REVISTA DA OLIMPÍADA
Número 15

Resolução Comentada das Provas da XXVIII OMEG

Ana Paula de A. Chaves[1] | Francisco B. de L. Holanda[2] | Kamila da S. Andrade[3] | Otávio Marçal L. Gomide[4] | Rosane G. Pereira[5] | Tiago M. Vargas[6] | Valdivino V. Júnior[7]

Neste artigo apresentamos uma resolução comentada das questões da segunda fase da OMEG de 2020 e listamos as questões relativas a primeira fase. Sugerimos que, antes de simplesmente ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso, todos os problemas são apresentados primeiro e, depois, as soluções e comentários. Por fim, apresentamos alguns problemas adicionais para o leitor.

[1,3,4,5,6,7]Instituto de Matemática e Estatística - Universidade Federal de Goiás
[2]Faculdade de Administração, Ciências Contábeis e Ciências Econômicas - Universidade Federal de Goiás

Contato
[1]apchaves@ufg.br
[2]bholanda@ufg.br
[3]kamila.andrade@ufg.br
[4]otaviomarcal@ufg.br
[5]rosanegope@ufg.br
[6]vargas@ufg.br
[7]vvjunior@ufg.br

1 | INTRODUÇÃO

Usualmente as provas da OMEG eram realizadas no último terço do ano. A prova constava de uma única fase com questões discursivas. No ano de 2020 essa realidade foi alterada. No início deste ano o planeta viu se espalhar por toda parte um vírus que alterou a dinâmica de vida de quase toda a humanidade. Desde então, nosso planeta vive a pandemia causada por uma variedade de coronavírus. A doença causada por esse vírus, a COVID-19, afetou milhões de pessoas mundo afora causando a morte de milhões de pessoas. Apenas no Brasil, até novembro de 2021, o número de mortes já supera a casa das 600 mil vidas. Um impacto gigantesco na vida de milhões de pessoas que perderam amigos e entes queridos. Impacto muito grande também dentro das instituições. O IME-UFG, por exemplo, perdeu para a COVID-19 em 2020, o professor Doutor Eduardo Abierto Alarcon. Lembrando que o instituto perdeu em 2021, o professor doutor Helvécio Pereira de Castro. Embora o segundo não tenha perdido a vida em decorrência da COVID-19 fica a menção aos dois. Não poderíamos deixar de destacar que os professores Eduardo e Helvécio deram valiosas contribuições para consolidação e crescimento do IME. Por fim, destacamos que a UFG perdeu em decorrência da COVID-19 mais de trinta profissionais entre professores e técnicos administrativos.

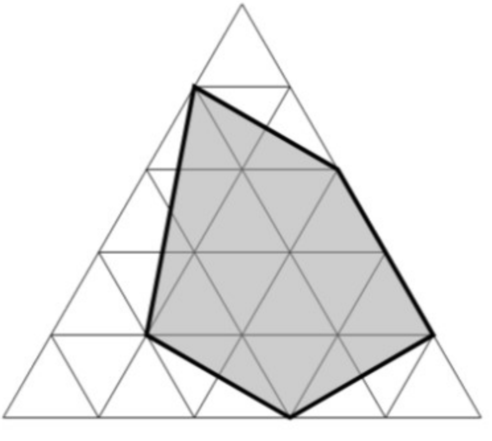
Assim, os anos de 2020 e 2021 foram de muitas adversidades. Eventos educacionais, artísticos, culturais e esportivos foram cancelados, adiados ou realizados sem ausência de público. Escolas e universidades adotaram modelos remotos ou híbridos para manterem o ensino. Diversas olimpíadas de matemática também sofreram adiamentos ou mudanças em seus formatos. A XVI OBMEP prevista inicialmente para 2020 foi adiada para ser realizada em 2021, sendo sua segunda fase realizada em novembro de 2021. A 42^a Olimpíada Brasileira de Matemática, prevista para 2020, foi realizada no ano de 2021 em formato virtual. A XXIX OMEG também teve seu formato e época de aplicação alterados. A competição passou a ser realizada no formato virtual e a contar com duas etapas. Na primeira fase a prova contou com quinze questões de múltipla escolha em cada nível. Na segunda fase o número de questões foi de quatro para cada nível. A prova inicialmente prevista para 2020, foi aplicada em 2021.

Neste artigo apresentamos uma resolução comentada das questões da segunda fase da OMEG de 2020 e listamos as questões relativas à primeira fase. O artigo é dividido da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos as questões relativas à segunda fase da prova da OMEG. Na Seção 3 as soluções das questões apresentadas na Seção 2 são detalhadas. Por fim, na Seção 4 apresentamos as questões de múltipla escolha relativas a primeira fase.

2 | PROVAS DA XXIX OMEG- ENUNCIADO DAS QUESTÕES RELATIVAS A SEGUNDA FASE

2.1 | Questões relativas ao Nível 1

Problema 1:
Na figura a seguir, temos uma malha formada por triângulos equiláteros congruentes, todos de área igual a $1cm^2$. Qual é a área do pentágono cinza?



Problema 2:
Um número de seis algarismos começa, à esquerda, por 1. Se tirarmos esse algarismo 1 do início e o colocarmos no final do número, o resultado será um número três vezes maior. Qual é o número de seis dígitos inicial? Explique detalhadamente como você encontrou esse número.

Problema 3:

Na ilha Anchúria, há três tipos de pessoas: os heróis que sempre falam a verdade, os ladrões que sempre mentem e as pessoas comuns que às vezes mentem e às vezes falam a verdade. Certa vez, um viajante chega à ilha e encontra-se com três moradores: Arnaldo, Bernaldo e Ceraldo e escuta deles as seguintes frases:
Arnaldo: Eu sou uma pessoa comum.
Bernaldo: Arnaldo diz a verdade.
Ceraldo: Eu não sou uma pessoa comum.
Sabendo que o visitante encontrou uma pessoa de cada grupo, quem é o herói e quem é ladrão?

Problema 4:
Temos um tabuleiro 8×7 (8 linhas e 7 colunas) e em cada casa devemos colocar um número de 1 a 56 de modo que cada número apareça uma única vez no tabuleiro. É possível que:

1. A soma dos números escritos em cada coluna seja a mesma?
2. A soma dos números escritos em cada linha seja a mesma?

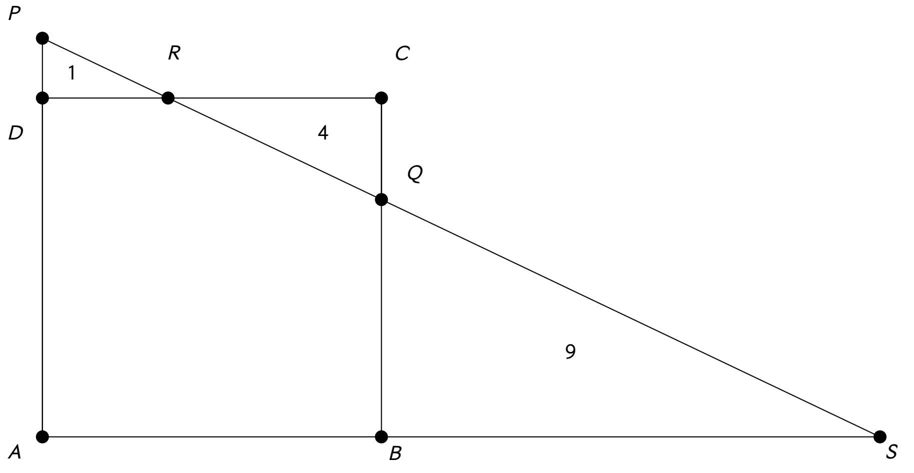
2.2 | Questões relativas ao Nível 2

Problema 1:
De um campeonato de xadrez, participaram alunos de 10, 11 12 e 13 anos. A soma de todas as idades era 253. O número de alunos de 12 era equivalente a 1,5 (uma vez e meia) o número de alunos de 13 anos. Quantos alunos de 12 anos havia no torneio?

Problema 2:
Em uma lousa estão escritos os número inteiros $1, 2, \ldots, 20$.

1. De quantas formas podemos escolher três números de modo que a ordem importe?
2. De quantas formas podemos escolher três números de modo que a ordem não importe?
3. De quantas formas podemos escolher três números de modo que o produto do três números seja um múltiplo de 4 sem que a ordem importe?

Problema 3:
Na figura a seguir, temos um quadrado $ABCD$ e uma reta r que corta seus lados (ou prolongamento dos lados) nos pontos P, Q, R, S. As áreas dos triângulos cinzas estão marcados na figura. Qual é a área do quadrado?



Problema 4:
Encontre todos os inteiros n tais que a fração

$$\frac{n^2+20}{n+21}$$

é um número inteiro.

2.3 | Questões relativas ao Nível 3

Problema 1:
Encontre todos os números inteiros positivos que podem ser escritos como soma de dois números compostos.

Problema 2:
Seja $ABCD$ um quadrado e P um ponto sobre o lado BC o incírculo do triângulo ABP tem centro O_1 e raio r_1. O círculo interno ao quadrado e tangente aos segmentos CD, DA e AP tem centro O_2 e raio r_2. Seja R o raio do círculo circunscrito ao triânguo CO_1O_2. Mostre que

1. $r_1 + r_2 + R = AB$.
2. $R^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Problema 3:
Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$ há uma torre ou está vazia. Para qualquer par de torres que não se ameaçam, há uma casa vazia que é ameaçada por ambas as torres. Qual é a quantidade máxima de torres que há nesse tabuleiro?

Problema 4:
Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3 | PROVAS DA XXIX OMEG- SOLUÇÕES DAS QUESTÕES RELATIVAS A SEGUNDA FASE

3.1 | Soluções das questões relativas ao Nível 1

Problema 1: Sejam A, B, C, D, E os vértices do pentágono e sejam M, N, P, Q, R, S pontos auxiliares sobre os vértices da malha.

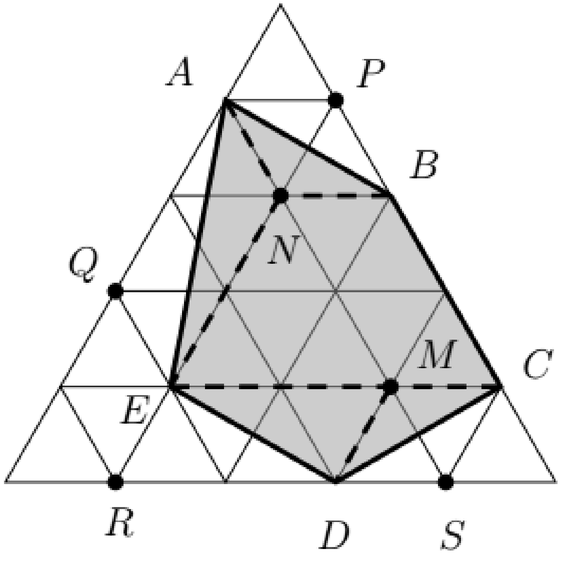


FIGURA 1 Grafo de busca

Note que o pentágono $ABCDE$ pode ser decomposto em quatro triângulos ANB, ANE, EMD, MDC mais um quadrilátero $NBCE$. Veja que o triângulo ANE é metade do paralelogramo $ANEQ$ que é formado por quatro triângulos de área 1 cm^2 cada. Assim, Área (ANE) = $\frac{4}{2}$= 2 cm^2.

De modo análogo, temos que:

- O triângulo ANB é metade do paralelogramo $APBN$ que é formado por dois triângulos de área 1 cm^2. Logo, Área (ANB) = $\frac{2}{2}$ = 1cm^2.
- O triângulo MDC é metade do paralelogramo $MCSD$ que é formado por dois triângulos de área 1 cm^2. Logo, Área(MCD) = $\frac{2}{2}$ = 1 cm^2.
- O triângulo EMD é metade do paralelogramo $EMDR$ que é formado por quatro triângulos de área 1cm^2. Logo,

Área $(ANB) = \frac{4}{2} = 2\ cm^2$.

Além disso, o quadrilátero $NBCE$ é formado por oito triângulos de área 1 cm^2. Logo, Área $(NBCE) = 8\ cm^2$.

Portanto, Área $(ABCDE) = 2 + 1 + 1 + 2 + 8 = 14\ cm^2$.

Problema 2: Seja x o número de seis algarismos começando por 1. Temos que ele pode ser escrito como:

$$x = \overline{1abcde},$$

onde $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, e considere y o número que é o resultante de tirarmos o algarismo 1 de x e colocá-lo no final, ou seja,

$$y = \overline{abcde1}.$$

Outra maneira de escrevermos os números x e y é:

$$x = 1 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e,$$

$$y = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 1.$$

Por hipótese, temos:

$$\begin{aligned} y &= 3x; \\ a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 1 &= 3(1 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e) \\ 7(a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e) &= 299999 \qquad (1) \\ a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e &= 42857. \end{aligned}$$

Daí, $a = 4, b = 2, c = 8, d = 5$ e $e = 7$. Logo, o número de seis dígitos inicial é $x = 142857$. **Problema 3:** Temos duas possibilidades: ou Arnaldo está mentindo, ou está dizendo a verdade. Então, iremos analisar as duas situações:

- Se Arnaldo diz a verdade, ele é uma pessoa comum. Bernaldo está dizendo a verdade e, portanto, é um herói. Uma vez que apenas pessoas comuns e heróis falar a verdade e Arnaldo já é uma pessoa comum. Neste caso, Ceraldo é um ladrão e deve mentir. Porém, quando Ceraldo afirma que não é uma pessoa comum, está falando a verdade. Contradição.
- Se Arnaldo mente, ele não é herói. Note que Bernaldo também está mentido ao afirmar que Arnaldo diz a verdade. Logo, Bernaldo também não é o herói. Por exclusão, Ceraldo é o herói.

Agora, suponha que Arnaldo é uma pessoa comum. Neste caso, Bernaldo seria o ladrão. Neste caso, ao afirmar que Arnaldo diz a verdade, Bernaldo estaria falando a verdade. Contradição. Consequentemente, Arnaldo é o ladrão e Bernaldo é a pessoa comum.

Problema 4: Observe que a soma dos números de 1 a 56 pode ser agrupada em pares cuja soma é 57:

$$1 + 56 = 2 + 55 = 3 + 54 = \cdots = 28 + 29 = 57.$$

Assim,

$$1 + 2 + \cdots + 56 = 57 \times 28 = 1596.$$

1. Se todas as linhas tiverem a mesma soma, esse valor deve ser igual a $\frac{1596}{8} = 199{,}5$ que não é um valor inteiro. Por outro lado, a soma dos inteiros escritos em qualquer linha também deve ser um número inteiro. Isso significa que é impossível fazer o que é solicitado neste item.

2. Se todas as colunas tiverem a mesma soma, esse valor deve ser igual a $\frac{1596}{7} = 228$. Agora podemos reaproveitar a simetria utilizada para calcular a soma $1 + 2 + \cdots + 56$ para construir um exemplo de tabuleiro satisfazendo às condições deste item. Veja a seguir:

1	2	3	4	5	6	7
56	55	54	53	52	51	50
8	9	10	11	12	13	14
49	48	47	46	45	44	43
15	16	17	18	19	20	21
42	41	40	39	38	37	36
22	23	24	25	26	27	28
35	34	33	32	31	30	29

3.2 | Soluções das questões relativas ao Nível 2

Problema 1: Suponha que são x, y, z, w alunos de 10, 11, 12 e 13 anos, respectivamente. Temos que $z = 1,5w$, logo w é par. Além disso, $10x + 11y + 18w + 13w = 253$. Ou seja,

$$10x + 11y + 31w = 253.$$

Que pode ser reescrita como

$$10(x + y + 3w) + (y + w) = 253.$$

Assim, $y + w$ é um número terminado em 3.

- Se $y + w = 3$, então $w = 2$ e $y = 1$. Portanto, $z = 3$. Além disso, $10(x + 7) = 250$. Logo, $x = 18$.
- Se $y + w = 13$, então $10(x + 13 + 2w) = 240$. Temos agora duas possibilidades para w: $w = 2$ que nos dá $z = 3$, $y = 11$ e $x = 7$; ou $w = 4$. Nesse caso, teremos $x = 3$, $y = 9$ e $z = 6$.

Problema 2:

1. Para calcular as maneiras de escolher os números, utilizaremos o Princípio Multiplicativo.
   Para escolher o primeiro número, temos 20 formas possíveis. Para escolher o segundo número, temos 19 formas pois não podemos repetir o número que já foi escolhido. Dado que o primeiro e o segundo número já foram escolhidos, para escolher o terceiro número, temos apenas 18 formas, pois não podemos repetir os dois números distintos que já foram escolhidos anteriormente.
   Desta maneira, temos $20 \times 19 \times 18 = 6840$ formas de escolher os três números de modo que a ordem importe.
2. Note que um conjunto de três números a, b e c pode ser ordenado de seis formas distintas: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.
   Assim, para descontar a ordem, é necessário dividir o número obtido no item anterior por 6. Neste caso, temos $6840/6 = 1140$ formas de escolher três números de modo que a ordem não importe.
3. Vamos separar os números de 1 a 20 em três conjuntos:
   a. O conjunto com elementos ímpares: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.
   b. O conjunto dos pares que não são múltiplos de 4: $B = \{2, 6, 10, 14, 18\}$.
   c. O conjunto dos múltiplos de 4: $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.
   Quando escolhemos três números do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$, só há dois casos em que o produto não é um múltiplo de 4:
   - Quando os três números são todos ímpares.
   - Quando um dos números é par, mas não múltiplo de 4 e os outro dois são ímpares.

   No primeiro caso, como temos 10 números ímpares, há $(10 \times 9 \times 8)/6 = 120$ formas de escolhermos três números do conjunto A sem importar a ordem.
   No segundo caso, há $(10 \times 9)/2 = 45$ formas de escolhermos dois números do conjunto A sem importar a ordem. Além disso, temos 5 formas de escolher um elemento do conjunto B. Assim, obtemos o total de $45 \times 5 = 225$ possibilidades neste segundo caso.
   Com isso, o total de maneiras de escolhermos três elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ de modo que o produto seja um múltiplo de 4 sem que a ordem importe é:

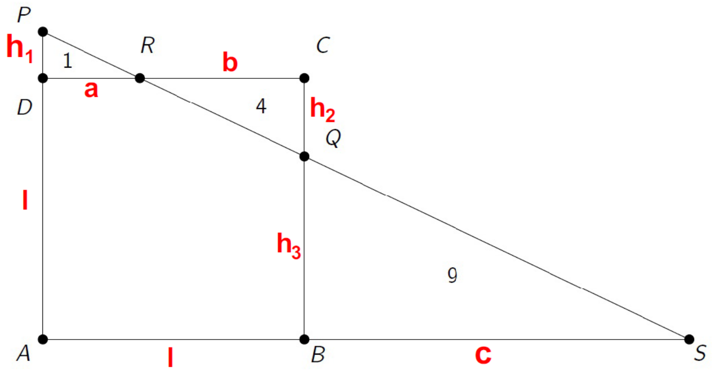
$$1140 - 120 - 225 = 795.$$

Problema 3: Sejam A_1, A_2 e A_3 as as áreas dos triângulos PDR, RCQ e SBQ, respectivamente.

$$A_1 = \frac{ah_1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{2}{a}}$$

$$A_2 = \frac{bh_2}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{h_2 = \frac{8}{b}}$$

$$A_3 = \frac{ch_3}{2} = 9 \Rightarrow \boxed{h_3 = \frac{18}{c}}$$



Como os triângulos PDR e QCR são semelhantes, segue que

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\frac{2}{a}}{\frac{8}{b}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{2b}{a} = \frac{8a}{b} \Rightarrow b^2 = 4a^2 \Rightarrow \boxed{b = 2a}$$

Como os triângulos RCQ e SBQ também são semelhantes, segue que

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{\frac{8}{b}}{\frac{18}{c}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{8c}{b} = \frac{18b}{c} \Rightarrow 4c^2 = 9b^2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{3b}{2}}$$

Então obtemos,

$$h_2 = \frac{8}{b} = \frac{4}{a} \text{ e } h_3 = \frac{18}{\frac{3b}{2}} = \frac{36}{3b} = \frac{12}{b} = \frac{6}{a}$$

Como l é o lado do quadrado ABCD, temos que

$$l = a + b = h_2 + h_3 \Rightarrow a + 2a = \frac{4}{a} + \frac{6}{a} \Rightarrow 3a = \frac{10}{a} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{10}{3}}$$

E assim obtemos a área A do quadrado ABCD,

$$A = l^2 = (3a)^2 = 9a^2 = 9 \cdot \frac{10}{3} = 30.$$

Problema 4: Primeiro, observe que o problema equivale a encontrar os $n \in \mathbb{Z}$ tais que $n + 21 \mid n^2 + 20$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} n+21 \mid n^2+20 \quad &\Rightarrow \quad n+21 \mid n^2+20-n(n+21) \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 20-21n \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 20-21n+21(n+21) \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 20+21^2 \\ &\Rightarrow \quad n+21 \mid 461 \\ &\Rightarrow \quad n+21 \in \{\pm 1, \pm 461\}, \end{aligned}$$

onde na última implicação usamos o fato de 461 ser primo. Portanto, obtemos as quatro soluções $n = -482, -22, -20$ ou 440.

3.3 | Soluções das questões relativas ao Nível 3

Problema 1: Note que todo número par n maior do que 6 pode escrito como

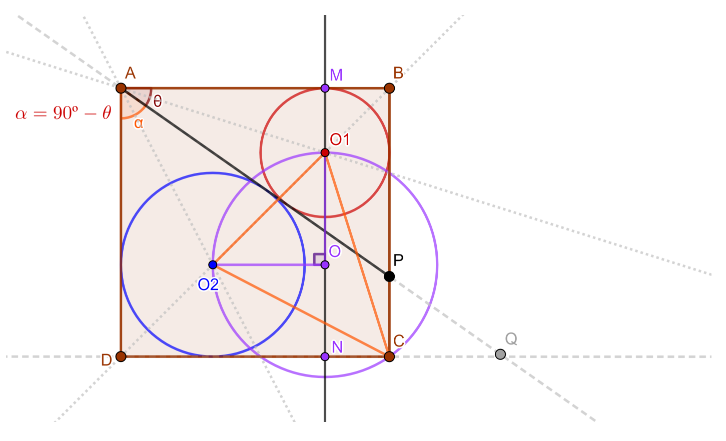
$$n = (n-4) + 4$$

que é a soma de dois compostos. Note que todo número ímpar n maior do que 11 pode escrito como

$$n = (n-9) + 9$$

que é a soma de dois compostos. Note ainda que $2, 4, 6$ não são soma de dois compostos e que $3, 5, 7, 9, 11$ não são.

Problema 2:



Sejam C_1, C_2 e C os círculos de centros O_1, O_2 e O e raios r_1, r_2 e R, respectivamente. Seja Q a interseção dos prolongamentos dos segmentos AP e DC. Desta forma, o círculo C_2 é inscrito no triângulo AQD. Sendo círculos inscritos em triângulos, sabe-se que seus centros estão localizados nas interseções das bissetrizes dos ângulos dos triângulos que os circunscrevem. Como o segmento BD está contido na bissetriz comum dos triângulos ABP e AQD

concluímos que os centros O_1 e O_2 pertencem ao segmento BD.

Fato 1: O ângulo $O_1\hat{O}O_2$ é reto.

Primeiramente, sabe-se que o $O_1\hat{O}O_2 = 2O_1\hat{C}O_2$, pois o círculo C circunscreve o triângulo O_1O_2C. Agora, seja $\theta = P\hat{A}B$ e note que $O_1\hat{C}B = O_1\hat{A}B = \frac{\theta}{2}$, já que os triângulos O_1BA e O_1BC são congruentes (critério lado, ângulo, lado) e AO_1 está contido na bissetriz de θ. Note, também, que $O_2\hat{C}D = O_2\hat{A}D = 45 - \frac{\theta}{2}$, pois os triângulos O_2DA e O_2DC são congruentes (lado, ângulo, lado) e AO_2 está contido na bissetriz de 90ž – θ ($ABCD$ é um quadrado, logo $D\hat{A}B$ = 90ž).

Observe que

$$B\hat{C}D = O_1\hat{C}B + O_1\hat{C}O_2 + O_2\hat{C}D = \frac{\theta}{2} + O_1\hat{C}O_2 + 45ž - \frac{\theta}{2}.$$

Como $ABCD$ é um quadrado, sabe-se que $B\hat{C}D$ = 90ž e obtém-se que $O_1\hat{C}O_2$ = 45ž. Portanto, $O_1\hat{O}O_2 = 2O_1\hat{C}O_2$ = 90ž e isto significa que $O_1\hat{O}O_2$ é um ângulo reto.

Fato 2: A reta que passa por O e O_1 é paralela ao lado BC (ou, equivalentemente, a reta que passa por O e O_2 é paralela ao lado AB).

Sejam M e N as interseções da reta que passa por O e O_1 com os lados AB e CD, respectivamente. Como $O_2O = O_1O = R$ e $O_1\hat{O}O_2$ é reto, segue que $O\hat{O_1}O_2 = O\hat{O_2}O_1$ = 45ž. Por outro lado, como BD está contido na bissetriz de $A\hat{D}C$ segue que $O_1\hat{D}N$ = 45ž. Daí, os triângulos O_1O2O e O_1DN são semelhantes, segue que o segmento MN é perpendicular ao lado CD e, por consequência, paralelo ao lado BC. Concluindo a prova do Fato 2.

Fato 3: $O_1M = r_1$ e $ON = r_2$ (ou análogo se fizer o raciocínio para a reta que passa por O e O_2). Como AB é tangente à C_1 e O_1M é perpendicular ao lado AB (pois AB é paralelo a CD), segue que O_1M é o raio de C_1, donde $O_1M = r_1$. Analogamente, tem-se que $O_2N = r_2$. Isto conclui a prova do Fato 3.

Para concluir o item (a), lembre que $OO_1 = R$. Agora,

$$AB = BC = MN = MO_1 + O_1O + ON = r_1 + R + r_2.$$

Para concluir o item (b), note que o triângulo ONC é retângulo em N, com $OC = R$, $ON = r_2$ e $NC = r_1$ (segue do paralelismo entre MN e BC). Assim, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que $R^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Problema 3:

Problema 4: Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $a_0 = n$ e $a_{k+1} = f(a_k)$. Assim, temos pela equação funcional dada, que

$$\begin{aligned} n = a_0 \quad &\Rightarrow \quad 3a_1 - 2a_2 = a_0, \\ n = a_1 \quad &\Rightarrow \quad 3a_2 - 2a_3 = a_1, \\ &\vdots \\ n = a_k \quad &\Rightarrow \quad 3a_{k+1} - 2a_{k+2} = a_k. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $(a_n)_n$ é uma recorrência linear de ordem 2, cujo polinômio característico é dado por $3x - 2x^2 = 1$, com raízes 1 e 1/2. Portanto, sabemos que

$$a_k = A(1)^k + B(1/2)^k, \quad \forall k \geq 0. \tag{2}$$

Como $A + B = a_0$ e $A + B/2 = a_1$, com $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, resolvendo o sistema temos $A = 2a_1 - a_0$ e $B = 2(a_0 - a_1)$, o que nos dá $A, B \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, note que (2) nos dá $B = 2^k(a_k - A)$, ou seja, como $a_k, A \in \mathbb{Z}$, que 2^k divide B para todo k, isso só é possível se $B = 0$. Portanto, $a_1 = a_0$ e conseguimos $f(n) = n$, que é a única solução.

4 | PROVAS DA XXIX OMEG- ENUNCIADO DAS QUESTÕES RELATIVAS A PRIMEIRA FASE

4.1 | Primeira Fase - Nível 1

Problema 1: O número que devemos somar ao numerador e subtrair do denominador da fração $\frac{3180}{4735}$ para transformá-la na sua inversa é:

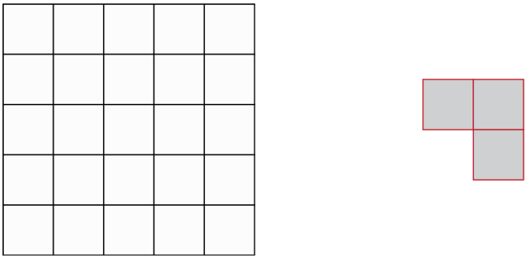
(a) 1554 (b) 1555 (c) 1556 (d) 1557 (e) 1558

resposta: (b)

Problema 2: Dizemos que dois números primos são quase gêmeos, se a diferença entre eles é igual a 4. Por exemplo, 13 e 17 são primos quase gêmeos. O número 2021 possui uma propriedade interessante: ele é o produto de dois primos quase gêmeos, $2021 = 43 \times 47$. Quantos números de até 3 dígitos também são o produto de dois primos quase gêmeos?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

resposta: (c) Problema 3: São dados um tabuleiro e uma peça, como mostrado abaixo:



De quantas maneiras podemos colocar a peça no tabuleiro, de modo que cubra completamente três casas?

(a) 64 (b) 36 (c) 25 (d) 12 (e) 49

resposta: (a)

Problema 4: Existem 9 números de um algarismo, 90 números de dois algarismos, 900 números de três algarismos, etc. Tome cada número cujo último algarismo à direita representa o número de algarismos desse número. Por exemplo, o número 1824 é um deles, pois 4 é o número de seus algarismos. Quantos números desse tipo existem ?

(a) 100 000 000 (b) 99 999 999 (c) 10 000 000 (d) 1 000 000 000 (e) 9 999 999

resposta: (a)

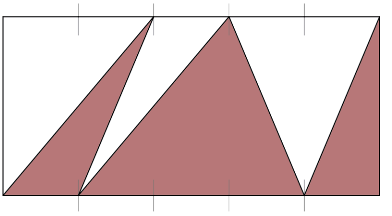
Problema 5: Se a área do retângulo dado é 24, qual é a área da figura sombreada?

(a) 12 (b) 8 (c) 10 (d) 14 (e) 20

resposta: (a)

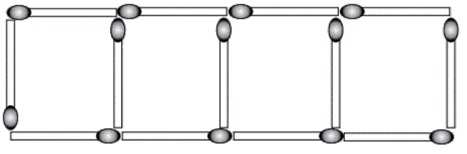
Problema 6: Han e Leia formam um estranho casal. Han mente às terças, quartas e quintas, dizendo a verdade no resto da semana. Leia mente aos sábados, domingos e segundas, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: "Amanhã é dia de mentir". O dia em que foi feita essa afirmação era:

(a) Segunda-Feira (b) Terça-feira (c) Quarta-feira (d) Quinta-feira (e) Sexta-feira



resposta: (a)

Problema 7: Maria Paula brinca de formar quadrados com palitos de fósforo como na figura a seguir:



Quantos palitos são necessários para fazer 150 quadrados?

(a) 451 (b) 310 (c) 600 (d) 512 (e) 110

resposta: (a)

Problema 8: Yan estava brincando com sua calculadora da seguinte forma: ele escolheu um número somou 3, multiplicou o resultado por 5 e subtraiu 12, para finalizar dividiu o resultado por 4 e obteve como resultado o número 22. Qual foi o número escolhido por Yan?

(a) 13 (b) 17 (c) 21 (d) 13 (e) 5

resposta: (b)

Problema 9: Sabendo que a graduação de relógios de ponteiro é feita de forma que a circunferência seja dividia em ângulos congruentes, qual é o menor ângulo entre os ponteiros quando o relógio marca 1:20?

(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120° (e) 270°

resposta: (c)

Problema 10: Sabe-se que p e q são números inteiros positivos e $\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15}$. Qual o menor valor que $q+2$ pode assumir?

(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

resposta: (d)

Problema 11: Sete crianças estão numa brinquedoteca, ao entrarem algumas cumprimentaram outras. Joãozinho perguntou para cada uma das crianças quantos colegas haviam cumprimentado e obteve seis respostas diferentes. Quantos colegas Joãozinho cumprimentou?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

resposta: (d)

Problema 12: Maurício é dono de uma loja e estava fazendo o balanço das vendas do final de semana quando se deparou com a seguinte anotação de um de seus vendedores

$$20T + **C + 10B = R\$1425$$

Maurício sabia que:

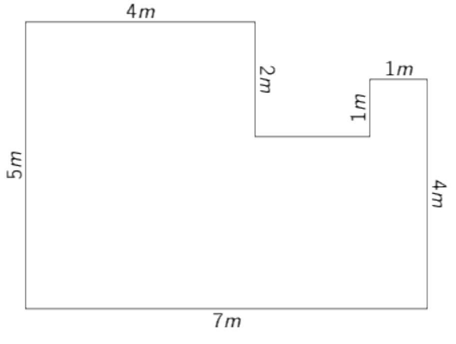
- T indicava "Toalha"e cada uma custava $R\$30,00$;
- C indicava "Calça"e cada uma custava $R\$25,00$;
- B indicava "Bolsa"e cada uma custava $R\$50,00$.

Qual a quantidade de calças deveria ter sido indicada pelo vendedor?

(a) 18 (b) 10 (c) 15 (d) 13 (e) 12

resposta: (d)

Problema 13: Napoleão precisa cercar e colocar grama em toda a extensão de uma área conforme a dada na figura abaixo:



Quanto de cerca e grama, respectivamente, Napoleão precisará?

(a) $24m$ e $35m^2$ (b) $26m$ e $30m^2$ (c) $22m$ e $30m^2$ (d) $26m$ e $35m^2$ (e) $24m$ e $30m^2$

resposta: (b)

Problema 14: Gil e Sah brincam de dar voltas na praça circular, Gil está de patinete e Sah de bicicleta, ambos em velocidade constante. Ambos saem ao mesmo instante, no mesmo sentido. Enquanto Gil dá uma volta completa é ultrapassada por Sah uma única vez e, então, chegam juntos ao ponto inicial. Quantas voltas Sah deu na praça quando Gil completou a terceira volta?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

resposta: (e)

Problema 15: Um veículo funciona com um combustível que é formado por 1 parte de querosene para 3 partes álcool e 6 partes de gasolina. O tanque do veículo está cheio com 96 litros desse combustível, no entanto houve um vazamento, detectado a tempo do mesmo não esvaziar. Após o conserto do vazamento, não havia o combustível disponível, completando assim o tanque com querosene. Feito isso, o sensor de combustível constatou $36,6$ litros de querosene no tanque. Quanto de querosene extra foi colocado no tanque, em litros?

(a) 35 (b) 15 (c) 45 (d) 25 (e) 30

resposta: (e)

4.2 | Primeira Fase - Nível 2

Problema 1: O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. O produto dos algarismos de N é:

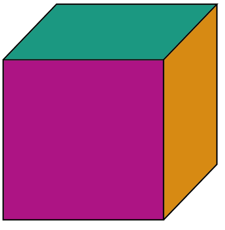
(a) 60 (b) 9 (c) 45 (d) 89 (e) 12

resposta: (a)

Problema 2: Ver Problema 2 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 3: Ver Problema 3 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 4: Lavínia tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?



(a) 6 (b) 24 (c) 48 (d) 216 (e) 120

resposta: (c)

Problema 5: O conjunto $\{121, 1221, 12221, \ldots, 1222222222221\}$ é dado por números onde as extremidades são formadas pelo algarismo 1, e entre eles todos os algarismos são iguais a 2. Sobre os elementos desse conjunto, é correto afirmar que:

(a) Todos são múltiplos de 11.

(b) Não existem múltiplos de 3 neste conjunto.

(c) Pelo menos 4 desses números são primos.

(d) Temos 4 números primos e os demais são compostos.

(e) Nenhuma das demais alternativas.

resposta: (a)

Problema 6: $ABCDE$ é um pentágono regular e ABF é um triângulo equilátero interior. O ângulo $F\hat{C}D$ mede:

(a) 38° (b) 40° (c) 42° (d) 44° (e) 46°

resposta: (c)

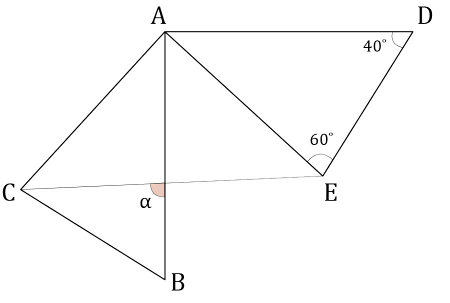
Problema 7: O triângulo ADE pode ser obtido pela rotação do triângulo ABC de 90^o no sentido anti-horário ao redor de A, conforme mostrado no desenho abaixo. Podemos afirmar que α é igual a:

(a) 125^o (b) 55^o (c) 45^o (d) 95^o (e) 145^o

resposta: (a)

Problema 8: Para as duas frações $\frac{17}{11}$ e $\frac{53}{19}$ subtraímos o mesmo número b do numerador e do denominador, tal processo fez com que as duas frações se tornassem equivalentes. Sabendo que b é a sétima parte de um número inteiro n, qual o valor de n?

(a) 65 (b) 31 (c) 43 (d) 79 (e) 57



resposta: (a)

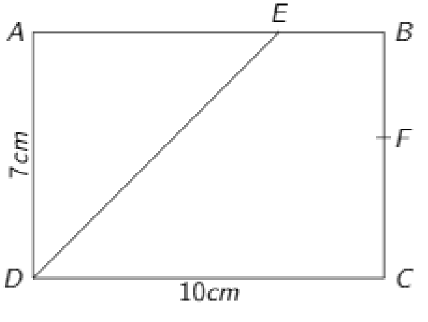
Problema 9: Vinte e cinco adolescentes resolveram pedir pizza para comemorar o aniversário de um deles. O valor total das pizzas foi de $R\$270,00$ porém alguns dos adolescentes não tinha dinheiro para contribuir. Sabendo que cada um dos que tinham dinheiro contribuiu com $R\$15,00$, quantos dos adolescentes não tinham dinheiro para contribuir?

(a) 5 (b) 6 (c) 11 (d) 7 (e) 18

resposta: (d)

Problema 10: Ver Problema 10 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 11: Considere o retângulo $ABCD$ abaixo e tome um ponto E no segmento $\overline{AB}$ de forma que o ângulo $A\hat{E}D$ seja igual a 45°. Seja F o ponto no segmento $\overline{BC}$ que faz com que $\overline{DE} + \overline{EF} = 10\sqrt{2}cm$. Qual o comprimento de $\overline{CF}$?



(a) $2\sqrt{2}cm$ (b) $2cm$ (c) $3cm$ (d) $3\sqrt{2}cm$ (e) $4cm$

resposta: (e)

Problema 12: O sobrinho de Rita estava vendendo uma rifa para ajudar com os custos de sua formatura, os bilhetes tinham números de 1000 à 9999. Rita decidiu ajudar o sobrinho e disse a ele que compraria todos os bilhetes que seguissem as seguintes regras:

- possuir exatamente dois algarismos 8;
- não iniciar com o algarismo 8;
- não possuir as sequências 78 e 89.

Quantos bilhetes da rifa Rita comprou?

(a) 56 (b) 64 (c) 169 (d) 523 (e) 1000

resposta: (c)

Problema 13: Ver Problema 14 da Primeira Fase do Nível 1.

Problema 14: Considere um triângulo ABC com ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e lados correspondentes a, b e c satisfazendo a equação $a\cos\hat{B} - b\cos\hat{A} = \frac{3}{5}c$. Calcule o valor de $\frac{\tan\hat{A}}{\tan\hat{B}}$.

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) 4 (d) 3 (e) 5

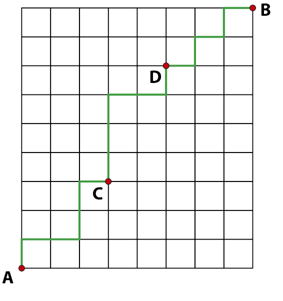
resposta: (c)

Problema 15: Ver Problema 15 da Primeira Fase do Nível 1.

4.3 | Primeira Fase - Nível 3

Problema 1: Ver Problema 3 da Primeira Fase dos Níveis 1 e 2.

Problema 2: O mapa de uma cidade está representado na figura abaixo. Todas as suas ruas são de mão única, de modo que você só pode dirigir para "leste"ou "norte". Quantas maneiras diferentes existem para chegar ao ponto B, partindo de A, e passando pelos pontos C ou D?



(a) 14160 (b) 9240 (c) 7920 (d) 3000 (e) Nenhuma das alternativas.

resposta: (a)

Problema 3: Para quantos valores de n inteiros, a fração $\frac{n^2+2021}{n+20}$ é um número inteiro?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14.

resposta: (d)

Problema 4: A quantidade de pares de números inteiros (x, y), que são solução da equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{pq}$, onde p e q são números primos, é:

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11.

resposta: (d)

Problema 5: Para todo n natural, definimos a função:

- $f(n) = \frac{n}{2}$, se n é par;
- $f(n) = 5n + 1$, se n é ímpar.

A quantidade de soluções da equação $f(f(f(n))) = 14$ é:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

resposta: (b)

Problema 6: Sabendo que $1 \leq x < 6$ e que $y = |2x-1| + |x-6| + 5$, podemos afirmar que y é igual a:

(a)$3x-2$ (b) $3x-7$ (c) $x+10$ (d) $x-2$ (e) $x+5$

resposta: (c)

Problema 7: Ver Problema 12 da Primeira Fase do Nível 2.

Problema 8: Suponha a e b números reais positivos satisfazendo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$ e $(a-b)^2 = 4(ab)^3$. Calcule $\log_b a$.

(a) 2 (b) -1 (c) 1 (d) -2 (e) 3

resposta: (b)

Problema 9: Dados quatro pontos fixados $A(-3,0)$, $B(1,-1)$, $C(0,3)$, $D(-1,3)$ e um ponto variável P em um sistema de coordenadas, determine o valor mínimo de $|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$.

(a)$7\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ (c) $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ (d) $3\sqrt{5}+5\sqrt{2}$ (e) $5\sqrt{7}$

resposta: (c)

Problema 10: Qual será o número de soluções racionais do sistema de equações abaixo?

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xyz + z = 0 \\ xy + yz + xz + y = 0 \end{cases}$$

(a) 2 (b) 0 (c) 1 (d) 3 (e) 4

resposta: (a)

Problema 11: Ver Problema 15 da Primeira Fase dos Níveis 1 e 2.

Problema 12: As coordenadas do baricentro do triângulo obtido pela representação gráfica de $i+(-8i)^{1/3}$, $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ são:

(a) $(0,0)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (c) $(-1,0)$ (d) $(0,1)$ (e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

resposta: (d)

Problema 13: Do ponto $P(0,0)$ partem duas retas tangentes à parábola $3x = y^2 + 3$. A área do triângulo formado pelos pontos de tangência dessas retas e o foco desta parábola é:

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (d)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) 1

resposta: (d)

Problema 14: Considere três amigas: Ana, Bia e Carla. Uma das meninas torce para o time do Goiás, a outra torce para o Vila Nova e a outra torce para o Atlético Goianiense. Sabe-se que:

- Ana torce para o Goiás ou a Carla torce para o Goiás;
- Ana torce para o Vila Nova ou Bia torce para o Atlético Goianiense;
- Carla torce para o Atlético Goianiense ou Bia torce para o Atlético Goianiense ;
- Bia torce para o Vila Nova ou Carla torce para o Vila Nova.

Assim, os times que Ana, Bia e Carla torcem são, respectivamente:

(a) Goiás, Vila Nova, Atlético Goianiense

(b) Vila Nova, Atlético Goianiense, Goiás

(c) Atlético Goianiense, Goiás, Vila Nova

(d) Vila Nova, Goiás, Atlético Goianiense

(e) Goiás, Atlético Goianiense, Vila Nova

resposta: (e)

Problema 15: Para a realização de um campeonato de futebol interclubes, deve-se escolher 10 times, dentre 4 times da região norte, 5 da região centro-oeste e 6 da região nordeste. A probabilidade de que, escolhidos ao acaso esses 10 times hajam exatamente 4 da região centro-oeste e pelo menos um time de cada uma das outras regiões, é, aproximadamente:

(a) $36,4\%$ (b)$14,9\%$ (c) $34,6\%$ (d) $25,6\%$ (e) $44,2\%$

resposta: (a)