Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 12, outubro de 2017. 72-90

Médias, Desigualdades e Problemas de Otimização

André Costa e Rodrigo Gondim

Resumo. Alguns dos problemas mais interessantes do dia a dia envolvem o conceito de otimização. Maximizar vantagens e minimizar prejuízos é de grande interesse prático. A principal ferramenta para a resolução da maioria dos problemas de otimização é o Cálculo Diferencial, fazendo com que a maioria desses problemas fiquem inacessíveis para alunos do ensino fundamental ou médio.
Nesse artigo, apresentamos as principais médias e o teorema da desigualdade das médias. Com essa ferramenta, aplicamos a uma série de problemas de otimização, sem a utilização do Cálculo Diferencial, tornando-os mais acessíveis.

O conceito de média

Definição 14. *Considere uma sequência finita de números reais* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $*$ *uma operação entre os elementos da sequência. A média dos elementos da sequência com respeito à operação* $*$ *é um número real* M *com a propriedade de substituir todos os elementos da sequência no que diz respeito a operação* $*$, *isto é:*

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n = M * M * \cdots * M.$$

Observação 1. *Observamos que o conceito geral de média descrito acima é abstrato, portanto, devemos especializá-lo para encontrar importantes tipos usuais de média. Nos casos que trabalharemos a média é de fato um número intermediário, isto é:*

$$\min\{x_i\} \leq M \leq \max\{x_i\}.$$

Claramente, se os números são iguais, a média é igual a estes.

Observação 2. *Note ainda que a maioria das médias nas quais estaremos interessados são relativas a operações comutativas como soma, multiplicação etc. Nestes casos, a ordem dos x_i não é relevante.*

Média aritmética

Definição 15. *A* **média aritmética** *(simples) é a média com respeito a operação de adição. Ou seja, pela definição geral de média acima, teríamos A no lugar de M e $+$ tomando lugar da operação genérica $*$. Logo a média aritmética simples de uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o número A tal que*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = A + A + \cdots + A = n \cdot A.$$

logo concluímos que:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Observamos que a terminologia média aritmética está relacionada à progressão aritmética (PA), onde cada termo (exceto pelos extremos) é média aritmética dos termos equidistantes. Note que podemos tomar essa afirmação acima como definição de uma PA,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = r \text{ (constante: \textbf{razão da PA}.)}$$

A possibilidade de ocorrer vários a_i iguais inspira a definição de uma média aritmética onde as grandezas possam ter pesos a elas associados, pesos estes que de alguma forma deem uma ideia de multiplicidade. Então, se agruparmos os termos iguais e multiplicarmos pela frequência de cada um deles teremos a conhecida média aritmética ponderada.

Definição 16. *A* **média aritmética ponderada** *é a média com respeito à operação de adição com pesos. Desta forma, a média ponderada de uma sequência de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ com pesos $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é o número P tal que*

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = Pp_1 + Pp_2 + \cdots + Pp_n$$

logo concluímos que:

$$P = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Aplicação 1. *A soma dos n primeiros termos de uma PA é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

SOLUÇÃO. Observe que a soma dos termos equidistantes dos extremos é constante, ou seja, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$ (de fato, basta observar que $a_1 + a_n = a_1 + r - r + a_n = a_2 + a_{n-1}$ e de modo análogo para as demais igualdades).

Logo, para somar os n primeiros termos de uma PA podemos agrupá-los em $(n/2)$ pares cuja soma é $a_1 + a_n$. (Pense um pouco no caso de n ser ímpar). □

Execícios 1.

1. *Suponha que a média aritmética de n números seja M, qual será a média dos números obtidos multiplicando cada número da sequência original por a e somando b, isto é, $y_i = ax_i + b$*

2. *(UFPE-03) Em seis provas, onde as notas atribuídas variam de 0 a 100, um estudante obteve média 83. Se a menor nota for desprezada a sua média sobe para 87. Qual foi a menor nota obtida nas 6 provas?*

3. *Suponha que uma turma de* 20 *pessoas tirou média* 7 *numa determinada prova. Qual será a média das* 19 *pessoas restantes se retirarmos da turma o único aluno que tirou nota* 10.

4. *(UFPE-99) Em um exame a média aritmética de todos os alunos foi* 5,2, *enquanto a média dos aprovados foi* 5,9 *e a dos reprovados foi* 4,3. *Descoberto um erro na elaboração de uma das questões, a banca resolveu adicionar* 1,0 *à nota de cada um dos alunos. Observou-se então que a média dos aprovados subiu para* 6,5 *e a dos reprovados subiu para* 4,8. *Sabendo-se que o número de alunos que participaram do exame é inferior a* 300, *calcule o número de alunos que inicialmente estavam reprovados, mas que foram aprovados depois do acréscimo às notas.*

Média geométrica

Definição 17. *A* **média geométrica** *é a média com respeito à operação de multiplicação, desta forma, de modo análogo a média aritmética, a* *média geométrica de uma sequência de números reais positivos* (x_1, x_2, $\ldots$, x_n) *é o número* G *tal que*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = G \cdot G \cdot \cdots \cdot G = G^n.$$

logo concluímos que:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

Observação 3. *A terminologia média geométrica está relacionada a progressão geométrica (PG), onde o módulo de cada termo é média geométrica dos termos equidistantes.*

Aplicação 2. *O módulo do produto dos* n *primeiros termos de uma PG é:*

$$|P_n| = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

Aplicação 3. *A altura de um triângulo retângulo em relação à hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.*

Execícios 2.

1. *Considere uma PG tal que* $a_8 = 1$ *e* $a_{16} = 625$ *determine* a_{10}.

2. *Justifique a fórmula do produto dos termos de uma PG e determine o produtos dos* 40 *termos de uma PG cujo primeiro e o quadragésimo termo são* 1 *e* 2 *respectivamente.*

3. *Considere que a taxa de rendimento de um fundo de renda fixa tenham sido* 10% *no primeiro quadrimestre,* 20% *no segundo e* 15% *no terceiro. Determine a taxa média de rendimentos anuais.*

4. *Suponha que a média geométrica de* n *números seja* M, *qual será a média dos números obtidos elevando cada número da sequência original por* a *e multiplicando por* b, *onde* $a > 0$ *e* $b > 0$, *isto é,* $y_i = bx_i^a$.

Média harmônica

Definição 18. *A* **média harmônica** *é a média com respeito a operação de soma dos inversos, desta forma, usando a ideia geral de média da definição 1, a média harmônica de uma sequência de números reais não nulos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é o número* H *tal que*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \cdots + \frac{1}{H} = \frac{n}{H}$$

logo concluímos que:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Observação 4. *A terminologia média harmônica está relacionada com a noção de progressão harmônica, uma progressão cujos inversos multiplicativos dos termos estão em PA. Cada termo de uma progressão harmônica é a média harmônica dos termos equidistantes.*

Observação 5. *Alguns dos problemas práticos mais interessantes sobre médias estão relacionados à média harmônica. É importante que saibamos reconhecer esses problemas. A seguir colocamos alguns exemplos onde surge a ideia da média harmônica. Nesses problemas o que geralmente ocorre é o fornecimento de taxas de variação (velocidades, períodos, vazões etc) e se pede algo relativo a taxa de variação média.*

Aplicação 4. *Um automóvel vai da cidade* A *para* B *com uma velocidade média de* v_1 *e volta, pelo mesmo caminho, de* B *para* A *com uma velocidade média de* v_2*. A velocidade média em todo percurso será a média harmônica de* v_1 *e* v_2*.*

Solução. De fato, sendo d a distância entre A e B. Seja $t_1 = \frac{d}{v_1}$ e $t_2 = \frac{d}{v_2}$. Se v é a velocidade média em todo percurso, então $v = \frac{2d}{t_1+t_2}$, donde

$$\frac{2d}{v} = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2} \quad \text{e portanto} \quad \frac{2}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}.$$

Note que a argumentação não se altera se tivermos n deslocamentos iguais com velocidades médias em cada parte $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ou seja, se v é a velocidade média em todo percurso, temos,

$$\frac{n}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}. \quad \square$$

Aplicação 5. *Se um tanque pode ser enchido individualmente por uma torneira* 1 *em um tempo* T_1*, por uma torneira* 2 *em um tempo* T_2*, assim sucessivamente até uma torneira* n *em um tempo* T_n*, então se pusermos todas as torneiras simultaneamente para encher o tanque, o inverso do tempo que levarão é a soma dos inversos dos tempos delas separadas. Note que cada uma das torneiras pode ser substituída por torneiras de mesma vazão, de modo que o tempo necessário para que esta torneira substituta encha o tanque é a média harmônica dos tempos individuais.*

Solução. O raciocínio empregado é semelhante ao do problema anterior. A razão $1/T_i$ corresponde a fração do tanque que é cheia em uma unidade de tempo pela torneira i, ou seja, a vazão da torneira i. Logo, se T for o tempo necessário para as torneiras juntas encherem todo tanque e $1/t$ a vazão de n torneiras idênticas encherem juntas o tanque, teremos:

$$\frac{n}{t} = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \cdots + \frac{1}{T_n}. \quad \square$$

Observe que esse tipo de problema pode ainda ter *vazamentos*, que são considerados como torneiras que "enchem" o tanque em tempo negativo. Além disso existem vários problemas análogos como, por exemplo, associação de pintores, de pedreiros, digitadores etc.

Execícios 3.

1. *Três torneiras ligadas sozinhas enchem um tanque em* $3\,\mathrm{h}$*,* $4\,\mathrm{h}$ *e* $6\,\mathrm{h}$ *respectivamente. Ligando as três torneiras simultaneamente, quanto tempo levarão para encher o tanque sabendo que há um vazamento capaz de esvaziar o tanque em* $12\,\mathrm{h}$*.*

2. *Prove que média geométrica entre dois termos é média geométrica entre as médias harmônica e aritmética desses dois termos.*

3. *(UPE) A empresa "Consultores Associados" firmou contrato com a "Roupagem S/A", para o planejamento de Marketing na cidade do Recife. Os administradores Júnior, Daniela e Maria Eduarda, foram convocados para realizarem o trabalho. Após várias reuniões foi constatado que, Júnior e Daniela, trabalhando juntos, fariam o planejamento em 15 dias. Júnior e Maria Eduarda, trabalhando*

juntos, gastariam 20 dias para realizar o trabalho. Daniela e Maria Eduarda, trabalhando juntas, precisariam de 12 dias para concluir a tarefa. Se Maria Eduarda trabalhasse sozinha, em quantos dias estaria concluído o planejamento?

4. *(UFPE-99) Suponha que os pneus novos de um automóvel duram* 30.000 km *quando usados nas rodas dianteiras e* 50.000 km *quando usados nas rodas traseiras. Calcule o número máximo de quilômetros que um carro pode rodar começando com 4 pneus novos e fazendo um rodízio adequado entre eles.*

Média quadrática

Definição 19. *A* **média quadrática** *é a média com respeito a operação de soma dos quadrados, desta forma, a média quadrática de uma sequência de números reais não nulos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *é o número* Q *tal que*

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = Q^2 + Q^2 + \cdots + Q^2 = n\,Q^2$$

logo concluímos que:

$$Q = \sqrt{\frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}{n}}.$$

Aplicação 6. *A maneira estatisticamente mais natural de medir o quanto uma sequência de números se dispersou da média aritmética é através do desvio padrão. O desvio padrão (que denotamos por* σ*) é a média quadrática dos desvios individuais. Ou seja, dados* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e denotando por* $\bar{x}$ *a média aritmética dos* x_i*'s temos*

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Prove, como exercício, que $\bar{x}$ *é justamente o valor que minimiza o desvio padrão.*

Desigualdades das médias

Teorema 15. ***(Desigualdades das médias)*** *Sejam* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *números reais positivos em ordem crescente e denotemos por* H, G, A, Q

respectivamente as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática desses números, então temos as seguintes desigualdades:

$$x_1 \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq x_n.$$

Além disso, a igualdade em qualquer ponto das desigualdades acima é possível se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *e, nestas condições, teremos necessariamente a igualdade em todos os pontos.*

Demonstração: Restringiremos a demonstração para o caso $n = 3$. Começaremos com a desigualdade $A \geq G$. Várias demonstração desse resultado para $n = 2$ podem ser vistas em [2]. Para o caso geral recomendamos [1], [3] e [4].

Aqui faremos a demonstração para o caso $n = 4$ (que pode ser facilmente generalizado para o caso $n = 2^k$, com k natural) e em seguida mostraremos que sendo válido para $n = 4$, temos a desigualdade para $n = 3$ (na verdade o mesmo argumento pode ser utilizado para provar que sendo a desigualdade válida para n, ela também é válida para $n-1$).

Começaremos provando $A \geq G$ vale para $n = 2$. De fato, tomando x, e y reais positivos, temos,

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, donde $x = y$.

O resultado da desigualdade $A \geq G$ para o caso $n = 4$ é obtido imediatamente aplicando o caso $n = 2$ duas vezes como podemos observar abaixo. Considerando x, y, z e t reais positivos, temos que:

$$\frac{x+y+z+t}{4} = \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{z+t}{2}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z+t}{2}\right)} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt{xy}\,\sqrt{zt}} = \sqrt{\sqrt{xyzt}} = \sqrt[4]{xyzt}\,.$$

Na primeira desigualdade acima a igualdade só ocorre se $\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{z+t}{2}\right)$, ou seja $x + y = z + t$. Na segunda desigualdade, a igualdade ocorre se, $x = y$ e $z = t$. Juntando as duas condições, a igualdade $A = G$ para o caso $n = 4$ só ocorre se $x = y = z = t$.

Provaremos agora o caso $n = 3$ supondo válido o caso $n = 4$. Considere x, y e z reais positivos, e denote

$$A = \frac{x+y+z}{3}.$$

Logo, temos que:

$$\frac{x+y+z+A}{4} = A = \frac{x+y+z}{3}.$$

Portanto,

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{x+y+z+A}{4} \geq \sqrt[4]{xyzA}$$

com a igualdade ocorrendo apenas se $x = y = z$. Elevando ambos lados da desigualdade a 4ª potência, temos:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^4 = A^4 \geq xyzA.$$

Como $A > 0$, podemos cancelá-lo de ambos lados, obtendo a desigualdade desejada

$$A^3 \geq xyz \;\Leftrightarrow\; \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Para provar que $H \leq G$, basta calcular as médias aritmética e geométrica entre $(1/x)$, $(1/y)$ e $(1/z)$, e aplicar a desigualdade, $A \geq G$.

$$A \geq G \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \Leftrightarrow H \leq G.$$

Para a última desigualdade considere a expressão,

$$(x-A)^2 + (y-A)^2 + (z-A)^2 \geq 0,$$

que é válida para quaisquer reais x, y e z, onde a igualdade só ocorre quando $x = A$, $y = A$ e $z = A$. Logo,

$$(x-A)^2+(y-A)^2+(z-A)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)A+3A^2 \geq 0.$$

Como $(x+y+z) = 3A$ temos: $x^2+y^2+z^2 \geq 3A^2$. Donde concluímos: $Q \geq A$.

Note que os argumentos utilizados para mostrar essa duas últimas desigualdades podem ser utilizados para o caso geral com $n \geq 2$ elementos. $\square$

Nosso objetivo agora é, utilizando as desigualdades das médias, resolvermos uma série de problemas de otimização, os conhecidos "problemas de máximo e mínimo". Iniciamos como alguns problemas cuja otimização é obtida de modo imediato das desigualdades.

Aplicação 7. *Qual o maior valor possível para $S = \operatorname{sen} x + \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$?*

Solução. Aplicando a desigualdade $A \leq Q$ temos,

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} \leq \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo o valor máximo para S é $\sqrt{2}$ e ocorre quando $\operatorname{sen} x = \cos x = \sqrt{2}/2$, ou seja, quando $x = \pi/4$. $\square$

Aplicação 8. *Suponha que $x^2 + y^2 = a$, onde $a > 0$, determine reais positivos x e y tais que, $S = x + y$ seja máximo.*

Solução. Aplicando a desigualdade $A \leq Q$. Temos,

$$\frac{S}{2} = \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Ou seja S será máximo quando a igualdade ocorrer, e isso só acontece quando $x = y = \sqrt{a/2}$. $\square$

Aplicação 9. *Sejam a, b e c números reais positivos e suponha que $ax^2 + by^2 = c$, determine x e y reais positivos, tais que $P = xy$ seja máximo.*

Solução. Utilizando a desigualdade $G \leq A$, temos,

$$P\sqrt{ab} = \sqrt{ax^2\, by^2} \leq \frac{ax^2 + by^2}{2} = \frac{c}{2}.$$

Logo, o valor máximo para P ocorre quando $ax^2 = by^2 = \frac{c}{2}$, ou seja quando $x = \sqrt{\frac{c}{2a}}$ e $y = \sqrt{\frac{c}{2b}}$. $\square$

O resultado seguinte nos fornece mais uma desigualdade para o caso $n = 3$. Em seguida utilizaremos essa desigualdade para provar alguns resultados interessantes sobre o paralelepípedo retângulo.

Aplicação 10. *Dados x, y e z reais positivos, valem as desigualdades:*

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}.$$

Solução. Observe que para quaisquer x, y e z reais positivos, temos que $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $x=y=z$. Dessa desigualdade, temos que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \ \ (*)$, com a igualdade ocorrendo apenas quando $x=y=z$.

Para a primeira desigualdade fazemos:

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \geq \frac{xy+yz+zx}{3} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{9}\right) \geq \left(\frac{3xy+3yz+3zx}{9}\right) \Leftrightarrow \\
x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \quad (\text{verdade por } *).
\end{aligned}$$

Note que a igualdade só ocorre quando $x=y=z$.

Para a segunda desigualdade, aplicamos $A \geq G$, escolhendo adequadamente os termos das médias:

$$\begin{aligned}
(A \geq G \text{ aplicada em } xy, yz, zx) \qquad & \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{xy\,yz\,zx} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{x^2\,y^2\,z^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{xy+yz+zx}{3} \geq (\sqrt[3]{x\,y\,z})^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \geq \sqrt[3]{x\,y\,z}.
\end{aligned}$$

Note, novamente, que a igualdade só ocorre quando $xy=yz=zx \Rightarrow x=y=z$. $\square$

Aplicação 11. *Quais as dimensões de um paralelepípedo retângulo, cuja diagonal mede d, para que sua área total $\mathcal{A}$ seja máxima ?*

Solução. Sabendo que $\mathcal{A} = 2xy + 2yz + 2zx$ e $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, e utilizando o demonstrado acima, temos,

$$\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{6}} = \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Logo $\mathcal{A}$ será máxima quando ocorrer a igualdade $xy = yz = zx \Rightarrow x = y = z$, ou seja, quando o paralelepípedo for um cubo, com $a = x = y = z = d/\sqrt{3}$. □

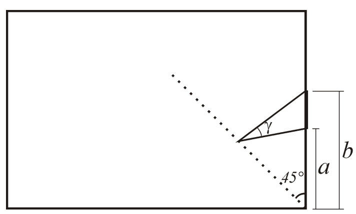
Observação 6. *O problema acima é um caso particular da relação:*

$$\sqrt[3]{\mathcal{V}} \leq \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{6}} \leq \frac{x + y + z}{3} \leq \frac{d}{\sqrt{3}}$$

onde d, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{V}$ são a diagonal, a área e o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z, com a igualdade ocorrendo quando o paralelepípedo for um cubo.

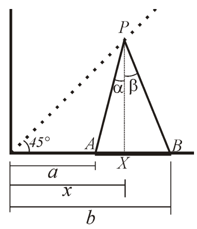
Nos problemas seguintes, após equacionar nosso problema em função de alguma variável x, aplicaremos as desigualdades das médias sempre procurando uma cota superior (caso desejemos maximizar) ou uma cota inferior (caso desejemos minimizar) que não dependa de x. E nesse ponto forçamos a igualdade ocorrer igualando os termos da média, descobrindo assim o valor de x que otimiza o problema.

Aplicação 12. *Dentro de um campo de futebol, um jogador corre em direção à bandeirinha de escanteio do time adversário ao longo de uma reta que forma 45° com a linha de fundo do campo (ver figura).*



Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da lateral do campo. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo (γ) máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Solução. Considerando a nomenclatura adotada na figura abaixo, e considerando $a \leq x \leq b$, o ângulo de visão do jogador será particionado fazendo $\gamma = \alpha + \beta$. (Verifique, como exercício, que a expressão para $\operatorname{tg}\gamma$ continua válida para os casos em que $x < a$ e $x > b$.) Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, maximizaremos $\operatorname{tg}\gamma$.



Calculando a $\operatorname{tg}\gamma$ temos,

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta}.$$

Note que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AX}}{\overline{PX}} = \frac{x-a}{x}$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{XB}}{\overline{PX}} = \frac{b-x}{x}$. Logo,

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{x-a}{x} + \frac{b-x}{x}}{1 - \frac{(x-a)}{x}\frac{(b-x)}{x}} = \frac{b-a}{x - \frac{(x-a)(b-x)}{x}}.$$

Para a $\operatorname{tg}\gamma$ ser máximo, basta minimizarmos o denominador, D.

$$D = x - \frac{(x-a)(b-x)}{x} = 2x + \frac{ab}{x} - (a+b)$$

Para tanto basta minimizar a parte que depende de x, e para isso utilizaremos a desigualdade $A \geq G$ com os termos $2x$ e (ab/x).

$$A = \frac{2x + \frac{ab}{x}}{2} \geq \sqrt{2x + \frac{ab}{x}} = \sqrt{2\,a\,b} = G.$$

Logo, o valor mínimo para A ocorre quando $2x = \dfrac{ab}{x} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{ab}{2}}$. $\square$

Aplicação 13. *Numa folha de cartolina quadrada de lados $2a$ retiramos quadrados de lado $x < a$ de cada vértice, dobrando em seguida as abas restantes para formar uma caixa cuja base é um quadrado de lado $2a-2x$ e altura x. Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?*

SOLUÇÃO. O volume da caixa pode ser calculado fazendo $\mathcal{V} = (2a-2x)^2x$. Comforme comentado anteriormente, aplicamos a desigualdade das médias escolhendo adequadamente os termos de modo a obter uma cota máxima independente de x. Para esse problema aplicamos a desigualdade $G \leq A$ para os valores $(2a-2x)$, $(2a-2x)$ e $4x$,

$$\sqrt[3]{4\mathcal{V}} = \sqrt[3]{(2a-2x)(2a-2x)(4x)} \leq \frac{(2a-2x)+(2a-2x)+(4x)}{3} = \frac{4a}{3}.$$

Logo, pela desigualdade acima, o valor máximo para o volume da caixa ocorre quando $\sqrt[3]{4\mathcal{V}}$ for igual a $\frac{4a}{3}$, e isso acontece quando $2a-2x = 4x$. Portanto, o volume máximo é $V = \frac{16a^3}{27}$ e é obtido fazendo $x = a/3$. □

Aplicação 14. *Um triângulo isósceles tem seu vértice na origem, sua base é paralela ao eixo x acima dele e os vértices da base estão na parábola $9y = 27-x^2$. Calcule a área do maior triângulo nessas condições.*

SOLUÇÃO. O triângulo descrito acima tem vértices $O(0,0)$, $B(x,y)$ e $C(-x,y)$, com $x > 0$ e $y > 0$ obedecendo a relação $9y = 27 - x^2 \Leftrightarrow 2y + \frac{2x^2}{9} = 6$ $(*)$. Note que a área de OBC pode ser calculada fazendo $\mathcal{A} = \dfrac{2x\,y}{2} = xy$. Para maximizar a área utilizaremos a desigualdade $G \leq A$, escolhendo os termos $\frac{2x^2}{9}$, y e y. Note que obtemos,

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}\mathcal{A}^2} = \sqrt[3]{\frac{2x^2}{9} \cdot y \cdot y} \leq \frac{\frac{2x^2}{9}+y+y}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Note que na penúltima igualdade aplicamos $(*)$. Para que tenhamos o valor máximo para $\mathcal{A}$ fazemos $\frac{2x^2}{9} = y$ e como a média desses termos é constante, temos que $\frac{2x^2}{9} = y = 2$, e portanto $x = 3$ e a área máxima igual a $\mathcal{A} = 3 \cdot 2 = 6$. □

Aplicação 15. *Qual deve ser o formato de uma lata cilíndrica de volume $\mathcal{V}$ (cilindro circular reto) para minimizar o gasto de material para confeccioná-la?*

Solução. Sabemos que podemos calcular o volume da lata por $\mathcal{V} = \pi r^2 h$, onde r é o raio do círculo da base e h a altura da lata. Queremos minimizar a área total do cilindro, que podemos calcular fazendo, $\mathcal{A} = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Substituindo $h = \mathcal{V}/\pi r^2$ em $\mathcal{A}$, ficamos com

$$\mathcal{A} = \frac{2\mathcal{V}}{r} + 2\pi r^2. \qquad (\star)$$

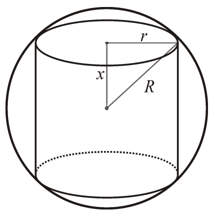
Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ para os números $(\mathcal{V}/r)$, $(\mathcal{V}/r)$ e $(2\pi r^2)$, ficamos com

$$\frac{\mathcal{A}}{3} = \frac{\frac{\mathcal{V}}{r} + \frac{\mathcal{V}}{r} + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}}{r} \cdot \frac{\mathcal{V}}{r} \cdot 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\mathcal{V}^2\pi}.$$

Logo nossa área será mínima ocorre quando $\frac{\mathcal{V}}{r} = 2\pi r^2$, ou seja, quando $\pi rh = 2\pi r^2$, donde $h = 2r$ (um cilindro equilátero). $\square$

O problema seguinte possui um nível de dificuldade um pouco maior do que os problemas anteriores, sendo o ajuste utilizado para obter a otimização mais refinado.

Aplicação 16. *Qual o volume máximo de um cilindro regular inscrito em uma esfera?*



Solução. Utilizando as denominações fornecidas pela figura acima, o volume do cilindro pode ser calculado fazendo $\mathcal{V} = \pi\, r^2\, 2x$. Aproveitando que $R^2 = x^2 + r^2$, podemos reescrever $\mathcal{V} = 2\pi\, x\, (R^2 - x^2) = 2\pi\, x\, (R - x)\, (R + x)$. O artifício agora consiste em utilizar a desigualdade $G \leq A$, com os termos de $\mathcal{V}$ colocados em G e fazer A constante. Para tanto, acrescentaremos α e β de modo a não alterar o produto em G, mas com o objetivo de tornar A independente de x. Procedemos da seguinte maneira:

$$\sqrt[3]{\mathcal{V}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}\,x\,\alpha(R-x)\,\beta(R+x)} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}}\,\sqrt[3]{x\,\alpha(R-x)\,\beta(R+x)} \leq$$
$$\sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}}\left(\frac{x\,+\,\alpha(R-x)\,+\,\beta(R+x)}{3}\right).$$

Onde a desigualdade acima temos um fator comum $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{\alpha\,\beta}}$ e a desigualdade $G \leq A$, calculadas nos termos x, $\alpha(R-x)$ e $\beta(R+x)$. Note que em A temos no numerador $x + \alpha(R-x) + \beta(R+x) = (1+\beta-\alpha)x+(\alpha+\beta)R$. Como queremos que A independa de x, fazemos $\alpha - \beta = 1$ $(*)$. Porém, sabemos que a igualdade das médias só ocorre (ou seja, o máximo para $\mathcal{V}$) quando $x = \alpha(R-x) = \beta(R+x)$. Portanto, temos $\alpha = \dfrac{x}{R-x}$ e $beta = \frac{x}{R+x}$. Substituindo em $(*)$ temos $\dfrac{x}{R-x} - \dfrac{x}{R+x} = 1$, isto é, $x\left(\dfrac{R+x-R+x}{R^2-x^2}\right) = 1$, ou ainda, $2x^2 = R^2 - x^2$. Donde concluímos: $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

Logo o volume máximo para o cilindro inscrito numa esfera de raio R será $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi\,R^3\,\sqrt{3}}{9}$. □

A seguir colocamos uma lista de problemas de otimização que podem ser resolvidos através da utilização adequada das desigualdades das médias. Como observado na resolução dos problemas acima, essa argumentação é bastante elegante, elementar e abrangente, resolvendo problemas que de outro modo exigiriam ferramentas matemáticas muito mais elaboradas.

Execícios 4.

1. *Dois problemas clássicos de otimização são os de determinar a* **área máxima** *de um retângulo, onde é dado o perímetro e o dual, onde se pede o* **perímetro mínimo** *de um retângulo com uma determinada área. Prove que em ambos casos a otimização é obtida quando o retângulo é um quadrado.*

2. *Prove que para todo ângulo agudo x temos:* $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x \geq 2$.

3. *Sejam* b *e* c *catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa* a. *Prove que* $b + c \leq a\sqrt{2}$.

4. *Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência. Sejam* x *e* y *as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Demonstre a desigualdade* $A \geq G$ *para* x *e* y *utilizando a situação descrita.*

5. *Considere duas circunferências de centros* O_1 *e* O_2 *e diâmetros* x *e* y *tangentes exteriormente e tangentes à uma mesma reta,* t, *nos pontos* T_1 *e* T_2. *Utilizando que* $\overline{O_1O_2} \geq \overline{T_1T_2}$ *demonstre a desigualdade* $A \geq G$.

6. *(ProfMat) Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40* m *de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40* m*) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.*

7. *No problema anterior, qual o menor comprimento de cerca necessário para que o fazendeiro cerque uma área de* $162\,\mathrm{m}^2$ *?*

8. *Determine os lados do retângulo cuja diagonal mede* $8\,\mathrm{cm}$ *sabendo que o retângulo tem perímetro máximo.*

9. *(UFPE-95) Qual o maior valor que a soma das coordenadas de um ponto, pertencente à circunferência* $x^2 + y^2 = 50$, *pode assumir?*

10. *Encontre as dimensões de retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, que esteja inscrito em uma elipse de equação:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

11. *Sabendo que a área total de um paralelepípedo reto retângulo mede* $24\ cm^2$ *determine o volume máximo do paralelepípedo.*

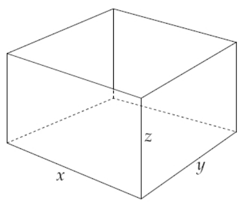
12. *Qual o volume máximo de um paralelepípedo retângulo de área total* $\mathcal{A}$ *?*

13. Prove que o triângulo equilátero é o que possui maior área entre todos os triângulos com um determinado perímetro fixo.

14. (ITA-01) Mostre que

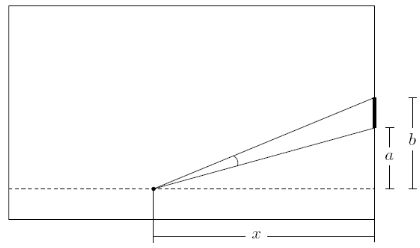
$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > \binom{8}{4}.$$

15. (ProfMat) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).



(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.
(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior do que ou igual a 48.
(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

16. (ProfMat) Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.



17. *Seja* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *uma sequência de números reais e* $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$*, uma sequência de números inteiros positivo, os pesos. Denotando* $\rho = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$*, mostre que:*

$$\frac{p_1.x_1 + p_2.x_2 + \cdots + p_n.x_n}{\rho} \geq \sqrt[\rho]{x_1^{p_1}.x_2^{p_2}.\cdots.x_n^{p_n}}.$$

Bibliografia

[1] Lima, E.L.; Carvalho, P.C.; Wagner, E.; Morgado, A.C.. *Matemática para o Ensino Médio, volume 2.* Sexta Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[2] Lima, E.L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Quinta Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] Muniz Neto, A.C. Desigualdades Elementares. *Revista Eureka!*, Rio de Janeiro, número 5, p. 34-49, ago.1999. (www.obm.org.br/opencms/revista eureka)

[4] Shhklarsky, D.O.; Chentzov, N.N.; Yaglom, I.M. *The USSR Olympiad Problem Book.* New York: Dover Publications, Inc., 1993.

[5] Simmons, G.F. *Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Autores: André Costa e Rodrigo Gondim
Endereço: Universidade Federal de Pernambuco,
Departamento de Matemática
e-mails: `prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br` e
`rodrigo.gondim.neves@gmail.com`