Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 12, outubro de 2017. 4-33

# Resolução comentada das provas da XXV OMEG

Rogerio de Queiroz Chaves, Ana Paula Chaves,
Francisco Bruno de Lima Holanda, Abiel Costa Macedo,
Rosane Gomes Pereira, Valdivino Vargas Junior.

Apresentamos, a seguir, uma resolução comentada das questões da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás de 2016, incluindo boa parte das ideias e argumentos dos próprios estudantes participantes. Para alguns dos problemas, são apresentados comentários adicionais que podem esclarecer e expandir o contexto do problema original, bem como apresentar possibilidades de generalização ou propor outros problemas relacionados. Sugerimos que, antes de simplesmente ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, apresentamos primeiro os problemas e, separadamente ao final, as soluções e comentários.

## Provas da XXV OMEG

### Nível 1

**Problema 1:** No primeiro turno de uma eleição, os candidatos **A** e **B** foram o primeiro e o segundo mais votados, respectivamente. Consequentemente, apenas estes dois concorreram no segundo turno e o candidato **B** ganhou. O mais curioso é que, entre esse candidato **B** e um terceiro candidato, **C**, que perdeu para **A** e **B** no primeiro turno, a maioria dos eleitores preferia **C**. Ou seja, o resultado dessas eleições desagradou a maioria dos eleitores. Considere que as preferências dos eleitores não mudaram de um turno para o outro, que todos votaram nos dois turnos e sempre no candidato de sua preferência, dentre os disponíveis.

Para que esta situação tenha ocorrido, qual é o número mínimo de eleitores nesta eleição?

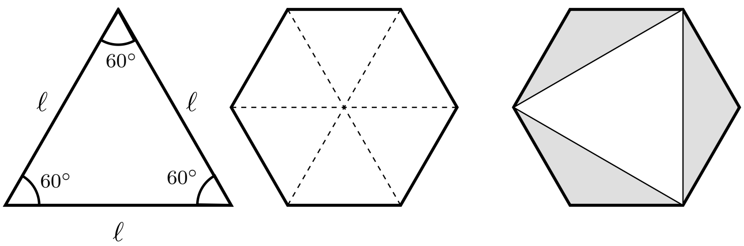
**Problema 2:** No calendário Gregoriano, utilizado oficialmente no Brasil, os anos que não são múltiplos de 4 possuem 365 dias cada. Para os anos múltiplos de 4 é acrescentado um dia, 29 de fevereiro, exceto nos anos múltiplos de 100 que não sejam múltiplos de 400.

Este ano o Sr. Domingos completou 56 anos de idade e seu aniversário foi justamente em um domingo.

**(a)** Em qual dia da semana nasceu o Sr. Domingos?

**(b)** Quantos dos aniversários dele, até agora, ocorreram em dia de domingo?

**Problema 3:** Um triângulo é dito equilátero quando tem os três lados com a mesma medida, como na figura (I). Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° e, unindo 6 desses triângulos, é possível formar um hexágono regular, como na figura (II). Um hexágono regular com $24\,\text{cm}^2$ de área foi dividido em quatro triângulos como indicado na figura (III).




(I) (II) (III)

**(a)** Qual é a área de cada um dos triângulos menores sombreados?

**(b)** Qual é a área do triângulo maior?

**Problema 4:**

**(a)** Quantos são os números naturais de três algarismos cuja soma dos algarismos é 9?

**(b)** Quantos são os números naturais de três algarismos cuja soma dos algarismos é 18?

**Problema 5:** Em uma certa ilha só há três tipos de pessoas: os **verdadeiros**, que sempre falam a verdade, os **falsos**, que sempre mentem e as **pessoas comuns**, que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Um viajante chega à ilha e encontra-se com três moradores, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo, que dizem as frases a seguir.

**Arnaldo:** "Eu sou uma pessoa comum."

**Bernaldo:** "Arnaldo está dizendo a verdade."

**Cernaldo:** "Eu não sou uma pessoa comum."

Se cada um desses três é de um tipo diferente, quem é o verdadeiro e quem é o falso?

**Problema 6:** Suponha que dispomos de uma caixa bem grande em que é realizado o experimento descrito a seguir. No primeiro minuto uma bola é colocada na caixa, no segundo minuto três bolas são acrescentadas, no terceiro minuto outras cinco bolas e assim, sucessivamente, a cada minuto acrescenta-se à caixa a próxima quantidade ímpar de bolas subsequente à quantidade acrescentada no minuto anterior. Em outras palavras, no minuto $n$ são acrescentadas $2n - 1$ bolas.

**(a)** Quantas bolas haverá na caixa ao final de uma hora do início do experimento?

**(b)** Quantas bolas são acrescentadas durante a segunda hora?

**(c)** Se as bolas adicionadas nos minutos ímpares forem vermelhas e as dos minutos pares forem verdes, quantas de cada cor haverá na caixa ao final da primeira hora?

## Nível 2

**Problema 1:** No primeiro turno de uma eleição, os candidatos **A** e **B** foram o primeiro e o segundo mais votados, respectivamente. Consequentemente, apenas estes dois concorreram no segundo turno e o candidato **B** ganhou. O mais curioso é que, entre esse candidato **B** e um terceiro candidato, **C**, que perdeu para **A** e **B** no primeiro turno, a maioria dos eleitores preferia **C**. Ou seja, o resultado dessas eleições desagradou a maioria dos eleitores. Considere que as preferências dos eleitores não mudaram de um turno para o outro, que todos votaram nos dois turnos e sempre no candidato de sua preferência, dentre os disponíveis.

Para que esta situação tenha ocorrido, qual é o número mínimo de eleitores nesta eleição?

**Problema 2:** No calendário Gregoriano, utilizado oficialmente no Brasil, os anos que não são múltiplos de 4 possuem 365 dias cada. Para os anos múltiplos de 4 é acrescentado um dia, 29 de fevereiro, exceto nos anos múltiplos de 100 que não sejam múltiplos de 400.

Este ano o Sr. Domingos completou 56 anos de idade e seu aniversário foi justamente em um domingo.

**(a)** Em qual dia da semana nasceu o Sr. Domingos?

**(b)** Quantos dos aniversários dele, até agora, ocorreram em dia de domingo?

**Problema 3:** Em uma certa ilha só há três tipos de pessoas: os verdadeiros, que sempre falam a verdade, os falsos, que sempre mentem e as pessoas comuns, que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Um viajante chega à ilha e encontra-se com três moradores, Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo, que dizem as frases a seguir.

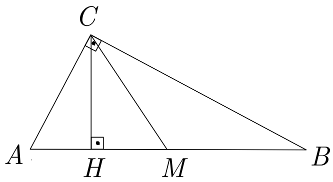
**Arnaldo:** "Eu sou uma pessoa comum."

**Bernaldo:** "Arnaldo está dizendo a verdade."

**Cernaldo:** "Eu não sou uma pessoa comum."

Se cada um desses três é de um tipo diferente, quem é o verdadeiro e quem é o falso?

**Problema 4:** Em um triângulo retângulo $ABC$, com ângulo reto em $C$ e sendo $M$ o ponto médio de $AB$, a mediana $CM$ e a altura $CH$, dividem o ângulo $A\widehat{C}B$ em três ângulos de mesma medida.




**(a)** Quanto da área do triângulo $ABC$ corresponde à área do triângulo $CMH$?

**(b)** Qual é a medida do ângulo $A\widehat{B}C$?

**Problema 5:** Sejam $a$ e $b$ números inteiros tais que $a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 2b = 0$.

**(a)** Mostre que $a + b$ é par.

**(b)** Mostre que $a$ é par.

**(c)** Dê uma forma geral para $a$ e $b$ (por exemplo, os números ímpares múltiplos de 3 são os números da forma $6k + 3$, com $k$ inteiro).

**Problema 6:** Em um tabuleiro $4 \times 4$ devem ser distribuídos os números de 1 a 16, sem repetição, de modo que as somas dos números em cada uma das quatro linhas, quatro colunas e duas diagonais forme, em alguma ordem, um conjunto de 10 números consecutivos. Alguns números já foram distribuídos. Determine a posição dos demais.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 7 | |
| 6 | | 3 | |
| 11 | 12 | 9 | |
| 10 | | | |

## Nível 3

**Problema 1:** No primeiro turno de uma eleição, os candidatos **A** e **B** foram o primeiro e o segundo mais votados, respectivamente. Consequentemente, apenas estes dois concorreram no segundo turno e o candidato **B** ganhou. O mais curioso é que, entre esse candidato **B** e um terceiro candidato, **C**, que perdeu para **A** e **B** no primeiro turno, a maioria dos eleitores preferia **C**. Ou seja, o resultado dessas eleições desagradou a maioria dos eleitores. Considere que as preferências dos eleitores não mudaram de um turno para o outro, que todos votaram nos dois turnos e sempre no candidato de sua preferência, dentre os disponíveis.

Para que esta situação tenha ocorrido, qual é o número mínimo de eleitores nesta eleição?

**Problema 2:** Levando-se em conta as inclusões dos conjuntos numéricos usuais, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente), determine qual é o conjunto mais interior a que pertence o número

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}.$$

**Problema 3:** O triângulo de números a seguir é formado pela sequência dos números naturais ímpares, em ordem crescente, de maneira que o primeiro, 1, fica na primeira linha, os dois seguintes, 3 e 5, na segunda linha, os três subsequentes, 7, 9 e 11, na terceira linha e assim, sucessivamente, com $n$ números na $n$-ésima linha.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & & 1 \\
 & & & & 3 & 5 \\
 & & & 7 & 9 & 11 \\
 & & 13 & 15 & 17 & 19 \\
 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\
31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

**(a)** Calcule a soma dos elementos da vigésima linha.

**(b)** Obtenha a soma total dos elementos das primeiras vinte linhas do triângulo.

**(c)** Mostre como qualquer cubo inteiro, $n^3$, pode ser escrito como uma diferença entre dois quadrados inteiros.

**Problema 4:** Um cone circular é dito equilátero se sua interseção com qualquer plano que contenha seu eixo for um triângulo equilátero. Considere, então, um cone equilátero com 3 esferas em seu interior de tal modo que cada uma delas é tangente à superfície lateral do cone ao longo de um círculo, a maior é tangente à base do cone, e a esfera do meio tangente às outras duas. Se o raio da menor das esferas mede 1 m, qual é o volume da parte interior do cone que fica fora das esferas?

**Problema 5:** Considere duas urnas, a primeira contendo seis bolas verdes e uma vermelha e a segunda contendo quatro bolas verdes. Cinco bolas são retiradas, ao acaso, da primeira urna, e colocadas na segunda. Depois de misturadas, duas bolas são sorteadas da segunda urna e colocadas na primeira.

Calcule a probabilidade da bola vermelha estar na primeira urna após essas operações.

**Problema 6:**

**(a)** Mostre que para quaisquer números reais $x$ e $y$, com módulos diferentes, o triângulo cujos lados medem

$$\frac{|x-y|}{2}, \quad \frac{|x+y|}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

é retângulo.

**(b)** Para três números reais positivos, $a$, $b$ e $c$, tais que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 1008\sqrt{2}$, determine o menor valor possível de

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\,.$$

## Nível Universitário

**Problema 1:** Considere a sequência definida por

$$a_0 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2}\,,$$

para todo número natural $n \geq 0$. Determine, se existir,

**(a)** $\lim_{n\to\infty} a_n$

**(b)** $\lim_{n\to\infty} na_n$

**Problema 2:** Se $A$ e $B$ são matrizes $n \times n$ tais que $A + B = AB$. Prove que $A$ e $B$ comutam, ou seja, $AB = BA$.

**Problema 3:** Sejam $a_0, a_1, ..., a_n$, números reais tais que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0\,.$$

Prove que o polinômio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tem pelo menos uma raiz real.

**Problema 4:** Segundo o Princípio de Cavalieri, dadas duas regiões limitadas no espaço tridimensional, que aqui denominaremos sólidos, e uma reta, se as interseções desses sólidos com qualquer plano perpendicular a essa reta determinarem sempre seções de mesma área nos dois sólidos, então os volumes dos dois sólidos são iguais. Resolva os problemas a seguir com base apenas no Princípio de Cavalieri e **sem utilizar integrais**.

**(a)** Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, o segmento de paraboloide de revolução tal que $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Calcule seu volume, por comparação com o prisma triangular tal que $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$ e $y \leq z \leq 1$.

**(b)** Utilize o sólido tal que $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq a$ e $0 \leq z \leq y^2$, considerando seções por planos verticais do tipo $y$ =constante, para calcular a área sob a parábola do plano $zy$ tal que $z = y^2$, na região entre $y = 0$ e $y = a$.

**(c)** De modo semelhante, Utilize o sólido tal que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq a$ e $0 \leq z \leq y^3$, para calcular a área sob a cúbica do plano $zy$ tal que $z = y^3$, na região entre $y = 0$ e $y = a$. Note que o Princípio de Cavalieri pode ter que ser aplicado duas vezes, usando o sólido delimitado por $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq a$ e $0 \leq z \leq y^3$.

**Problema 5:** Dois jogadores, **A** e **B**, apostam nos resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda. Em cada lançamento, se a moeda der cara, **A** ganha um real de **B**, se a moeda der coroa A paga um real para **B**. Eles continuam a fazer isso até um deles ficar sem dinheiro. Cada uma das jogadas de moeda é tida como um evento independente e cada jogada tem probabilidade $p$ de dar cara.

**(a)** Qual é a probabilidade de que **A** termine ficando com todo o dinheiro se ele começar com $a$ reais e **B** começar com $b$ reais?

**(b)** Considere a situação hipotética em que **A** possui uma capacidade infinita de pagar um real sempre que a moeda resultar em coroa e **B** inicia com 20 reais, de forma que o jogo pode continuar indefinidamente, enquanto **B** não ficar sem dinheiro. Se a moeda for equilibrada ($p = 1/2$), calcule a probabilidade de o jogo terminar em algum momento, ou seja, **A** ficar com todo o dinheiro.

**Problema 6:** Suponha que você esteja planejando uma viagem ao planeta Saturno e quer pousar sua nave em uma latitude que lhe dê a melhor vista possível dos anéis. A largura aparente dos anéis, quando vistos de um ponto na superfície está relacionada ao ângulo visual, formado pelas retas que unem o olho do observador aos pontos extremos que delimitam a largura do sistema de anéis. O objetivo, portanto, é determinar uma latitude que maximize esse ângulo sob o qual a largura dos anéis é vista, dentre os pontos da superfície do planeta.

Considere que o planeta seja esférico e os anéis formam uma coroa circular com largura $a$, concêntrica com o planeta, no plano do equador, sendo $R$ o raio do planeta e $R+b$ o raio interno da coroa. A latitude de um ponto é definida como o ângulo entre a reta que une esse ponto ao centro do planeta e o plano equatorial, que contém os anéis.

Determine, em termos de $a$, $b$ e $R$, essa latitude que maximiza o ângulo visual em questão.

## Resolução comentada

### Nível 1

**1.** *No primeiro turno de uma eleição, os candidatos...*

Ver resolução do **problema 1** do **nível 2**.

**2.** *No calendário Gregoriano, utilizado oficialmente no Brasil, os anos que não são múltiplos de 4 possuem 365 dias cada...* (baseado nas soluções apresentadas por *Leandro Vaz Ramos de Andrade* e *Gustavo Henrique de Oliveira Carmo Borges*)

**(a)** O único ano múltiplo de 100 na vida do Sr. Domingos foi 2000, mas esse também é múltiplo de 400, logo foi bissexto. Assim, levando-se em conta que $56 = 14 \cdot 4$, em 56 anos houve exatamente 14 ciclos de 4 anos, em que um deles é bissexto e os outros 3 são anos de 365 dias. Consequentemente, o número de dias decorridos desde o nascimento, $14(366 + 3 \cdot 365)$ é um múltiplo de 7, ou seja, um número inteiro de semanas e o nascimento ocorreu no mesmo dia que o aniversário de 56 anos, ou seja, em um domingo.

**(b)** Para entender como o dia da semana da data do aniversário muda de um ano para outro, é importante notar que $365 = 52 \cdot 7 + 1$. Assim, a data do aniversário avança um dia na semana, em anos não bissextos e dois dias, se houver um dia 29 de fevereiro entre elas. Uma consequência disso é que a cada 7 ciclos de 4 anos tem-se exatamente 4 aniversários no domingo, lembrando que um aniversário acontece num dia de domingo quando o número de dias *após* o nascimento até o aniversário é múltiplo de 7. Por exemplo,

$$\overbrace{\underbrace{3 \cdot 365 + 366}_{\text{ciclo}} + 2 \cdot 365}^{1^{\underline{o}}\text{ aniv. no domingo}} + \overbrace{365 \underset{\cdots}{+} 366 + 3 \cdot 365 + 366 + 3 \cdot 365 + 366 + 365}^{2^{\underline{o}}\text{ aniv. no domingo}}$$

$$+ \overbrace{2 \cdot 365 + 366 + 3 \cdot 365}^{3^{\underline{o}}\text{ aniv. no domingo}} + \overbrace{366 + 3 \cdot 365 + 366}^{4^{\underline{o}}\text{ aniv. no domingo}}.$$

E, como o aniversário de 56 anos envolve um número exato de ciclos completos, e múltiplo de 7, não importa onde a contagem dos ciclos se inicia, em relação à data do nascimento. Portanto, para o Sr. Domingos, ocorreram exatamente 8 aniversários em dia de domingo, contando com o deste ano.

Inspirado neste problema, tente resolver o desafio a seguir.

**Problema proposto:** No calendário Gregoriano, qual é o número máximo de anos consecutivos que uma pessoa pode ficar sem fazer aniversário no domingo? E o mínimo?

**3.** *Um triângulo é dito equilátero quando tem os três lados com a mesma medida...* (baseado nas soluções apresentadas por *Eduardo Abdalla Teixeira Messias*, *Isabella Machado Doutor*, *Geovana Augusto Silva*, *Miguel Lima*, *Lucas Lima Siade*, *Ana Luisa Borges*, *Luis Guilherme Silveira de Oliveira* e *Leandro Vaz Ramos de Andrade*)

**(a)** Observando-se o hexágono dividido em triângulos equiláteros na figura **(II)** da questão ou dividindo-se em triângulos equiláteros o hexágono da figura **(III)**, fica fácil ver que a linha que forma o lado maior de cada triângulo sombreado divide exatamente ao meio um par de triângulos equiláteros. Portanto, a área de cada triângulo sombreado é a mesma que a de um dos triângulos equiláteros ou 1/6 da área do hexágono, o que corresponde a $4\,\text{cm}^2$.

**(b)** Subtraindo-se da área do hexágono as áreas dos três triângulos menores, sombreados, ou seja, $12\,\text{cm}^2$, conclui-se que a área do triângulo maior é $12\,\text{cm}^2$.

**4.** *Quantos são os números naturais de três algarismos cuja soma dos algarismos é...* (baseado nas soluções apresentadas por *Eduardo Abdalla Teixeira Messias*, *Isabella Machado Doutor*, *Miguel Lima*, *Lucas Lima Siade*, *Ana Luisa Borges*, *Luis Guilherme Silveira de Oliveira* e *Leandro Vaz Ramos de Andrade*)

**(a)** Não é difícil fazer uma contagem agrupando os números pelo primeiro algarismo:

Começando com 1, tem-se 108, 117, 126, ..., 180. Note que o segundo algarismo vai de 0 a 8, ou seja, são 9 números.

De maneira análoga, começando com 2, tem-se 207, 216, ..., 270. São 8 números.

Começando com 3, de 306 a 360 são 7 números.

Começando com 4 são 6 números.

Com 5, 5 números. Com 6, 4. Com 7, 3. Com 8, 2 e com 9 apenas o 900.

No total, então, são $9 + 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 45$ números.

**(b)** É possível resolver como o item **(a)** mas há um caminho mais simples, lembrando que os números divisíveis por 9 são aqueles cuja soma dos algarismos é um múltiplo de 9. Para os números de 3 algarismos essa soma pode ser 9, 18 ou 27. E esta última só ocorre para o 999. A quantidade de múltiplos de 9 com 3 algarismos é $(999 - 99) \div 9 = 100$. Desses, retirando-se o 999 e os 45 números do item **(a)**, sobram **54** cuja soma dos algarismos é 18.

**5.** *Em uma certa ilha só há três tipos de pessoas...* (baseado nas soluções apresentadas por *Eduardo Abdalla Teixeira Messias*, *Isabella Machado Doutor*, *Geovana Augusto Silva*, *Miguel Lima*, *Lucas Lima Siade*, *Ana Luisa Borges*, *Luis Guilherme Silveira de Oliveira* e *Leandro Vaz Ramos de Andrade*)

Se Arnaldo estiver falando a verdade, então Bernaldo também está e nenhum desses pode ser o falso. O falso teria, então, que ser Cernaldo que, dizendo não ser uma pessoa comum, estaria também falando a verdade, o que é um absurdo.

Consequentemente, Arnaldo só pode estar mentindo. Mas então Bernaldo também está mentindo e Cernaldo tem que ser o verdadeiro, o que é compatível com sua afirmação. Neste caso, como Arnaldo está mentindo ele não é uma pessoa comum e nem verdadeiro. Logo só pode ser falso.

Ou seja, Cernaldo é o verdadeiro, Arnaldo é o falso e Bernaldo é uma pessoa comum.

**6.** *Suponha que dispomos de uma caixa bem grande em que é realizado o experimento descrito a seguir...* (baseado nas soluções apresentadas por *Eduardo Abdalla Teixeira Messias*, *Isabella Machado Doutor*, *Lucas Lima Siade* e *Luis Guilherme Silveira de Oliveira*)

**(a)** Observe a tabela a seguir.

| Tempo | Número de Bolas na caixa |
|---|---|
| após 1 min | $1 = 1^2$ |
| após 2 min | $1 + 3 = 4 = 2^2$ |
| após 3 min | $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ |
| após 4 min | $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ |

Observa-se que após $n$ minutos haverá $n^2$ bolas na caixa. Assim, ao fim de uma hora haverá $60^2 = 3600$ bolas na caixa.

**(b)** Do item **(a)**, percebe-se que ao fim de duas horas haverá $120^2 = 14400$ bolas na caixa, das quais 3.600 foram adicionadas durante a primeira hora. Logo, o número de bolas adicionadas durante a segunda hora é $14400 - 3600 = 10800$.

**(c)** Cada número ímpar é o seu antecessor mais dois. Assim, a cada par de minutos adicionam-se duas bolas verdes a mais que vermelhas. Assim, ao fim de uma hora, ou seja, 30 pares de minutos, o número de bolas verdes irá superar o número de bolas vermelhas em $2 \cdot 30 = 60$ unidades e, descontando essas 60 das 3600 bolas, as 3540 restantes ficam igualmente distribuídas entre vermelhas e verdes. Portanto, ao final da primeira hora a caixa terá 1770 bolas vermelhas e 1830 verdes.

**Observação:** As considerações feitas na resolução do item **(a)** se sustentam no interessante fato de que o $n$-ésimo número ímpar é $2n - 1$ e, somando a $n^2$ o $(n + 1)$-ésimo número ímpar, ou seja, $2n + 1$, obtém-se $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, que é o próximo quadrado perfeito. Assim, começando com o primeiro número ímpar, $1 = 1^2$, e adicionando-se os ímpares seguintes, sucessivamente, obtém-se os quadrados perfeitos, também sucessivamente.

## Nível 2

**1.** *No primeiro turno de uma eleição, os candidatos ...* (Baseado nas soluções apresentadas por *Ana Carolina Guimarães Rezende* , *Ana Luíza Feliz de Souza*, *Andrew Lucas Rocha Gauker* e pela comissão organizadora da OMEG)

Denotemos por $a$, $b$ e $c$ as quantidades de eleitores que preferiam os candidatos **A**, **B** e **C**, respectivamente e, portanto, neles votaram no primeiro turno e por $d$ o número de eleitores que, no primeiro turno votaram em algum candidato diferente de **A**, **B** ou **C**. Das condições do problema, procurando minimizar o número de eleitores, pode-se considerar $a > b > c \geq d$. No segundo turno, pode-se supor que todos os eleitores que não votaram em **A** no primeiro turno preferem o candidato

**B** ao **A**, de forma que $b + c + d > a$ leva à vitoria de **B**. Além disso, se todos os eleitores que não votaram em **B** no primeiro turno preferirem o candidato **C** ao **B**, já fica automaticamente satisfeita a condição de que, entre **B** e **C** a maioria dos eleitores preferia o candidato **C**, uma vez que $a + c + d > a > b$. Uma maneira de garantir as desigualdades com um mínimo de eleitores é fazendo $b + c + d = a + 1$ e $a = b + 1$, de forma a garantir a vitória de **A** no primeiro turno e **B** no segundo. Dessas duas igualdades, obtém-se $c + d = 2$ e, então, basta fazer $c = d = 1$, $b = 2$ e $a = 3$ para garantir $a > b > c$.

Portanto, para que ocorra a situação descrita no problema são necessários, no mínimo **7 eleitores**.

**Observações:**

Um aspecto intrigante desse problema é que, assumindo que apenas os candidatos **A**, **B** e **C** tenham participado da eleição (restrição que não existe no enunciado do problema), obtém-se um número mínimo de 9 eleitores. Isso porque, para que **B**, tendo ficado em segundo no primeiro turno, vença no segundo turno, é necessário que ele receba no mínimo dois novos votos, que teriam que vir de **C**, se fosse ele o único candidato eliminado. Mas **C** tendo dois votos implicaria que **B** teria que ter ao menos 3 e **A** ao menos 4, ou seja, 9 eleitores no mínimo. Paradoxalmente, considerando-se a possibilidade de um maior número de candidatos, consegue-se uma solução com menos eleitores, uma vez que os dois votos adicionais, necessários para **B**, podem vir de candidatos eliminados no primeiro turno tendo recebido apenas um voto cada. Nesse caso, bastam dois votos para **B** e três para **A** no primeiro turno para que eles sejam os dois mais votados.

A situação descrita neste problema mostra um fato interessante e contraintuitivo de que mesmo uma eleição em dois turnos pode vir a ter um resultado que desagrada a maioria dos eleitores. Inclusive, podem acabar indo para o segundo turno os candidatos com maior índice de rejeição, com uma minoria do total de votos, enquanto a maioria dos votos fica pulverizada entre vários bons candidatos.

**2.** *No calendário Gregoriano, utilizado oficialmente no Brasil, os anos que não são múltiplos de 4 possuem 365 dias cada...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

**3.** *Em uma certa ilha só há três tipos de pessoas...*

Ver resolução do **problema 5** do **nível 1**.

**4.** *Em um triângulo retângulo $ABC$, com ângulo reto em $C$ e sendo $M$ o ponto médio de $AB$...* (baseado nas soluções apresentadas por *Renato Abrão Helow*, *Alexandre Coelho*, *Luciano Ferreira Kalife*, *Felipe Reis Spirandelli* e *Victor Bastos Canut Costa*)

**(a)** A área de um triângulo é metade do produto da medida da base pela altura. Como $\overline{AM} = \overline{MB}$ e as alturas dos triângulos $CAM$ e $CMB$ são iguais a $\overline{CH}$, então as áreas desses dois triângulos são iguais à metade da área do $\triangle CAB$. Pela divisão de $A\widehat{C}B$ em três partes iguais, tem-se a congruência dos triângulos retângulos $AHC$ e $MHC$ e, então suas áreas são iguais à metade da área de $AMC$. Assim sendo, a área do $\triangle CMH$ é **um quarto** da área do $\triangle CAB$.

**(b)** O ângulo $A\widehat{C}B$ foi dividido em três ângulos de $30°$. Então, no triângulo retângulo $CAH$, o ângulo $\widehat{A}$ é de $60°$ e, consequentemente, no triângulo retângulo $CAB$, o ângulo $A\widehat{B}C$ é de $30°$.

**5.** *Sejam $a$ e $b$ números inteiros tais que $a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 2b = 0$...* (baseado nas soluções apresentadas por *Luiz Otávio da Matta Ambrosio* e *João Pedro Cardoso Fernandes*)

**(a)** Observe que $a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 2b = 0$ pode ser agrupado em

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 2a = 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$(a + b)(a + b + 2) = -2a.$$

Se $a+b$ for ímpar, $a+b+2$ também é e o produto acima não pode ser o número par $-2a$. Então $a + b$ é par.

**(b)** Do item anterior sabe-se que $a + b = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, o que substituído em uma das expressões anteriores fornece

$$a = -2(k^2 + k),$$

portanto, par.

**(c)** Dos itens anteriores obtém-se

$$a = -2(k^2+k) = -2k(k+1) \quad \text{e} \quad b = 2(k^2+2k) = 2k(k+2)\,\forall k \in \mathbb{Z}.$$

**6.** *Em um tabuleiro* $4 \times 4$ *devem ser distribuídos os números de* 1 *a* 16*, sem repetição...* (Baseado nas soluções apresentadas por *Luiz Gustavo Santos de Souza* e pela comissão organizadora da OMEG)

Para quaisquer dez números naturais consecutivos, a diferença entre o maior e o menor deles é sempre 9. Examinando a parte já preenchida do tabuleiro, nota-se que a casa no canto superior direito é a única que falta para completar tanto a primeira linha quanto uma das diagonais. Além disso os números já presentes na primeira linha somam 16, e os da referida diagonal, 25 o que dá uma diferença de exatamente 9. Sendo assim, a soma da primeira linha corresponde ao menor dos dez números e a diagonal ao maior deles. Denotemos por $x$ o número que deve ir na última casa da primeira linha. Como a primeira coluna soma 31, $x + 16 < 31 \Rightarrow x < 15$. A terceira linha já tem 32 e sua casa vazia tem que receber no mínimo 1, logo $25+x > 33 \Rightarrow x > 8$. Como os números de 9 a 12 já foram usados, x tem que ser 13 ou 14.

Considere-se ainda que, denotando por $d$ a soma da outra diagonal que não tem o $x$, a soma e todas as linhas, colunas e diagonais é

$$(16+x)+(16+x+1)+\cdots+(16+x+9) = 2\times(1+2+\cdots+16)+d+(25+x),$$

Subtraindo o $25 + x$ de ambos os lados e reagrupando, tem-se

$$(16 + x) + (16 + x + 1) + \cdots + 16 + x + 8 \;=\; 2 \times (1 + 2 + \cdots + 16) + d$$

$$\Rightarrow \quad 9 \cdot 16 + 9x + (1 + 2 + \cdots + 8) \;=\; 2(136) + d \quad \Rightarrow \quad 9x - d \;=\; 92$$

Se $x$ for 13, esta equação fornece $d = 25$, mas 29 deveria ser o menor dos números. Então $x$ tem que ser 14, o que implica em $d = 34$. Além disso o menor dos 10 números é 30 e o maior 39.

Mas, subtraindo da diagonal de soma $d = 34$ as casas já preenchidas com 4 e 9, as duas casas restantes devem somar 21. Dentre os números ainda não usados, a única maneira de somar 21 é com 13 e 8.

Tentando o 8 na segunda coluna, observa-se que nenhum dos números restantes, 1, 2, 15 ou 16 serve para completar essa segunda coluna.

Portanto é o 13 que deve ir entre o 6 e o 3, enquanto o 8 fica no canto inferior direito.

Com isso, a segunda coluna já teria 30, não podendo receber 15 nem 16. A primeira coluna já tem soma 31, logo o único que serve para completar a segunda coluna é o 2.

Consequentemente o 1 deve ir no final da terceira linha e o 15 no final da segunda linha, com o que se completa a distribuição.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 7 | 14 |
| 6 | 13 | 3 | 15 |
| 11 | 12 | 9 | 1 |
| 10 | 2 | 16 | 8 |

## Nível 3

**1.** *No primeiro turno de uma eleição, os candidatos ...*

Ver resolução do **problema 1** do **nível 2**.

**2.** *Levando-se em conta as inclusões dos conjuntos numéricos usuais,* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*...* (baseado nas soluções apresentadas por *Ana Camilla Raulino de Lelis Moura*, *Luiz Vasconcelos Júnior* e *Daniel Vandré Barbosa*)

Seja

$$a \;=\; \sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}} \;+\; \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}} \;=\; c+d,$$

o número em questão, com

$$c = \sqrt[3]{2+\frac{10\sqrt{3}}{9}} \qquad \text{e} \qquad d = \sqrt[3]{2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}\,.$$

Então,

$$\begin{aligned} a^3 &= (c+d)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ &= c^3 + d^3 + 3cd(c+d) = c^3 + d^3 + 3cda \\ &= 2 + \frac{10\sqrt{3}}{9} + 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9} + 3a\sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}}\sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} \\ &= 4 + 3a\sqrt[3]{4 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)^2} = 4 + 3a\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = 4 + 2a. \end{aligned}$$

Ou seja, $a$ satisfaz a equação cúbica $a^3 - 2a - 4 = 0$.

Se esta equação tiver alguma raiz racional, da forma $p/q$, fração irredutível, então $p$ é, necessariamente, um divisor de 4 e $q = \pm 1$. Testando os divisores de 4 na equação, descobre-se que 2 é uma solução, o que permite fatorar o polinômio como

$$(a-2)(a^2 + 2a + 2) = 0$$

e 2 é a única raiz real para esta equação, uma vez que $a^2 + 2a + 2 = 0$ não possui raiz real. Daí conclui-se que

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}} = 2 \in \mathbb{N}\,.$$

**3.** *O triângulo de números a seguir é formado pela sequência dos números naturais ímpares...* (baseado nas soluções apresentadas por *Paulo César Oliveira Greines* e pela comissão organizadora da OMEG.

**(a)** Considerando-se que o $n$-ésimo número ímpar é $2n-1$ e que da linha 1 à 19 do triângulo há $1 + 2 + \cdots + 19 = 190$ números, a vigésima linha contém os números ímpares de $2 \cdot 191 - 1$ a $2 \cdot 210 - 1$ e, como formam uma PA, sua soma é

$$\frac{(2 \cdot 191 - 1 + 2 \cdot 210 - 1) \cdot 20}{2} = 8000$$

**(b)** Novamente, tem-se uma PA, de modo que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2 \cdot 210 - 1 = \frac{(1 + 2 \cdot 210 - 1) \cdot 210}{2} = 210^2 = 44100$$

**(c)** Observando os resultados dos itens anteriores, assim como as somas das primeiras linhas do triângulo, é possível inferir que a soma da $n$-ésima linha do triângulo é $n^3$. Por outro lado, as $n$ primeiras linhas do triângulo possuem os $n(n+1)/2$ primeiros números ímpares, cuja soma é

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1 &= \frac{(1+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-1)\cdot n(n+1)}{4} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

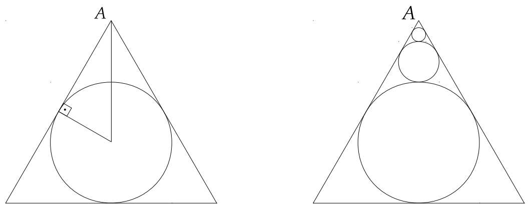
Como a soma da $n$-ésima linha é a soma de todos os elementos das $n$ primeiras linhas menos a soma dos elementos das $n-1$ primeiras linhas, resulta que

$$n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2,$$

o que pode ser confirmado pelo desenvolvimento da expressão do lado direito da igualdade. Esse desenvolvimento também serve para demonstrar que a soma da $n$-ésima linha é, de fato, $n^3$, para todo $n$.

**4.** *Um cone circular é dito equilátero se sua interseção com qualquer plano que contenha seu eixo for um triângulo equilátero...* (baseado nas soluções apresentadas por *Luccca Borges Prado*, *Andrew Lucas Rocha Gauke*, *Paulo César Oliveira Greines* e *Camila Raulino de Lelis Moura*)

A figura a seguir representa uma seção do cone com uma esfera por um plano contendo o eixo do cone. O resultado é um triângulo equilátero circunscrito a um círculo, com o vértice indicado por $A$ correspondendo ao vértice do cone. Um outro triângulo importante nesse contexto é o triângulo com vértices em $A$, no centro do círculo e no ponto de tangência entre o círculo e um dos lados que partem do vértice $A$. Esse triângulo é retângulo com o ângulo em $A$ medindo $30°$, logo corresponde à metade de um triângulo equilátero, ou seja, seu cateto menor é o raio do círculo e a hipotenusa tem o dobro dessa medida, ou duas vezes o raio. Isso leva à conhecida relação de que a distância entre o centro do círculo inscrito e a base de um triângulo equilátero é um terço da altura do triângulo. Assim, o diâmetro do círculo corresponde a $2/3$ da altura do triângulo e a parte da altura que fica fora do círculo é o $1/3$ restante, ou seja, igual ao raio do círculo.




No caso do círculo de raio 1 m, a altura do triângulo correspondente é 3 m. Pelo argumento acima, essa altura passa a ser o igual ao raio do círculo seguinte, de forma que o raio do segundo maior círculo é 3 m, estando ele inscrito em um triângulo equilátero de altura 9 m. Analogamente, o raio do terceiro círculo é 9 m e a altura do triângulo que o circunscreve é 27 m, que é também a altura do cone. O raio, $R$, da base do cone corresponde à metade do lado do triângulo equilátero com 27 m de altura. Utilizando o Teorema de Pitágoras ou o fato de que $\operatorname{tg} 60° = 27/R$, obtém-se $R = 9\sqrt{3}\,\mathrm{m}$

Portanto, o volume pedido é o volume do cone (altura$\times$ área da base/3) menos os volumes das esferas (raio$^3 \cdot 4\pi/3$), o que dá

$$V = \frac{6561}{3}\pi - \frac{4\pi}{3} - \frac{108\pi}{3} - \frac{2916\pi}{3} = \frac{3533\pi}{3} \approx 3699,75\,\mathrm{m}^3.$$

**5.** *Considere duas urnas, a primeira contendo seis bolas verdes e uma vermelha e a segunda contendo quatro bolas verdes...* (baseado nas soluções apresentadas por *Luiz Vasconcelos Júnior*, *Samuel Prieto Lima*, *André Luis Araújo de Souza*, *Daniel Vandré Barbosa*, *Ana Camilla Raulino de Lelis Moura*, *Rafael de Rezende Costa* e *Paulo César Oliveira Greines*)

Sejam os eventos:

$A$: A bola vermelha está na primeira urna após as duas operações,

$B$: A bola vermelha é transferida para a segunda urna na primeira operação.

Pela decomposição da Probabilidade Total,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}\left(B^C\right)\mathbb{P}\left(A|B^C\right)$$

e, usando a definição clássica, calculam-se

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{\binom{1}{1}\binom{6}{4}}{\binom{7}{5}} \;=\; \frac{5}{7} \;\text{ e }\; \mathbb{P}(A|B) \;=\; \frac{\binom{1}{1}\binom{8}{1}}{\binom{9}{2}} \;=\; \frac{2}{9}.$$

Além disso,

$$\mathbb{P}\left(B^C\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}(B) \;=\; 1 - \frac{5}{7} \;=\; \frac{2}{7} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}\left(A|B^C\right) \;=\; 1.$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{7}\cdot 1 \;=\; \frac{4}{9}.$$

**6.** *Mostre que para quaisquer números reais $x$ e $y$, com módulos diferentes, o triângulo cujos lados medem...* (baseado nas soluções apresentadas por *Luiz Vasconcelos Júnior*, *Lucca Borges Prado* e *Thiago Lucas Faustino da Silva*)

**(a)** Seja $ABC$ um triângulo com lados medindo $\frac{|x+y|}{2}$, $\frac{|x-y|}{2}$, $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, opostos aos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Aplicando a lei dos cossenos, obtemos

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2 \;=\; \frac{|x+y|^2}{4} + \frac{|x-y|^2}{4} - 2\frac{|x+y|}{2}\frac{|x-y|}{2}\cos\hat{C}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \;=\; -2\frac{|x+y|}{2}\frac{|x-y|}{2}\cos\hat{C}$$

Como $x$ e $y$ são números reais com módulos diferentes, conclui-se que $\cos\hat{C} = 0$. Portanto, $\hat{C}$ é um ângulo reto.

Note que isto equivale à recíproca do Teorema de Pitágoras.

**(b)** Pelo que foi exposto no item **(a)**, o Teorema de Pitágoras se aplica aos três números em questão, de forma que

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2 \;=\; \frac{|x+y|^2}{4} + \frac{|x-y|^2}{4} \;\geq\; \frac{|x+y|^2}{4} \;=\; \left(\frac{|x+y|}{2}\right)^2$$

E, como a raiz quadrada é função crescente,

$$\frac{|x+y|}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

que, no caso de números não negativos, é a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática de $x$ e $y$. É fácil verificar que a igualdade vale quando $x = y$, embora as condições do item **(a)** deixem de ser satisfeitas.

Atribuindo-se $x = \sqrt{2a}$ e $y = \sqrt{2b}$, essa desigualdade pode ser reescrita como

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{2} \le \sqrt{a+b},$$

o que permite determinar um limitante inferior para a soma pedida, uma vez que

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} &\ge \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\\ &= 2016.\end{aligned}$$

Embora esta seja apenas uma cota inferior, a desigualdade das médias, aqui utilizada, garante que esse mínimo é de fato atingido quando $a = b = c$, o que também é fácil de verificar, com $a = b = c = 2016^2/18$. Logo, o menor valor possível para soma é 2016.

## Nível Universitário

**Observação:** Todas as soluções a seguir foram propostas pela comissão organizadora da OMEG.

**1.** *Considere a sequência definida por...*

**(a)** A sequência é decrescente, uma vez que $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2} < a_n$. Além disso, $0 < a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{2}(2-a_n) > 0$ e a sequência é limitada. Sendo monótona e limitada, a sequência converge.

Além disso, $\lim a_{n+1} = \lim a_n = L \;\Rightarrow\; L = L - L^2/2$, de onde se obtém $L = 0$.

**(b)** Primeiro, observa-se que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{a_n}{2} \to 1.$$

Então,

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \;=\; \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} \;=\; \frac{a_n^2/2}{a_{n+1}a_n} \;=\; \frac{a_n}{2a_{n+1}} \to \frac{1}{2}$$

Sendo a sequência $\left\{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right\}$ convergente para $1/2$, suas médias de Cesàro também convergem para $1/2$, ou seja,

$$c_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \;=\; \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \;=\; \frac{1}{na_n} - \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$$

como $\frac{1}{n} \to 0$, conclui-se que $na_n \to 2$.

**2.** *Se $A$ e $B$ são matrizes $n \times n$ tais que $A + B = AB$...*

Basta notar que, nas condições dadas,

$$(A - I)(B - I) \;=\; AB - A - B + I \;=\; I.$$

Então $B - I$ é a matriz inversa de $A - I$, de forma que

$$I = (B - I)(A - I) \;=\; BA - A - B + I \;=\; BA - AB + I$$

e, subtraindo $I$ de ambos os membros, obtém-se $BA - AB = 0$.

**Problema proposto:** Obtenha 3 pares de matrizes $2 \times 2$, $A$ e $B$, diferentes de $2I$, tais que $A + B = AB$

**3.** *Sejam $a_0, a_1, ..., a_n$, números reais tais que...*

Integrando $p(x)$ em $[0,\ 1]$, tem-se

$$\int_0^1 p(x)dx \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^1 x^i dx \;=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}\Big|_0^1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} \;=\; 0.$$

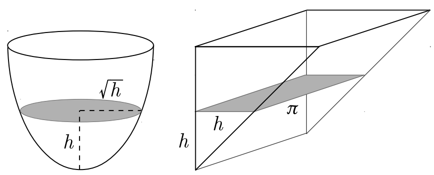
Como o polinômio $p(x)$ é uma função contínua em $[0,1]$, o Teorema do valor médio para integrais nos garante que existe $c \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 p(x)dx \;=\; p(c)(1-0),$$

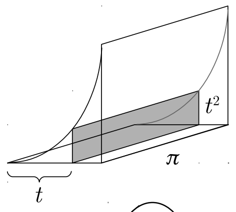
ou seja, $p(c) = 0$.

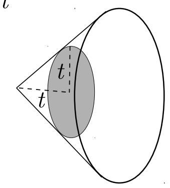
**4.** *Segundo o Princípio de Cavalieri, dadas duas regiões limitadas no espaço tridimensional...*

**(a)** Conforme indicado na figura a seguir, intersectando os dois sólidos por qualquer plano horizontal $z = h > 0$, as seções em ambos terão áreas iguais a $\pi h$ e, pelo princípio de Cavalieri os dois sólidos têm o mesmo volume. A uma altura $h$, o volume do prisma é dado pela área da base triangular $(h^2/2)$ multiplicada pela altura $\pi$, ou seja, $\pi h^2/2$, que é também o volume do segmento de paraboloide cortado a essa mesma altura. Em particular, o que foi pedido é o volume para $h = 1$, que é $V = \pi/2$.

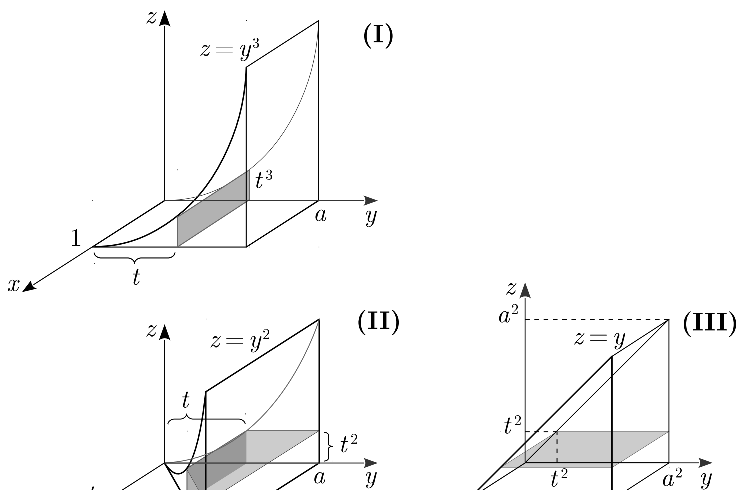



**(b)** Conforme indicado na figura a seguir, as seções do prisma sugerido, por planos verticais do tipo $y = t$ possuem área de $\pi t^2$. Mas essa também é a área da seção transversal de um cone de equação $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ quando cortado pelo mesmo plano vertical $y = t$. Dessa forma, o volume do prisma parabólico é o mesmo que o do cone, ou seja $(\pi a^2) \cdot a/3$. No caso do prisma, esse volume também é igual à área da base vezes a distância entre as bases, que nesse caso é $\pi$. Logo, a área da região pedida é $a^3/3$.




**(c)** Seguindo as instruções desse item, basta considerar os sólidos representados na figura a seguir.




Seccionando-se os sólidos **(I)** e **(II)** por planos verticais do tipo $y = t$, obtém-se seções de mesma área, $t^3$, para qualquer valor de $t$ entre zero e $a$. Isso implica, pelo Princípio de Cavalieri, que esses dois sólidos possuem o mesmo volume. De maneira análoga, podemos comparar seções dos sólidos **(II)** e **(III)** por planos horizontais do tipo $z = h$. Em particular, considerando $h = t^2$, quando $t$ varia de zero a $a$, $h$ varia de zero a $a^2$ e a seção correspondente, no sólido **(II)** é um trapézio com base maior $a$, base menor $t$ e altura $a - t$. Consequentemente, a área da seção é $(a + t)(a - t)/2$. O fato de esta área ser uma função afim de $t^2 = h$ sugere a escolha da região **(III)**, em que, para uma mesma altura $h = t^2$, a área da seção horizontal, que é retangular, também é $(a^2 - t^2)/2$. Novamente, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos **(II)** e **(III)** também possuem o mesmo volume. Mas este último é um prisma triangular e seu volume é, simplesmente, $a^4/4$, o que também é o volume do sólido **(I)**. Por fim, o sólido **(I)** é um prisma e a distância entre suas "bases" é 1. Logo a área da região do plano que fica abaixo da cúbica $y = t^3$ e acima do eixo $y$, para $0 \leq t \leq a$, é, também, $a^4/4$.

**Observação:** Qualquer pessoa familiarizada com o cálculo de integrais identificará, nas soluções deste problema, os mesmos resultados que podem ser obitidos por integrais. A solução do item **(c)**, por exemplo, equivale a $\int_0^a t^3 \mathrm{d}t = a^4/4$. O interessante desta abordagem é que ela permite obter esses resultados sem recorrer ao cálculo de integrais e usando o Princípio de Cavaleri, apenas.

**Problema proposto:** É possível obter, via Princípio de Cavalieri, expressões semelhantes para a área sob o gráfico de $f(t) = t^n$ para potências mais altas de $t$? E para expoentes fracionários?

**5.** *Dois jogadores,* **A** *e* **B***, apostam nos resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda...*

**(a)** Seja $P_i$ a probabilidade de que **A** termine ficando com todo o dinheiro se ele está com $i$ reais $(0 \leq i \leq a + b)$. Condicionando no resultado do próximo lançamento e usando a expressão da Probabilidade Total,

$$P_i = pP_{i+1} + (1 - p)P_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, a + b - 1$$

$$P_{i+1} - P_i = \frac{1 - p}{p}(P_i - P_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, a + b - 1.$$

Como $P_0 = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
P_2 - P_1 = \left(\frac{1-p}{p}\right)(P_1 - P_0) &= \left(\frac{1-p}{p}\right) P_1 \\
P_3 - P_2 = \left(\frac{1-p}{p}\right)(P_2 - P_1) &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 P_1 \\
&\vdots \\
P_i - P_{i-1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)(P_{i-1} - P_{i-2}) &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-1} P_1 \\
&\vdots \\
P_{a+b} - P_{a+b-1} = \left(\frac{1-p}{p}\right)(P_{a+b-1} - P_{a+b-2}) &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b-1} P_1.
\end{aligned}$$

Somando as $i-1$ primeiras dessas equações:

$$P_i - P_1 = P_1 \left[ \left(\frac{1-p}{p}\right) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i-1} \right]$$

e assim

$$P_i = \begin{cases} \left[ \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)} \right] P_1, & p \neq \frac{1}{2}; \\ iP_1, & p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Como $P_{a+b} = 1$, temos para $p \neq \frac{1}{2}$,

$$1 = P_{a+b} = \left[ \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)} \right] P_1 \text{ e então } P_1 = \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.$$

Para $p = \frac{1}{2}$

$$1 = P_{a+b} = (a+b)P_1 \text{ e então } P_1 = \frac{1}{a+b}.$$

Logo,

$$P_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}, & p \neq \frac{1}{2}; \\ \frac{i}{a+b}, & p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

E então conclui-se que

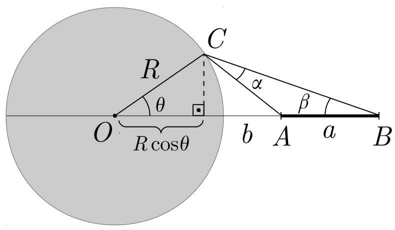
$$P_a = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}, & p \neq \frac{1}{2}; \\ \frac{a}{a+b}, & p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**(b)** Temos $a = \infty$, $b = 20$ e $p = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\lim_{a\to\infty} P_a = \lim_{a\to\infty} \frac{a}{a+20} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{20}} = 1.$$

**6.** *Suponha que você esteja planejando uma viagem ao planeta Saturno...*

A figura a seguir representa um corte transversal do planeta saturno e seus anéis e mostra a geometria do problema, sendo $\theta$ a latitude, $\alpha$ o ângulo visual, $a$ a largura da faixa dos anéis, $b$ a distância dos anéis à superfície do planeta e $R$ o raio do planeta.




Primeiro é preciso estabelecer uma relação entre o ângulo visual $\alpha$ e a latitude $\theta$. Para isso, utilizam-se as relações trigonométricas nos triângulos retângulos, levando-se em conta o ângulo $O\widehat{A}C = \alpha + \beta$ e o fato de que $\alpha = (\alpha+\beta) - \beta$. Dessa forma, tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1+\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}(\alpha+\beta)} &= \frac{1+\frac{b+R(1-\cos\theta)}{R\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{a+b+R(1-\cos\theta)}{R\operatorname{sen}\theta}}{\frac{a+b+R(1-\cos\theta)}{R\operatorname{sen}\theta} - \frac{b+R(1-\cos\theta)}{R\operatorname{sen}\theta}} \\
&= \frac{R^2\operatorname{sen}^2\theta + a[b+R(1-\cos\theta)] + [b+R(1-\cos\theta)]^2}{aR\operatorname{sen}\theta} \\
&= \frac{b(a+b)+(a+2b+2R)R(1-\cos\theta)}{aR\operatorname{sen}\theta} \\
&= \frac{(b+R)(a+b+R)+R^2-(a+2b+2R)R\cos\theta}{aR\operatorname{sen}\theta}.
\end{aligned}$$

O objetivo é descobrir o valor de $\theta$ que maximiza o ângulo $\alpha$, o que é equivalente a minimizar $\operatorname{cotg}\alpha$ que, pela expressão anterior, é função de $\theta$ da forma

$$f(\theta) = \frac{A - B\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Procurando pontos críticos, onde esta função tenha derivada nula, obtém-se

$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= \frac{-A\cos\theta + B}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0 \\
\Rightarrow \quad \cos\theta &= \frac{B}{A} = \frac{(a+2b+2R)R}{(b+R)(a+b+R)+R^2}
\end{aligned}$$

e é possível verificar que, de fato, este é um ponto de mínimo para $\operatorname{cotg}\alpha = f(\theta)$.

**Observações:**

Este problema é uma variação do clássico problema de Regiomontanus, que data da idade média e, em sua formulação mais conhecida, pergunta sobre a distância que um observador deve ficar do pedestal de uma estátua para que possa observá-la sob o maior ângulo visual possível.

O problema de Regiomontanus admite uma solução geométrica surpreendentemente simples e elegante. Basta considerar a estátua como correspondendo a uma corda em um círculo que também é tangente à reta horizontal que vai dos olhos do observador ao pedestal da estátua. O ângulo visual, subtendendo a corda que representa a estátua corresponde, então, a um ângulo exterior a esse círculo e é maximizado no ponto de tangência dessa reta horizontal com o círculo, onde se torna um ângulo inscrito.

**Problema proposto:** Experimente construir a solução do problema de Saturno usando esse método geométrico.

Autores: Rogerio de Queiroz Chaves – rqchaves@gmail.com
Ana Paula Chaves – apchaves@ufg.br
Abiel Costa Macedo – abielcosta@gmail.com
Rosane Gomes Pereira – rosan3gope@gmail.com
Valdivino Vargas Junior – vvjunior@gmail.com
Endereço: *Universidade Federal de Goiás,*
*Instituto de Matemática e Estatística*

Francisco Bruno de Lima Holanda – bholanda85@gmail.com
Endereço: *Universidade Federal de Goiás,*
*Faculdade de Administração, Ciências Contábeis e Economia*