos obtidos por operações de complementar, união e intersecção desses eventos em quaisquer quantidades (operações básicas de conjuntos). Definimos então:

Definição 1 *A classe de eventos aleatórios $\mathcal{F}$ é uma classe de subconjuntos de Ω satisfazendo:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. *Se* $A \in \mathcal{F}$ *então* $A^C \in \mathcal{F}$;
3. *Se* $A_n \in \mathcal{F}$ *para* $n = 1, 2, \ldots$ *então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definição 2 *Uma Probabilidade é uma função $\mathbb{P}(.)$ a valores reais definida em uma classe $\mathcal{F}$ de eventos aleatórios de um espaço amostral Ω, tal que*
(A1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$,
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
(A3) Aditividade enumerável: para qualquer sequência $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ de eventos dois a dois disjuntos:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Uma probabilidade ou medida de probabilidade é uma função conjunto. Trata-se de um tipo particular de medida. A Teoria da Medida envolve conceitos amplamente estudados na Análise Matemática. Uma medida é uma função não negativa cujos elementos do domínio são conjuntos (mais especificamente, subconjuntos de um dado conjunto X) e que tem a seguinte propriedade de aditividade: ao ser aplicada na união de conjuntos disjuntos o valor da função é a soma dos valores da função aplicada nos conjuntos individualmente. Em particular, o valor da função é 0, quando aplicada no conjunto vazio. São exemplos de medida: comprimento, área, volume, contagem, probabilidade, etc. No caso de uma probabilidade, o conjunto X é o espaço amostral, isto é, $X = \Omega$ e a medida (função probabilidade) associada a Ω assume o valor 1. Para conjuntos infinitos não-enumeráveis, nem sempre é possível atribuir uma probabilidade bem definida para qualquer subconjunto. Nesses casos, constrói-se a classe de eventos aleatórios de modo que seus elementos tenham apenas subconjuntos para os quais a probabilidade esteja bem definida. Da definição de probabilidade algumas propriedades são imediatas:

Proposição 1 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos aleatórios em $\mathcal{F}$.*
a) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^C)$.
b) Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são dois a dois disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Quando Ω é discreto (o conjunto dos possíveis resultados do experimento é finito ou infinito enumerável), a classe de eventos aleatórios $\mathcal{F}$ pode ser escolhida como o conjunto das partes de Ω, denotada por $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω).Neste caso, escrevendo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, associamos a cada ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, um número $p(\omega_i)$ tal que $p(\omega_i) \geq 0$ e

$\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Para $i = 1, 2, \ldots, p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples $\{\omega_i\}$. A probabilidade de um evento $A \in \mathcal{F}$ fica definida por:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Exemplo 1 *Um jogador participa de um jogo onde em cada rodada um dado honesto é lançado. Ele recebe $R\$$ 9,00 caso saia face cinco e paga $R\$$ 2,00 caso saia outra face. Se ele participa de duas rodadas, podemos escrever o espaço amostral como*

$$\Omega = \{(9,9), (9,-2), (-2,9), (-2,-2)\}.$$

Assim, uma classe de eventos aleatórios para este modelo seria

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{(9,9)\}, \{(9,-2)\}, \{(-2,9)\}, \{(-2,-2)\}, \{(9,9),(9,-2)\}, \{(9,9),(-2,9)\}, \{(9,9),(-2,-2)\},$$

$$\{(9,-2),(-2,9)\}, \{(9,-2),(-2,-2)\}, \{(-2,9),(-2,-2)\}, \{(9,9),(9,-2),(-2,9)\},$$

$$\{(9,9),(9,-2),(-2,-2)\}, \{(9,9),(-2,9),(-2,-2)\}, \{(9,-2),(-2,9),(-2,-2)\}, \Omega\}.$$

Daí atribuímos

$$p((9,9)) = \frac{1}{36}, p((9,-2)) = p((-2,9)) = \frac{5}{36}, p((-2,-2)) = \frac{25}{36}.$$

Então,se quisermos calcular a probabilidade do evento A onde o jogador encerra as duas rodadas com lucro total positivo, escrevemos

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = p((9,9)) + p((-2,9)) + p((9,-2)) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}.$$

Definição 3 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Considere A e B dois eventos em $\mathcal{F}$ com $\mathbb{P}(B) > 0$. A probabilidade condicional do evento A dado que B ocorreu é definida por*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Teorema 1 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos aleatórios em $\mathcal{F}$.*
a) (Teorema da Multiplicação) Se $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ então

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1).\mathbb{P}(A_2|A_1).\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

b) (Fórmula da Probabilidade Total) Suponha que os eventos aleatórios A_i, $i = 1, 2, \cdots n$ formem uma partição do espaço

amostral Ω, isto é

$$i) A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j;$$
$$ii) \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega;$$
$$iii) \mathbb{P}(A_i) > 0 \, \forall i.$$

Temos:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i).\mathbb{P}(A_i).$$

Exemplo 2 *Um jogador participa de um jogo com a seguinte dinâmica. Inicialmente há uma urna com 16 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. O prêmio em cada rodada é decidido de acordo com a cor da bola retirada. Caso seja vermelha recebe $R\$$ 9,00. Caso seja verde paga $R\$$ 5,00. O jogador participa de duas rodadas sendo que entre as retiradas, a bola extraída não é devolvida. Seja A_i o evento onde a i-ésima extração resulta em bola verde e B o evento onde o jogador tem lucro total de $R\$$ 4,00. Então $B = (A_1 \cap A_2^C) \cup (A_1 \cap A_2^C)$, donde*

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2^C) + \mathbb{P}(A_1^C \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2^C|A_1) + \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2|A_1^C) = \frac{16}{20} \times \frac{4}{19} + \frac{4}{20} \times \frac{16}{19} = \frac{32}{95}.$$

Por outro lado, se desejamos calcular a probabilidade do jogador ganhar $R\$$ 5,00 na segunda rodada, então

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(A_1^C)\mathbb{P}(A_2|A_1^C) = \frac{16}{20} \times \frac{15}{19} + \frac{4}{20} \times \frac{16}{19} = \frac{240+64}{380} = \frac{4}{5}.$$

Definição 4 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ em $\mathcal{F}$ são ditos independentes se e somente se:*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}).\mathbb{P}(A_{i_2}). \ldots .\mathbb{P}(A_{i_k})$$

para todo $k = 2, 3, 4, \cdots n$ com $i_j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ para $j = 1, 2, \cdots k$.

Teorema 2 *(Sequências monótonas de eventos) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência crescente de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$, isto é, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n. Então*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \ e \ logo \ \lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

De forma análoga, se $\{A_n\}$ é uma sequência decrescente de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$, ou seja, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n \ e \ logo \ \lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Teorema 3 *(Continuidade da Probabilidade) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência monótona* *de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$ (crescente ou decrescente). Se*

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

então

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Definição 5 *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função a valores reais definida em Ω, tal que*

$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F};$$

Informalmente falando, uma variável aleatória é um característico numérico associado a um experimento aleatório. Na construção do modelo e na definição da variável aleatória é preciso garantir que todos os eventos associados a variável estejam com suas probabilidades definidas.

Definição 6 *A esperança (média, valor esperado) de uma variável aleatória X é definida por*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x).$$

A Esperança pode ser compreendida intuitivamente como uma espécie de média ponderada dos possíveis valores de X. Seu conceito ganha uma interpretação intuitiva em termos da chamada *Lei dos Grandes Números*. Essa afirma que a média aritmética de n valores observados de uma variável aleatória X é aproximadamente igual a $\mathbb{E}(X)$ quando n é grande. De fato, ela afirma que a média aritmética das observações converge, em certo sentido para a média, $\mathbb{E}(X)$ quando $n \to \infty$. Para maiores detalhes veja [1], Capítulo 5.

Exemplo 3 *Voltando ao Exemplo 1 seja X o lucro do jogador após as duas rodadas. Então*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = -4) &= p((-2,-2)) = \frac{25}{36},\\
\mathbb{P}(X = 18) &= p((9,9)) = \frac{1}{36},\\
\mathbb{P}(X = 7) &= p((-2,9)) + p((9,-2)) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_x x\mathbb{P}(X = x) = -4 \times \mathbb{P}(X = -4) + 7 \times \mathbb{P}(X = 7) + 18 \times \mathbb{P}(X = 18)\\
\mathbb{E}(X) &= -4 \times \frac{25}{36} + 7 \times \frac{10}{36} + 18 \times \frac{1}{36} = \frac{-100 + 70 + 18}{36} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Assim, em média, o jogador levará prejuízo neste jogo. Em termos de Lei dos Grandes Números, se o jogador repete essa dupla rodada de apostas uma quantidade grande de vezes, terá com alta probabilidade, um prejuízo grande. Por exemplo, se repete esta dupla de rodadas 300 vezes, o prejuizo, com alta probabilidade, estará próximo de $R\$$ 100,00.

Cabe destacar que a média não pode ser o único critério para definir se uma aposta é vantajosa ou não para um dado jogador. É preciso considerar também o risco associado. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 4 *Um jogador participa de uma aposta cuja dinâmica é a seguinte. Há 60 bolas em uma urna numeradas de 1 a 60. O apostador deve marcar numa cartela 15 números dentre os 60. Ele paga $R\$$ 10.000,00 pela cartela e 6 números são sorteados. O jogador só é premiado caso acerte os 6 números sorteados (os números sorteados estejam dentre os 15 que os jogador marcou na cartela). Nese caso, recebe o prêmio de $R\$$ 101.000.000,00 Seja L o lucro do jogador. Temos:*

$$\mathbb{P}(L = 100.990.000) = \frac{\binom{15}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{10.003}$$

e

$$\mathbb{P}(L = -10.000) = \frac{\binom{15}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{10.002}{10.003}$$

Nesse caso,

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{l} l\mathbb{P}(L = l) = -10.000 \times \mathbb{P}(L = -10.000) + 100.990.000 \times \mathbb{P}(L = 100.990.000) = \frac{970.000}{10.003}.$$

Embora o lucro médio seja positivo ($R\$$ 96,97), fica claro que ao participar o jogador corre risco altíssimo de perder todo o dinheiro apostado. A chance de receber o alto prêmio é muito reduzida.

3 | MÉTODO MARTINGALE

O método martingale consiste em apostar repetidamente e progressivamente em um mesmo tipo de resultado, até ele ocorrer. O objetivo é recuperar tudo que foi perdido na primeira vez que lucrar. A proposta é dobrar a aposta a cada rodada e o lucro surgirá após a primeira vitória.Vamos analisar, a partir de agora, a efetividade dessa técnica em apostas reais.

Teorema 4 *Suponha um jogo onde o jogador tenha probabilidade p ($p \in (0, 1)$) de vencer em uma tentativa. Admita que o resultado de cada tentativa não tenha influência em tentativas posteriores. Suponha que o jogador faça suas apostas indefinidamente. Então, a probabilidade dele nunca vencer é zero. Logo, com probabilidade 1, em algum momento ele vence uma aposta.*

Sejam os eventos: A_i “O jogador perde na i-ésima tentativa"e B “O jogador não vence nenhuma tentativa", então:

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Defina B_n “O jogador perde em todas as tentativas até a n-ésima"

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Note que os eventos $A_1, A_2, \cdots A_n$ são independentes. Daí, temos:

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i=1}^{n}(1-p) = (1-p)^n.$$

Note que

$$B_{n+1} = \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i = B_n.$$

Pelo Teorema 3:

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty}(1-p)^n = 0.$$

∎

Assim, a chance do jogador nunca vencer é 0. Portanto, em algum momento, com probabilidade 1, o jogador vencerá uma aposta.

Teorema 5 *Suponha um jogo onde o jogador tenha probabilidade p ($p \in (0,1)$) de vencer em uma tentativa. Admita que o resultado de cada tentativa não tenha influência em tentativas posteriores. Suponha que o jogador invista k reais na primeira tentativa e que dobre a aposta de uma tentativa para outra. Considere que a banca não tenha um teto de aposta e que o jogador tenha crédito ilimitado para apostar. Seja L o lucro do jogador. Então, $L = k$ com probabilidade 1.*

Considere um n fixado. Suponha que o jogador perca nas primeiras n tentativas e vença na tentativa $n+1$. O prejuízo acumulado Pr_n até a n-ésima tentativa será

$$Pr_n = -k - 2k - 2^2k - \ldots - 2^{r-2}k - 2^{n-1}k = -k(1+2+2^2+\ldots+2^{r-2}+2^{n-1}) = -k(2^n-1).$$

e o lucro G_n obtido na $n+1$-ésima tentativa

$$G_n = 2^{n-1}k.$$

Assim, o Lucro L_n será

$$L_n = G_n - Pr_n = k \cdot 2^{n-1} - k \cdot (2^{n-1} - 1) = k. \tag{1}$$

Logo, para qualquer n, $L_n = k$.

Defina o evento F_n"O jogador perde nas n primeiras tentativas e vence na $n+1$-ésima". Considere ainda, B: "O jogador não vence nenhuma tentativa". Do Teorema 4 segue que o evento

$$B^C = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

tem probabilidade 1. Por outro lado,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = [L = k].$$

donde

$$\mathbb{P}(L = k) = 1.$$

O lucro L do jogador seria então k reais, mas para isso ser garantido o apostador precisaria de duas coisas que ele não tem nas situações práticas:

- Dinheiro infinito,
- Limite infinito para apostas nas casas.

Assim, o método pode falhar já que usualmente há limites para valores de apostas nas casas e no caso de se demorar a sair a vitória pode chegar um momento onde o jogador não tenha mais dinheiro para apostar, ficando no prejuízo.

Exemplo 5 *A roleta americana consiste de 38 casas sendo duas casas verdes (0 e 00) e 36 casas numeradas de 1 a 36 alternando as cores entre preta e vermelha. Considere um jogo na roleta americana com aposta inicial $R\$\ 20,00$ e limite de apostas $R\$\ 1.000,00$. Nesse caso, o jogador precisa vencer até a 6ª rodada. Seja L o lucro do jogador. Vamos observar as possibilidades de lucro obtido pelo jogador. Estamos supondo que ele para quando vencer pela primeira vez ou imediatamente após a sexta rodada.*

- ***Se o jogador vence na 1ª Rodada:*** $+20 = 20$.
- ***Se o jogador vence na 2ª Rodada:*** $-20 + 40 = 20$.
- ***Se o jogador vence na 3ª Rodada:*** $-20 - 40 + 80 = 20$.
- ***Se o jogador vence na 4ª Rodada:*** $-20 - 40 - 80 + 160 = 20$.
- ***Se o jogador vence na 5ª Rodada:*** $-20 - 40 - 80 - 160 + 320 = 20$.
- ***Se o jogador vence na 6ª Rodada:*** $-20 - 40 - 80 - 160 - 320 + 640 = 20$.
- ***Se o jogador perde todas as 6 rodadas:*** $-20 - 40 - 80 - 160 - 320 - 640 = -1.260$.

Suponha que o jogo é a aposta preto/vermelho numa roleta americana. Todos os números da mesa possuem coloração preta ou vermelha (com exceção do 0 e 00). O jogador aposta sempre que o número a ser sorteado será da cor preta. Nesse caso, a probabilidade de ganho em uma rodada é $\frac{18}{38}$. Assim,

$$\mathbb{P}(L=-1260) = \prod_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A_i^c) = \left(1-\frac{18}{38}\right)^6 = \left(\frac{20}{38}\right)^6 \approx 0,021255845.$$

$$\mathbb{P}(L=20) = 1 - P(L=-1.260) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^6 \approx 0,978744154.$$

Logo,

$$\mathbb{E}(L) = 20\left[1-\left(\frac{20}{38}\right)^6\right] + (-1.260)\cdot\left(\frac{20}{38}\right)^6$$
$$\mathbb{E}(L) = 20 - 20\left(\frac{20}{38}\right)^6 - 1.260\cdot\left(\frac{20}{38}\right)^6$$
$$\mathbb{E}(L) = 20 - 1.280\left(\frac{20}{38}\right)^6$$
$$\mathbb{E}(L) \approx -7,20748284.$$

Ou seja, em média, o lucro do jogador é negativo embora haja altíssima probabilidade dele sair no lucro.

O teorema a seguir apresenta um resultado geral para o cálculo da probabilidade do jogador sair em lucro usando o método de martingale em função dos limites de apostas impostos pela banca. O lucro médio do jogador também é calculado e são dadas condições para que esse lucro médio seja positivo.

Teorema 6 *Suponha um jogo onde o jogador tenha probabilidade p ($p \in (0,1)$) de vencer em uma tentativa. Admita que o resultado de cada tentativa não tenha influência em tentativas posteriores. Suponha que o jogador invista k reais na primeira tentativa e que dobre a aposta de uma tentativa para outra. Considere que a banca tem um teto de aposta no valor de l reais. A estratégia do jogador é parar quando conseguir a primeira vitória ou quando atingir o teto máximo que pode apostar. Seja L o lucro do jogador. Então, se $r = \min\{n \geq 1; k\cdot 2^r > l\}$,*

1. $\mathbb{P}(L=-k(2^r-1)) = (1-p)^r; \mathbb{P}(L=k) = 1-(1-p)^r$,
2. $\mathbb{E}(L) = k\{1-[2(1-p)]^r\}$,
3. $\mathbb{E}(L) > 0$ *se e somente se* $p > \frac{1}{2}$.

O jogador não pode ultrapassar o valor l reais em uma tentativa. Sendo assim, caso perca nas r primeiras tentativas ficará com um prejuízo de

$$-k-2k-2^2k-\ldots-2^{r-2}k-2^{r-1}k = -k(1+2+2^2+\ldots+2^{r-2}+2^{r-1}) = -k(2^r-1).$$

Sejam os eventos: A_i"O jogador perde na i-ésima tentativa"e B_r "O jogador perde todas as tentativas até a r-ésima". Então

$$B_r = \bigcap_{i=1}^{r} A_i.$$

Usando a independência dos eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ temos:

$$\mathbb{P}(B_r) = P\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) = \prod_{i=1}^{r} P(A_i) = \prod_{i=1}^{r}(1-p) = (1-p)^r.$$

Assim, a probabilidade do jogador ter um prejuízo de $k(2^r - 1)$ é $(1-p)^r$.

Por outro lado, se ele vence até a r-ésima tentativa o lucro é de k reais (Veja Equação (1)). Então,

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{l} l\mathbb{P}(L = l) = k\mathbb{P}(L = k) + (-k(2^r - 1))\mathbb{P}(L = -k(2^r - 1))$$

$$\mathbb{E}(L) = k(1 - (1-p)^r) - k(2^r - 1)(1-p)^r = k\{1 - [2(1-p)]^r\}$$

Exemplo 6 *Voltando ao Exemplo 5 com k e r genéricos temos pelo Teorema 6:*

$$\mathbb{P}(L = -k(2^r - 1)) = \left(\frac{20}{38}\right)^r,$$

$$\mathbb{P}(L = k) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^r$$

e

$$\mathbb{E}(L) = k\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^r\right).$$

Note que $h(K, R) = \mathbb{E}(L) < 0$ para todo $k > 0, r \geq 1$.

Ou seja, em média o jogador perde embora no caso onde r é suficientemente grande, tenha grande chance de sair vencedor.

Teorema 7 *Suponha um jogo onde o jogador tenha probabilidade p ($p \in (0,1)$) de vencer em uma tentativa. Admita que o resultado de cada tentativa não tenha influência em tentativas posteriores. Suponha que o jogador invista k unidades monetárias na primeira tentativa e que dobre a aposta de uma tentativa para outra. Considere que a banca tem um teto de aposta no valor de l unidades monetárias. A estratégia do jogador é parar quando conseguir a primeira vitória ou quando atingir o teto máximo de valor que pode ser apostado. Defina $r = \min\{n \geq 1; k \cdot 2^r > l\}$. Suponha que o jogador repita esta estratégia n vezes. Seja L o lucro obtido pelo jogador após repetir esta estratégia n vezes. Então*

$$\mathbb{P}(L = k[2^r j - n(2r - 1)]) = [1 - (1-p)^r]^j (1-p)^{r(n-j)}, j = 0, 1, 2, \ldots n.$$

e

$$\mathbb{E}(L) = nk\{1 - [2(1-p)]^r\}.$$

Sabemos que cada vez que o jogador adota essa estratégia ele pode terminar lucrando k unidades monetárias (sucesso) ou com prejuízo de $-k(2r - 1)$ unidades monetárias (fracasso). Se X é o número de vezes que a estratégia resulta em

TABELA 1 **Lucro médio e probabilidade de lucro positivo quando** $k = 10$

$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^r\right)$ e $\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^r$			
l	r	$\mathbb{E}(L)$	$\mathbb{P}(L = 10)$
100	4	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^4\right) = -2,277$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^4 = 0,923$
200	5	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^5\right) = -2,924$	$\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^5 = 0,960$
500	6	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^6\right) = -3,604$	$\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^6 = 0,979$
1 000	7	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^7\right) = -4,320$	$\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^7 = 0,989$
2 000	8	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^8\right) = -5,073$	$\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^8 = 0,994$
5 000	9	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^9\right) = -5,867$	$\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^9 = 0,997$
10 000	10	$\mathbb{E}(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^{10}\right) = -6,702$	$\mathbb{P}(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^{10} = 0,998$

sucesso nas n repetições então

$$L = kX - (n - X)k(2^r - 1), \text{ isto é }, L = k[2^r X - n(2^r - 1)].$$

Podemos pensar que X é o número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes, cada um com chance de sucesso dada por

$$1 - (1 - p)^r.$$

Logo, X tem lei Binomial com parâmetros n e $1 - (1 - p)^r$ (consulte [3] para mais detalhes) e então

$$\mathbb{P}(X = j) = [1 - (1 - p)^r]^j [(1 - p)^r]^{n-j} \text{ e } \mathbb{E}(X) = n[1 - (1 - p)^r].$$

Para finalizar a prova, note que $X = j$ equivale a um lucro $L = k[2rj - n(2^r - 1)]$ e que pela linearidade da média (veja [3]) $\mathbb{E}(L) = k[2^r \mathbb{E}(X) - n(2^r - 1)] = nk\{1 - [2(1 - p)]^r\}$.

Exemplo 7 *Do Teorema 7 se o jogador repete a estratégia* n *vezes, a probabilidade de alcançar o lucro máximo* nk *unidades monetárias é*

$$\mathbb{P}(L = nk) = [1 - (1 - p)^r]^n.$$

Voltando ao Exemplo 6 considere uma aposta inicial $k = 10$ *unidades monetárias e limite de aposta* $l = 10.000$ *unidades monetárias, isto é,* $r = 10$*. Se o jogador repete a estratégia* $n = 100$ *vezes então a probabilidade de seu lucro ser de 1.000* *unidades monetárias é*

$$\mathbb{P}(L = 1000) = \left[1 - \left(\frac{20}{38}\right)^{10}\right]^{100} = 0,849.$$

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do que expomos fica claro que o método martingale não é infalível conforme propagandeado em diversos sites na internet. A estratégia de lucrar k reais não pode ser garantida. Para isso, o apostador precisaria de duas coisas que ele não tem nas situações reais:

- Dinheiro ilimitado,
- Não haver limite de valor para apostas nas casas.

Assim, por estas questões o método pode falhar. No caso de se demorar a sair a vitória pode chegar um momento onde o jogador não possa mais apostar, ficando no prejuízo.

Referências

[1] B. R. James. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Projeto Euclides, IMPA (2015).

[2] D. Stirzaker. *Elementary Probability*. Cambridge University Press (2003).

[3] S. M. Ross. *Probabilidade- Um Curso Moderno com Aplicações*. Bookman (2010).

[4] R.L. de Rezende. *Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos*. Dissertação (Profmat). Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás. Goiânia,144, 2020.

REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 16

Uma Questão de Ordem

Ana Paula Chaves[1]

[1]Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goiás

Contato
[1]apchaves@ufg.br

Dentre os conceitos advindos da Álgebra Abstrata mais utilizados na resolução de problemas, seguramente está o de *ordem*. Nesse texto, vamos exibir alguns dos resultados mais clássicos sobre o tema, restringindo nosso universo aos inteiros módulo m, e aplicá-los na resolução de alguns problemas de olimpíada. Também são propostos alguns problemas ao final, para deleite do(a) leitor(a).

1 | INTRODUÇÃO

Dados dois inteiros $a \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, tais que $(a, m) = 1$, sabemos, pelo *Teorema de Euler*, que $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$. Uma questão natural que podemos levantar é: pode existir uma potência menor de a que é congruente a 1 módulo m? Se pensamos um pouco, rapidamente produzimos um exemplo onde isso ocorre. Considere $a = 4$ e $m = 5$. Temos que $\phi(5) = 4$, mas $4^2 \equiv 1 \pmod 5$, e 4^2 é a menor potência de 4 congruente a 1 módulo 5. Essa *menor potência*, ou como veremos a posteriori a *ordem*, é nosso interesse principal.

Já vimos que o conjunto $A = \{d \in \mathbb{N};\ a^d \equiv 1 \pmod m\}$ é não vazio, pois $\phi(m) \in A$. Assim, pelo *Princípio da Boa Ordem*[1], A possui um elemento minimal. Este elemento minimal, ou seja, o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \equiv 1 \pmod m$, é dito a *ordem de a módulo m*, cuja notação é dada comumente por $ord_m(a)$ ou $o_m(a)$[2].

Exemplo 1 *A ordem de* 2 *módulo* 9 *é* 6*, já que* $2^1 \equiv 2 \pmod 9$, $2^2 \equiv 4 \pmod 9$, $2^3 \equiv 8 \pmod 9$, $2^4 \equiv 7 \pmod 9$, $2^5 \equiv 5 \pmod 9$ *e* $2^6 \equiv 1 \pmod 9$.

Nosso objetivo neste texto é fornecer os resultados mais utilizados na resolução de problemas de olimpíada, que envolvem a ordem de um elemento em $\mathbb{Z}_m$, colocando-os em prática com alguns problemas resolvidos no *Warm-up*, e deixando alguns problemas interessantes na subseção de *Problemas Propostos*.

Na próxima seção, *Fatos que Ajudam*, vamos exibir e demonstrar alguns dos resultados mencionados anteriormente.

[1] Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, possui um elemento minimal.

[2] Vale a pena ressaltar que o conceito de *ordem* é bem mais geral. Dado um grupo $(G, \times)$, escrito multiplicativamente, com identidade e, denominamos a *ordem de $a \in G$*, pelo menor $d \in \mathbb{N}$ tal que $a^d = e$.

2 | FATOS QUE AJUDAM

O primeiro resultado que vamos enunciar, é extremamente importante e será usado diversas vezes durante o texto.

Teorema 1 *Sejam a e m inteiros positivos, tais que $(a, m) = 1$. Então,*

$$a^n \equiv 1 \pmod{m} \iff ord_m(a)|n.$$

Note que a volta é imediata, donde vamos nos ocupar apenas da ida. Suponha que $a^n \equiv 1 \pmod{m}$. Efetuando a divisão euclideana de n por $ord_m(a)$, obtemos $n = q \cdot ord_m(a) + r$, onde $0 \le r < ord_m(a)$. Assim, obtemos,

$$a^r \equiv (a^{ord_m(a)})^q a^r \equiv a^n \equiv 1 \pmod{m},$$

ou seja, $a^r \equiv 1 \pmod{m}$ e, caso $r \neq 0$, teríamos uma contradição com o fato de $ord_m(a)$ ser minimal, já que $r < ord_m(a)$. Portanto, $r = 0$ e finalizamos a prova.

Como consequência imediata, temos o seguinte corolário:

Corolário 1 *Se a e m inteiros positivos, são tais que $(a, m) = 1$, então*

$$ord_m(a)|\phi(m).$$

Exemplo 2 *Dado $a \in \mathbb{N}$, encontrar $ord_{a^n-1}(a)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: Primeiro, observe que $a^n \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, donde $ord_{a^n-1}(a) \le n$. Por outro lado, temos que, se $0 < x < n$, então $a^x - 1 < a^n - 1$, não podendo haver x em tal intervalo tal que $a^x - 1$ é múltiplo de $a^n - 1$, i. e., de modo que $a^x \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$. Portanto, $ord_{a^n-1}(a) = n$.

Também como consequência do Teorema 1, temos:

Corolário 2 *Temos que $a^l \equiv a^n \pmod{m}$, se, e somente se, $l \equiv n \pmod{ord_m(a)}$.*

Novamente, observe que a volta é imediata, e vamos nos ocupar apenas da ida. De fato, suponha SPG que $l \ge n$. Então, como $(a, m) = 1$, "dividimos"ambos os lados da congruência $a^l \equiv a^n \pmod{m}$, para obter $a^{l-n} \equiv 1 \pmod{m}$, donde, pelo Teorema 1, isso implica em $ord_m(a)|l - n$, ou seja, $l \equiv n \pmod{m}$, como desejamos.

3 | PROBLEMAS

3.1 | Warm-up

Problema 1 (AIME 2001 - Modificado) *Letícia gosta de listas inusitadas. Certo dia, brincando com números, ela percebeu que seu palíndromo favorito, o 1001, aparecia entre os divisores das diferenças*

$$\begin{aligned} 10^{10} - 10^4 &= 1001 \times 9990000 \\ 10^{13} - 10 &= 1001 \times 9990009990, \end{aligned}$$

e resolveu listar todas as $10^j - 10^i$, *com* $0 \le i < j \le 99$, *que possuem essa propriedade. Quantos números Letícia listou?*

Solução: Note que, se $1001|10^j - 10^i$, então $10^j \equiv 10^i \pmod{1001}$, e, como $(1001, 10) = 1$, temos pelo Corolário 2 que $j \equiv i \pmod{ord_{1001}(10)}$. Assim, precisamos encontrar $ord_{1001}(10)$ para continuar. Essa tarefa não é muito árdua, pois como $10^3 \equiv -1 \pmod{1001}$, temos $10^6 \equiv 1 \pmod{1001}$, e já que $10, 10^2, \ldots, 10^5$ não são congruentes a 1 módulo 1001, concluímos que $ord_{1001}(10) = 6$. Com isso, traduzimos o nosso problema em contar os pares (i, j) de inteiros positivos distintos, com $0 \le i < j \le 99$, tais que $i \equiv j \pmod 6$. Perceba que, se $i \equiv j \equiv 0 \pmod 6$, como temos precisamente 17 múltiplos de 6 no intervalo $[0, 99]$, a quantidade de pares desejados é $\binom{17}{2} = 136$. O mesmo também vale para $i \equiv j \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod 6$, nos dando uma parcial de $4 \cdot 136 = 544$ pares. Nos casos em que $i \equiv j \equiv 4$ ou $5 \pmod 6$, temos 16 números no intervalo $[0, 99]$ satisfazendo tais congruências, nos dando $\binom{16}{2} = 120$ pares em cada caso, somando 240. Contando todos os pares encontrados, obtemos 784 no total.

Problema 2 *Mostre que, se* p *é primo, então todo fator primo de* $2^p - 1$ *é maior que* p.

Solução: Tome q um primo, tal que $q|2^p - 1$. Com isso, $q \neq 2$, e como $2^p \equiv 1 \pmod q$, temos pelo Teorema 1 que $ord_q(2)|p$, donde, como p também é primo, conseguimos $ord_q(2) \in \{1, p\}$. Como, é imediato que $ord_q(2) \neq 1$, então $ord_q(2) = p$. Por outro lado, como $(2, q) = 1$, sabemos, pelo Corolário 1, que $ord_q(2)|\phi(q) = q - 1 \Rightarrow p|q - 1$. Assim, $q - 1 \ge p$, donde $q \ge p + 1 > p$, como queríamos.

Problema 3 *Sejam* $a > 1$ *e* n *inteiros positivos. Se* p *é um primo ímpar, divisor de* $a^{2^n} + 1$, *mostre que* p *é congruente a* 1 *módulo* 2^{n+1}.[3].

Solução: Como p é um primo ímpar, tal que $p|a^{2^n} + 1$, então $p \not| a^{2^n} - 1$ o que nos dá $p|(a^{2^n} + 1)(a^{2^n} - 1) = a^{2^{n+1}} - 1$. Assim, $a^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p \quad \Rightarrow \quad ord_p(a)|2^{n+1}$. Agora, vamos mostrar que $ord_p(a)$ é exatamente 2^{n+1}. De fato, se tivéssemos $ord_p(a)|2^{n+1}$, então pelo Teorema 1, $a^{2^n} \equiv 1 \pmod p \quad \Rightarrow \quad p|a^{2^n} - 1$, mas vimos que isso não pode acontecer. Portanto, $ord_p(a) = 2^{n+1}$. Por outro lado, como $(a, p) = 1$, temos pelo Corolário 1,

$$2^{n+1} = ord_p(a)|\phi(p) = p - 1 \quad \Rightarrow \quad p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}},$$

como queríamos.

Problema 4 (Coreia IMO TST 2003) *Dado um primo* p, *seja* $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$.

1. *Se* $p|m$, *mostre que existe um fator primo de* $f_p(m)$ *que é relativamente primo com* $m(m-1)$.
2. *Mostre que existem infinitos* n *tais que* $pn + 1$ *é primo.*

Solução:

a) Na verdade, qualquer fator primo de $f_p(m)$, quandp $p|m$, é coprimo com $m(m - 1)$. Com efeito, tome um fator primo qualquer $q|f_p(m)$. É imediato que $q \not| m$, já que, caso contrário $q|m^{p-1} + m^{p-2} + \cdots + m + 1$ e $q|m$, nos dá $q|1$, um absurdo. Agora, vamos mostrar que $(q, m - 1) = 1$. De fato, se $q|m - 1$, então $m \equiv 1 \pmod p$. Daí,

$$p \equiv m^{p-1} + m^{p-2} + \cdots + m + 1 = f_p(m) \equiv 0 \pmod q \quad \Rightarrow \quad q|p.$$

[3]Observe que esse resultado implica que todo divisor primo do *n-ésimo número de Fermat*, $2^{2^n} + 1$, é congruente a 1 módulo 2^{n+1}

Por outro lado, também temos por hipótese que $p|m$, donde $q|m$, um absurdo. Portanto, $(q, m(m-1)) = 1$.

b) Primeiro, vamos mostrar, usando o item **a)**, que os fatores primos de $f_p(m)$, quando $p|m$, são todos da forma $pn+1$. Seja q um desses fatores primos. Então,

$$\begin{aligned} q|f_p(m) = m^{p-1} + m^{p-2} + \cdots + m + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad q|(m-1)(m^{p-1} + m^{p-2} + \cdots + m + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad q|m^p - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad m^p \equiv 1 \pmod q \\ &\Leftrightarrow \quad ord_q(m)|p, \end{aligned}$$

assim, $ord_q(m) \in \{1, p\}$. Se tivéssemos $ord_q(m) = 1$, então $m \equiv 1 \pmod q \Rightarrow q|m-1$, o que contradiz o que mostramos no item **a)**. Portanto, $ord_q(m) = p$, donde, como $(q, m) = 1$,

$$p = ord_q(m)|\phi(q) = q - 1 \quad \Rightarrow \quad p|q-1,$$

o que nos dá $q \equiv 1 \pmod p$, como queríamos. Perceba que mostrar esse fato não nos garante a existência de infinitos primos da forma desejada, pois temos que garantir que existe uma sequência $(m_k)_k$, de inteiros, de modo que o conjunto dos divisores primos de $(f_p(m_k))_k$ seja infinito. Observe que, se garantimos a existência de $(m_k)_k$, tais que os valores $f_p(m_k)$ são dois a dois coprimos, resolvemos nosso problema. Lembrando que, para usar o que foi feito até aqui, precisamos que $p|m_k$, para todo k, se tomamos $m_1 = p$ e $m_2 = pf_p(m_1)$, então $(f_p(m_1), f_p(m_2)) = 1$, pois caso exista um fator primo q, em comum entre eles, teremos

$$q|f_p(m_1) \quad \text{e} \quad q|f_p(m_2) = (pf_p(m_1))^{p-1} + (pf_p(m_1))^{p-2} + \cdots + ((pf_p(m_1))) + 1 \quad \Rightarrow \quad q|1,$$

um absurdo. Note que, se tomarmos $m_3 = pf_p(m_1)f_p(m_2)$, usando o mesmo argumento teremos $(f_p(m_3), f_p(m_1)) = (f_p(m_3), f_p(m_2)) = 1$. Generalizando tal construção, tomamos

$$m_k = pf_p(m_1)f_p(m_2)\cdots f_p(m_{k-1}),$$

e com isso $(f_p(m_k), f_p(m_i)) = 1$, para todo $1 \leq i < k$, o que finaliza o problema.

Problema 5 (Turquia EGMO TST 2017) *Encontre todos os pares (p, q) de números primos, tais que*

$$\frac{(2p^2-1)^q + 1}{p+q} \quad e \quad \frac{(2q^2-1)^p + 1}{p+q}$$

são ambos inteiros.

Solução: Pelo que foi dado, queremos

$$(2p^2-1)^q \equiv -1 \pmod{p+q} \quad \text{e} \quad (2q^2-1)^p \equiv -1 \pmod{p+q}.$$

Como $q \equiv -p \pmod{p+q}$, a segunda congruência acima se torna $(2p^2-1)^p \equiv -1 \pmod{p+q}$. Elevando ao quadrado as duas congruências, obtemos

$$(2p^2-1)^{2q} \equiv 1 \pmod{p+q} \quad \text{e} \quad (2p^2-1)^{2p} \equiv 1 \pmod{p+q},$$

donde, $ord_{p+q}(2p^2-1)|2q$ e $ord_{p+q}(2p^2-1)|2p$, nos dando

$$ord_{p+q}(2p^2-1)|(2p,2q) = 2(p,q). \tag{1}$$

Aqui, dividimos o problema em alguns casos:

- Caso $p \neq q$ sejam primos ímpares: Então $(p,q) = 1$, e por (1) temos $ord_{p+q}(2p^2-1) = 1$ ou 2. Como não podemos ter $ord_{p+q}(2p^2-1) = 1$, pois caso contrário, teríamos $(2p^2-1) \equiv 1 \pmod{p+q}$, o que combinado com $(2p^2-1)^q \equiv -1 \pmod{p+q}$ implica em $p+q|2$, um absurdo. Assim, $ord_{p+q}(2p^2-1) = 2$ e como $q \equiv 1 \pmod 2$, pelo Corolário 2

  $$-1 \equiv (2p^2-1)^q \equiv 2p^2-1 \pmod{p+q} \quad \Rightarrow \quad p+q|2p^2$$

  e como $p+q$ é par, enquanto p é ímpar, teremos $(p+q)/2|p^2$, e assim $(p+q)/2 \in \{1,p,p^2\}$. É imediato que não podemos ter $(p+q)/2 = 1$ ou p. Para $(p+q)/2 = p^2$, teremos $q = 2p^2 - p = p(2p-1)$, contradizendo o fato de q ser primo. Portanto, esse caso não nos dá soluções.
- Caso $p = q$: Observe que, o caso $p = q = 2$ não satisfaz as condições do problema. Assim, vamos agora supor $p = q$ ímpares. Neste caso, observe que sempre temos solução, pois $p+q = 2p$ e

  $$(2p^2-1)^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod{2p},$$

  portanto $((2p^2-1)^p+1)/(p+q) \in \mathbb{Z}$.
- Caso $p \neq q$, com um deles igual a 2: Como as condições são simétricas, podemos supor SPG que $p = 2$ e q é um primo ímpar. Com isso, temos

  $$49 \equiv (2\cdot 2^2-1)^2 \equiv (2q^2-1)^2 \equiv -1 \pmod{q+2} \quad \Rightarrow \quad q+2|50 \quad \Rightarrow \quad q = 3 \text{ ou } 23.$$

  Por outro lado, usando a segunda congruência

  $$7^q \equiv -1 \pmod{q+2}.$$

  Se $q = 3$, note que $7^3 \equiv 3 \pmod 5$, não nos dando solução. Caso tenhamos $q = 23$, não é difícil encontrar $7^{23} \equiv -7 \pmod{25}$, e concluímos que também não há solução nesse caso.

Portanto, as únicas soluções possíveis são (p,p), onde p é um número primo ímpar.

3.2 | Problemas Propostos

Ressaltamos aqui que, nem todos os problemas abaixo precisam que você invoque o poder da *ordem*, para serem resolvidos. :)

Problema 6 *Sejam* a *e* b *inteiros positivos, coprimos com* m, *tais que* $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ *e* $a^y \equiv b^y \pmod{m}$. *Mostre que*

$$a^{(x,y)} \equiv b^{(x,y)} \pmod{m}.$$

Problema 7 *Encontre o menor* n *inteiro positivo que satisfaz*

$$2^{2005} \mid 17^n - 1.$$

Problema 8 *Encontre todos os pares* (p, q) *de números primos tais que* $p^2 + 1 \mid 2003^q + 1$ *e* $q^2 + 1 \mid 2003^p + 1$.

Problema 9 *Prove que, se* p *é primo, então* $p^p - 1$ *tem um fator primo da forma* $kp + 1$.

Problema 10 (Bulgária 1996) *Encontre todos os pares* (p, q) *de números primos tais que* $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Problema 11 *Sejam* $a, n > 2$ *inteiros positivos tais que* $n \mid a^{n-1} - 1$ *e* n *não divide* $a^x - 1$, *para todo* $x < n - 1$, *onde* x *é divisor de* $n - 1$. *Mostre que* n *é primo.*

Problema 12 (Romênia 1996) *Encontre todos os pares de primos* (p, q) *para os quais a congruência*

$$\alpha^{3pq} \equiv \alpha \pmod{3pq},$$

é válida para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Problema 13 (EUA TST 2003) *Encontre todos os trios de primos* (p, q, r) *tais que* $p|q^r + 1$, $q|r^p + 1$ *e* $r|p^q + 1$.

Problema 14 (China 2009) *Encontre todos os pares de primos* p, q *tais que*

$$pq \mid 5^p + 5^q.$$

Referências

[1] T. Andreescu, Z. Feng, *101 Problems in Algebra*, Vol. 18, Australian Mathematics Trust, (2001) 139pp.

[2] T. Andreescu, D. Andrica, *Number Theory: Structures, Examples, and Problems*, Birkhäuser, Boston (2009) 404pp.

[3] F. B. Martinez, C. G. A. T. Moreira, N. Saldanha, E. Tengan, *Teoria dos Números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo munto inteiro*, **3ª Ed.** (Projeto Euclides),IMPA, Rio de Janeiro, (2013) 497pp.

[4] P. B. Bhattacharya, S. K. Jain, S. R. Nagpaul, *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994) 487pp.

[5] S. Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **(211)**, Springer Science & Business Media, (2005) 914pp.

[6] Art of Problem Solving - https://artofproblemsolving.com/